

ROYAUME ALGERIEN  
LE MINISTRE DE L'ENSEIGNEMENT SUPERIEUR  
DE LA RECHERCHE SCIENTIFIQUE ET  
UNIVERSITE BOUMBAJELAB DE D. EL-  
Faculté des Sciences de l'Ingénierie  
Département d'aéronautique

Mémoire de fin d'étude en vue de l'obtention du diplôme  
d'ingénieur d'état

En Aéronautique

Option : Propulsion

**Thème**

Génération de maillage, application à un  
écoulement externe subsonique

Réalisé par :

• BENZIANE Abdelkader

Encadré par :

• Mr. ELAICHI Toufik

Promotion -2006-

# ÉTUDE DE LA MÉTHODE DE GÉNÉRATION DE MAILLAGE NUMÉRIQUE EN DEUX DIMENSIONS ET APPLICATION À UN ÉCOULEMENT EXTERNE SUBSONIQUE

## Résumé

Ce travail a consisté à faire une étude de la méthode numérique de génération de maillage en deux dimensions.

Le principe de la méthode est exposé, ainsi que les différentes techniques utilisées. Parmi ces techniques on a choisi le modèle elliptique (équation de Poisson) qui est basé sur la résolution des équations aux dérivées partielles.

La méthode de génération de maillage est ensuite appliquée à un écoulement externe subsonique.

Pour effectuer la génération de maillage ainsi que la résolution des équations du problème physique étudié, on a élaboré un logiciel appelé "Maillage", où les programmes sources sont écrits en langage C++.

En fin, des confrontations avec des résultats publiés dans la littérature ont permis de valider les résultats obtenus.

**Mots clés :** Méthodes numériques - Génération de maillage - Méthode des différences finies - Aérodynamique - Écoulement potentiel incompressible.

**Title, Grid Generation, Application to a Subsonic External Flow.**

## Abstract

This work has consisted in making a study of the grid generation numerical method in two dimensions.

The principle of the method is exposed, as well as the different techniques used.

Among these techniques we have chosen the elliptical model (Poisson equation) which is based on the resolution of the partial differential equations.

The grid generation method is then applied to a subsonic external flow.

To realize the grid generation as well as the resolution of the equations of the studied physical problem, we have elaborated a programme called "Maillage", where the source programmes are edited in C++ language.

At last, confrontations with published results in literature have permitted to validate the obtained results.

**Keywords,** Numerical methods – Grid generation – Finite differences method – Aerodynamics – Incompressible potential flow.



32

# ***Dédicace***

**Je dédie ce modeste travail :**

**A mes très chers parents en signe de reconnaissance pour tous les sacrifices consentis à mon égard, et encouragements tout au long de mes études.**

**A mes frères et ma sœur et son fils, et à toute ma famille.**

**A mes amis chacun par son nom.**



## Remerciements

*Au terme de ce travail, je tiens à remercier tout d'abord Monsieur Toufik ELAICHI, chargé de cours à l'institut d'aéronautique, Université de Blida, d'avoir accepté de diriger ce travail, ainsi que la confiance qu'il m'a témoigné.*

*J'adresse également mes remerciements à Monsieur Karim RAYANE, chargé de cours à l'institut de génie mécanique, Université de Laghouat, pour les conseils qu'ils m'ont prodigués.*

*Mes remerciements les plus profonds s'adressent particulièrement à mon ami Mohamed Toufik BOUTASSOUNA, pour avoir bien voulu m'aider durant tout ce travail.*

*A tous ceux qui ont contribué de près ou de loin à ce travail, trouvent l'expression de mes vifs remerciements.*

## Résumé

Ce travail a consisté à faire une étude de la méthode numérique de génération de maillage en deux dimensions.

Le principe de la méthode est exposé, ainsi que les différentes techniques utilisées. Parmi ces techniques on a choisi le modèle elliptique (équation de Poisson) qui est basé sur la résolution des équations aux dérivées partielles.

La méthode de génération de maillage est ensuite appliquée à un écoulement externe subsonique.

Pour effectuer la génération de maillage ainsi que la résolution des équations du problème physique étudié, on a élaboré un logiciel appelé "Maillage", où les programmes sources sont édités en langage C++.

En fin, des confrontations avec des résultats publiés dans la littérature ont permis de valider les résultats obtenus.

**Mots clés :** Méthodes numériques - Génération de maillage - Méthode des différences finies - Aérodynamique - Ecoulement potentiel incompressible.

## Abstract

This work has consisted in making a study of the grid generation numerical method in two dimensions.

The principle of the method is exposed, as well as the different techniques used. Among these techniques we have chosen the elliptical model (Poisson equation) which is based on the resolution of the partial differential equations.

The grid generation method is then applied to a subsonic external flow.

To realize the grid generation as well as the resolution of the equations of the studied physical problem, we have elaborated a programme called "Maillage", where the source programmes are edited in C++ language.

At last, confrontations with published results in literature have permitted to validate the obtained results.

**Keywords,** Numerical methods - Grid generation -Finite differences method - Aerodynamics - Incompressible potential flow.

# SOMMAIRE

Dédicace.....	I
Remerciements.....	II
Résumé.....	III
Sommaire.....	IV
Nomenclature.....	VIII
Liste des figures .....	X
Liste des tableaux .....	XII

<b>Introduction.....</b>	<b>1</b>
--------------------------	----------

## **Chapitre I : Génération de maillage**

I.1. Classification des techniques de génération de maillage .....	4
I.1.1. Transformations conformes .....	4
I.1.2. Méthodes algébriques.....	5
I.1.3. Méthodes numériques.....	6
I.2. Aspects physiques.....	7
I.2.1. Région simplement connexe.....	7
I.2.2. Région doublement (multi-) connexe.....	7
I.3. Transformation du domaine physique en domaine de calcul.....	8
I.3.1. Transformation des domaines simplement connexes.....	8
I.3.2. Transformation des domaines doublements (multi-) connexes.....	12
I.3.2.1. Transformation des obstacles en sous régions.....	13
I.3.2.2. Transformation des obstacles en segments droits.....	13

I.3.2.3. Transformation des obstacles par coupure.....	14
I.4. Formulation et discrétisation des techniques de génération de maillage.....	15
I.4.1. Techniques algébriques.....	15
I.4.1.1. Fonctions de condensation « Stretching » unidimensionnelles.....	16
I.4.1.2. Technique de deux parois.....	17
I.4.1.3. Technique de Gilding.....	19
I.4.2. Génération de maillage par la résolution des équations différentielles aux dérivées partielles.....	22
I.4.2.1. Procédures de génération de maillage elliptiques.....	23
I.4.2.1.1. Les équations de Poisson.....	23
I.4.2.1.2. Les équations de Laplace.....	27
I.4.2.2. Procédure de génération de maillage hyperbolique.....	28
I.4.2.3. Procédure de génération de maillage parabolique.....	28
I.4.3. Conditions aux limites.....	30

## Chapitre II : Modélisation numérique

II.1. Formulation mathématique.....	32
II.1.1. Equations de poisson.....	32
II.1.2. Fonctions de contrôle.....	33
II.2. Traitement des conditions aux frontières.....	35
II.2.1. Répartition des points au contour du champ physique.....	35
II.2.2. Répartition des points au contour du champ transformé.....	36
II.3. Résolution numérique.....	39
II.3.1. Discrétisation des équations.....	39
II.3.2. Algorithme de résolution.....	40
II.3.3. Choix de maillage initial.....	41
II.3.4. Test de convergence.....	41

## **Chapitre III : Application à un écoulement externe subsonique**

III.1. Etude théorique d'un écoulement de fluide .....	42
III.1.1. Equations générales du mouvement d'un fluide .....	42
III.1.2. Forces et moments aérodynamiques .....	42
III.2. Hypothèses .....	45
III.3. Equations de l'écoulement .....	45
III.4. Condition de Kutta-Joukowski .....	47
III.5. Détermination de champ de vitesse .....	48
III.6. Caractéristiques aérodynamiques des profils d'ailes .....	49
III.6.1. Coefficient de pression .....	49
III.6.2. Coefficients de portance et de traînée .....	50
III.6.3. Coefficient de moment .....	51
III.6.4. Type de profils étudiés .....	51
III.7. Résolution numérique .....	52
III.7.1. Discrétisation de l'équation .....	52
III.7.2. Algorithme de résolution .....	53
III.7.3. Coefficients aérodynamiques .....	53

## **Chapitre IV : Présentation du logiciel « Maillage »**

IV.1. Présentation du code de génération de maillage « Grid » .....	54
IV.1.1. Structure général .....	54
IV.1.2. Principaux modules .....	55
IV.1.3. Entrée du code .....	55
IV.2. Présentation du code « SubFlow » .....	61
IV.2.1. Structure général .....	61

## **Chapitre V : Analyse des résultats**

V.1. Génération de maillage .....	64
-----------------------------------	----

V.1.1.Domains d'étude .....	64
V.1.1.1. Domaines simplement connexes .....	64
V.1.1.2. Domaines doublement connexes .....	64
V.1.1.3. Domaines multi-connexes .....	65
V.1.2. Choix de maillage initial .....	73
V.1.3. Raffinement de maillage .....	74
V.1.4. Répartition des lignes coordonnées .....	76
V.2.Résultats de l'application .....	81
V.2.1. Distribution de la pression pariétale .....	81
V.2.2. Analyse du coefficient de portance .....	81
<b>Conclusion .....</b>	<b>87</b>
<b>Références bibliographiques .....</b>	<b>89</b>
<b>Annexe -A- .....</b>	<b>90</b>
<b>Annexe -B- .....</b>	<b>96</b>

## NOMENCLATURE

- $D$  : Domaine physique.  
 $\partial D$  : Frontière du domaine physique.  
 $R$  : Domaine computationnel (Domaine de calcul).  
 $\partial R$  : Frontière du domaine computationnel.  
 $(x, y)$  : Les coordonnées cartésiennes.  
 $(\xi, \eta)$  : Les coordonnées curvilignes généralisées.  
 $\xi^*, \eta^*$  : coordonnées normalisées.  
 $P(\xi, \eta)$  : Fonction de contrôle du maillage suivant  $\xi$  .  
 $Q(\xi, \eta)$  : Fonction de contrôle du maillage suivant  $\eta$  .  
 $J$  : Le Jacobien.  
 $a_1, b_1$  : Paramètres de la fonction de condensation « Stretching ».  
 $S$  : Fonction de condensation « Stretching ».  
 $r$  : Abscisse curviligne sur le profil.  
 $T_1, T_2$  : Paramètres de contrôle du maillage orthogonal pour les méthodes algébriques.
- $\left. \begin{array}{l} \alpha \\ \beta \\ \gamma \\ \delta \\ \sigma \\ \tau \end{array} \right\}$  : Paramètres métriques liés au plan transformé.
- $\omega_{opt}$  : Paramètre de relaxation optimal.
- $C$  : Corde du profil.



- $(i, j)$  : Repère lié à l'obstacle.
- $(i_1, j_1)$  : Repère lié à la direction de la vitesse.
- $u, v$  : Les composantes de la vitesse.
- $C_p$  : Coefficient de pression.
- $C_L$  : Coefficient de portance.
- $C_D$  : Coefficient de traînée.
- $C_M$  : Coefficient de moment.
- $\theta$  : Angle d'incidence.
- $V$  : Vitesse locale de l'écoulement du fluide.
- $V_\infty$  : Vitesse de l'écoulement non perturbé (à l'infini).
- $V_t$  : Vitesse tangentielle.
- $V_n$  : Vitesse normale.
- $p_\infty$  : Pression à l'infini (écoulement non perturbé).
- $\rho$  : Masse volumique.
- $\vec{F}$  : La force aérodynamique résultante.
- $\Psi$  : Fonction de courant.
- $\vec{n}$  : Le vecteur unitaire normal à la frontière de l'obstacle.
- $\vec{\tau}$  : Le vecteur unitaire tangentiel à la frontière de l'obstacle.

## Liste des figures

<b>Figure(I.1):</b> Transformation d'un domaine simplement connexe délimité par quatre courbes en un simple rectangle dans le champ de calcul.....	9
<b>Figure(I.2) :</b> Transformation d'un domaine simplement connexe en forme de L en un domaine régulier possédant la même forme en L.....	9
<b>Figure(I.3) :</b> Transformation d'un domaine physique en forme de L en un rectangle monobloc .....	10
<b>Figure(I.4) :</b> Transformation par aplatissement de l'obstacle.....	11
<b>Figure(I.5) :</b> Transformation de l'obstacle en un plaque.....	11
<b>Figure(I.6) :</b> Transformation par aplatissement de l'obstacle avec une bonne résolution.....	12
<b>Figure(I.7) :</b> Transformation de l'obstacle en sous-région .....	13
<b>Figure(I.8) :</b> Transformation de l'obstacle en un segment de droite.....	13
<b>Figure(I.9) :</b> Transformation du domaine physique par coupure.....	14
(Configuration type C)	
<b>Figure(I.10):</b> Transformation du domaine physique par coupure.....	15
(Configuration type O).	
<b>Figure(I.11) :</b> Canal bidimensionnel curviligne.....	17
<b>Figure(I.12) :</b> Transformation du domaine physique en un .....	19
domaine rectangulaire par la technique de Gilding.	
<b>Figure(II.1) :</b> Attraction et répulsion des lignes coordonnées.....	34
<b>Figure(II.2) :</b> Transformation d'un domaine doublement connexe.....	37
<b>Figure(II.3) :</b> Transformation d'un domaine multi- connexe.....	38
<b>Figure(III.1) :</b> Pression et contrainte de cisaillement.....	43
<b>Figure(III.2) :</b> Résultante aérodynamique et moment de tangage.....	43
<b>Figure(III.3) :</b> Repères Eiffel et Lilienthal.....	43
<b>Figure(III.4) :</b> Le champ physique et le champ transformé.....	46

**Figure (V.1) : Maillage d'un domaine simplement connexe (écoulement dans une tuyère).....66**

**Figure (V.2) : Maillage d'un domaine simplement connexe (écoulement dans une conduite).....66**

**Figure (V.3) : Maillage autour d'un cylindre.....67**

**Figure (V.4) : Maillage autour d'un profil NACA0012 (avec une frontière externe de type «O»).....68**

**Figure (V.5) : Maillage autour d'un profil NACA0012 (avec une frontière externe de type «C»).....69**

**Figure (V.6) : Maillage autour d'un profil NACA4412.....70**

**Figure (V.7) : Maillage autour de deux profils d'ailes.....71**

**Figure (V.8) : Maillage autour de deux cylindres.....72**

**Figure (V.9) : Raffinement de maillage.....75**

**Figure (V.10) : Condensation des lignes coordonnées à l'entrée d'une tuyère.....77**

**Figure (V.11) : Condensation des lignes coordonnées à la sortie d'une tuyère.....78**

**Figure (V.12) : Condensation des lignes coordonnées sur la paroi supérieur.....79**

**Figure (V.13) : Condensation des lignes coordonnées sur la paroi inférieur.....80**

**Figure(V.14) : Distribution du coefficient de pression sur la surface du profil  
(avec angle d'incidence  $\Theta=0$ .) .....82**

**Figure (V.15) : Distribution du coefficient de pression sur la surface du profil  
(avec angle d'incidence  $\Theta=2$ ) .....83**

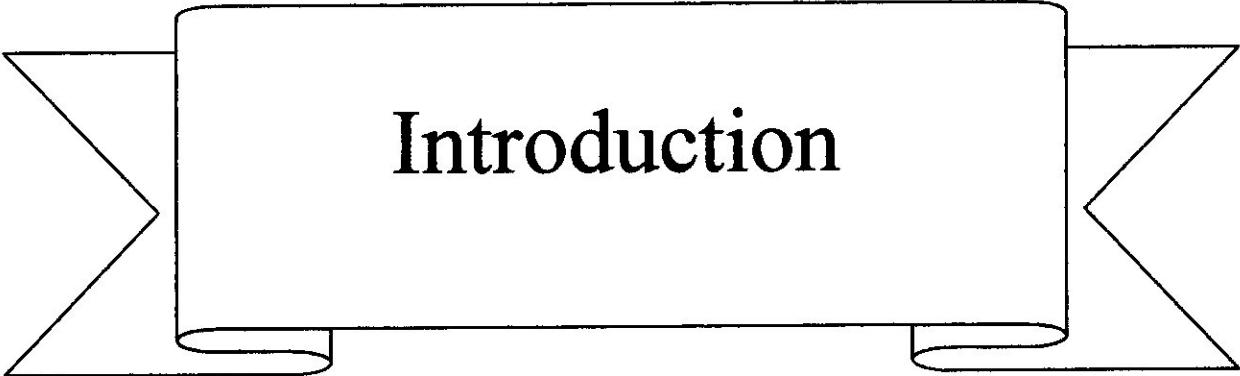
**Figure (V.16) : Evolution de la portance en fonction de l'angle d'incidence  
pour le profil NACA0012.....84**

**Figure (V.17) : Distribution du coefficient de pression sur la surface du profil  
NACA4412 (avec angle d'incidence  $\Theta=2$ ) .....85**

**Figure (V.18) : Evolution de la portance en fonction de l'angle d'incidence  
pour le profil NACA4412.....86**

## Liste des tableaux

<b>Tableau (V.1) :</b> Evolution de la convergence en fonction du paramètre .....73 de relaxation ,pour la figure (V-3-)	
<b>Tableau (V.2) :</b> Evolution de la convergence en fonction du paramètre ..... 73 de relaxation ,pour la figure (V-4-)	
<b>Tableau (V.3) :</b> Evolution de la convergence en fonction du paramètre ..... 74 de relaxation ,pour la figure (V-6-)	
<b>Tableau (V.4) :</b> Valeurs des paramètres de la fonction Stretching ..... 77 pour la figure(V-10)	
<b>Tableau (V.5) :</b> Valeurs des paramètres de la fonction Stretching ..... 78 pour la figure(V-11 )	
<b>Tableau (V.6) :</b> Valeurs des paramètres de la fonction Stretching ..... 79 pour la figure (V-12 )	
<b>Tableau (V.7) :</b> Valeurs des paramètres de la fonction Stretching ..... 80 pour la figure (V-13 )	



## Introduction

L'utilisation des méthodes numériques dans les études d'aérodynamique sert à fournir un moyen rapide et bon marché de simuler les écoulements des fluides ainsi qu'à mettre au point des outils complémentaires aux données obtenues dans les tunnels aérodynamiques en vue de la conception des véhicules aérospatiaux. Les méthodes numériques mènent aussi à des modèles hybrides (théorie-expérience) qui favorisent la compréhension de phénomènes très complexes comme la turbulence et le décrochage dynamique. La simulation numérique, qui est en relation directe avec la physique (problèmes posés par la turbulence et le transfert de chaleur), les mathématiques (développement d'algorithmes toujours plus efficaces) et l'informatique (développement de langages, de compilateurs et d'ordinateurs toujours plus puissants), représente un moyen de recherche courant dont l'évolution et les performances des moyens de calculs ont permis l'essor de l'industrie aérospatiale. On reconnaît aujourd'hui la simulation numérique comme un moyen de conception efficace et indispensable à l'élargissement du champ d'application de l'aérodynamique. Dans la phase de conception d'un nouveau design d'avion, par exemple, la simulation numérique donne l'occasion :

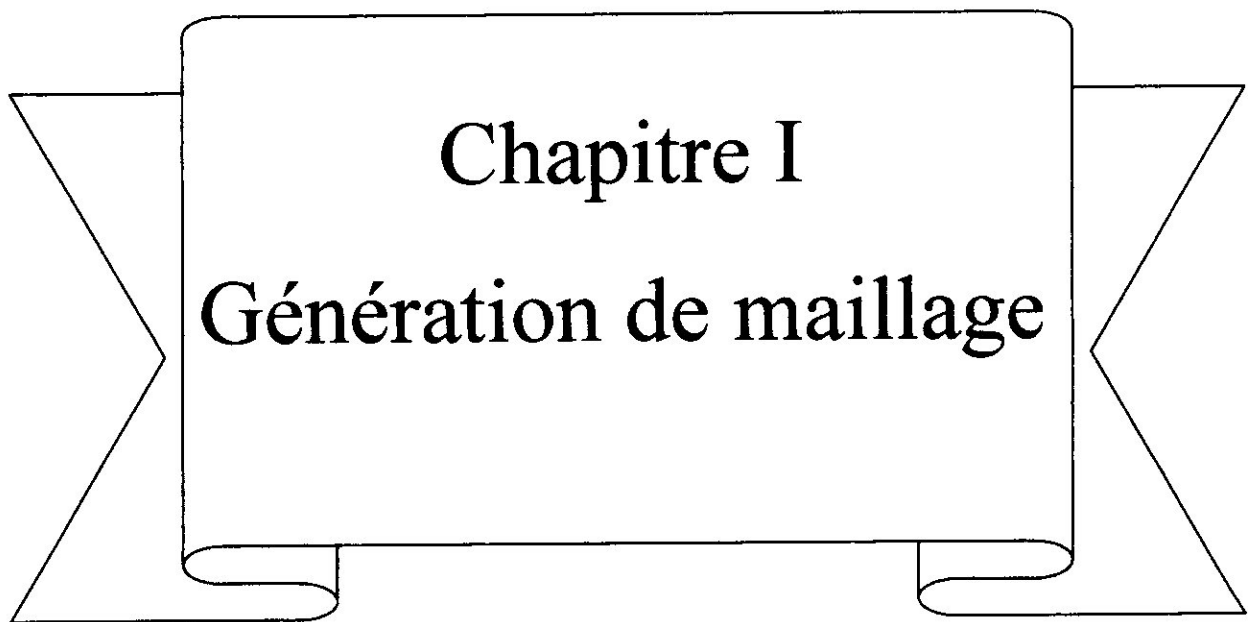
- de simuler des phénomènes physiques complexes ;
- d'étudier les interactions de plusieurs disciplines (thermodynamique, aéroélasticité, etc.) ;
- d'améliorer les modèles théoriques en passant des fluides parfaits (équation d'Euler) aux fluides réels (équations de Navier-Stokes) ;
- de mieux optimiser l'appareil en tenant compte d'un plus grand nombre de paramètres, donc en se rapprochant de plus en plus de l'écoulement réel ;
- de raccourcir la durée de mise au point du prototype finale.

Parmi les méthodes numériques utilisées dans le domaine d'aérodynamique, les méthodes des panneaux, les méthodes de génération de maillage qui fait l'objet du présent travail.

La génération automatique de maillage s'est développée ces dernières années en une théorie à part. Elle a connu un progrès considérable dans le domaine de génération des systèmes de coordonnées résolus numériquement. Une grande variété de ces systèmes a été présentée dans la littérature. L'application des maillages obtenus a été généralisée à différents domaines d'écoulements externes et internes des fluides, en particulier au domaine de l'aérodynamique.

Notre travail présente les différentes techniques de génération de maillage quadrilatère en deux dimensions, ainsi l'application de cette méthode à un écoulement externe subsonique.

Les différentes méthodes de génération de maillage sont présentées dans le chapitre 1. La formulation mathématique et la résolution numérique de la méthode choisie pour générer le maillage sont présentées dans le chapitre 2. Dans le chapitre 3, nous présentons l'application de cette méthode à un écoulement externe subsonique. En plus, le code de génération de maillage et le code de la résolution du problème physique étudié sont présentés dans le chapitre 4. En fin, des résultats de génération de maillage et de son application sont présentés dans le chapitre 5.



**Chapitre I**  
**Génération de maillage**



La génération automatique de maillage consiste à générer un système de coordonnées curvilignes qui détermine le champ de calcul dans lequel seront exprimées toutes les équations du problème physique. Ce champ est un rectangle monobloc ou multi blocs obtenu par transformation du domaine physique. De nombreux développements des techniques de génération de maillage ont été effectués notamment en ce qui concerne les problèmes à deux dimensions pour des résolutions numériques utilisant soit les éléments finis soit les volumes finis ou les différences finies.

Les différentes méthodes de la génération de maillage diffèrent les unes des autres par les propriétés que vérifient les maillages générés par les modèles mathématiques correspondants. Il est alors nécessaire, avant tout choix de l'une de ces méthodes, de connaître les propriétés optimales que doit vérifier le maillage. Ces propriétés sont :

- bonne régularité du maillage (lissage) ;
- adaptation du maillage aux conditions aux frontières ;
- adaptation du maillage aux propriétés des différentes régions du domaine physique (les régions à forts gradients) ;
- orthogonalité.

Vu la grande variété des travaux relatifs à la génération de maillage qui existent dans la littérature, nous nous limiterons à ceux qui connaissent une grande application dans les domaines de mécanique des fluides et de transfert de chaleur. Ces travaux sont basés essentiellement sur les méthodes des différences finies.

Les approches les plus populaires pour la résolution du problème de valeur limite et la génération des points intérieurs, sont les suivantes :

- approche utilisant les transformations conformes par interpolation linéaire des nœuds internes ;
- approche par interpolations linéaires des nœuds internes ;

- approche par résolution numérique des équations différentielles aux dérivées partielles.

## I.1. Classification des techniques de génération de maillages :

### I.1.1. Transformations conformes :

Les approches les plus classiques dans la génération des maillages sont les transformations conformes. Elles utilisent les fonctions élémentaires dans le plan complexe. Dans ces techniques il est possible d'écrire la relation entre les domaines physique  $(x, y)$  et computationnel  $(\xi, \eta)$ , à deux dimensions, comme :

$$\begin{bmatrix} dx \\ dy \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} h \cos \theta & -h \sin \theta \\ h \sin \theta & h \cos \theta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} d\xi \\ d\eta \end{bmatrix} \quad (I.1)$$

Avec,  $h$  : facteur scalaire.

$\theta$  : angle entre la tangente à la droite  $\xi$  et l'axe  $x$ .

Lorsqu'une transformation conforme est utilisée, le plan computationnel  $(\xi, \eta)$  est relié au plan physique  $(x, y)$  par les équations de **Laplace** :

$$\begin{aligned} \xi_{xx} + \xi_{yy} &= 0 \\ \eta_{xx} + \eta_{yy} &= 0 \end{aligned} \quad (I.2)$$

Et les conditions de **Cauchy-Riemann**  $\xi_x = \eta_y$  et  $\xi_y = -\eta_x$ . Ainsi il est possible de construire les solutions  $\xi(x, y)$  et  $\eta(x, y)$  par superposition et par des transformations conformes (**Milne-Thompson, 1968**) [3].

En utilisant les variables complexes,  $z = x + iy$  et  $\zeta = \xi + i\eta$ , une transformation conforme peut être exprimée symboliquement comme,  $Z = F(\zeta)$ , ou sous une forme plus pratique :

$$\begin{aligned} dZ &= H d\zeta \quad \text{ou bien} \quad Z = \int H d\zeta \\ \text{où } H &= h e^{i\theta} = h(\cos \theta + i \sin \theta). \end{aligned}$$

Nous savons que la transformation conforme est généralement utilisée afin d'obtenir les solutions d'écoulements potentiels bidimensionnels autour des configurations relativement complexes, en ramenant, par une transformation appropriée, le problème à celui d'un écoulement autour d'un obstacle simple tel qu'un cercle de rayon égale à l'unité. Comme dans toute technique de génération de maillage, une transformation conforme consiste à :

- la construction d'un schéma seul ou des schémas séquentiels pour obtenir la relation entre les points des frontières dans les plans physique et computationnel.
- la génération des points intérieurs dans le domaine physique.

Il est évident que conformément à la philosophie générale de génération de maillage, le domaine computationnel est typiquement un simple rectangle dans lequel les points intérieurs sont arrangés en un maillage régulier.

### **I.1.2. Méthodes algébriques :**

Les méthodes algébriques de génération de maillage produisent une description fonctionnelle directe de la transformation entre les domaines computationnel et physique. La méthode algébrique classique est une transformation conforme dans laquelle la forme des expressions analytiques est simple et le maillage orthogonal. Cependant, ces propriétés avantageuses sont contrebalancées par l'incapacité à spécifier les points de la frontière et la nature bidimensionnelle inhérente de la méthode.

Afin de lever ces restrictions, une classe de techniques de génération de maillages ont été développées et sont basées sur une interpolation linéaire explicite entre les frontières et/ou les surfaces intermédiaires dans le champ physique (plan ou espace). Ces techniques sont généralement appelées techniques de génération de maillages algébriques.

### I.1.3. Méthodes Numériques :

Dans un problème de génération de maillages à partir des valeurs des coordonnées et/ou de leurs dérivées aux frontières, différentes méthodes, autres que celles basées sur l'interpolation algébrique, peuvent être utilisées. Parmi ces méthodes, nous retrouvons les méthodes numériques qui constituent un thème d'étude à part. Les équations sont de type elliptique avec des conditions aux limites de type **Dirichlet** ou **Newman**. Elles sont hyperboliques ou paraboliques lorsque cette spécification est sur une portion seulement des frontières. Ainsi, le système parabolique est appliqué pour générer un maillage entre deux frontières qui délimitent une région doublement connexe avec une spécification des coordonnées et/ou de leurs dérivées sur ces frontières. Quant au système hyperbolique, il ne permet la spécification des coordonnées (et/ou de leurs dérivées) qu'aux frontières internes, il est par conséquent utilisé pour la génération de maillage dans des domaines avec frontières externes arbitrairement localisées.

Les modèles hyperboliques ont été traités par **Starius et al**. Ils sont rapides et génèrent des maillages orthogonaux mais présentent l'inconvénient non généraux et de propager les discontinuités des frontières vers l'intérieur du champ d'étude.

Les modèles paraboliques sont aussi rapides que les modèles hyperboliques. Les maillages qu'ils génèrent sont plus réguliers que ceux des systèmes hyperboliques mais moins que ceux des systèmes elliptiques.

Quant aux modèles elliptiques, ils nécessitent généralement la résolution d'un système d'équations différentielles aux dérivées partielles, souvent non linéaires, avec des conditions aux limites spécifiées sur toutes les frontières. Ces modèles sont plus difficiles à mettre en œuvre et plus lents que les modèles paraboliques ou hyperboliques mais d'un autre côté, ils présentent l'avantage d'être plus généraux, s'appliquer à des configurations de frontières un peu plus complexes. Par ailleurs, les maillages générés par ces modèles sont très réguliers même si les domaines considérés présentent des irrégularités sur les frontières ou distribution des points aux frontières non uniforme. De plus, ces systèmes elliptiques ne propagent pas les

discontinuités des frontières vers le champ étudié et génèrent des maillages dont l'orthogonalité est beaucoup mieux vérifiée que dans le cas des méthodes algébriques. En outre, la conformité des maillages est souvent requise avec des systèmes elliptiques, en particulier le système de **Laplace**. Cependant, vu la non linéarité des équations de ces systèmes, il est en général, nécessaire de leur joindre d'autres méthodes de génération de maillage, plus rapides, telles que les méthodes algébriques afin d'assurer une meilleure convergence de la solution.

L'utilisation de ce type de systèmes de coordonnées, a été initialement appliquée aux domaines bidimensionnels simplement connexes.

## **I.2. Aspects physiques :**

Avant d'entamer ces techniques, il convient d'éclaircir les relations existant entre le domaine computation (transformé) et le domaine physique. La schématisation d'une frontière typique entre les domaines physique et computationnel peut être interprétée comme étant la relation entre une région doublement connexe et simplement connexe.

### **I.2.1 Région simplement connexe :**

**Définition :** On dit d'un domaine  $D$  qu'il est simplement connexe si n'importe quelle surface fermée, dont tous les points sont contenus dans le domaine, délimite un sous-domaine contenu intégralement dans le domaine  $D$ , [4].

### **I.2.2 Région doublement (multi-) connexe :**

**Définition :** Une région est dit doublement connexe s'il n'existe que deux chemins non conciliables pour relier deux points quelconques. Dans cette région, il n'existe alors qu'un seul contour fermé irréductible [1].

On peut facilement généraliser ces concepts pour définir des régions multi-connexes en terme du nombre de contours irréductibles. Le nombre minimal de

coupures nécessaires pour obtenir un domaine simplement connexe, auquel on ajoute 1, indique l'ordre de multiplicité :

$$N_{\text{multiplicité}} = N_{\text{coupures}} + 1$$

### **I.3. Transformation du domaine physique en domaine de calcul :**

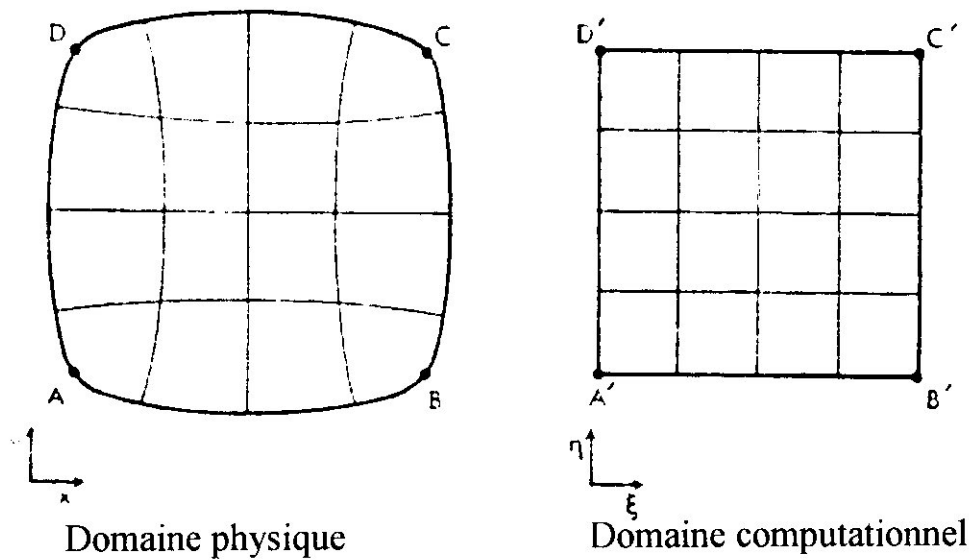
La génération de maillage a été initialement appliquée à des domaines simplement connexes (ne possédant pas d'obstacles). Cette théorie s'est généralisée aux domaines doublement connexes (ayant un obstacle) et aux domaines multiconnexes à plusieurs obstacles. Lors de la génération de maillage, il y a transformation du domaine physique en un domaine computationnel ou de calcul, dans lequel aura lieu la résolution numérique du modèle mathématique. Plusieurs méthodes de transformation existent. Nous présentons, dans ce qui suit, les méthodes de transformation les plus utilisées [1].

#### **I.3.1. Transformation des domaines simplement connexes :**

L'exemple le plus simple qu'on peut citer, est la transformation d'un domaine simplement connexe en un domaine rectangulaire monobloc ou multi-blocs. Nous pouvons illustrer cette transformation à travers les différents types existants :

##### **Type 1 :**

Ce type de transformation est le plus simple et consiste à transformer un domaine délimité par quatre courbes en un rectangle dans le domaine de calcul. On obtient alors une correspondance entre les discontinuités du domaine transformé avec les sommets A, B, C et D du rectangle.

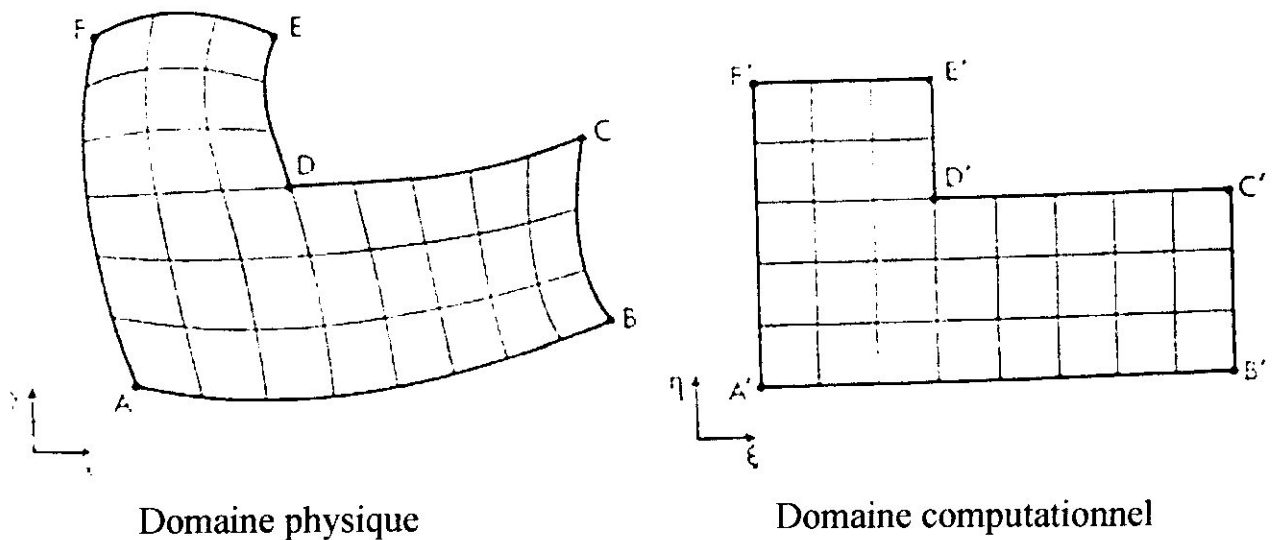


**Figure. (I.1). Transformation d'un domaine simplement connexe délimité par quatre courbes en un simple rectangle dans le champ de calcul**

**Type 2 :**

Ce type de transformation est un peu plus complexe du fait qu'on passe d'un domaine arbitraire de forme en L, qui peut être monobloc ou composé de plusieurs blocs, vers un autre plus régulier. Dans ce cas, deux types de configurations sont possibles :

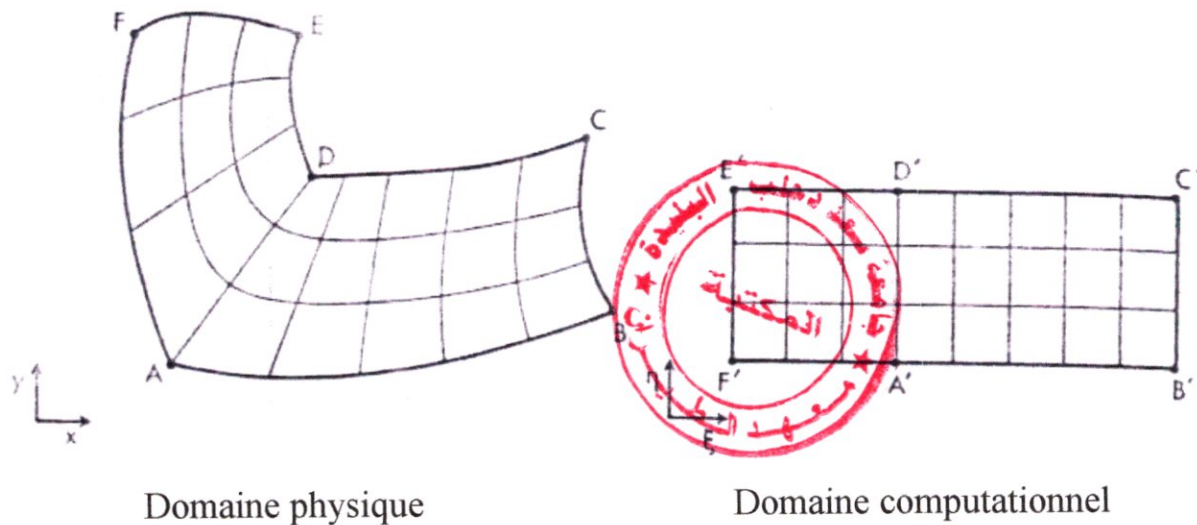
- a) Transformation d'un domaine physique en forme de L tordu, en un domaine régulier ayant la même forme L dans le domaine de calcul.



**Figure. (I.2). Transformation d'un domaine simplement connexe en forme de L en un domaine régulier possédant la même forme en L.**



b) Transformation d'un domaine simplement connexe en forme de L en un domaine rectangulaire monobloc dans le champ de calcul. Ce type de configuration assure une grande facilité dans l'établissement d'un algorithme de calcul dans le champ transformé. Cependant, il convient de la mauvaise précision du maillage au voisinage des points A et D à cause de la discontinuité qui existe en ces points.



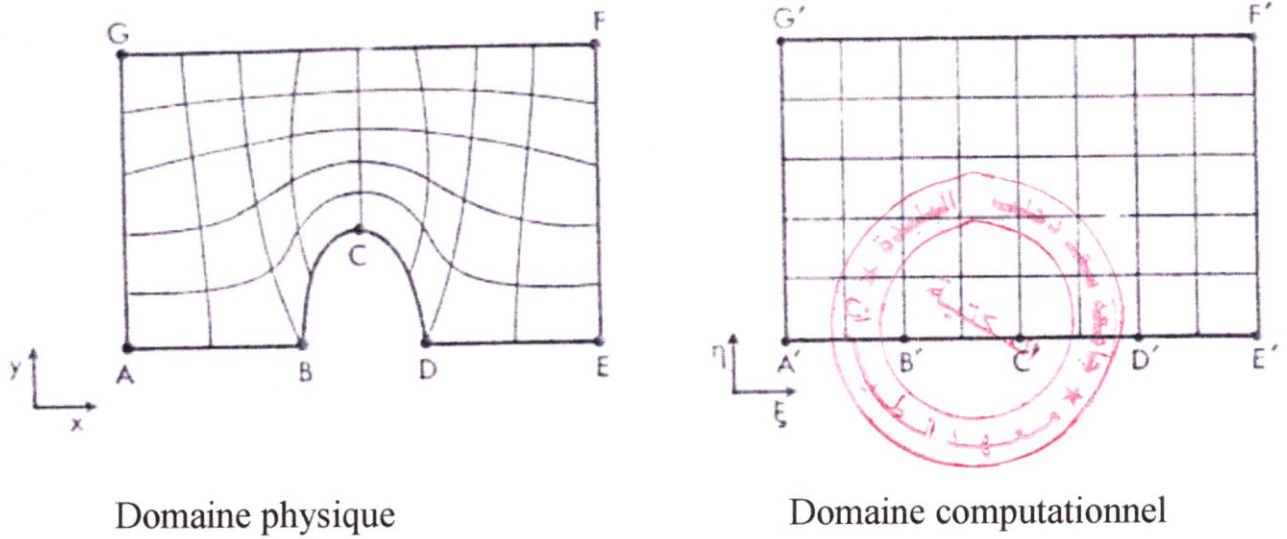
**Figure(I.3) : Transformation d'un domaine physique en forme de L en un rectangle monobloc**

### Type 3 :

Lorsque la frontière du domaine physique est de forme plus compliquée, la configuration du champ transformé est plus variée. Ainsi pour le même domaine physique, plusieurs cas sont possibles comme illustré dans ce qui suit :

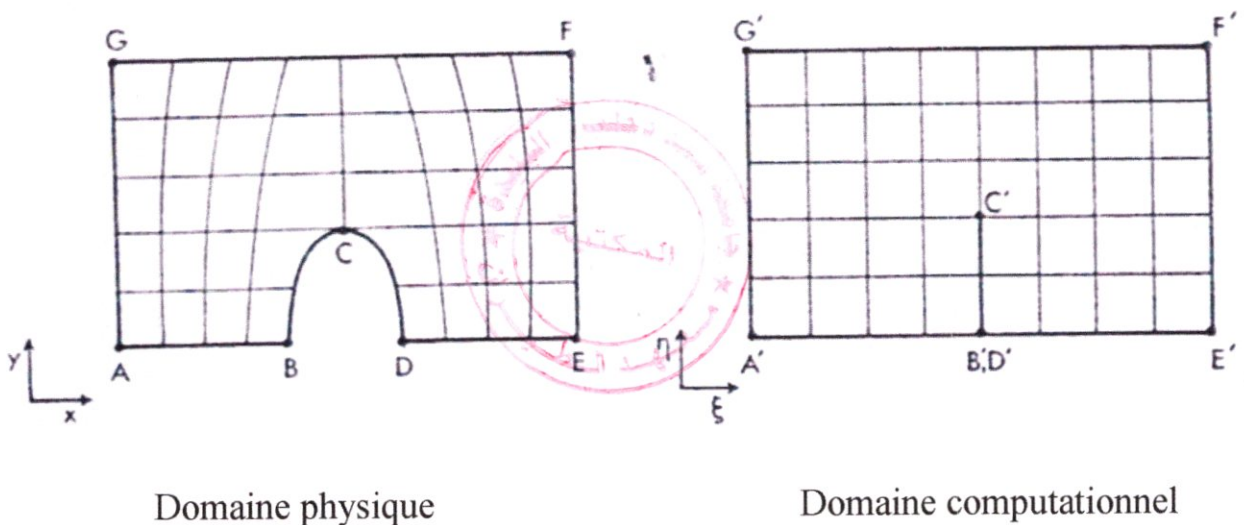
a) Le cas de la transformation de la figure (I.4) a lieu lorsqu'on a un écoulement autour d'un obstacle courbe ABD et dont les points A et D représentent les points d'arrêt. Dans ce cas, ce type de transformation est très approprié.





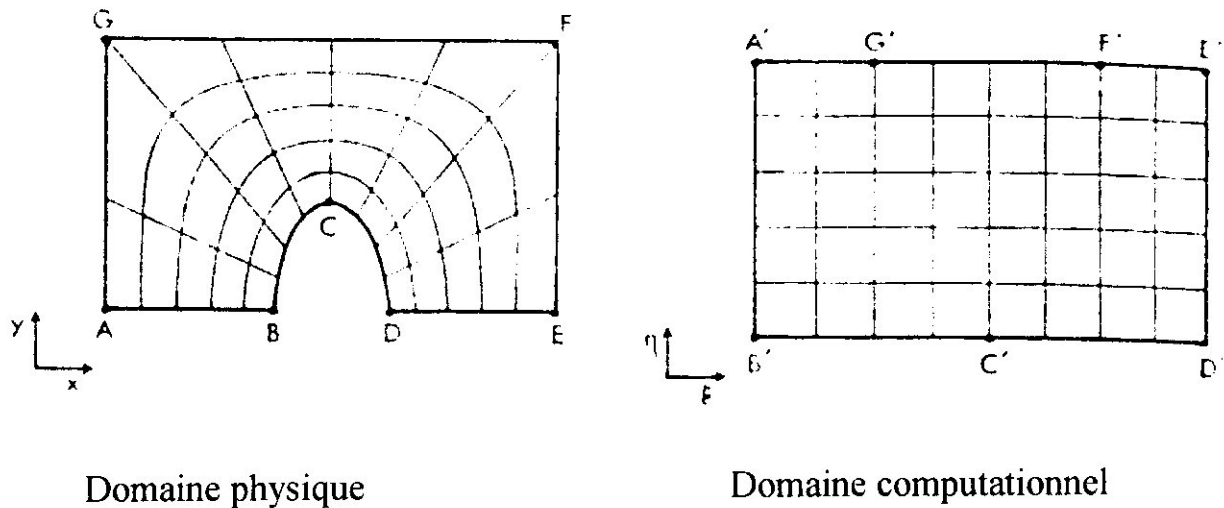
**Figure. (I.4). Transformation par aplatissage de l'obstacle.**

b) Le cas de la transformation de figure (I.5) se rencontre lorsque le point C subit une grande distorsion du fait qu'un grand nombre de points peuvent être attirés au voisinage de ce dernier.



**Figure. (I.5). Transformation de l'obstacle en un plaque.**

c) Ce type de configuration de est similaire à celui de Fig (I.3), à l'exception de la plus grande distorsion du maillage qui apparaît, dans ce cas ,aux points G et F au lieu des points B et D comme dans le cas de la Fig (I.3). En outre, puisque les points G et F se trouvent sur la frontière extérieure où règne l'écoulement uniforme, l'erreur en ces points est plus faible qu'aux points B et D.



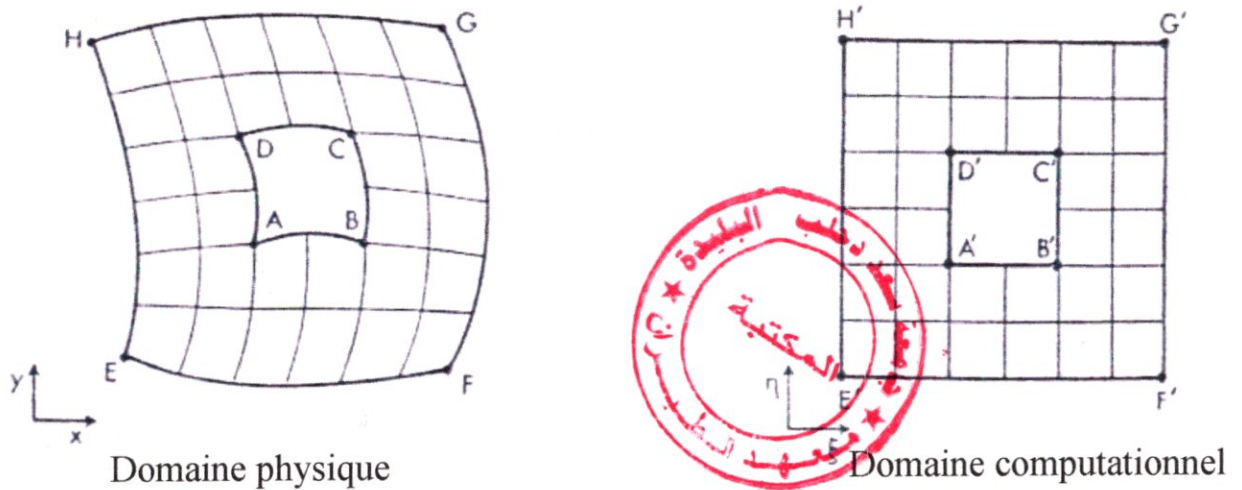
**Figure. (I.6). Transformation par aplatissage de l'obstacle avec une bonne résolution.**

### **I.3.2. Transformation des domaines doublements (multi-) connexes :**

Nous avons déjà cité dans l'aspect physique les différents régions topologiques que l'on peut rencontrer et parmi les quelles on trouve les régions doublement connexes. L'exemple le plus typique est l'écoulement interne dans une conduite avec obstacles .En outre, on peut aussi citer l'écoulement externe autour d'un ou plusieurs obstacles comme dans le cas des ailettes d'une hélice ou les profils d'ailes et qui fait l'objet de la présente étude .Il est important de noter que ces transformations dépendent essentiellement de la forme des obstacles. Nous présentons maintenant quelques exemples illustratifs dans les paragraphes, qui suivent.

**I.3.2.1. Transformation des obstacles en sous-régions :**

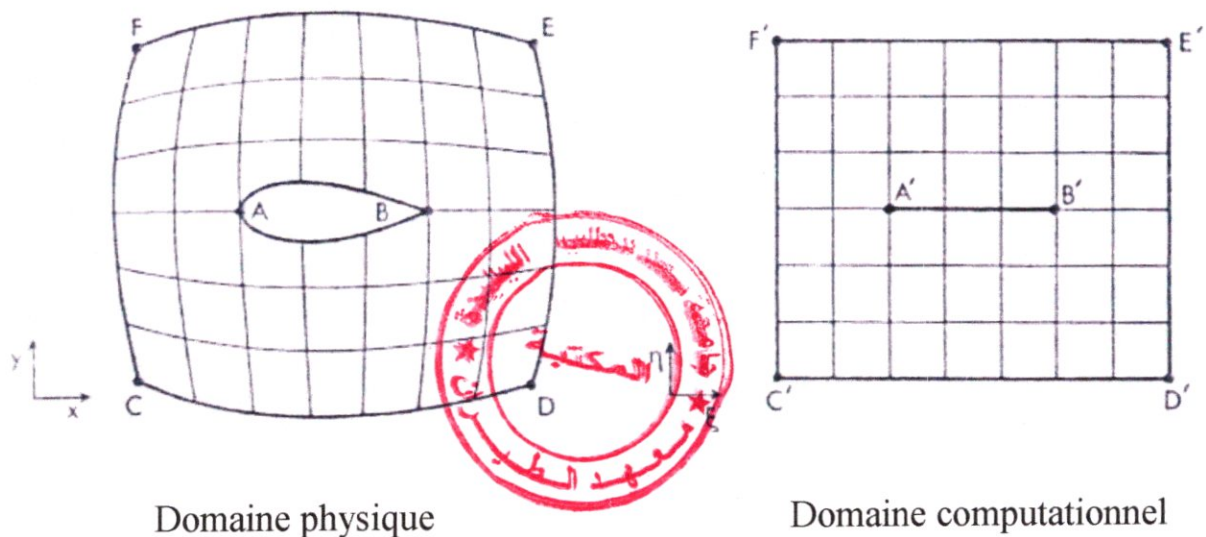
Lorsqu'on possède un obstacle ayant une épaisseur relativement plus importante comparée à son allongement, il est plus approprié de le transformer dans ce cas en un rectangle, en essayant de conserver le même degré de connexité.



**Figure. (I.7). Transformation de l'obstacle en sous-région.**

**I.3.2.2. Transformation des obstacles en segments de droites :**

Ce type de transformation s'effectue dans le cas où les obstacles considérés ont des épaisseurs relativement faibles. Un exemple d'illustration est donné dans ce cas :



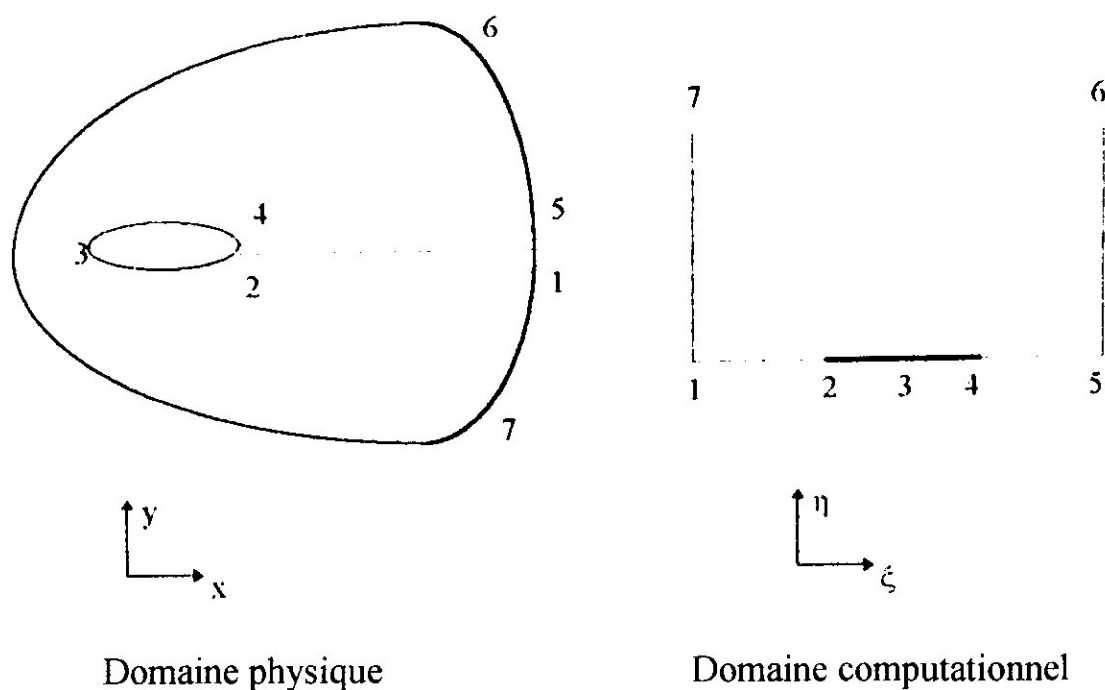
**Figure. (I.8). Transformation de l'obstacle en un segment de droite.**

### I.3.2.3. Transformation des obstacles par coupure :

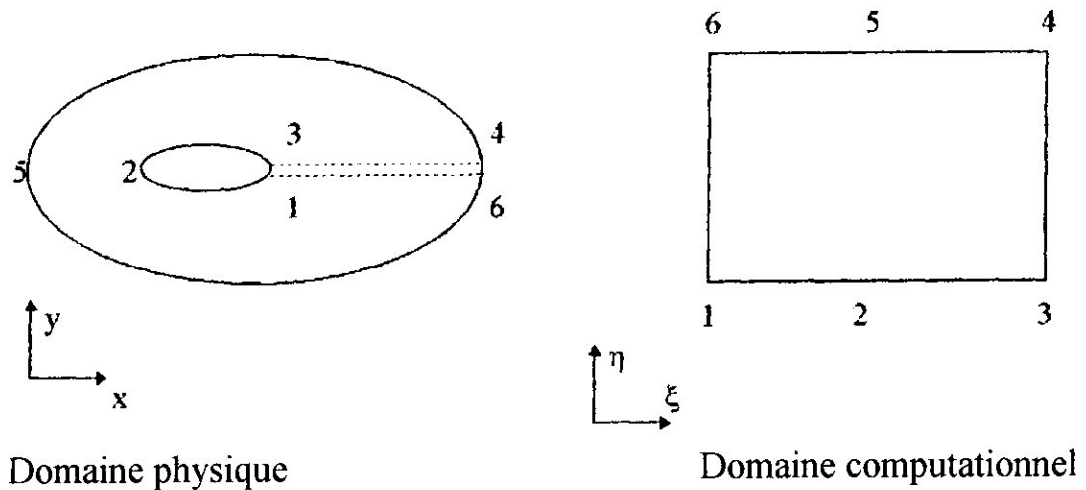
Cette technique constitue un outil très efficace pour palier au problème de distorsion qui apparaît lors de la transformation de l'obstacle en une sous-région ou en segment dans le champ de calcul. Elle permet l'obtention d'un domaine transformé rectangulaire simplement connexe et cela peut être effectué par l'introduction d'une (ou plus) coupure dans le domaine physique.

Les types de configurations les plus utilisées en aérodynamique externe sont le type "O" et le type "C".

#### Configuration de type "C":



**Figure. (I.9). Transformation du domaine physique par coupure  
(Configuration type C)**

**Configuration de type "O" :**

**Figure. (I.10). Transformation du domaine physique par coupure  
(Configuration type O).**

**I.4. Formulation et analyse des techniques de génération de maillage :**

Compte tenu de la grande variété des travaux relatifs à la génération de maillage existent dans la littérature, nous nous limiterons à ceux qui connaissent une grande application en aérodynamique. Nous présentons dans ce qui suit les techniques les plus utilisées pour générer le plan transformé :

**I.4.1. Techniques algébriques :**

Les méthodes algébriques les plus utilisées dans la génération des maillages sont celles qui interpolent les points des frontières pour générer les points intérieurs. L'interpolation explicite peut être en une dimension ou en deux dimension.

La qualité demandée est que le maillage généré doit être bien conditionné en le variant doucement vers un maillage orthogonal, car ces techniques ont l'inconvénient de propager les discontinuités vers l'intérieur du domaine.

La distribution des points du maillage à l'intérieur est gouvernée par les fonctions de condensation, Stretching, aux frontières.

#### I.4.1.1. Fonctions de condensation « stretching » unidimensionnelles :

Les fonctions de condensation sont largement utilisées pour la distribution des points le long des frontières particulières ainsi que des régions spécifiques (à forts gradients) du domaine qui nécessitent un traitement avec une grande précision. Pour les écoulements autour des corps, il est nécessaire d'introduire ces fonctions pour résoudre les problèmes où les gradients des variables physiques sont larges.

Il est désirable d'exprimer les variables dépendantes et indépendantes dans la fonction de condensation «Stretching » sous une forme normalisée. Dans ce cas, la variable indépendante appropriée est :

$$\eta^* = \frac{\eta - \eta_1}{\eta_2 - \eta_1} \quad (I.3)$$

avec :  $0 \leq \eta^* \leq 1$  où  $\eta_1 \leq \eta \leq \eta_2$

Une fonction de condensation « Stretching » proposée par **Robert (1971)** et modifiée par **Eisemann (1979)** [3], est la suivante :

$$S = a_1 \eta^* + (1 - a_1) \left( 1 - \frac{\tanh[b_1(1 - \eta^*)]}{\tanh(b_1)} \right) \quad (I.4)$$

où  $a_1$  et  $b_1$  sont des paramètres de condensation des lignes coordonnées.



### I.4.1.2. Technique de deux parois :

Cette méthode est généralement illustrée par un canal bidimensionnel courbe, voir Fig. (I.11). Il est souvent nécessaire que les fonctions de condensation « Stretching »,  $S_{AD}(\eta^*)$  et  $S_{BC}(\eta^*)$  soient définies pour contrôler la distribution des points au dessous des frontières. Des équations équivalentes à celles de (I.4) sont utilisées pour générer  $S_{AD}(\eta^*)$  et  $S_{BC}(\eta^*)$ . Pour obtenir la valeur de  $S$  entre les surfaces  $AD$  et  $BC$ , une simple interpolation linéaire est recommandée, d'où :

$$S = S_{AD} + \xi^* (S_{BC} - S_{AD}) \quad (I.5)$$

où

$$\xi^* = \frac{\xi - \xi_1}{\xi_2 - \xi_1}$$

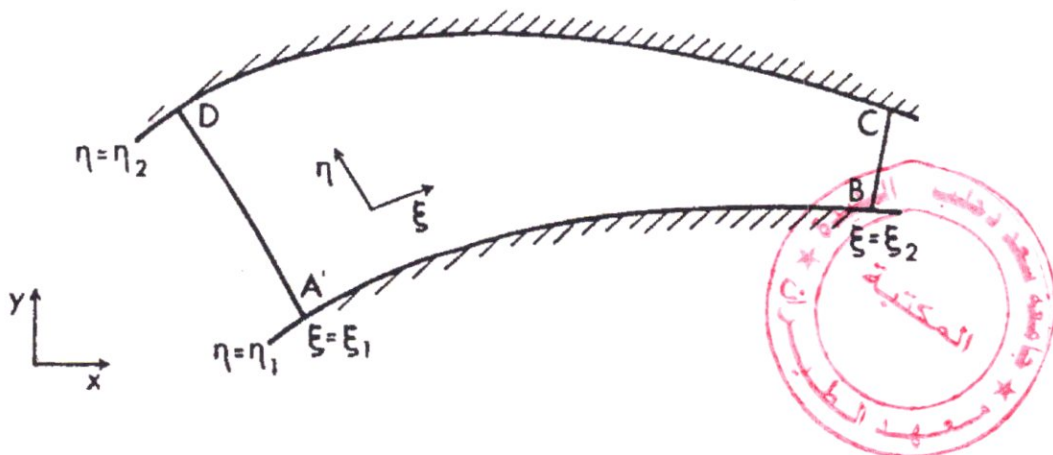


Figure.(I.11). Canal bidimensionnel curviligne.

De la même façon, la distribution des points le long des frontières  $AB$  et  $CD$  est contrôlée par les fonctions « Stretching »  $r_{DC}(\xi^*)$  et  $r_{AB}(\xi^*)$ . Si  $r_{AB}$  et  $r_{DC}$  sont considérées comme étant les coordonnées généralisées mesurées le long de la surface,

alors  $X_{AB}(r_{AB})$  et  $Y_{AB}(r_{AB})$  se suivent directement. Il en est de même pour  $X_{DC}(r_{DC})$  et  $Y_{DC}(r_{DC})$ .

La technique des deux parois utilise des moyens d'interpolation pour générer les points intérieurs entre les deux frontières AB et DC. Une simple interpolation linéaire est donnée dans ce qui suit :

$$\begin{aligned} X(\xi, \eta) &= (1-S)X_{AB}(r_{AB}) + S X_{DC}(r_{DC}) \\ Y(\xi, \eta) &= (1-S)Y_{AB}(r_{AB}) + S Y_{DC}(r_{DC}) \end{aligned} \quad (I.6)$$

Où S est donnée par (I.4).

La difficulté dans l'interpolation précédente réside dans le fait que les points du maillage, adjacents à la frontière, peuvent devenir tordus si les points sur les frontières correspondantes  $(X_{AB}, Y_{AB})$  et  $(X_{DC}, Y_{DC})$  sont en dehors de l'alignement. Par conséquent, il est préférable de remplacer (I.6) par :

$$\begin{aligned} X(\xi, \eta) &= \mu_1(s)X_{AB}(r_{AB}) + \mu_2(s)X_{DC}(r_{DC}) + T_1\mu_3(s)\left(\frac{dY_{AB}}{dr_{AB}}(r_{AB})\right) + T_2\mu_4(s)\left(\frac{dY_{DC}}{dr_{DC}}(r_{DC})\right) \\ Y(\xi, \eta) &= \mu_1(s)Y_{AB}(r_{AB}) + \mu_2(s)Y_{DC}(r_{DC}) - T_1\mu_3(s)\left(\frac{dX_{AB}}{dr_{AB}}(r_{AB})\right) - T_2\mu_4(s)\left(\frac{dX_{DC}}{dr_{DC}}(r_{DC})\right) \end{aligned}$$

où :

$$\begin{aligned} \mu_1(s) &= 2s^3 - 3s^2 + 1 & , & \quad \mu_2(s) = -2s^3 + 3s^2 \\ \mu_3(s) &= s^3 - 2s^2 + s & , & \quad \mu_4(s) = s^3 - s^2 \end{aligned} \quad (I.7)$$

Les paramètres  $T_1$  et  $T_2$  sont utilisés pour contrôler la distance à l'intérieur du maillage à partir de laquelle l'orthogonalité est renforcée.



### I.4.1.3. Technique de Gilding :

Dans ce paragraphe, une nouvelle technique de génération de maillage est développée pour répondre aux besoins de nombreux problèmes physiques pratiques. Cette technique a été proposée par **B.H.Gilding (1988)** [1]. Comme dans toute technique algébrique, elle utilise les fonctions de condensation.

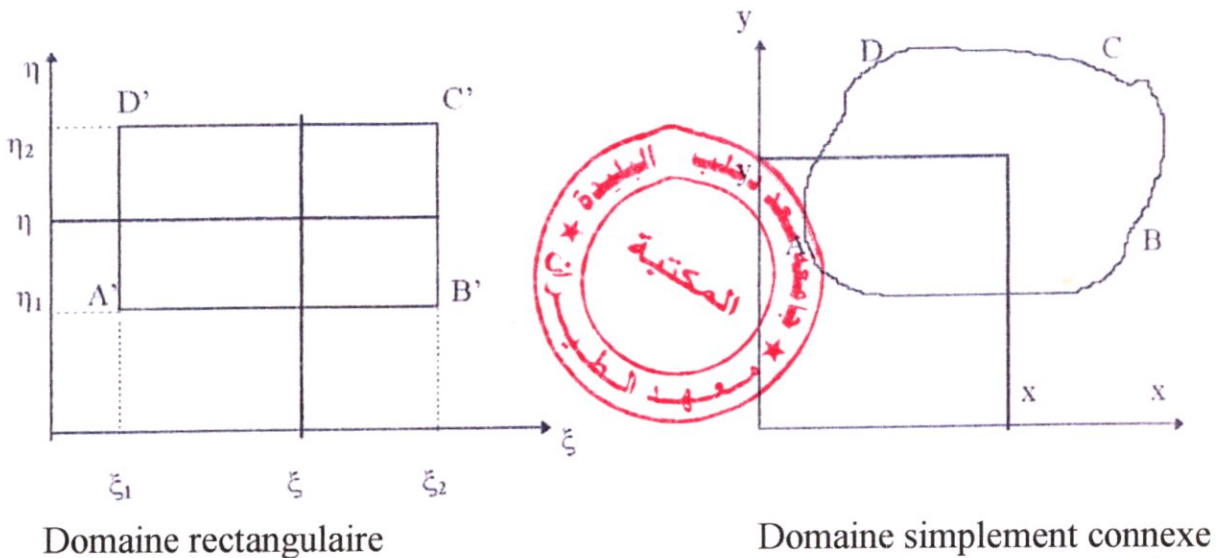
Considérons un domaine  $D$  simplement connexe dans le plan physique rapporté à un système de coordonnées cartésiennes  $(x, y)$ . Comme précédemment, on choisit une région de forme quadrilatérale.

$$R = \{(\xi, \eta) : \xi_1 < \xi < \xi_2, \eta_1 < \eta < \eta_2\}$$

$$\partial D = \{(x(\xi, \eta_1), y(\xi, \eta_1)) : \xi_1 \leq \xi \leq \xi_2\} \cup \{(x(\xi_2, \eta), y(\xi_2, \eta)) : \eta_1 \leq \eta \leq \eta_2\} \\ \cup \{(x(\xi, \eta_2), y(\xi, \eta_2)) : \xi_2 \geq \xi \geq \xi_1\} \cup \{(x(\xi_1, \eta), y(\xi_1, \eta)) : \eta_2 \geq \eta \geq \eta_1\}$$

Notre objectif est de trouver l'expression qui définit le domaine :

$$\bar{D} = \{x(\xi, \eta), y(\xi, \eta) : (\xi, \eta) \in \bar{R}\}$$



**Figure.(I.12). Transformation du domaine physique en un domaine rectangulaire par la technique de Gilding.**

Pour tout points  $(\xi, \eta) \in \bar{R}$ , on pose  $\alpha(\xi, \eta)$  la projection normale du points  $(x(\xi, \eta), y(\xi, \eta))$  sur la ligne reliant les points  $(x(\xi_1, \eta), y(\xi_1, \eta))$  et  $(x(\xi_2, \eta), y(\xi_2, \eta))$  dans le plan physique. L'équation de la droite joignant les deux points, sus-mentionnés, est donnée par :

$$\delta_x(\eta)\{y - y(\xi_1, \eta)\} = \delta_y(\eta)\{x - x(\xi_1, \eta)\}$$

Avec :

(I.8)

$$\delta_x(\eta) = x(\xi_2, \eta) - x(\xi_1, \eta)$$

$$\delta_y(\eta) = y(\xi_2, \eta) - y(\xi_1, \eta)$$

D'autre part, l'équation de la normale à cette droite, obtenue en projetant le point  $(x(\xi, \eta), y(\xi, \eta))$  sur elle, est donnée par :

$$\delta_y(\eta)\{y - y(\xi, \eta)\} = \delta_x(\eta)\{x - x(\xi, \eta)\} \quad (I.9)$$

Le Point  $(x_\alpha, y_\beta)$  d'intersection de la projection avec cette ligne, est défini par :

$$x_\alpha(\xi, \eta) = x(\xi_1, \eta) + \alpha(\xi, \eta)\delta_x(\eta) \quad (I.10)$$

$$y_\alpha(\xi, \eta) = y(\xi_1, \eta) + \alpha(\xi, \eta)\delta_y(\eta)$$

où :

$$\alpha(\xi, \eta) = \frac{[\{x(\xi, \eta) - x(\xi_1, \eta)\}\delta_x(\eta) + \{y(\xi, \eta) - y(\xi_1, \eta)\}\delta_y(\eta)]}{[\delta_x^2(\eta) + \delta_y^2(\eta)]}$$

De la même façon, on définit la projection normalisée du point  $(x(\xi, \eta), y(\xi, \eta))$  sur la ligne d'extrémité  $(x(\xi, \eta_1), y(\xi, \eta_1))$  et  $(x(\xi, \eta_2), y(\xi, \eta_2))$  comme :

$$x_{\beta}(\xi, \eta) = x(\xi, \eta_1) + \beta(\xi, \eta)\varepsilon_x(\xi) \quad (I.11)$$

$$y_{\beta}(\xi, \eta) = y(\xi, \eta_1) + \beta(\xi, \eta)\varepsilon_y(\xi)$$

où :

$$\beta(\xi, \eta) = \frac{\{x(\xi, \eta) - x(\xi, \eta_1)\}\varepsilon_x(\xi) + \{y(\xi, \eta) - y(\xi, \eta_1)\}\varepsilon_y(\xi)}{[\varepsilon_x^2(\xi) + \varepsilon_y^2(\xi)]}$$

$$\varepsilon_x(\xi) = x(\xi, \eta_2) - x(\xi, \eta_1)$$

$$\varepsilon_y(\xi) = y(\xi, \eta_2) - y(\xi, \eta_1)$$

on pose :  $\alpha_i(\xi) = \alpha(\xi, \eta_i)$

avec:  $i = 1, 2$

$$\beta_i(\eta) = \beta(\xi_i, \eta)$$

On suppose que  $\alpha_i(\xi)$  et  $\beta_i(\eta)$  sont définis et continus sur :  $\xi_1 \leq \xi \leq \xi_2$  et  $\eta_1 \leq \eta \leq \eta_2$  respectivement. De plus, on pose :

$$\alpha_i(\xi_1) = 0 \quad \alpha_i(\xi_2) = 0$$

et

avec:  $i = 1, 2$

$$\beta_i(\eta_1) = 0 \quad \beta_i(\eta_2) = 0$$

Ainsi, on définit la forme normalisée par :

$$\alpha(\xi, \eta) = \{1 - \beta(\xi, \eta)\}\alpha_1(\xi) + \beta(\xi, \eta)\alpha_2(\xi) \quad (I.12)$$

$$\beta(\xi, \eta) = \{1 - \alpha(\xi, \eta)\}\beta_1(\eta) + \alpha(\xi, \eta)\beta_2(\eta)$$

Pour tout  $(\xi, \eta) \in R$ , en éliminant les deux inconnues dans les deux équations précédents, il vient :

$$\alpha(\xi, \eta) = \frac{\{1 - \beta_1(\eta)\}\alpha_1(\xi) + \beta_1(\eta)\alpha_2(\xi)}{d(\xi, \eta)}$$

$$\beta(\xi, \eta) = \frac{\{1 - \alpha_1(\xi)\}\beta_1(\eta) + \alpha_1(\xi)\beta_2(\eta)}{d(\xi, \eta)} \quad (I.13)$$

avec :

$$d(\xi, \eta) = 1 - \{\alpha_2(\xi) - \alpha_1(\xi)\} \{\beta_2(\eta) - \beta_1(\eta)\}$$

Finalement, notons que si  $\alpha_1(\xi) > 0$ ,  $\alpha_2(\xi) < 1$  et  $\beta_1(\eta) > 0$ ,  $\beta_2(\eta) < 1$ , alors le dénominateur  $d(\xi, \eta)$  dans (I.13) est différent de zéro. Par conséquent, il est clair que  $0 < \alpha(\xi, \eta) < 1$  et  $0 < \beta(\xi, \eta) < 1$ . En outre, si  $\alpha_1(\xi) = \alpha_2(\xi)$  pour quelques valeurs de  $\xi \in [\xi_1, \xi_2]$ , alors l'expression de  $\alpha$  se réduit à  $\beta(\xi, \eta) = \beta_1(\xi, \eta) = \beta_2(\xi, \eta)$  pour tout  $\eta \in [\eta_1, \eta_2]$ . De même, si  $\beta_1(\eta) = \beta_2(\eta)$  pour quelques valeurs de  $\eta \in [\eta_1, \eta_2]$ , alors l'expression de  $\alpha$  se réduit à  $\beta(\xi, \eta) = \beta_1(\xi, \eta) = \beta_2(\xi, \eta)$  pour tout  $\xi \in [\xi_1, \xi_2]$ . Avec  $\alpha(\xi, \eta)$  et  $\beta(\xi, \eta)$  définis par (I.13), l'inversion des équations (I.9) et (I.11) nous donne l'expression générale de tout point  $(x, y) \in D$ , comme :

$$x(\xi, \eta) = \frac{[x_\alpha(\xi, \eta)\delta_x(\eta) + y_\alpha(\xi, \eta)\delta_y(\eta)]\varepsilon_y(\xi) - [x_\beta(\xi, \eta)\varepsilon_x(\xi) + y_\beta(\xi, \eta)\varepsilon_y(\xi)]\delta_y(\eta)}{\Delta(\xi, \eta)}$$

$$y(\xi, \eta) = \frac{[x_\beta(\xi, \eta)\varepsilon_x(\xi) + y_\beta(\xi, \eta)\varepsilon_y(\xi)]\delta_x(\eta) - [x_\alpha(\xi, \eta)\delta_x(\eta) + y_\alpha(\xi, \eta)\delta_y(\eta)]\varepsilon_x(\xi)}{\Delta(\xi, \eta)}$$

Avec :  $\Delta(\xi, \eta) = \delta_x(\eta)\varepsilon_y(\xi) - \varepsilon_x(\xi)\delta_y(\eta)$

(I.14)

#### **I.4.2. Génération de maillages par la résolution des équations différentielles aux dérivées partielles :**

La majorité des problèmes de physique et de technologie peuvent être décrits en termes d'équations différentielles aux dérivées partielles. En outre, la plupart de ces problèmes s'inscrivent naturellement dans l'une des trois catégories suivantes :

- Problème d'équilibre.
- Problème à valeurs propres.
- Problème de propagation.

Avant de résoudre de tels problèmes par des méthodes, il faut générer le maillage. On peut alors opter pour la résolution d'un autre système d'équations différentielles aux dérivées partielles afin de déterminer le maillage. Les propriétés des maillages générés par cette approche sont notamment reliées aux propriétés des équations différentielles aux dérivées partielles utilisées comme équations de génération de maillage.

### **I.4.2.1. Procédure de génération de maillage elliptique :**

#### **I.4.2.1.1. Les équations de poisson :**

##### **I.4.2.1.1.a. Formulation mathématique :**

La motivation pour l'utilisation des équations elliptiques comme générateurs de maillage peut être dérivée de nombreuses sources. La nature des équations elliptiques est d'adopter les données de la frontière et cela fournit la plus grande propriété désirée.

En fait, beaucoup d'équations elliptiques sont basées sur l'équation de Laplace, qui est bien connue comme un opérateur de filtrage. Dans le cas bidimensionnel, les équations de Laplace avec les conditions aux limites de type **Cauchy-Riemann**, peuvent être utilisées pour générer des représentations conformes. L'aspect essentiel qu'il faut exploiter dans la modélisation numérique en dynamique des fluides, est que l'écoulement incompressible, bidimensionnel et non visqueux est décrit en terme de l'équation de Laplace par la fonction potentiel « $\phi$ » ou la fonction de courant « $\psi$ ».

$$\frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2} = \phi_{xx} + \phi_{yy} = 0 \quad (I.15)$$

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} = \psi_{xx} + \psi_{yy} = 0$$

En donnant des conditions aux limites appropriées (I.15), la solution représente les lignes de courants et les équipotentielles d'un champ d'écoulement. Afin d'utiliser

ces idées dans la génération de maillage, il est plus approprié de transformer ces équations, pour que  $x$  et  $y$  deviennent les variables dépendantes. Dans de tels cas, il est possible d'appliquer les conditions aux limites à  $x$  et  $y$ , qui sont en général les valeurs connues des coordonnées aux limites du domaine géométrique. Si les équations (I.15) sont généralisées pour inclure les fonctions sources  $P$  et  $Q$ , ainsi que pour une portée plus générale,  $\xi$  et  $\eta$  remplaçant  $\varphi$  et  $\psi$  respectivement, alors ces dernières peuvent s'écrire comme :

$$\begin{aligned}\xi_{xx} + \xi_{yy} &= P(\xi, \eta) \\ \eta_{xx} + \eta_{yy} &= Q(\xi, \eta)\end{aligned}\tag{I.16}$$

où :

$$\begin{aligned}\xi &= \xi(x, y) \\ \eta &= \eta(x, y)\end{aligned}$$

Cependant, l'utilisation de ces équations conduit à un système d'équations non linéaires couplées en  $x$  et  $y$ , notées par :

$$\begin{aligned}\alpha_m x_{\xi\xi} - 2\beta_m x_{\xi\eta} + \gamma_m x_{\eta\eta} &= -J^2(x_\xi P + x_\eta Q) \\ \alpha_m y_{\xi\xi} - 2\beta_m y_{\xi\eta} + \gamma_m y_{\eta\eta} &= -J^2(y_\xi P + y_\eta Q)\end{aligned}\tag{I.17}$$

avec :

$$\begin{aligned}\alpha_m &= x_\eta^2 + y_\eta^2 \\ \beta_m &= x_\xi y_\eta + y_\xi x_\eta \\ \gamma_m &= x_\xi^2 + y_\xi^2 \\ J &= x_\xi y_\eta - x_\eta y_\xi\end{aligned}\tag{I.18}$$

Les équations (I.17) avec (I.18) ont été dérivées et popularisées par **Thompson et al (1974)** [3], en transformant le système d'équations suggéré, comme générateur de maillage. Il est à noter que  $\alpha_m$ ,  $\beta_m$  et  $\gamma_m$  sont les coefficients métriques. Dans le cas où  $\beta_m=0$ , le maillage est orthogonal. Il est alors conseillé de substituer  $\beta_m=0$  dans (I.17). Cependant, cette contrainte n'assure pas l'orthogonalité. Par contre, cela peut conduire à une intersection à angle droit des lignes coordonnées du maillage avec les frontières (surface du profil). La solution de ce système d'équations peut être

obtenue par l'utilisation d'une linéarisation appropriée et d'une représentation des dérivées par des différences finies centrales.

**Remarque :**

Dans tout ce qui suivra, on pose  $\Delta\xi = \Delta\eta = 1$  dans le plan computationnel. Ce choix n'affecte pas le maillage dans le plan physique.

**I.4.2.1.1.b. Discrétisation et algorithme de calcul :**

La résolution du système (I.17) est effectuée dans le champ transformé muni des coordonnées curviligne  $(\xi, \eta)$ . Les opérateurs de dérivation sont approchés par des schémas aux différences finies centrées d'ordre deux.

Pour  $P = Q = 0$ , le résidu en maillage carré pour  $\xi = ih$  ( $i=0, \dots, N$ ),  $\eta = jh$ , ( $j=0, \dots, M$ ), peut être représenté comme :

$$R_{i,j}^k = \alpha_{mi,j}^k (U_{i+1,j}^k - 2U_{i,j}^k + U_{i-1,j}^k) - 2\beta_{mi,j}^k (U_{i+1,j+1}^k - U_{i-1,j+1}^k - U_{i+1,j-1}^k + U_{i-1,j-1}^k) + \gamma_{mi,j}^k (U_{i,j+1}^k - 2U_{i,j}^k + U_{i,j-1}^k) \quad (I.19)$$

où  $U = U(x, y)$  représente l'inconnue au point  $(i, j)$  à l'itération direct  $k$ .

De même, les paramètres métriques  $\alpha_m$ ,  $\beta_m$  et  $\gamma_m$  sont approchés par des schémas aux différences finies centrées d'ordre deux, d'où :

$$\begin{aligned} \alpha_{mi,j} &= 0.25 [ (X_{i,j+1}^k - X_{i,j-1}^k)^2 + (Y_{i,j+1}^k - Y_{i,j-1}^k)^2 ] \\ \beta_{mi,j} &= 0.25 [ (X_{i+1,j}^k - X_{i-1,j}^k)(Y_{i,j+1}^k - Y_{i,j-1}^k) + (Y_{i+1,j}^k - Y_{i-1,j}^k)(X_{i,j+1}^k - X_{i,j-1}^k) ] \\ \gamma_{mi,j} &= 0.25 [ (X_{i+1,j}^k - X_{i-1,j}^k)^2 + (Y_{i+1,j}^k - Y_{i-1,j}^k)^2 ] \end{aligned} \quad (I.20)$$

Il s'ensuit que la solution de (I.17) peut être obtenue en utilisant le schéma stationnaire linéaire de points successifs en surlaxation **SOR** :

$$U_{i,j}^{k+1} = U_{i,j}^k + \frac{\omega_{opt} R_{i,j}^k}{2(\alpha_{mi,j} + \gamma_{mi,j})} \quad (I.21)$$

où  $\omega_{opt}$  est le paramètre de relaxation défini dans l'intervalle [1,2].

La même procédure est utilisée dans le cas où on introduit les fonctions de contrôle dans le résidu  $R_{i,j}^k$ .

#### I.4.2.1.1.c. Fonctions de contrôle de maillage :

Les propriétés de filtrage inhérentes aux équations de Laplace assurent que, dans le cas d'absence d'une frontière curviligne, les lignes coordonnées sont éventuellement espacées. Cependant, près des frontières convexes, l'espacement des mailles devient serré. Tandis que près des frontières concaves, l'espacement du maillage devient clairsemé. Ces propriétés ne sont pas, souvent, désirables pour la génération de maillage où il est essentiel que le maillage près de la frontière, réfléchit l'image de celle-ci. Le contrôle de l'espacement des lignes coordonnées peut être obtenu par l'introduction des fonctions sources dans l'équation de Laplace qui sont ainsi converties en équation de type Poisson. Le problème majeur, pour une génération de maillage automatique, est de choisir ces fonction sources d'une manière judicieuse. Des méthodes automatiques ont été développées (Thomas, Middlecoff et Steger 1979-1980), dans ce sens. Dans l'approche qui va suivre, une forme simplifiée des termes sources P et Q est donnée par [1] :

$$P = P_0(\xi)e^{-a(\eta-\eta_1)} \quad (I.22)$$

$$Q = Q_0(\xi)e^{-b(\eta-\eta_1)}$$

où  $\eta_1$  correspond à  $\eta_{min}$  de la frontière interne (profil),

$P_0, Q_0$  constantes qui varient dans la direction de  $\xi$

et  $a, b$  des constants usuelles.



Un autre type de fonctions sources toujours proposées par **T.D.Thomas** et **J.F.Middlecoff**, est le cas où les fonctions P et Q sont de type linéaire. L'idée de base de cette approche est d'utiliser les points aux frontières pour calculer ces fonctions sources, qui sont alors interpolées dans le champ. En utilisant les équations elliptiques précédentes et en supposant que toutes les dérivées secondes qui traversent la frontière sont nulles, on obtient les équations suivantes [1] :

$$P = - \frac{(x_{\xi\xi} x_{\xi} + y_{\xi\xi} x_{\xi})}{x_{\xi}^2 + y_{\xi}^2} (\xi_x^2 + \xi_y^2) \quad (1.23)$$

$$Q = - \frac{(x_{\eta\eta} x_{\eta} + y_{\eta\eta} x_{\eta})}{x_{\eta}^2 + y_{\eta}^2} (\eta_x^2 + \eta_y^2)$$

A partir d'ici et pour une distribution des points aux frontières parfaite, les fonctions de contrôles peuvent être calculées pour réfléchir cet espacement dans le champ.

#### **I.4.2.1.2. Equations de Laplace :**

##### **I.4.2.1.2.a. Formulation mathématique :**

Dans cette partie, un autre type de système elliptique est présenté. Cependant, **Ives (1982)** [3] recommande, pour générer les points intérieurs rapidement après avoir spécifié les points sur les frontières, la résolution des équations suivantes :

$$X_{\xi\xi} + X_{\eta\eta} = 0 \quad (1.24)$$

$$Y_{\xi\xi} + Y_{\eta\eta} = 0$$

Il convient de signaler que cette procédure peut être généralisée à plusieurs obstacles isolés tels que les profils d'aile et volets.

### I.4.2.1.2.b. Discrétisation et algorithme de calcul :

Les opérateurs de dérivation sont approchés par des schémas aux différences finies centrées d'ordre deux .Ainsi, nous obtenons les équations suivantes :

$$\begin{aligned} X_{i+1,j}^K - 2X_{i,j}^* + X_{i-1,j}^{K+1} + X_{i,j+1}^K - 2X_{i,j}^* + X_{i,j-1}^{K+1} &= 0 \\ Y_{i+1,j}^K - 2Y_{i,j}^* + Y_{i-1,j}^{K+1} + Y_{i,j+1}^K - 2Y_{i,j}^* + Y_{i,j-1}^{K+1} &= 0 \end{aligned} \quad (1.25)$$

En appliquant le schéma itératif **SOR** aux équations précédentes, on obtient :

$$\begin{aligned} X_{i,j}^{K+1} &= \omega_{opt} X_{i,j}^K + (1 - \omega_{opt}) X_{i,j}^* \\ Y_{i,j}^{K+1} &= \omega_{opt} Y_{i,j}^K + (1 - \omega_{opt}) Y_{i,j}^* \end{aligned} \quad (1.26)$$

### I.4.2.2. Procédure de génération de maillage hyperbolique :

Ce type de procédure de génération de maillage est moins développé que ceux des procédures elliptiques bien qu'il possède des caractéristiques désirables. Cependant, le type, qu'on a utilisé, est celui développé par **Starius, Steger** et **Chaussee** , qui est donné par [1] :

$$\begin{aligned} \nabla \xi \cdot \nabla \eta &= \xi_x \eta_x + \xi_y \eta_y = \varphi \\ \xi_x \eta_y - \xi_y \eta_x &= J \end{aligned} \quad (1.27)$$

où J et  $\varphi$  Représentent le jacobien et la fonction sources respectivement.

L'orthogonalité est obtenue par une simple élimination de  $\varphi$  ( $\varphi=0$ ). L'inconvénient de cette technique est lié au manque de contrôle direct de la distribution des points sur les frontières extérieures.

### I.4.2.3. Procédure de génération de maillage parabolique :

#### I.4.2.3.a. Formulation mathématique :

La dernière procédure de génération de maillage numérique, qu'on a considérées, est celle basée sur la règle parabolique .Cette technique a été développée par **Nakamura** et qui est donnée par [1] :

$$\begin{aligned}x_{\eta} &= Ax_{\xi\xi} - 2Bx_{\xi\eta} + S_x \\y_{\eta} &= Ay_{\xi\xi} - 2By_{\xi\eta} + S_y\end{aligned}\quad (1.28)$$

où A et B sont des constantes positives et  $S_x$  et  $S_y$  sont des fonctions sources données par :

$$\begin{aligned}S_{x|ij} &= \frac{x_{i,Nj} - x_{i,j}}{Nj - j} \\S_{y|ij} &= \frac{y_{i,Nj} - y_{i,j}}{Nj - j}\end{aligned}\quad (I.29)$$

Les équations (1.28) sont paraboliques et doivent être calculées et démarrées à partir des données initiales  $(X_{i,1}, Y_{i,1})$ . Ces coordonnées initiales représentent la surface du profil et sont données par l'utilisateur.

#### **1.4.2.3.b. Discrétisation et algorithme de calcul :**

Les opérateurs de dérivation sont approchés par des schémas aux différences finies centrées d'ordre deux .En appliquant ces schémas au système (1.28), nous obtenons les équations discrètes suivantes pour  $X_{ij}$  et  $Y_{ij}$  :

$$\begin{aligned}x_{i,j}^* - x_{i,j-1}^{K+1} &= A(x_{i-1}^{K+1} - 2x_{i,j}^* + x_{i+1,j}^K) - \frac{B(x_{i+1}^K - x_{i-1}^{K+1} - x_{i+1,j-1}^K + x_{i-1,j-1}^{K+1})}{2} + S_x \\y_{i,j}^* - y_{i,j-1}^{K+1} &= A(y_{i-1}^{K+1} - 2y_{i,j}^* + y_{i+1,j}^K) - \frac{B(y_{i+1}^K - y_{i-1}^{K+1} - y_{i+1,j-1}^K + y_{i-1,j-1}^{K+1})}{2} + S_y\end{aligned}\quad (1.30)$$

Les équations algébriques discrètes obtenues précédemment sont linéaires, d'où un processus de calcul itératif est donc nécessaire. On a utilisé le schéma **SOR** en surrelaxation (par point) donné par (I.26), qui semble très approprié.

Par ailleurs, les valeurs de  $x_{ij}^*$  et  $y_{ij}^*$  sont données par :

$$x_{i,j}^* = \frac{x_{i,j-1}^{K+1} + (A+B)x_{i-1,j}^{K+1} + (A-B)x_{i+1}^K - B(x_{i-1,j-1}^{K+1} - x_{i+1,j-1}^K)}{1+2A} + S_x \quad (I.31)$$

$$y_{i,j}^* = \frac{y_{i,j-1}^{K+1} + (A+B)y_{i-1,j}^{K+1} + (A-B)y_{i+1}^K - B(y_{i-1,j-1}^{K+1} - y_{i+1,j-1}^K)}{1+2A} + S_y$$

Pour les indices,  $i$  varie de 2 à  $I_{MAX} - 1$  et  $j$  varie de 2 à  $J_{MAX} - 1$

### I.4.3. Conditions aux limites :

La frontière externe, qui délimite le domaine physique, est prise de forme  $O$  (circulaire), de forme  $C$  ou de forme  $H$ . Par contre, le domaine computationnel obtenu est un domaine rectangulaire monobloc permettant ainsi de simplifier tout calcul basé sur lui. Ce dernier est obtenu par introduction d'une ou plusieurs coupures dans le domaine physique. Ces coupures, qui se trouvent à l'intérieur du champ physique, constituent alors des frontières fictives reliant la frontière externe aux contours des obstacles. Cependant, dans le domaine computationnel, ces coupures correspondent à des paires de segments superposables représentés sur les côtés du rectangle. Elles doivent vérifier un certain nombre de propriétés, qui sont :

- périodicité de la solution sur les coupures :

Les coordonnées et les caractéristiques physiques (fonction de courant, le nombre de Mach, la masse volumique,...) sont identiques sur les segments d'une même paire de coupures ;

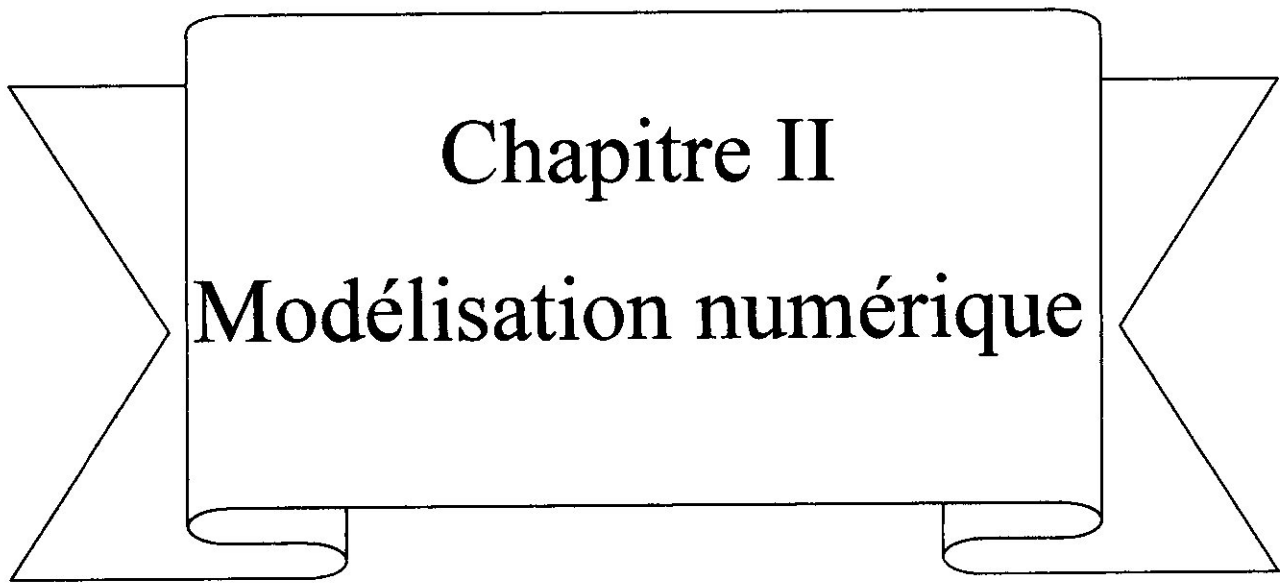
- les segments d'une même paire de coupure  $(\xi, \eta)$ , ont des valeurs égales ou opposées.

D'autre part, les contours des obstacles et la frontière externe sont aussi représentés par des segments sur les côtés du domaine computationnel. Par ailleurs, sachant que la frontière externe peut influencer sur la solution physique son éloignement ainsi que par sa configuration géométrique, un choix judicieux de cette frontière est alors indispensable.

En outre, l'existence de ces coupures impose une grande complexité dans la programmation. De ce fait, il est préférable d'évaluer les dérivées des fonctions au niveau de ces segments à part, comme par exemple dans le cas d'une frontière extérieure de type O où on a :

$$\frac{\partial^2 x}{\partial \xi^2} = x_{IMAX-1,j} - 2x_{1,j} + x_{2,j} \quad (1.32)$$

Cependant, les solutions pour  $I = 1$  et  $I = I_{MAX}$  doivent être identiques, autrement dit, à chaque itération leur calcul doit être fait simultanément.



**Chapitre II**  
**Modélisation numérique**

Pour générer le maillage, nous avons choisi pour notre étude le modèle elliptique (par équation de poisson) parmi les méthodes de génération de maillage par résolution des équations différentielles aux dérivées partielles, proposé par Thompson (1974) [3], et ce pour les propriétés qu'il vérifie qui sont :

- Adaptation du maillage aux frontières ;
- Distribution régulière des lignes coordonnées ;
- Transformation biunivoque du domaine physique au domaine d'étude (c'est-à-dire, le système ne propage pas les discontinuités des frontières vers le champ étudié) ;
- L'orthogonalité .

## II.1. Formulation mathématique :

### II.1.1. Equations de poisson :

Le modèle elliptique que nous avons choisi est constitué d'un système d'équation aux dérivées partielles non linéaires donné par :

$$\xi_{xx} + \xi_{yy} = P(\xi, \eta) \quad (\text{II.1})$$

$$\eta_{xx} + \eta_{yy} = Q(\xi, \eta)$$

où P et Q sont des fonctions utilisées pour contrôler le maillage intérieur.

La résolution de ce système est effectuée dans le domaine transformé des coordonnées curvilignes  $(\xi, \eta)$ .

Ce système dans le domaine transformé est donné par :

$$\alpha X_{\xi\xi} - 2\beta X_{\xi\eta} + \gamma X_{\eta\eta} + \delta(PX_{\xi} + QX_{\eta}) = 0 \quad (\text{II.2})$$

$$\alpha Y_{\xi\xi} - 2\beta Y_{\xi\eta} + \gamma Y_{\eta\eta} + \delta(PY_{\xi} + QY_{\eta}) = 0$$

où :

$$\begin{aligned}\alpha &= X_{\eta}^2 + Y_{\eta}^2 \\ \beta &= X_{\xi}Y_{\eta} + Y_{\xi}X_{\eta} \\ \gamma &= X_{\xi}^2 + Y_{\xi}^2 \\ \delta &= (X_{\xi}Y_{\eta} - X_{\eta}Y_{\xi})^2\end{aligned}$$

avec les condition aux frontières de type **Dirichlet** ,données par :

$$\begin{aligned}X &= X_i(\xi, \eta) \\ Y &= Y_i(\xi, \eta)\end{aligned}\tag{II.3}$$

avec  $i = 1, N$ .

$N$  : nombre total de segments correspondant aux contours des obstacles, aux coupures et à la frontière externe.

### II.1.2. Fonctions de contrôle :

Pour contrôler le maillage nous avons choisi les fonctions proposées par Thompson et al (1977) [3] donnés par :

$$\begin{aligned}P(\xi, \eta) &= -\sum_{l=1}^L a_l \operatorname{sgn}(\xi - \xi_l) \exp(-c_l |\xi - \xi_l|) \\ &\quad - \sum_{m=1}^M b_m \operatorname{sgn}(\xi - \xi_m) \exp\left[-d_m \left[(\xi - \xi_m)^2 + (\eta - \eta_m)^2\right]^{1/2}\right] \\ Q(\xi, \eta) &= -\sum_{l=1}^L a_l \operatorname{sgn}(\eta - \eta_l) \exp(-c_l |\eta - \eta_l|) \\ &\quad - \sum_{m=1}^M b_m \operatorname{sgn}(\eta - \eta_m) \exp\left[-d_m \left[(\xi - \xi_m)^2 + (\eta - \eta_m)^2\right]^{1/2}\right]\end{aligned}$$

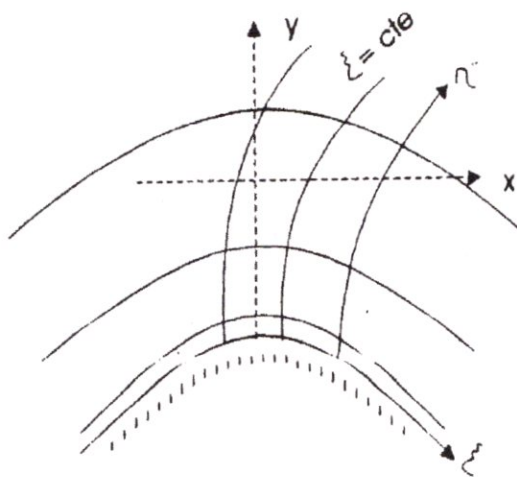


(II.4)

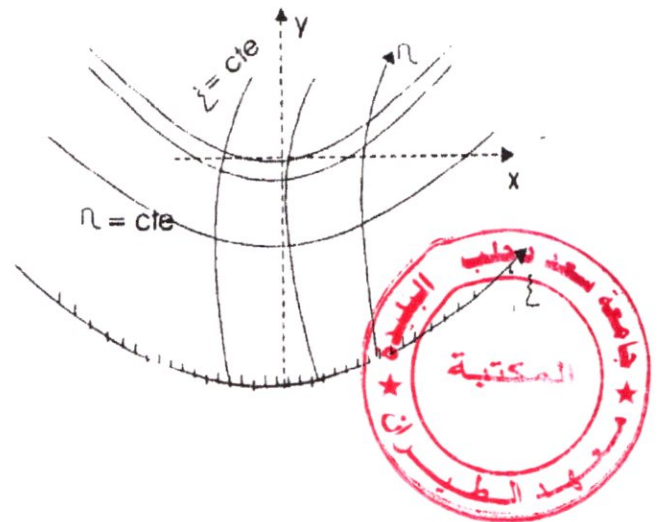


La fonction  $\text{sgn}$  est définie par :

$$\begin{aligned} \text{sgn}(x) &= 1 && \text{si } x \text{ est positive,} \\ &= 0 && \text{si } x = 0, \\ &= -1 && \text{si } x \text{ est négative.} \end{aligned}$$



Attraction des ligne coordonnées de même nature  $\eta$  vers la frontière convexe



Répulsion des lignes coordonnées de même nature  $\eta$  de la frontière concave

**Figure.II .1. Attraction et répulsion des lignes coordonnées.**

Ces fonctions sont constituées de deux types de termes :

**Termes à attraction (répulsion) vers les lignes :**

Ils sont représentés par :

$$-\sum_{l=1}^L a_l \text{sgn}(\xi - \xi_l) \exp(-c_l |\xi - \xi_l|) \quad (\text{dans } P(\xi, \eta)),$$

$$-\sum_{l=1}^L a_l \text{sgn}(\eta - \eta_l) \exp(-c_l |\eta - \eta_l|) \quad (\text{dans } Q(\xi, \eta)).$$

Dans le premier terme, les lignes coordonnées du maillage, sur lesquelles la coordonnée curviligne  $\xi$  est constante, s'attirent ou se repoussent suivant le signe de  $P$ , vers les lignes coordonnées choisies de même type ( $\xi_l = cte \quad l = 1, L$ ).

Le même raisonnement est valable pour le deuxième terme avec les lignes coordonnées sur lesquelles la coordonnée curviligne  $\eta$  est constante.

### Termes à attraction (répulsion) vers des points :

Ils sont représentés par :

$$-\sum_{m=1}^M b_m \operatorname{sgn}(\xi - \xi_m) \exp\left[-d_m \left[(\xi - \xi_m)^2 + (\eta - \eta_m)^2\right]^{1/2}\right] \quad (\text{dans } P(\xi, \eta)),$$

$$-\sum_{m=1}^M b_m \operatorname{sgn}(\eta - \eta_m) \exp\left[-d_m \left[(\xi - \xi_m)^2 + (\eta - \eta_m)^2\right]^{1/2}\right] \quad (\text{dans } Q(\xi, \eta)).$$

Dans le premier terme, les lignes du maillage sur lesquelles la coordonnée curviligne  $\xi$  est constante sont attirées ou repoussées vers des points choisis  $((\xi_m, \eta_m) \quad m = 1, M)$ .

Le même raisonnement est applicable au deuxième terme pour des lignes coordonnées sur lesquelles la variable  $\eta$  est constante.

Les amplitudes  $a_l, b_m$  de même que les coefficients d'amortissement  $c_l, d_m$ , peuvent avoir des valeurs différentes, dans les deux fonctions  $P$  et  $Q$ . Ces coefficients peuvent aussi être différentes sur les lignes ou sur les points choisis vers lesquels sont attirées ou repoussées les autres lignes.

## II.2. Traitement des conditions aux frontières :

### II.2.1. Répartition des points sur les contours du champ physique :

La répartition des points sur la frontière externe, les contours des obstacles et sur les coupures est effectuée par la fonction de condensation « Stretching ». Les

coordonnées des points sont introduites, à partir d'une origine choisie, en partant dans le sens contraire des aiguilles d'une montre.

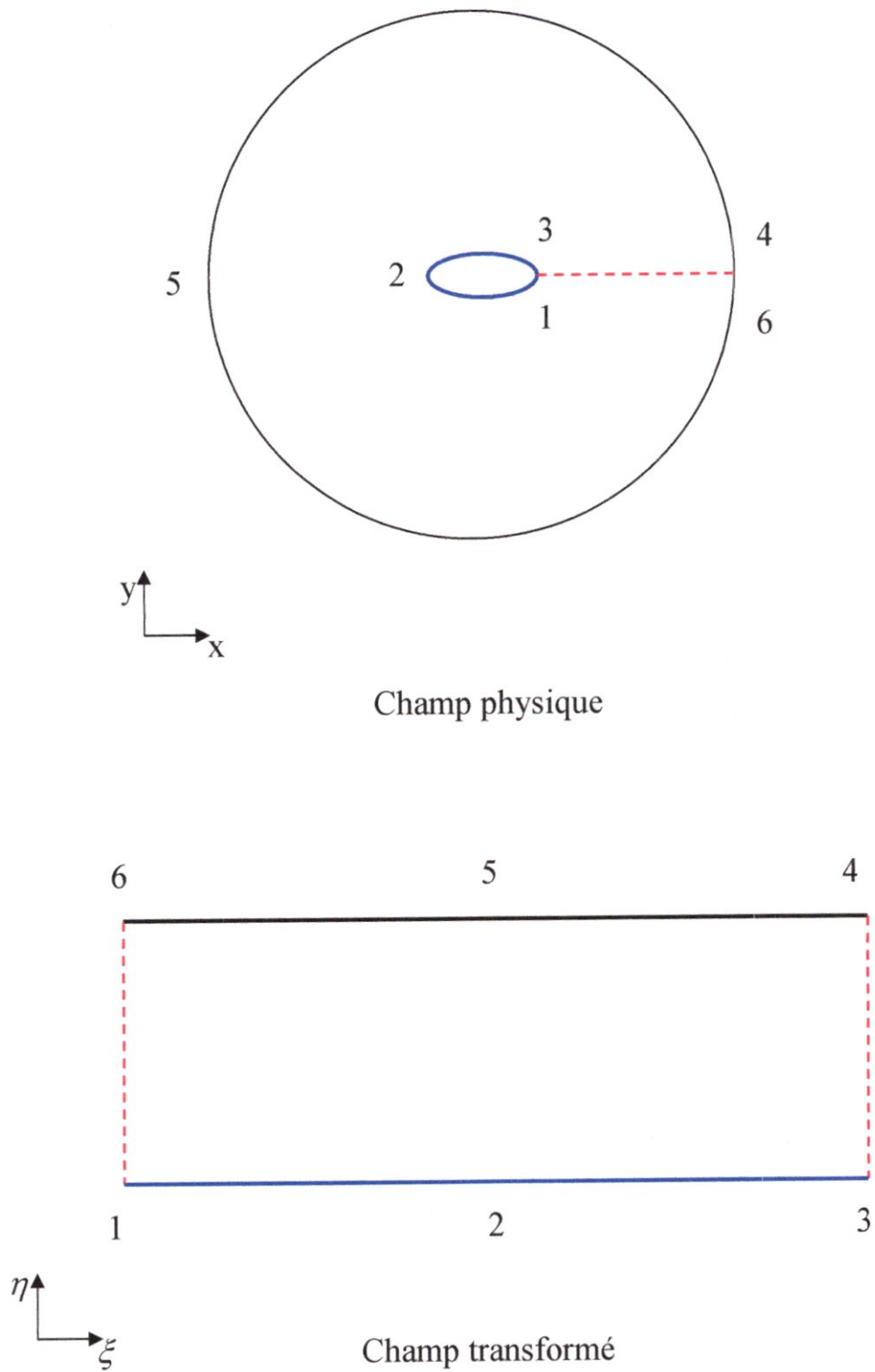
### **II.2.2. Répartition des points sur les contours du champ transformé :**

La répartition des points dans le champ transformé dépend de la configuration choisie, une variété de configurations du champ transformé existe. Elle dépend essentiellement du type de domaine d'étude, celui-ci pouvant être simplement, doublement connexe ou multi-connexe. Par ailleurs, cette multitude de configurations dépend aussi d'une part du nombre de segments par lesquels sont représentés les contours des obstacles et la frontière externe, d'autre part du type de disposition des segments des contours et des coupures sur les côtés du rectangle (le champ transformé).

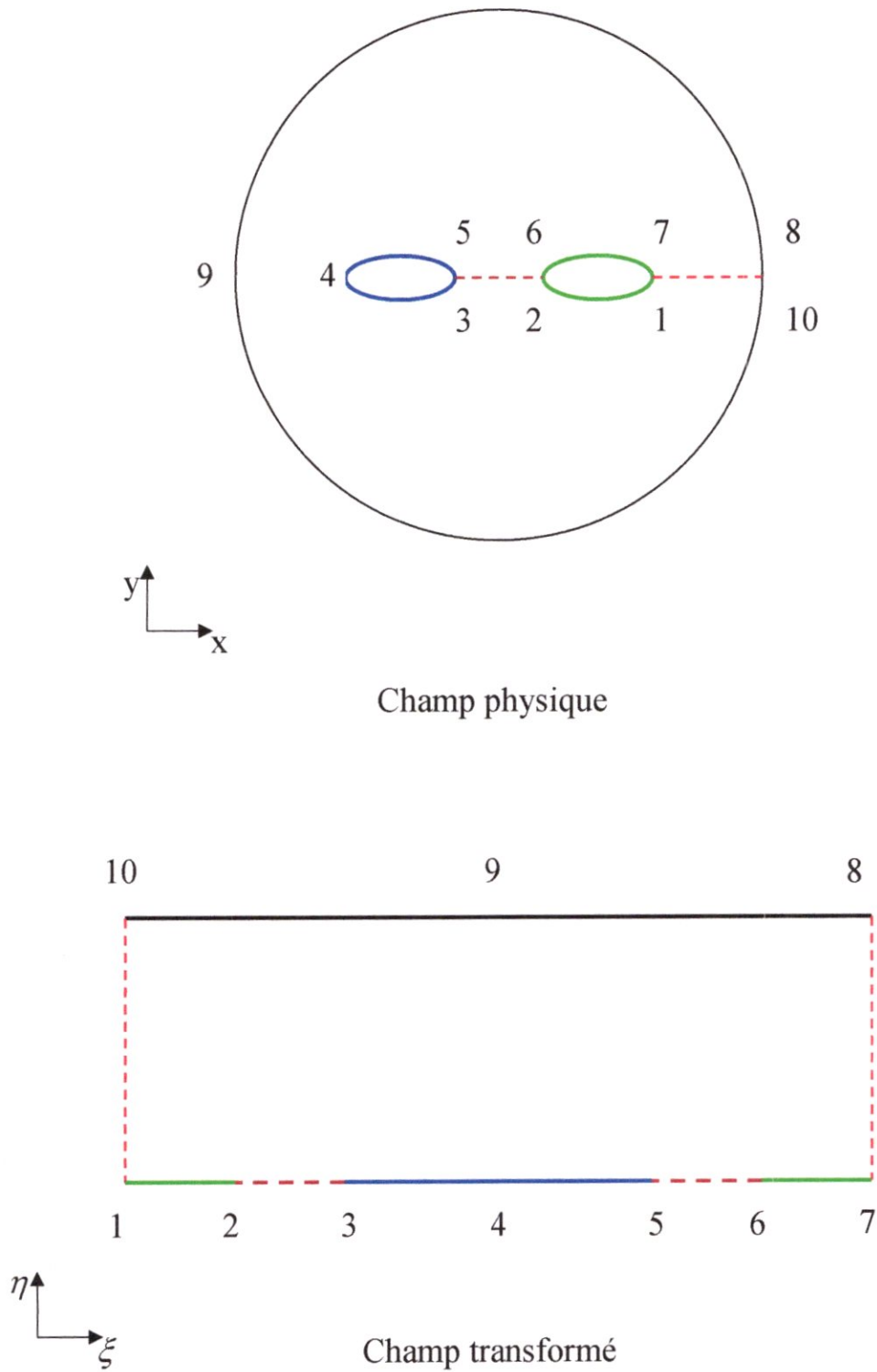
Pour cela, la première étape consiste à choisir les points localisés sur les frontières (fictives ou réelles) du domaine physique, qui correspondent aux extrémités du champ transformé (les points sommets du rectangle).

Pour les domaines doublement connexes, les segments correspondant à la frontière externe et au contour de l'obstacle sont représentés sur deux cotés opposés du champ transformé . Les deux autres cotés du rectangle correspondent, dans ce cas, à des segments de coupure (Figure.II.2)

Pour les domaines multi-connexes, le contour d'un obstacle ainsi que la frontière externe peuvent correspondre à un ou plusieurs segments dans le champ transformé. Ces segments ainsi que ceux des coupures peuvent être représentés soit sur plusieurs cotés soit sur le même coté du rectangle (Figure.II.3). Dans ce cas également, l'égalité du nombre de points sur les deux cotés opposés du rectangle est toujours vérifiée. Les segments de coupure d'une même paire sont positionnés nécessairement sur le même coté du rectangle ou sur deux cotés opposés.



**Figure.II.2. Transformation d'un domaine doublement connexe.**



**Figure.II.3. Transformation d'un domaine multi-connecte**

### II.3. Résolution numérique :

La résolution du système (II.2) est effectuée dans le champ transformé aux coordonnées curvilignes  $(\xi, \eta)$ . Le domaine discret est un rectangle monobloc.

Les segments sur les cotés correspondent aux frontières des obstacles et à la frontière du champ physique. Ils peuvent aussi correspondre à des frontières fictives obtenues par introduction d'une ou plusieurs coupures dans le domaine d'étude.

Notons que le domaine transformé est adimensionné en prenant les pas  $\Delta\xi = \Delta\eta = 1$ , les variables indépendantes  $\xi$  et  $\eta$  se réduisent alors à des simples indices  $i, j$ .

#### II.3.1. Discrétisation des équations :

Les équations aux dérivées partielles sont approchées par des équations algébriques, en discrétisant les opérateurs de dérivation par des schémas aux différences finies centrées d'ordre 2, nous obtenons les équations suivantes pour  $x$  (de même pour  $y$ ) :

$$\begin{aligned} \alpha(X_{i+1,j} - 2X_{i,j} + X_{i-1,j}) - 0.5\beta(X_{i+1,j+1} - X_{i-1,j+1} - X_{i+1,j-1} + X_{i-1,j-1}) + \gamma(X_{i,j+1} - 2X_{i,j} + X_{i,j-1}) \\ + 0.5\delta P(X_{i+1,j} - X_{i-1,j}) + 0.5\delta Q(X_{i,j+1} - X_{i,j-1}) = 0 \end{aligned} \quad (\text{II.5})$$

avec :

$$\alpha = 0.25[(X_{i,j+1} - X_{i,j-1})^2 + (Y_{i,j+1} - Y_{i,j-1})^2] \quad (\text{II.6})$$

$$\beta = 0.25[(X_{i+1,j} - X_{i-1,j})(Y_{i,j+1} - Y_{i,j-1}) + (Y_{i+1,j} - Y_{i-1,j})(X_{i,j+1} - X_{i,j-1})]$$

$$\gamma = 0.25[(X_{i+1,j} - X_{i-1,j})^2 + (Y_{i+1,j} - Y_{i-1,j})^2]$$

$$\delta = \frac{[(X_{i+1,j} - X_{i-1,j})(Y_{i,j+1} - Y_{i,j-1}) - (X_{i,j+1} - X_{i,j-1})(Y_{i+1,j} - Y_{i-1,j})]^2}{16}$$

Pour :  $i$  variant de 2 à  $I_{\max} - 1$  et  $J$  de 2 à  $J_{\max} - 1$ .

### II .3.2. Algorithme de résolution :

Les équations algébriques discrètes obtenues sont non linéaires ; un processus de calcul itératif est donc nécessaire. Un certain nombre d'algorithmes peuvent être utilisés pour résoudre ces équations, entre autres les méthodes SOR et ADI.

Pour notre étude nous avons choisi la méthode de surrelaxation SOR par points.

A l'aide de cette méthode, l'expression du nième +1 itération de x ou de y, au nœud (i , j) s'écrit :

$$X_{i,j}^{n+1} = (1 - \omega_{opt})X_{i,j}^n + \omega_{opt} \frac{R_{X_{i,j}}^{n+1}}{2(\alpha + \gamma)} \quad (\text{II.7})$$

$$Y_{i,j}^{n+1} = (1 - \omega_{opt})Y_{i,j}^n + \omega_{opt} \frac{R_{Y_{i,j}}^{n+1}}{2(\alpha + \gamma)}$$

avec :  $\omega_{opt}$  paramètre d'accélération de la convergence de la méthode SOR.

$R_{X_{i,j}}^{n+1}$  et  $R_{Y_{i,j}}^{n+1}$  sont les résidus, tel que :

$$\begin{aligned} R_X - 2x(i,j)(\alpha + \gamma) &= 0 \\ R_Y - 2y(i,j)(\alpha + \gamma) &= 0 \end{aligned} \quad (\text{II.8})$$

et

$$\begin{aligned} R_X &= \alpha(X_{i+1,j} + X_{i-1,j}) + 0.5\beta(X_{i+1,j+1} - X_{i+1,j-1} - X_{i-1,j+1} + X_{i-1,j-1}) + \gamma(X_{i,j+1} + X_{i,j-1}) \\ &+ 0.5\delta P(X_{i+1,j} - X_{i-1,j}) + 0.5\delta Q(X_{i,j+1} + X_{i,j-1}) \end{aligned} \quad (\text{II.9})$$

de même pour  $R_Y$ .

### II.3.3.Choix de maillage initial :

Le choix du maillage initial (x,y) avec lequel démarre le processus itératif est fondamental dans la mesure où il accélère la convergence du système non linéaire vers la solution optimale. Pour une compatibilité du maillage avec les conditions aux frontières, la détermination, du maillage initial à partir des coordonnées sur les frontières s'avère nécessaire.

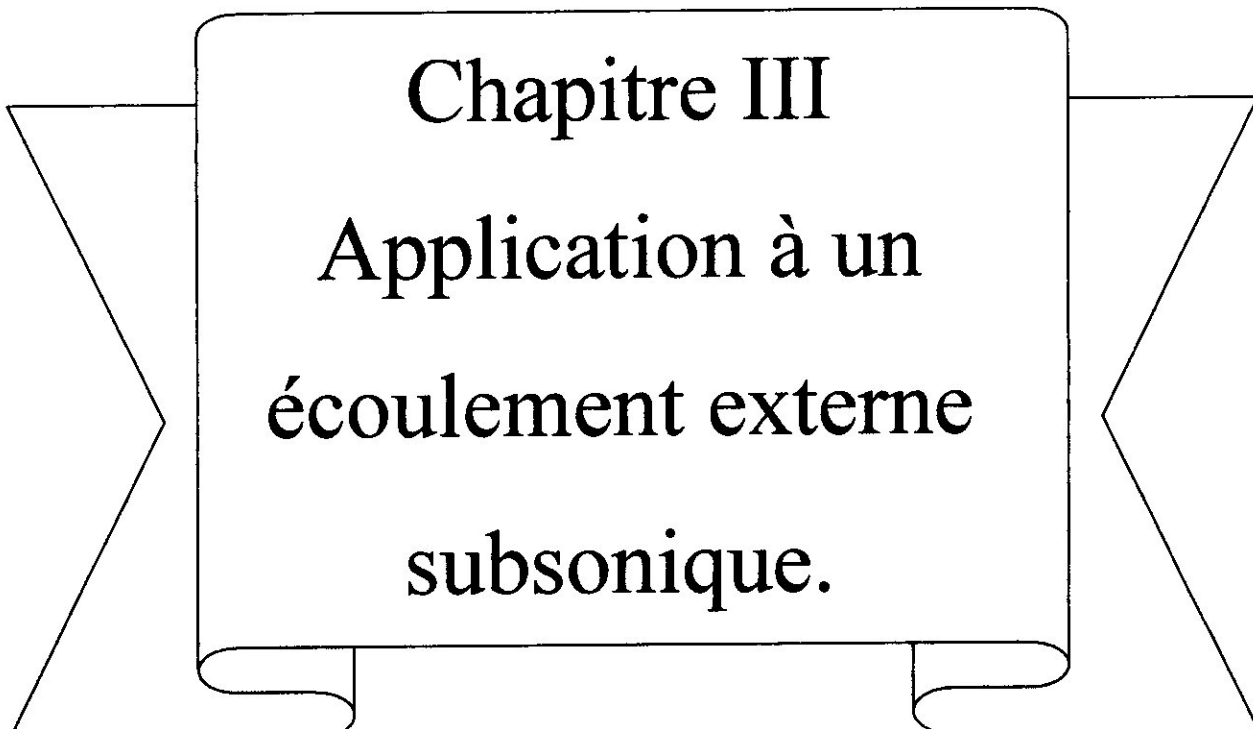
Pour notre travail nous avons retenus comme vecteur initial, le maillage généré par la technique de deux parois.

### II.3.4.Test de convergence :

Les itérations de système (II.7) sont stoppées à la convergence, le critère de convergence est donné par :

$$\text{Max} \left( \left| \frac{X_{i,j}^{k+1} - X_{i,j}^k}{X_{i,j}^{k+1}} \right|, \left| \frac{Y_{i,j}^{k+1} - Y_{i,j}^k}{Y_{i,j}^{k+1}} \right| \right) \leq 10^{-4} \quad (\text{II.10})$$





Chapitre III  
Application à un  
écoulement externe  
subsonique.

Dans ce chapitre nous présentons l'application de la méthode de génération de maillage, développée précédemment, à un écoulement d'air subsonique autour d'un profil d'aile, pour déterminer les caractéristiques aérodynamiques.

### III.1. Etude théorique d'un écoulement de fluide :

#### III.1.1. Equations générales du mouvement d'un fluide :

Pour décrire le mouvement d'un fluide tel que l'air on considère l'ensemble des équations suivantes :

- Equation de continuité (loi de conservation de la masse) :

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \vec{\nabla} \cdot (\rho \vec{V}) = 0 \quad (III.1)$$

- Equation d'Euler (loi de conservation de la quantité de mouvement) :

$$\frac{d(\rho \vec{V})}{dt} = \rho \vec{F} - \vec{\nabla} P \quad (III.2)$$

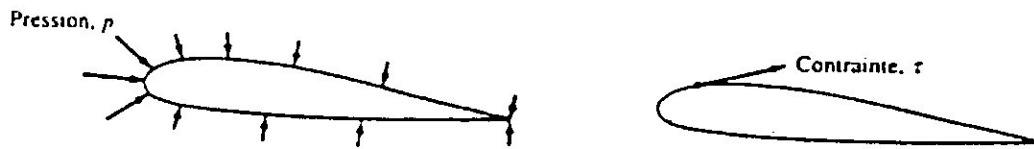
- Equation de l'énergie (loi de conservation de l'énergie) :

$$a_{\infty}^2 + \frac{\gamma - 1}{2} V_{\infty}^2 = a^2 + \frac{\gamma - 1}{2} V^2 \quad (III.3)$$

#### III.1.2. Forces et moments aérodynamiques :

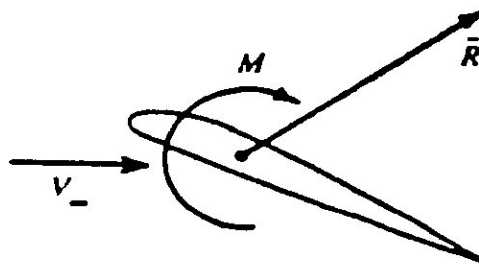
Deux causes fondamentales sont à la source des forces et des moments aérodynamiques sur un corps tel qu'un profil aérodynamique (Fig III.1) :

- la distribution de la pression sur la surface du corps ;
- la distribution des efforts de frottement sur la surface du corps.



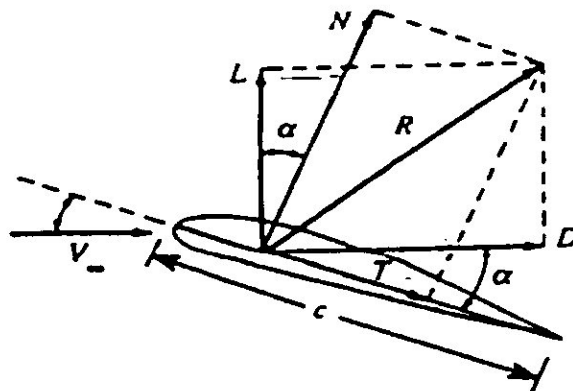
**Figure.III.1. Pression et contrainte de cisaillement.**

La pression,  $p$ , s'exerce selon la normale sur chaque élément de surface tandis que la contrainte de cisaillement,  $\tau$ , agit selon la tangente à la surface. L'intégration des distributions de la pression et de la contrainte sur la surface complète du corps conduit à une résultante aérodynamique, notée  $\vec{R}$ , et à un moment de tangage, noté  $M$ , sur le corps (Fig.III.2).



**Figure.III.2. Résultante aérodynamique et moment de tangage.**

On peut exprimer les forces aérodynamiques par rapport à deux repères : l'un est lié à la vitesse du fluide et appelé « repère Eiffel », l'autre est lié au corps et appelé « repère Lilienthal » (Fig.III.3).



**Figure.III.3. Repères Eiffel et Lilienthal.**

Si on définit l'angle d'attaque (ou d'incidence),  $\alpha$ , comme l'angle entre la corde  $C$  et la vitesse relative  $V_\infty$ , on obtient alors les correspondances suivantes entre les forces :

$$L = N \cos \alpha - T \sin \alpha \quad (\text{III.4})$$

$$D = N \sin \alpha + T \cos \alpha$$

A partir de la pression dynamique :

$$q_\infty = \frac{1}{2} \rho_\infty V_\infty^2 \quad (\text{III.5})$$

on peut définir les coefficients :

de la portance :

$$C_L = \frac{L}{q_\infty S},$$

de la traînée :

$$C_D = \frac{D}{q_\infty S},$$

de la force normale :

$$C_N = \frac{N}{q_\infty S},$$

de la force axiale :

$$C_A = \frac{T}{q_\infty S},$$

et de moment de tangage :

$$C_M = \frac{M}{q_\infty Sl}.$$

Où  $S$  et  $l$  sont respectivement la surface de référence et la longueur de référence.

### III.2. Hypothèses :

Considérons l'écoulement bidimensionnel, stationnaire et irrotationnel d'un fluide parfait (homogène, incompressible et non visqueux). On supposera de plus qu'il n'y a pas de décollement de l'écoulement de la surface du corps.

La bidimensionalité de l'écoulement est assurée pour une section d'aile assez loin des extrémités, afin de négliger les effets de bord.

L'hypothèse d'irrotationnalité, qui suppose que le fluide part de l'état de repos ou d'écoulement uniforme sous l'influence de forces dérivant d'un potentiel.

L'écoulement résultant à chaque instant est alors irrotationnel.

### III.3. Equations de l'écoulement :

L'étude de cet écoulement consiste essentiellement à résoudre l'équation de **Laplace** pour la fonction de courant  $\Psi$  :

$$\frac{\partial^2 \Psi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \Psi}{\partial y^2} = 0 \quad (\text{III.6})$$

avec les conditions aux frontières :

- Sur la frontière de l'obstacle :

$$\Psi(x, y) = \text{cte}$$

- A l'infini :

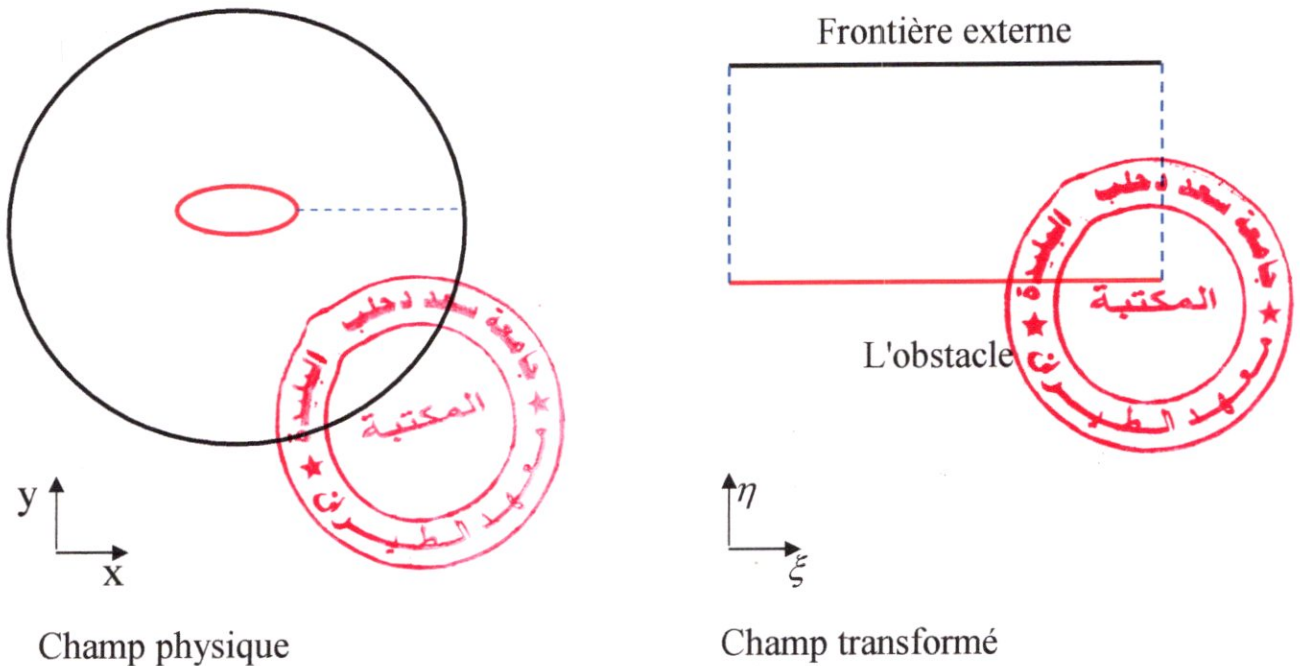
dans le cas générale, l'écoulement arrive avec une vitesse  $V_\infty$  et incidence  $\theta$ , d'où :

$$\Psi(x, y) = y \cos \theta - x \sin \theta$$

La fonction de courant  $\Psi(x, y)$  est adimensionnée relativement à la corde  $C$  du profil d'aile et à la vitesse  $V_\infty$  du fluide à l'infini.

La frontière externe qui délimite le domaine physique est prise de forme  $O$  (circulation).

La résolution du système précédent s'effectue dans le champ transformé  $(\xi, \eta)$  sur le maillage généré. Par conséquent, le système, composé de l'équation physique et des conditions aux frontières, est transformé dans le champ des coordonnées curvilignes  $(\xi, \eta)$ .



**Figure.III.4. Le champ physique et le champ transformé.**

L'équation de Laplace en  $\Psi$  est transformée comme suit :

$$\alpha \Psi_{\xi\xi} - 2\beta \Psi_{\xi\eta} + \gamma \Psi_{\eta\eta} + \sigma \Psi_{\eta} + \tau \Psi_{\xi} = 0 \quad (\text{III.7})$$

où  $\alpha, \beta, \gamma, \sigma$  et  $\tau$  sont des coefficients obtenus lors de la transformation (Annexe-A-).

Avec les conditions aux frontières :

- Sur la frontière de l'obstacle :

La frontière de l'obstacle coïncide avec la ligne coordonnée  $\eta = \eta_1$ , soit

$$\Psi(\xi, \eta) = \Psi_0 \quad \text{avec } \Psi_0: \text{ valeur à déterminer.}$$

- Sur la frontière externe :

La frontière externe coïncide avec la ligne coordonnée  $\eta = \eta_2$

$$\Psi(\xi, \eta) = y(\xi, \eta_2) \cos \theta - x(\xi, \eta_2) \sin \theta$$

### III.4. Condition de Kutta-Joukowski :

Cette condition provient de l'étude de l'écoulement autour du bord de fuite observé pour la première fois par le mathématicien allemand Wilhelm Kutta en 1902 et qui permet de trouver une valeur unique de la circulation au bord de fuite du profil.

Afin d'examiner l'écoulement stationnaire d'un fluide parfait incompressible, nous tiendrons compte de deux formes différentes pour la géométrie du bord de fuite du profil et nous exprimerons la condition de Kutta comme suit :

a) Pour un profil se terminant par un dièdre, le bord de fuite lui-même est un point d'arrêt. Soit les vitesses de l'écoulement au bord de fuite, BF,  $V_e$  tangente à l'extrados et  $V_i$  tangente à l'intrados ; on a deux vitesses de directions différentes en un même point BF, ce qui n'est possible que si les deux vitesses sont nulles et que le point BF est un point d'arrêt où  $V_e = V_i = 0$ .

b) Pour un profil se terminant par un point de rebroussement, la vitesse à l'extrados et à l'intrados au bord de fuite a la même valeur finie. Dans ce cas, les vitesses  $V_e$  et  $V_i$  ont la même direction au point BF et ont toutes deux une valeur finie. Cependant, la pression au bord de fuite a une valeur unique  $P_{BF}$  et l'équation de Bernoulli, appliquée à l'extrados et à l'intrados du profil dans la proximité du bord de fuite, conduit à :

$$p_{BF} + \frac{1}{2} \rho V_e^2 = p_{BF} + \frac{1}{2} \rho V_i^2$$

Il en résulte que  $V_e = V_i$ , [4].

### III.5. Détermination de champ de vitesse :

Dans le champ de calcul  $(\xi, \eta)$ , les composantes  $(u, v)$  de la vitesse  $\vec{V}$  s'expriment par (Annexe-A-):

$$u = \frac{\partial \Psi}{\partial y} = (x_{\xi} \Psi_{\eta} - x_{\eta} \Psi_{\xi}) / J \quad (\text{III.8})$$

$$v = -\frac{\partial \Psi}{\partial x} = (y_{\xi} \Psi_{\eta} - y_{\eta} \Psi_{\xi}) / J$$

où  $J$  constitue le Jacobien de la transformation.

La paroi de l'obstacle confondue avec la ligne coordonnée  $\eta = \eta_1$ , correspond à une ligne de courant, d'où  $\Psi_{\xi} = 0$ . De là, nous obtenons :

$$u = x_{\xi} \Psi_{\eta} / J \quad (\text{III.9})$$

$$v = y_{\xi} \Psi_{\eta} / J$$

Dans le champ  $(\xi, \eta)$ , la vitesse tangentielle est obtenue par projection de  $\vec{V}(u, v)$  sur le vecteur unitaire tangent à la surface de l'obstacle.

$$\vec{V}_t = \vec{V} \cdot \vec{\tau} \quad (\text{III.10})$$

avec :  $\vec{\tau}$  vecteur tangent unitaire donné par (Annexe-A-) :

$$\vec{\tau} = (x_{\xi} \vec{i} + y_{\xi} \vec{j}) / \sqrt{\gamma} \quad (\text{III.11})$$

d'où, l'expression de la vitesse tangentielle en fonction de  $u, v$  :

$$\vec{V}_t = (ux_{\xi} \vec{i} + vy_{\xi} \vec{j}) / \sqrt{\gamma} \quad (\text{III.12})$$

et en fonction de  $\Psi$  :

$$\vec{V}_t = \Psi_{\eta} \sqrt{\gamma} / J \quad (\text{III.13})$$



La dérivée  $\Psi_\eta$  au obstacle est calculée par un schéma aux différences finies décentrées d'ordre 2 (Annexe-B-).

Le bord de fuite étant un point de discontinuité de la vitesse tangentielle  $\vec{V}_t$ , le calcul de celle-ci s'effectue par extrapolation sur l'intrados et l'extrados.

L'extrapolation choisie est linéaire, donnant[2] :

- Du coté de l'intrados :

$$V_t(1) = 2V_t(2) - V_t(3) \quad (\text{III.14})$$

- Du coté de l'extrados :

$$V_t(I_{\max}) = 2V_t(I_{\max} - 1) - V_t(I_{\max} - 2) \quad (\text{III.15})$$

### III.6. Caractéristiques aérodynamiques des profils d'ailes :

#### III.6.1. Coefficient de pression :

Le coefficient de pression (ou le nombre d'Euler, Eu) permet d'indiquer les pressions sous forme adimensionnelle. Il s'agit du rapport entre les forces de pression et les forces d'inertie [4]:

$$E_u = C_p = \frac{\Delta p}{\left( \frac{1}{2} \rho V_\infty^2 \right)} \quad (\text{III.16})$$

où :  $\Delta p = p - p_\infty$

$p$  = pression local .

L'application de l'équation de Bernoulli donnée par :

$$p + \frac{1}{2} \rho V^2 = cte \quad (\text{III.17})$$

entre l'infini et un point quelconque sur la frontière de l'obstacle donne :

$$\begin{aligned}
 p_\infty + \frac{1}{2}\rho V_\infty^2 &= p + \frac{1}{2}\rho V_t^2 \\
 \Rightarrow p - p_\infty &= \frac{1}{2}\rho V_\infty^2 \left(1 - \frac{V_t^2}{V_\infty^2}\right) \\
 \Rightarrow \frac{p - p_\infty}{\frac{1}{2}\rho V_\infty^2} &= 1 - \frac{V_t^2}{V_\infty^2}
 \end{aligned} \tag{III.18}$$

$$(III.16) \text{ et } (III.18) \Rightarrow C_P = 1 - \frac{V_t^2}{V_\infty^2} = 1 - \frac{\gamma}{J^2} \Psi_\eta^2.$$

En fin, on peut écrire :

$$C_P = 1 - \frac{\gamma}{J^2} \Psi_\eta^2. \tag{III.19}$$

### III.6.2. Coefficients de portance et de traînée :

Dans un fluide parfait, la force qui apparaît sur l'obstacle se réduit à la force de pression exercée par le fluide, les forces de viscosité et de gravité étant supposées négligeables. En conséquence, nous avons sous forme adimensionnelle [2] :

$$\vec{F} = -\oint C_p \vec{n} dr \tag{III.20}$$

où  $r$  est l'abscisse curviligne et  $\vec{n}$  la normale à la surface de l'obstacle.

On peut aussi écrire :

$$\begin{aligned}
 \vec{F} &= C_L \vec{j}_1 + C_D \vec{i}_1 && \text{dans } (\vec{i}_1, \vec{j}_1) \text{ (repère Eiffel)}. \\
 \vec{F} &= C_N \vec{j} + C_A \vec{i} && \text{dans } (\vec{i}, \vec{j}) \text{ (repère Lilienthal)}.
 \end{aligned} \tag{III.21}$$

En plus, on peut montrer (Annexe-A-) que nous avons aussi :

$$\vec{n} = (-y_\xi \vec{i} + x_\eta \vec{j}) / \sqrt{\gamma} \quad (\text{III.22})$$

$$dr = \sqrt{\gamma} d\xi$$

En fin, on détermine :

$$C_L = - \oint C_{px} d\xi \quad (\text{III.23})$$

$$C_D = \oint C_{py} d\xi$$

### III.6.3. Coefficient de moment :

On le définit par :

$$C_M = \frac{1}{C} \left( \oint C_{px} \vec{n} \vec{j} dr - \oint C_{py} \vec{n} \vec{i} dr \right) \quad (\text{III.24})$$

### III.6.4. Type de profils étudiés :

Les profils considérés dans ce travail sont de type NACA XXYY, ils sont symétriques par rapport à la ligne moyenne, le premier chiffre (X) représente la cambrure relative maximale en pourcentage de la corde, le deuxième indique la position de cette cambrure en pourcentage de la corde et les deux derniers chiffres (YY) représentent l'épaisseur relative maximale, toujours en pourcentage de la corde.

Par exemple, dans le cas du profil NACA4412 :

- le 4 représente la cambrure relative maximale (4 %) ;
- le 4 représente la position de la cambrure maximale (40 %) ;
- le 12 représente l'épaisseur relative maximale (12 %).

Dans le cas des profils symétriques de cette famille, on se sert de l'expression suivante pour calculer la forme géométrique [4] :

$$\pm Y_e = \frac{e}{0.2} \left( 0.2969\sqrt{x} - 0.1260x - 0.3537x^2 + 0.2843x^3 - 0.1015x^4 \right) \quad (\text{III.25})$$

où e représente l'épaisseur maximum du profil par rapport à la corde.

### III.7. Résolution numérique :

#### III.7.1. Discrétisation de l'équation :

Par application des schémas aux différences finies à l'équation (III.7) on obtient l'équation discrète suivante pour la fonction de courant  $\Psi$  :

$$\begin{aligned} \Psi_{i,j} = & \frac{\alpha}{2(\alpha + \gamma)} (\Psi_{i+1,j} + \Psi_{i-1,j}) - \frac{\beta}{4(\alpha + \gamma)} (\Psi_{i+1,j+1} - \Psi_{i+1,j-1} - \Psi_{i-1,j+1} + \Psi_{i-1,j-1}) \\ & + \frac{\gamma}{2(\alpha + \gamma)} (\Psi_{i,j+1} + \Psi_{i,j-1}) + \frac{\tau}{4(\alpha + \gamma)} (\Psi_{i+1,j} - \Psi_{i-1,j}) + \frac{\sigma}{4(\alpha + \gamma)} (\Psi_{i,j+1} - \Psi_{i,j-1}) \end{aligned} \quad (\text{III.26})$$

avec  $i$  varie de 2 à  $i_{\max} - 1$  et  $j$  de 2 à  $j_{\max} - 1$ .

Les opérateurs de dérivation de l'équation (III.7) sont également approchés à la coupure par des schémas aux différences finies d'ordre deux. Cependant, vu que la coupure est considérée comme frontière fictive, une transformation de ces schémas est alors nécessaire. Cette transformation, basée sur la vérification de la propriété de continuité à la coupure, est fonction de la disposition des segments de cette coupure sur les cotés du rectangle (champ transformé).

L'équation précédente, discrétisée à la coupure, est donnée pour le premier segment de coupure par :

$$\begin{aligned} \Psi_{i,j} = & \frac{\alpha}{2(\alpha + \gamma)} (\Psi_{2,j} + \Psi_{i_{\max}-1,j}) - \frac{\beta}{4(\alpha + \gamma)} (\Psi_{2,j+1} - \Psi_{2,j-1} - \Psi_{i_{\max}-1,j+1} + \Psi_{i_{\max}-1,j-1}) \\ & + \frac{\gamma}{2(\alpha + \gamma)} (\Psi_{1,j+1} + \Psi_{1,j-1}) + \frac{\tau}{4(\alpha + \gamma)} (\Psi_{2,j} - \Psi_{i_{\max}-1,j}) + \frac{\sigma}{4(\alpha + \gamma)} (\Psi_{1,j+1} - \Psi_{1,j-1}) \end{aligned} \quad (\text{III.27})$$

Pour  $i = 1$  et  $j$  allant de 2 à  $j_{\max} - 1$ .

La même discrétisation pour le deuxième segment de coupure ( $i = i_{\max}$ ), puisque les deux segments sont superposés.

### III.7.2. Algorithme de résolution :

Les équations discrétisées (III.26) et (III.27) de la fonction de courant  $\Psi$  sont résolues numériquement par la méthode de surelaxation (SOR) par points.

A l'aide de cette méthode, l'expression du nième +1 itération de  $\Psi$ , au nœud (i, j)

S'écrit :

$$\Psi_{i,j}^{n+1} = (1 - \omega_{opt}) \Psi_{i,j}^n + \omega_{opt} \Psi_{i,j}^n \quad (\text{III.28})$$

où :

$\omega_{opt}$  : Coefficient d'accélération de convergence de la méthode de surelaxation SOR.

$\Psi_{i,j}^n$  : Donnée par les équations (III.26) et (III.27).

La vérification de la convergence de la solution de  $\Psi$  est effectuée par le test suivant :

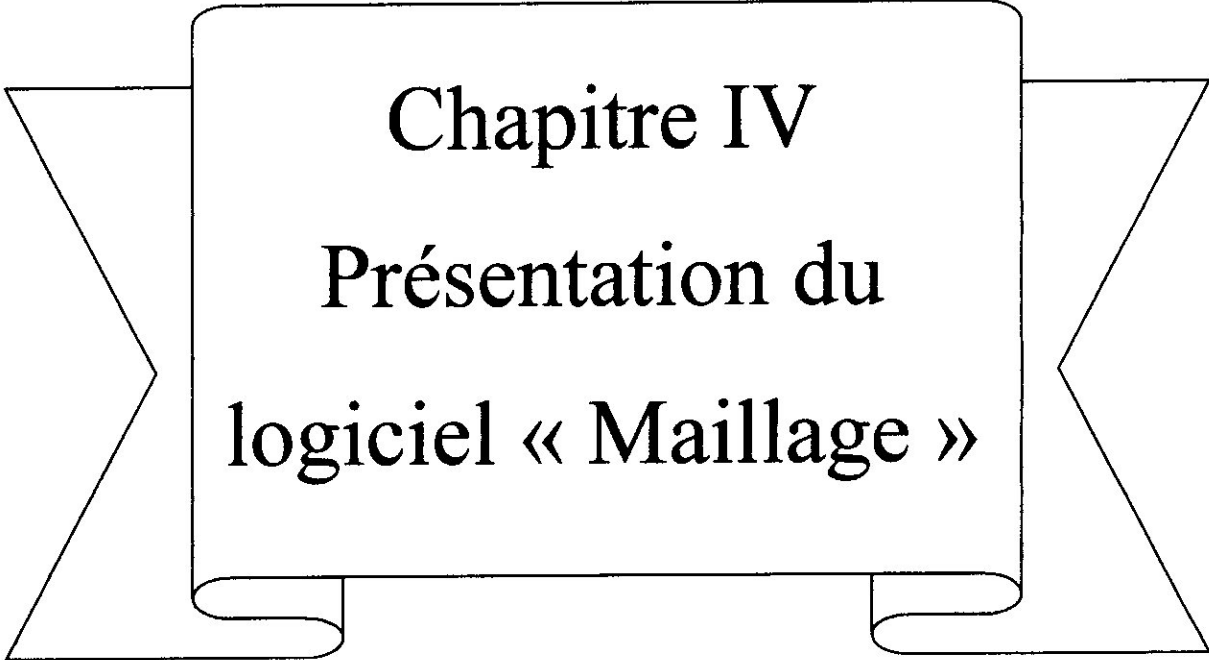
$$\text{Max} \left| \frac{\Psi_{i,j}^{n+1} - \Psi_{i,j}^n}{\Psi_{i,j}^{n+1}} \right| \leq 10^{-4} \quad (\text{III.29})$$

### III.7.3. Coefficients aérodynamiques :

Le système d'équations (III.23) des coefficients de portance et de traînée, et l'équation (III.24) de coefficient de moment sont résolus numériquement par la méthode de quadrature trapézoïdale, suivant le schéma qui suit :

$$\oint f d\xi = \frac{1}{2} (f(1,1) + f(\text{Im } ax, 1)) + \sum_{i=2}^{\text{Im } ax - 1} f(i, 1) \quad (\text{III.30})$$

Le contour de l'obstacle est confondu avec une ligne coordonnée  $\eta = \text{cte}$  correspondante à  $j = 1$ .



**Chapitre IV**  
**Présentation du**  
**logiciel « Maillage »**

Nous présentons dans cette partie de notre travail le code de calcul qu'on a élaboré, pour effectuer la génération de maillage et la résolution des équations liées au problème physique étudié.

Nous avons conçu a cette opération deux programmes informatiques édités en langage C++, l'un a consisté a développer l'algorithme de technique de génération de maillage exposé dans le chapitre 2 ainsi que les algorithmes des techniques algébriques adoptées pour la génération de maillage initial, dans un seul code appelé « Grid », tandis que, le deuxième programme qu'on a conçu, permet la résolution des équations physiques et que nous avons dénommés « SubFlow ».

## **IV.1. Présentation du code de génération de maillage « Grid » :**

### **IV.1.1. Structure général :**

Le code « Grid » qu'on a développé, est conçu suivant une structure modulaire. Cette dernière signifie qu'il est composé d'une partie principale assurant la gestion globale et d'un ensemble de modules ou sous-programmes.

Dans ce code, le déroulement des calcul est effectué en deux étapes principales de calcul de  $(x,y)$ . La première étape, qui consiste elle-même en plusieurs sous-programmes, permet la détermination des points  $(x,y)$  sur toute la frontière du domaine (frontière externe, frontières des obstacles et les coupures) en partant dans le sens contraire des aiguilles d'une montre. Ensuite et une fois les coordonnées de toute la frontière déterminées, on passe à la deuxième étape qui permet la détermination des points intérieurs de maillage.

L'exploitation de ce code peut être effectuée pour la génération des maillages indépendamment de la résolution des équations physiques.

### IV.1.2. Principaux modules :

Notre code « Grid » est constitué de cinq modules principaux gérés par un programme principal :

#### Module 1 :

Le sous-programme « Lregion », pour le calcul de la longueur d'une région spécifique, c'est-à-dire la longueur entre deux points de contrôle successifs sur la frontière, suivant x et y.

#### Module 2 :

Le sous-programme « Lcôte », pour le calcul de la longueur total de chaque côte, suivant x et y.

#### Module 3 :

Le sous-programme « Position », pour calculer les coordonnées (x, y) et déterminer les indices (i, j) de chaque point incrément sur la frontière.

#### Module 4 :

Le sous-programme « Minitial », pour générer le maillage initial.

#### Module 5 :

Le sous-programme «Poisson », pour déterminer la distribution des nœuds internes de maillage par résolution des équations de Poisson.

### IV.1.3. Entrée du code :

CHOIX : Choix de technique de génération de maillage.

N,M : Les dimensions des tableaux x et y .

NNS : Le nombre de points spécifiques sur toute la frontière.

XPC[NNS], YPC[NNS] : Les coordonnées des points spécifiques.

OMEGA : Le paramètre de relaxation du schéma itératif SOR.

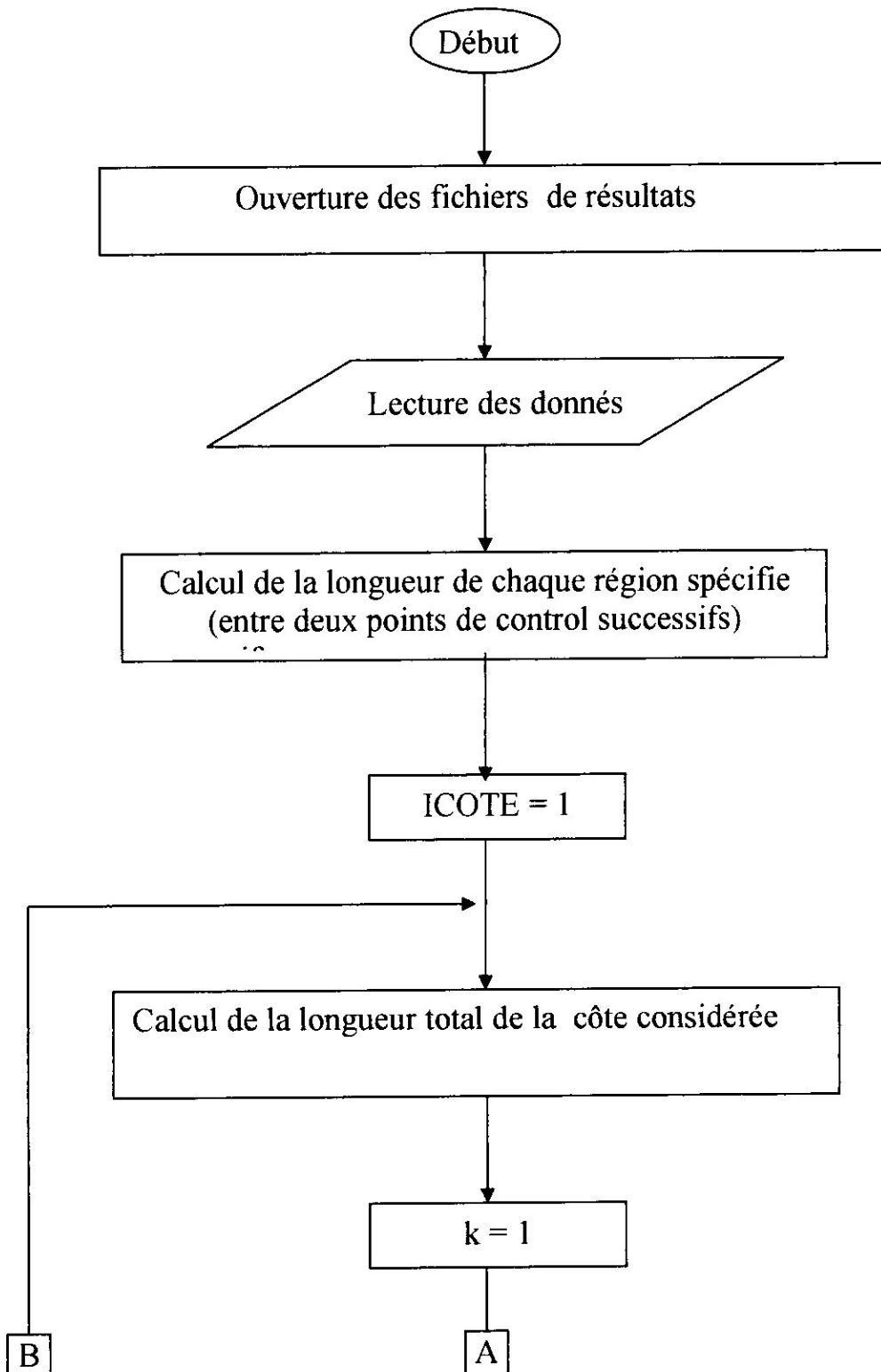
EPS : La précision voulu pour le schéma itératif SOR.

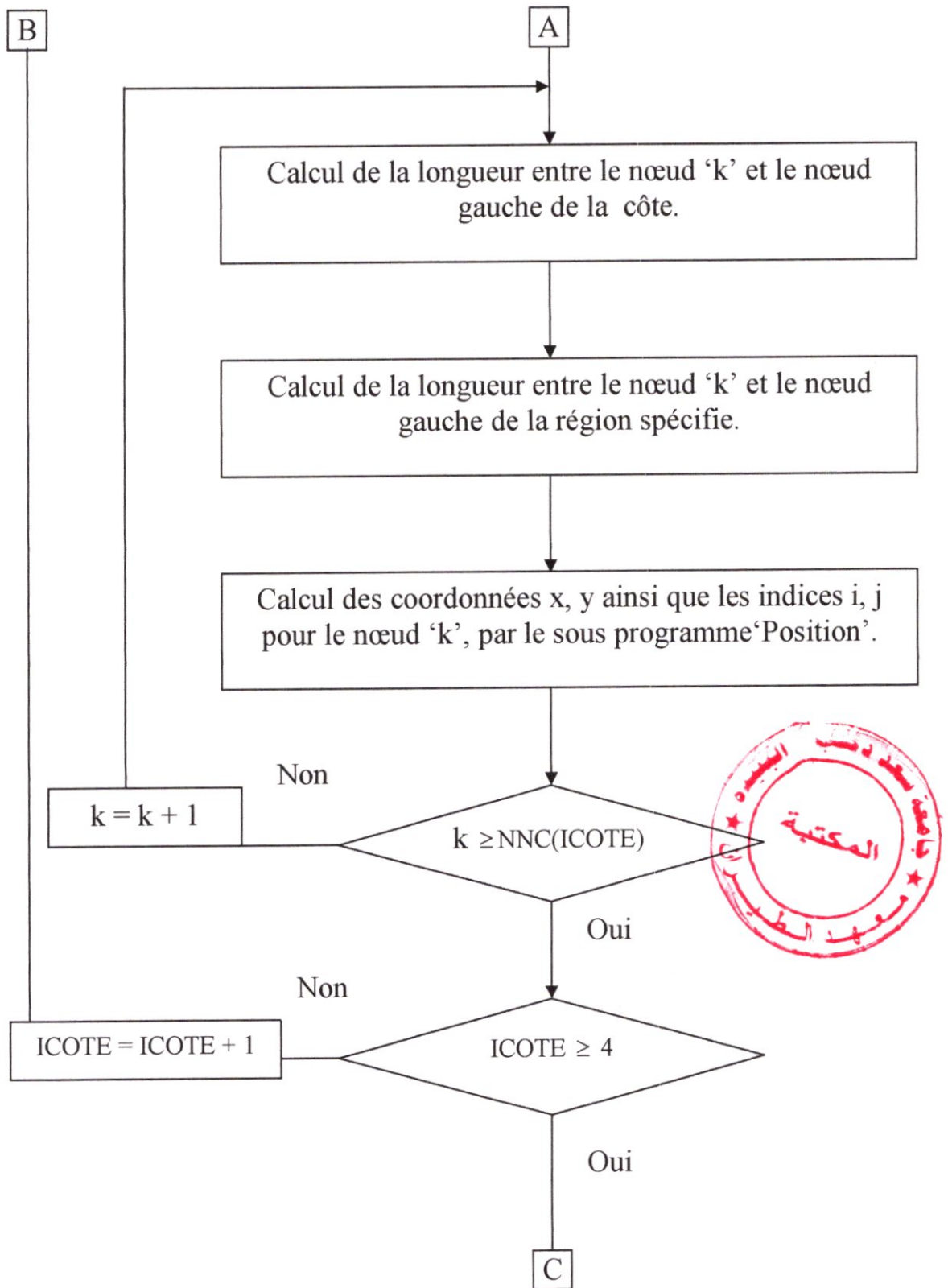
a1[4], b1[4] : Coefficients de la fonction de condensation Stretching pour chaque cote.

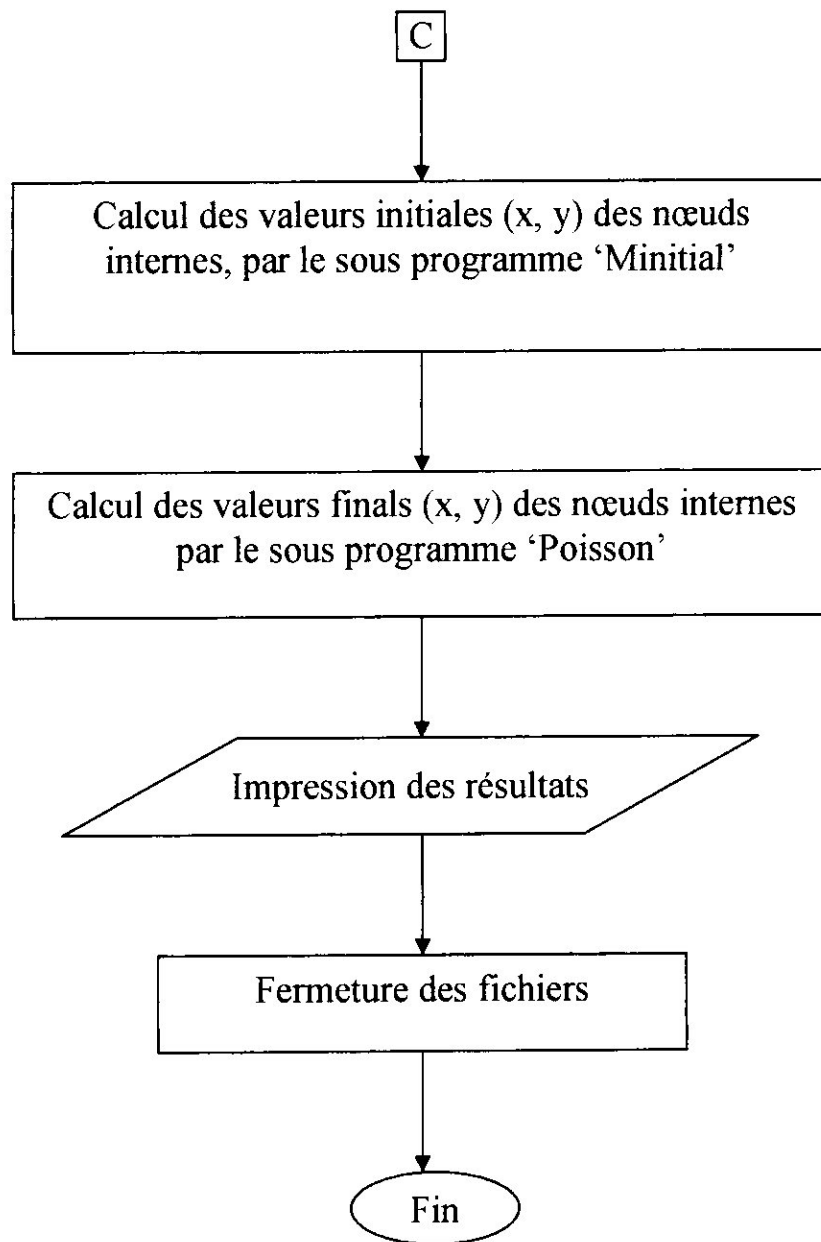


<i>L max</i>	}	: Données utilisées pour les fonctions de contrôle.
<i>M max</i>		
<i>LM</i>		
<i>AKSIP [LM]</i>		
<i>ETAP [LM]</i>		
<i>A[L max]</i>		
<i>B[M max]</i>		
<i>C[L max]</i>		
<i>D[M max]</i>		

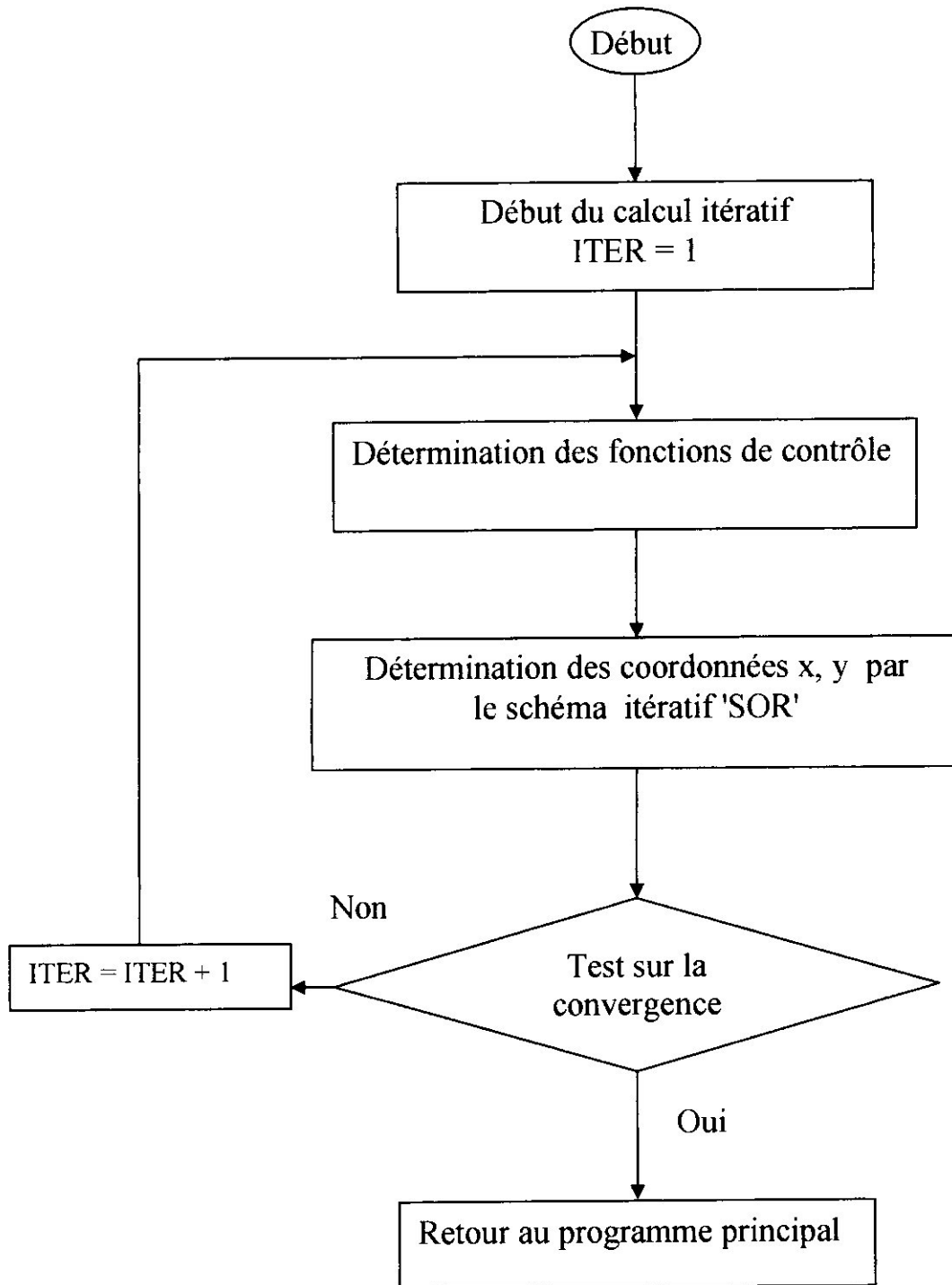
Le cheminement de calcul du code 'GRID' est résumé par l'organigramme suivant :

**Organigramme de calcul de code « Grid » :**





**Organigramme du sous-programme «Poisson » :**



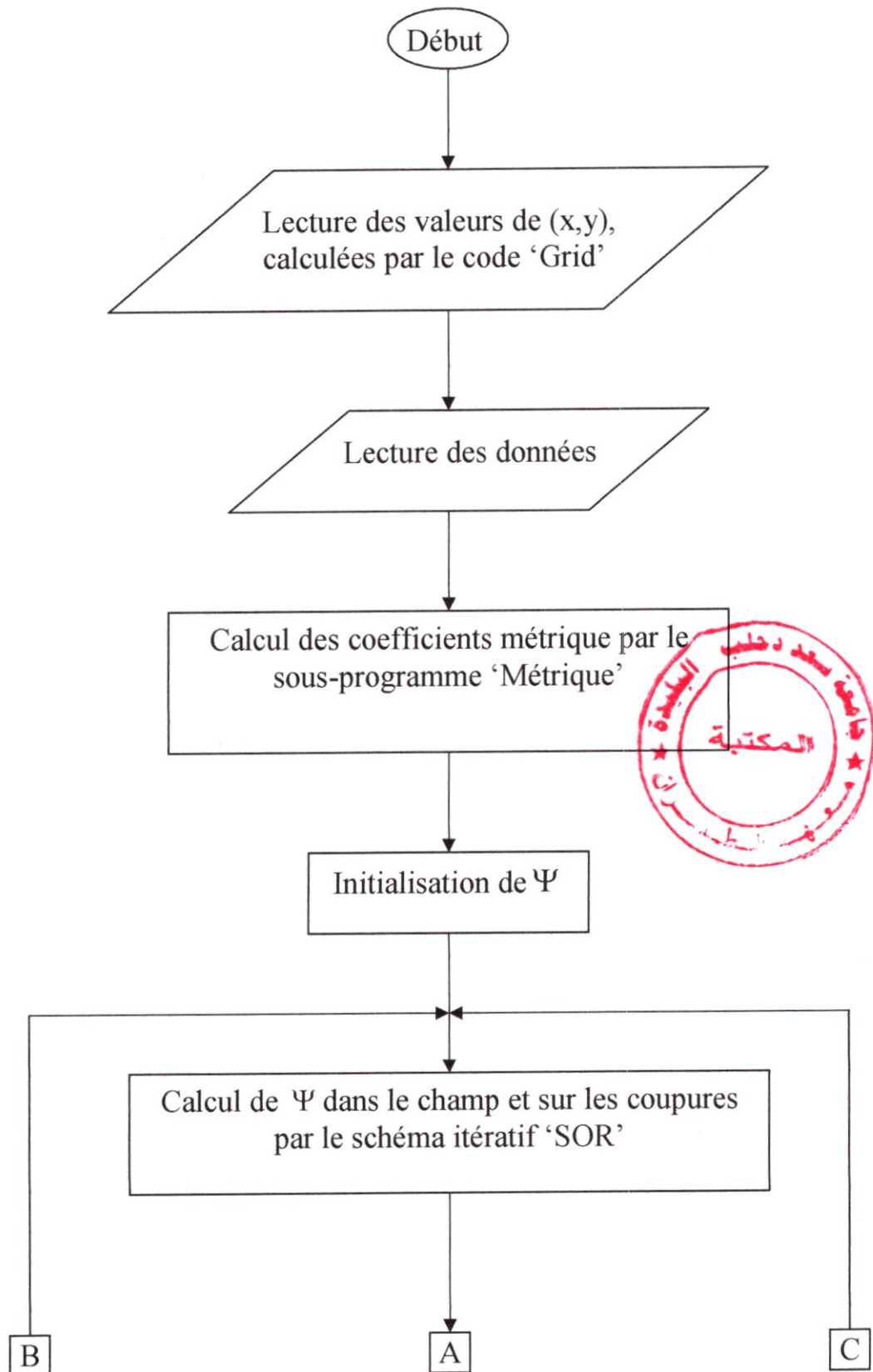
## IV.2. Présentation du code « Sub Flow » :

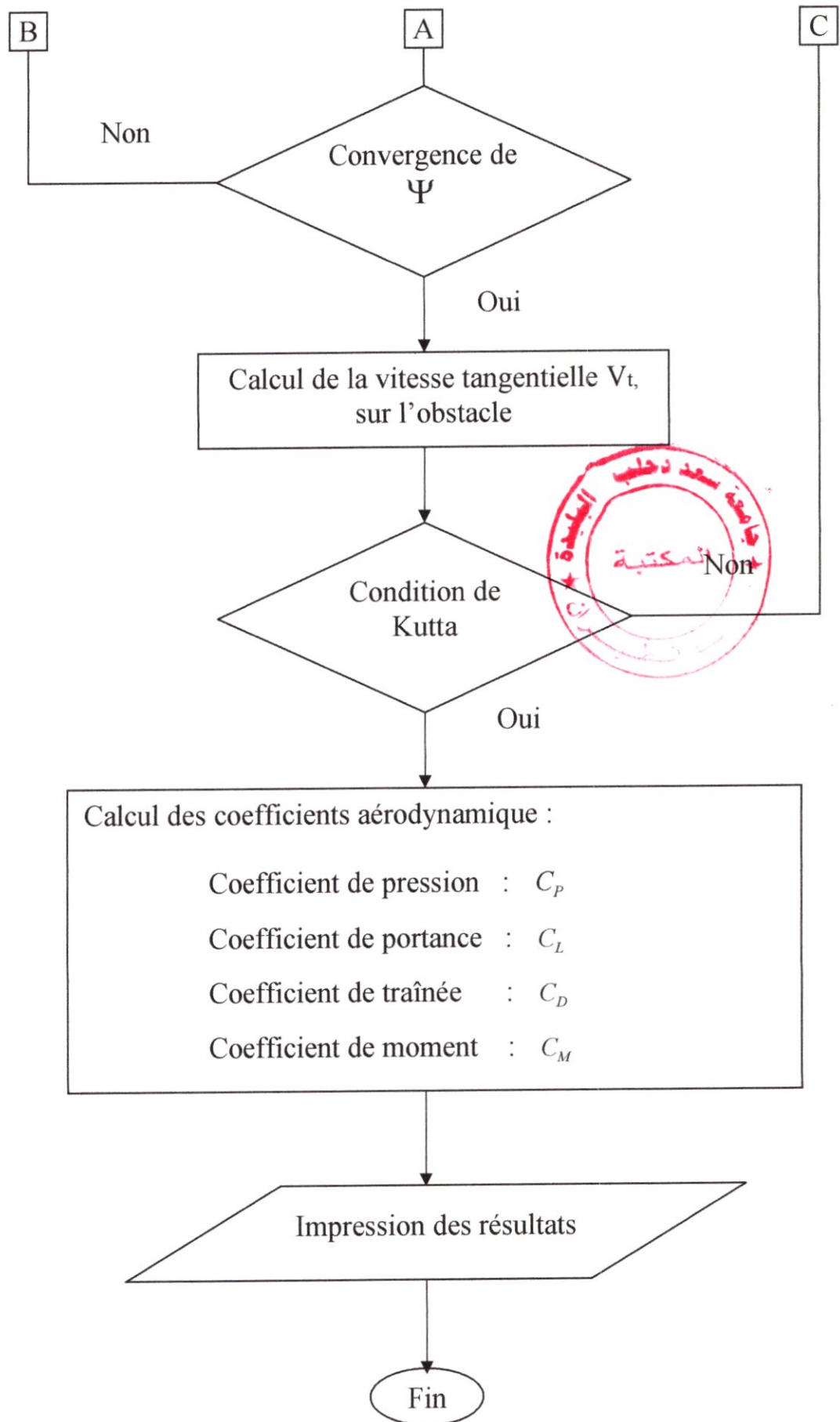
### IV.2.1. Structure général :

Le code 'SubFlow' qu'on a conçu permet la résolution de l'équation de courant  $\Psi$  dans le champ transformé par application de la méthode de génération de maillage, ainsi que la détermination des coefficients de portance et de traînée.

Ce code est composé de trois modules principaux, le premier permet de calculer les coefficients métriques aux différents points du maillage généré par le premier code, le calcul de ces coefficients est effectué par des schémas approchés aux différences finies. Ces schémas diffèrent les uns des autres suivant la position du point étudié, à l'intérieur de domaine physique, sur les coupures ou sur le contour des obstacles. Le deuxième module permet de calculer ' $\Psi$ ' à l'intérieur du domaine et sur les coupures par le schéma itératif 'SOR' et le troisième module permet de déterminer les coefficients de portance, de traînée et de moment.

Le cheminement de calcul du code 'SubFlow' est résumé par l'organigramme suivant :

**Organigramme de calcul de code « SubFlow » :**





# Chapitre V

## Analyse des résultats



Nous exposons, dans ce chapitre, quelques résultats que nous avons obtenus par utilisation de logiciel « Maillage » décrit dans le chapitre précédant, pour la génération de maillage et la détermination de l'écoulement potentiel incompressible stationnaire autour d'un profil d'aile.

La méthode de génération de maillage est mise en valeur par les maillages que nous avons générés pour des domaines d'études simplement connexes, doublement connexes ou multi-connexes. Nous présentons également les maillages obtenus par l'utilisation de la fonction de condensation. D'autre part le raffinement de maillage et l'influence de choix du maillage initiale à la convergence sont étudiés.

En fin une mise en valeur de la méthode de génération de maillage est effectuée par son application à un écoulement potentiel incompressible stationnaire autour d'un profil d'aile avec une configuration de la frontière externe du domaine de type « O ». Les résultats ont été comparés avec les résultats publiés dans la littérature.

## **V.1. Génération de maillage :**

### **V.1.1. Domaines d'étude :**

#### **V.1.1.1. Domaines simplement connexes :**

La méthode de génération de maillage est appliquée et testée sur plusieurs domaines simplement connexes de forme rectangulaire courbée qui représente l'écoulement interne dans une tuyère (Fig.V.1) ou dans une conduite (Fig.V.2).

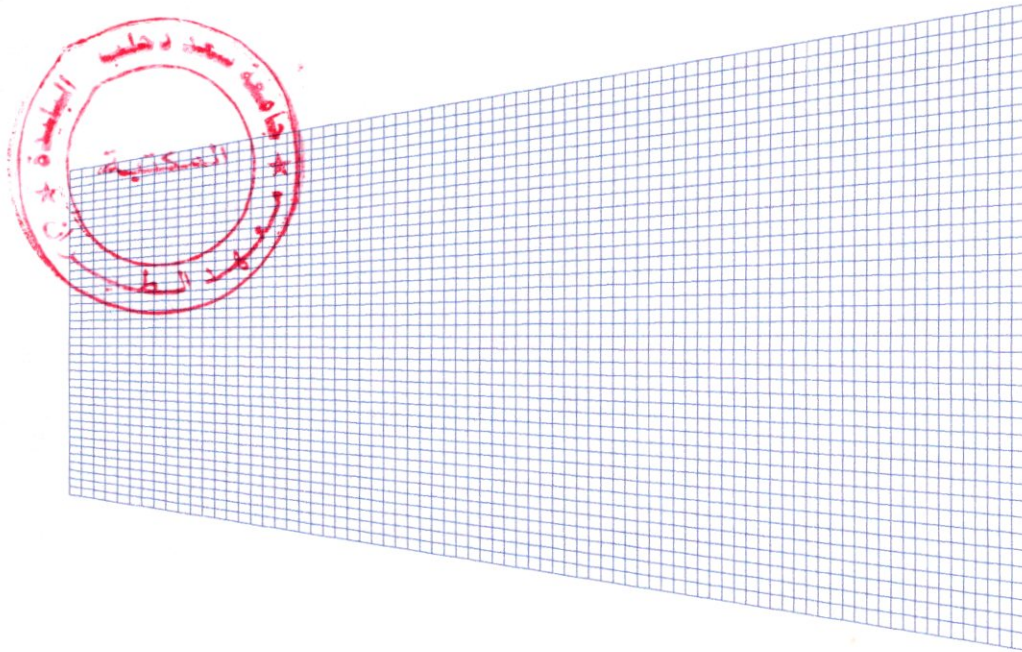
#### **V.1.1.2. Domaines doublement connexes :**

La génération de maillage est ensuite appliquée au domaines doublements connexes (à un obstacle), pour différentes formes géométriques d'obstacles ; forme cylindrique (Fig.V.3), forme d'un profil d'aile NACA0012 (Fig.V.4 ),(Fig.V.5) et NACA4412 (Fig.V.6).

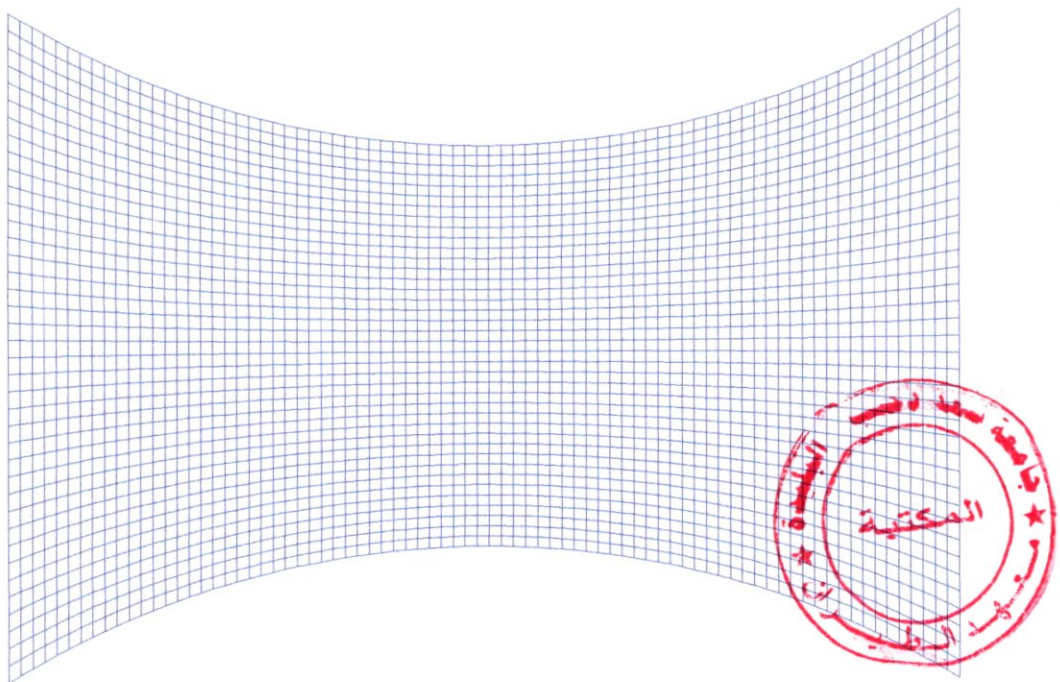
### **V .1.1.3. Domaines multi-connexes :**

Les domaines multi-connexes (à deux ou plusieurs obstacles) représentent en générale les champs où la génération de maillages réguliers peut s'avérer très difficile lorsqu'elle s'effectue par des méthodes autres que la méthode elliptique, en particulier par les méthodes algébriques.

Nous avons représenté dans la figure (Fig.V.7) L'écoulement autour d'une combinaison aile-empennage, puis l'écoulement autour de deux cylindres (Fig.V.8).

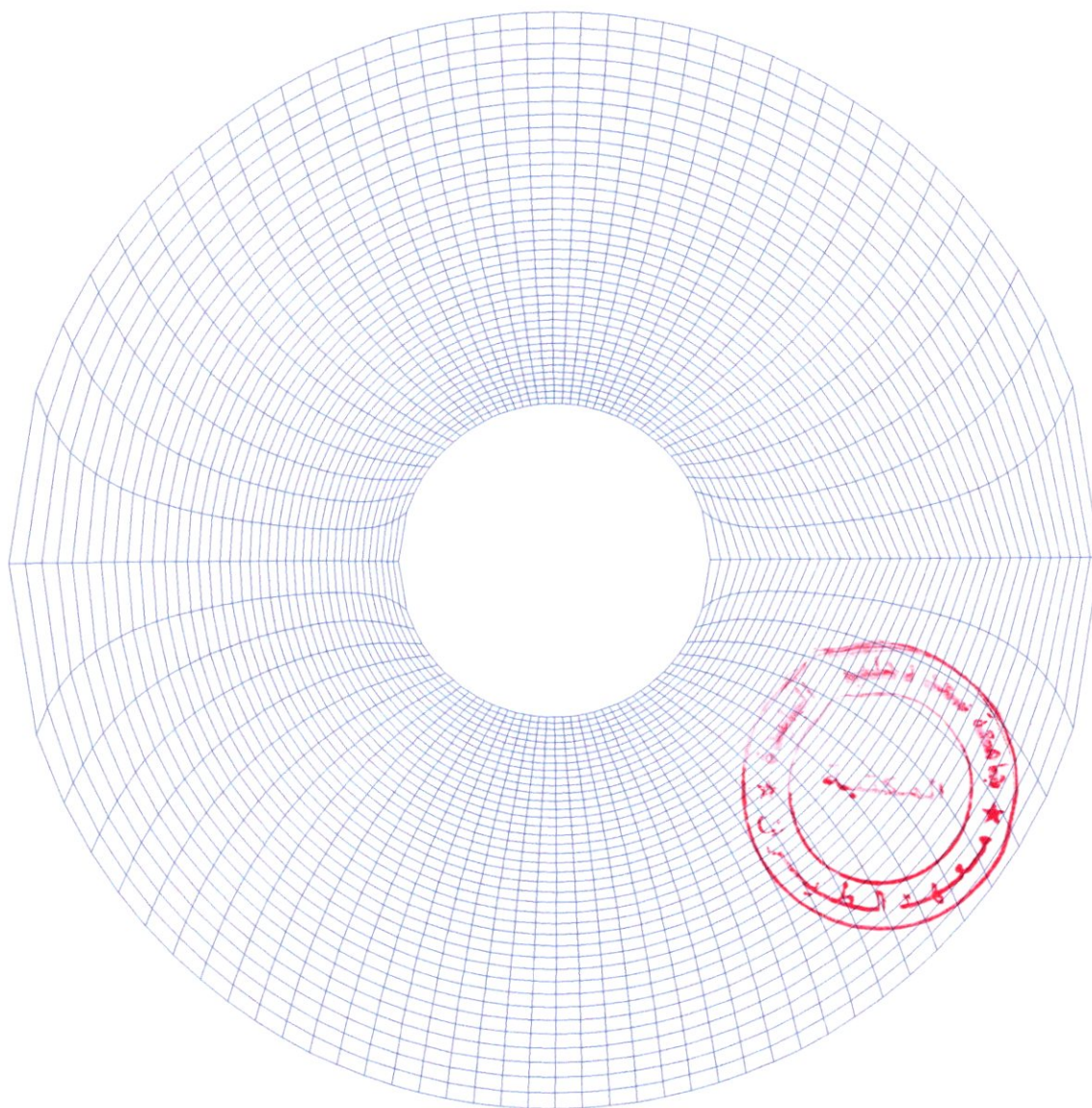


**Fig.V.1.Maillage d'un domaine simplement connexe  
(écoulement dans une tuyère)**

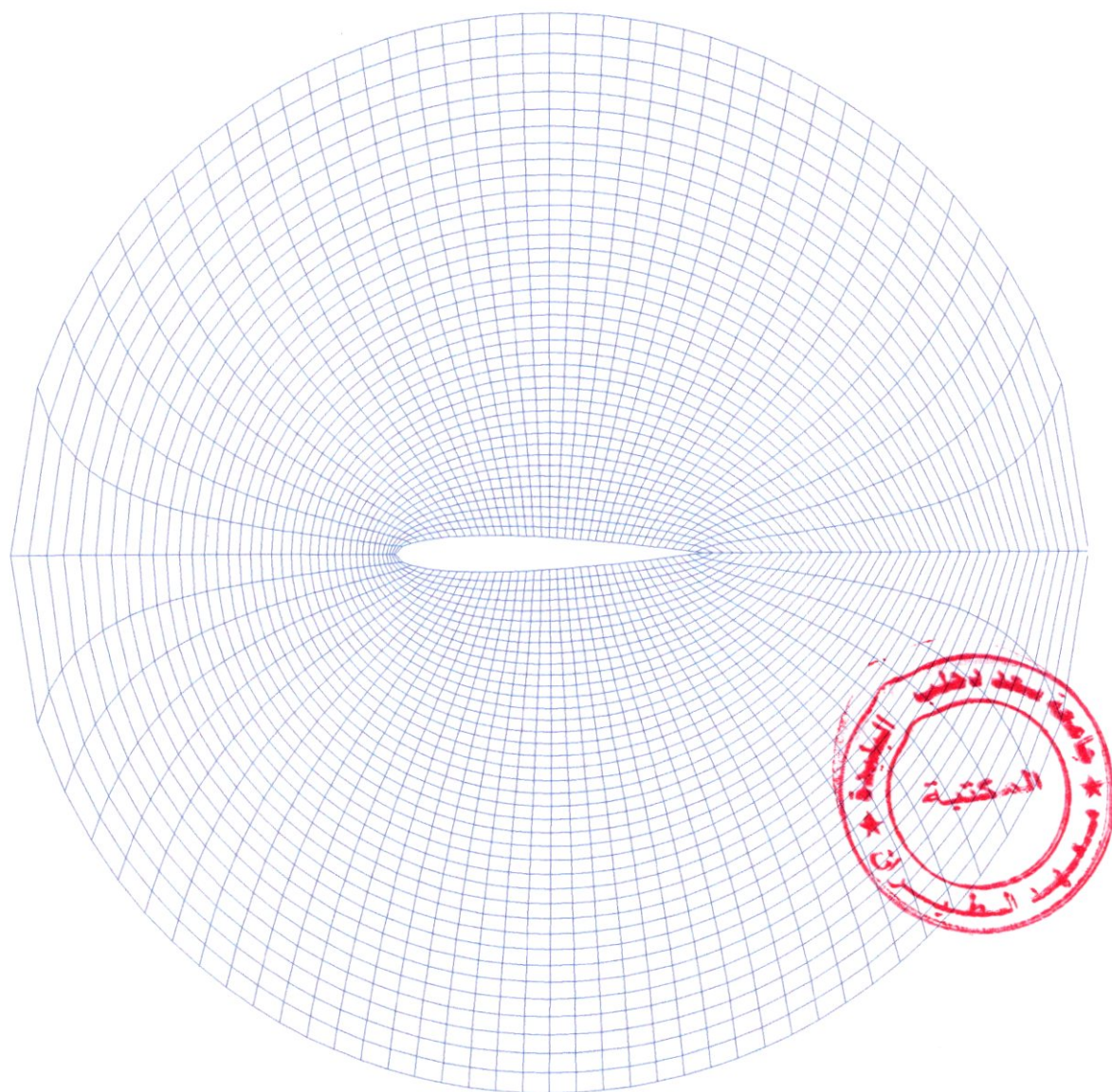


**Fig.V.2.Maillage d'un domaine simplement connexe  
(écoulement dans une conduite)**



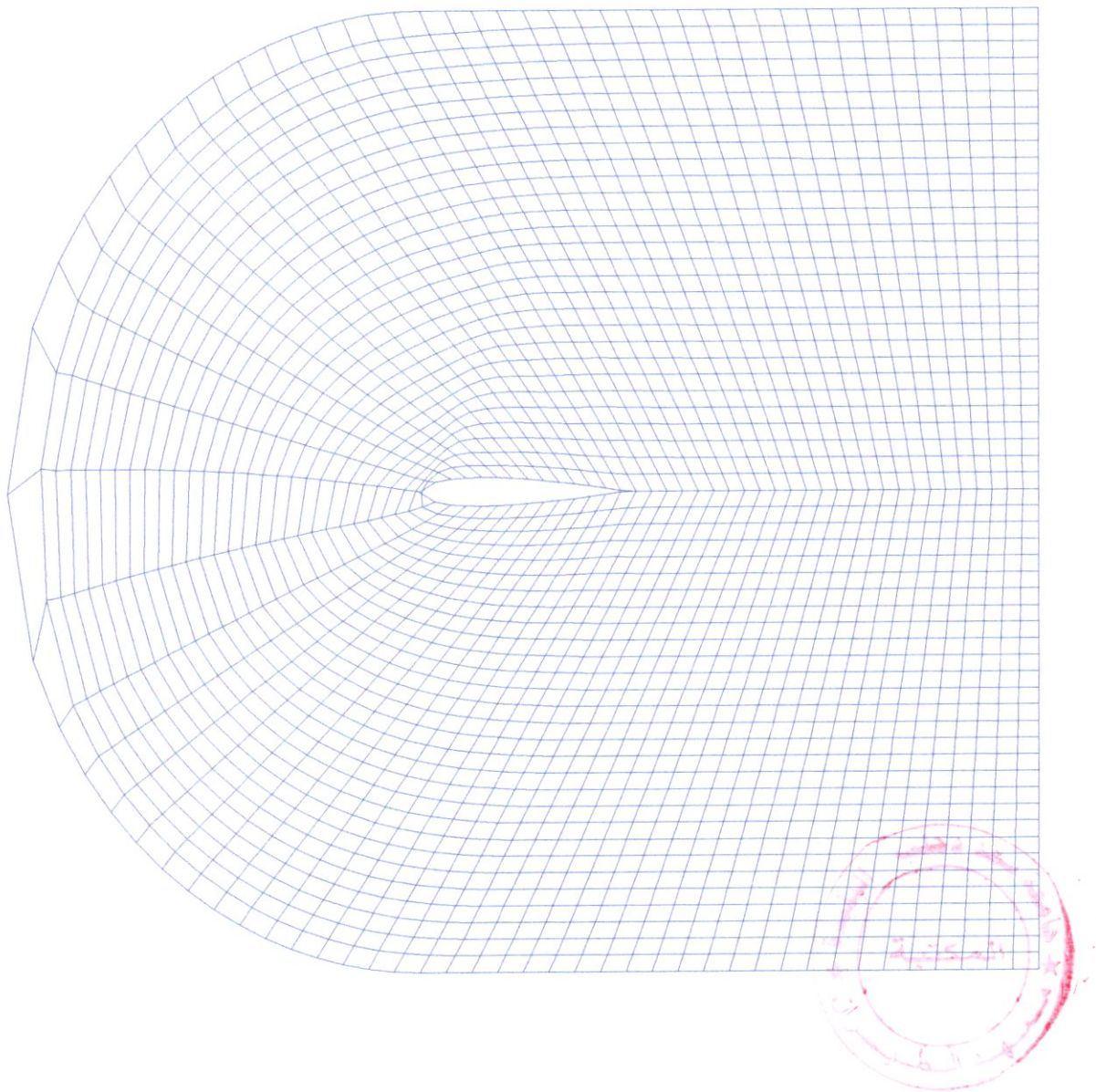


**Fig.V.3. Maillage autour d'un cylindre.**

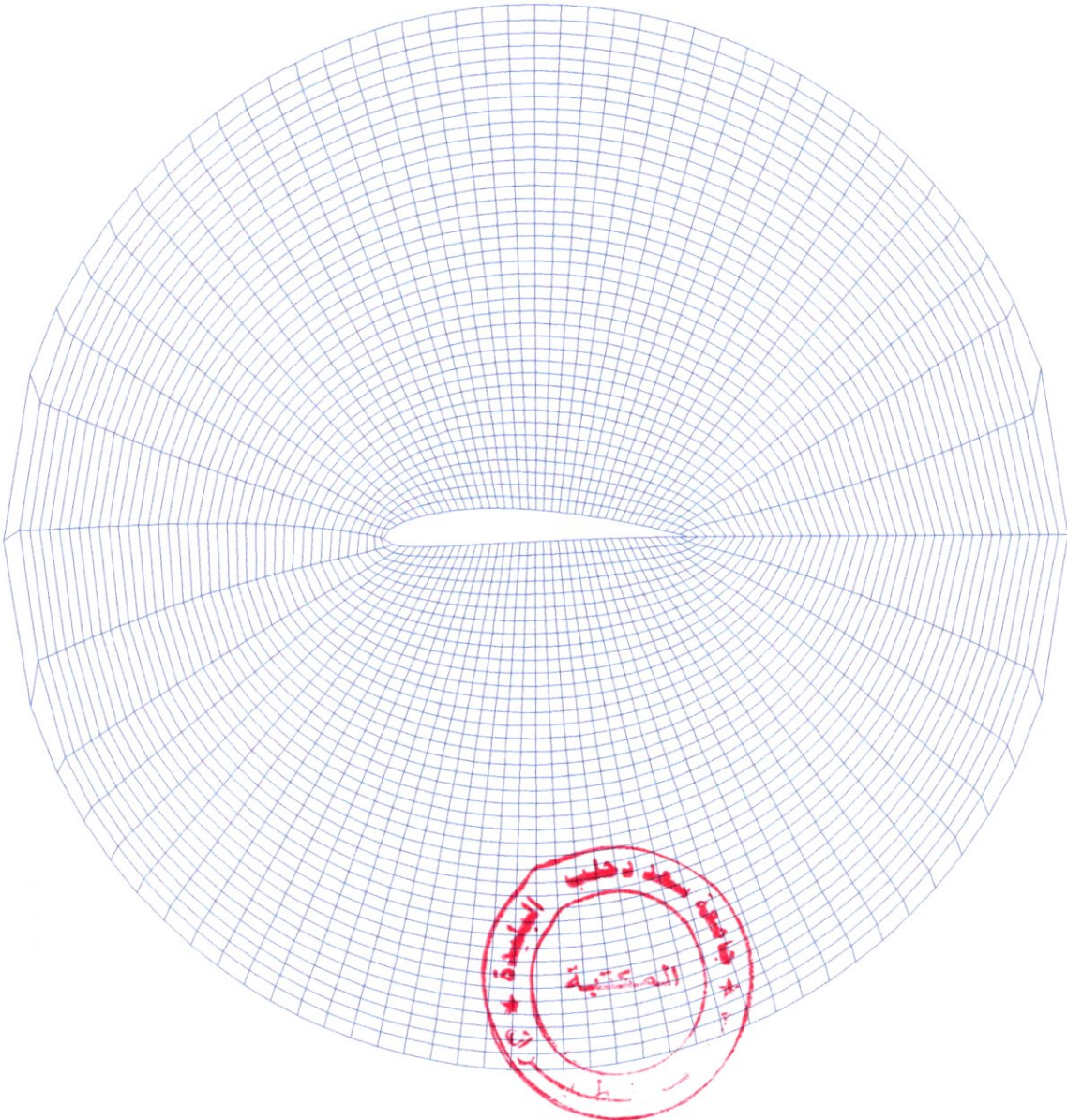


**Fig.V.4. Maillage autour d'un profil NACA0012  
(avec une frontière externe de type « O »)**



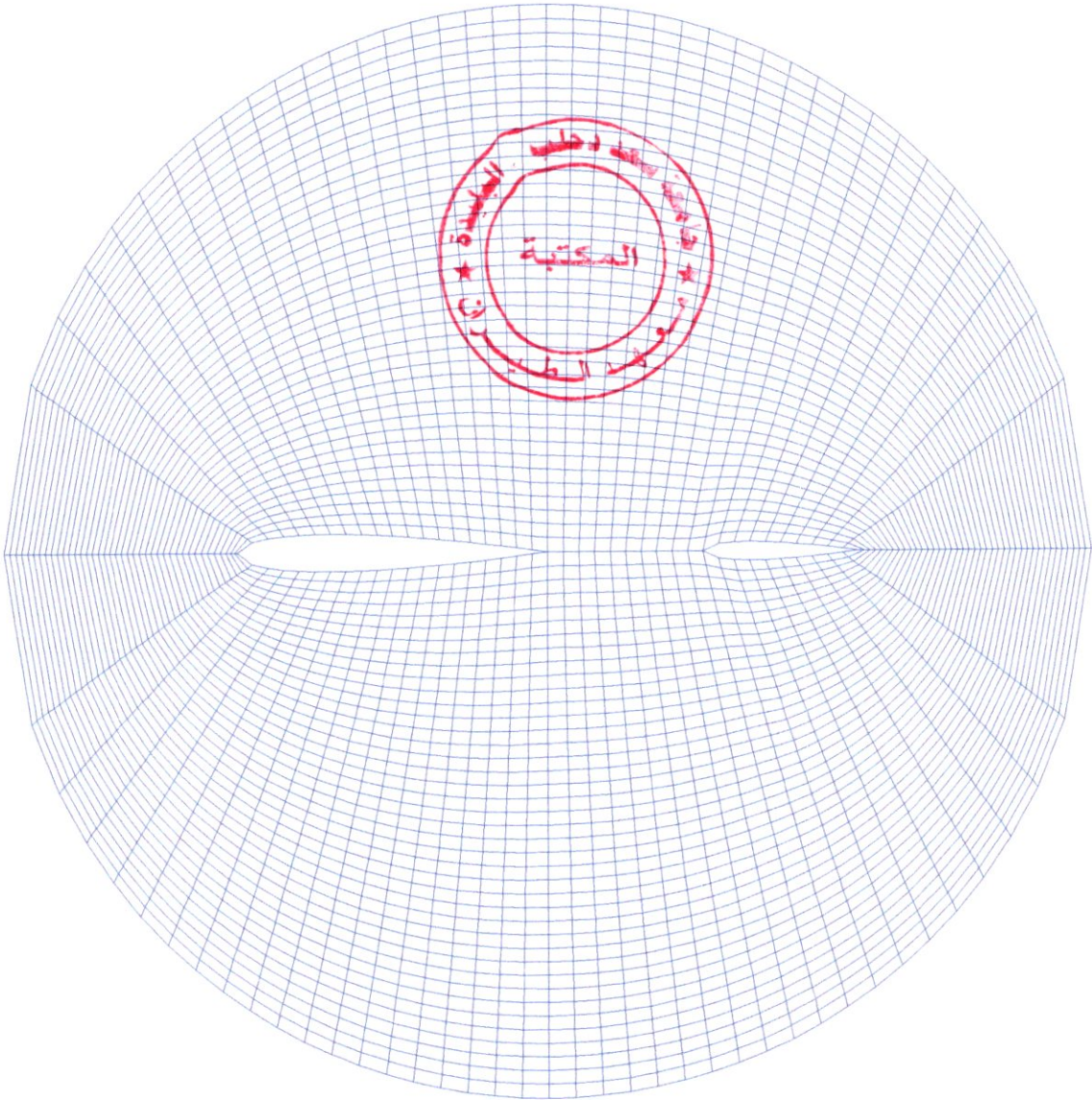


**Fig.V.5. Maillage autour d'un profil NACA0012  
(avec une frontière externe de type « C »)**

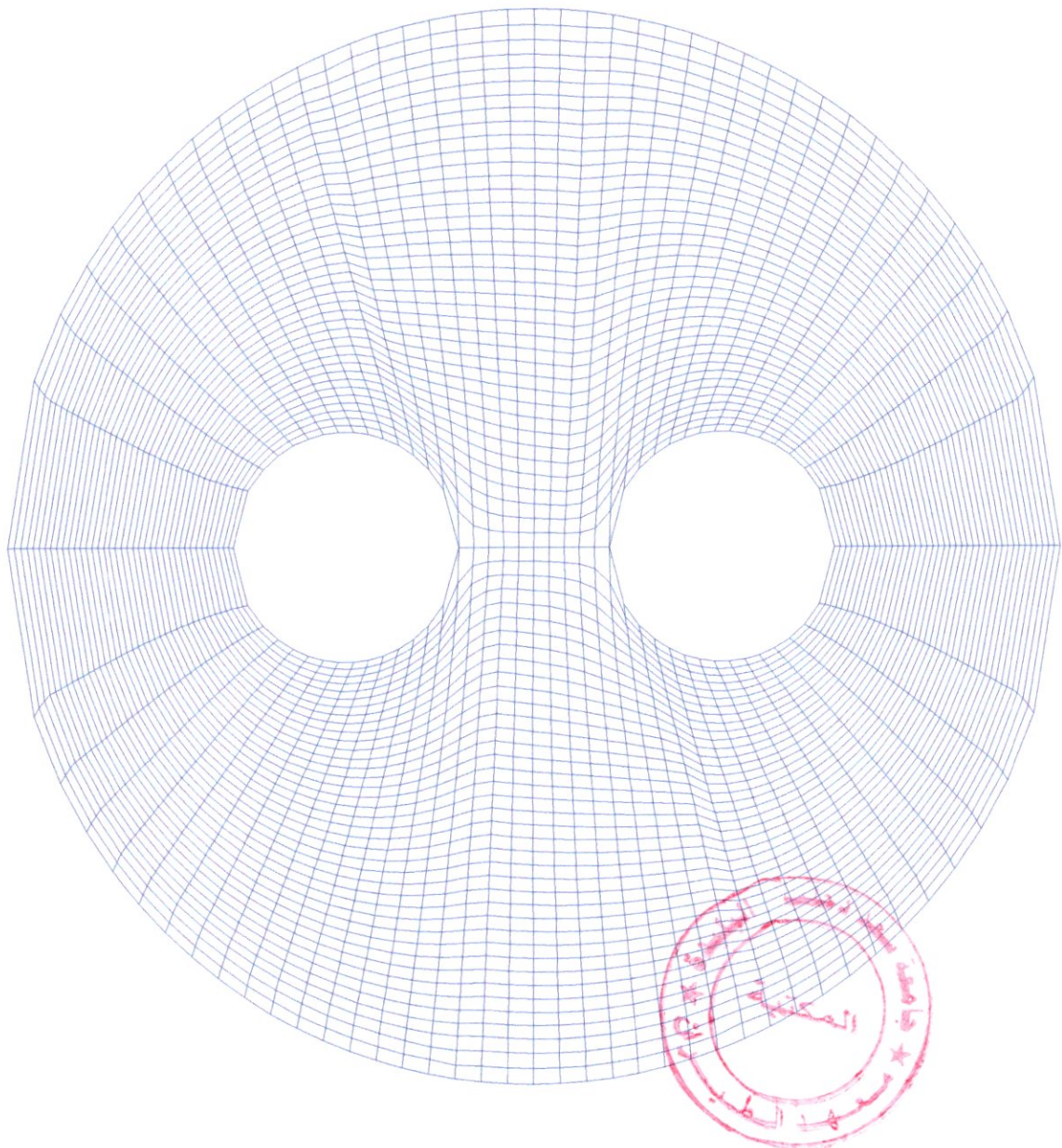


**Fig.V.6. Maillage autour d'un profil NACA4412**





**Fig.V.7. Maillage autour de deux profils d'ailes**



**Fig.V.8. Maillage autour de deux cylindres**

### V.1.2. Choix de maillage initial :

Le choix de maillage initial nécessite la prise en compte du temps de convergence du processus itératif du modèle elliptique. Ce choix dépend essentiellement de la configuration de champ transformé et de la forme géométrique de l'obstacle également, nous avons choisi dans notre étude la méthode de deux parois pour générer le maillage initiale.

Nous résumons les résultats concernant les temps du convergence pour différentes valeurs du paramètre de relaxation dans les tableaux suivants :

Paramètre de relaxation	1.2	1.3	1.5	1.6	1.7	1.75	1.8	1.85	1.9
Nombre d'itérations	9	13	43	47	43	39	32	3	9

**Tableau V-1 :** Evolution de la convergence en fonction du paramètre de relaxation ,pour la figure (V-3-).

Paramètre de relaxation	1.2	1.3	1.5	1.6	1.7	1.75	1.8	1.85	1.9
Nombre d'itérations	33	59	80	72	56	2	9	7	5

**Tableau V-2 :** Evolution de la convergence en fonction du paramètre de relaxation ,pour la figure (V-4-).

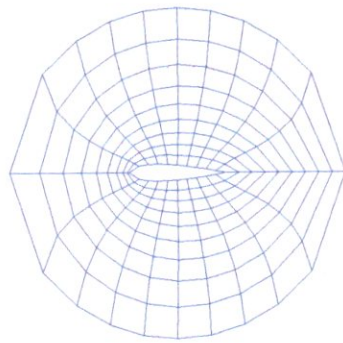


Paramètre de relaxation	1.2	1.3	1.5	1.6	1.7	1.75	1.8	1.85	1.9
Nombre d'itérations	26	48	79	72	1.7	2	6	5	5

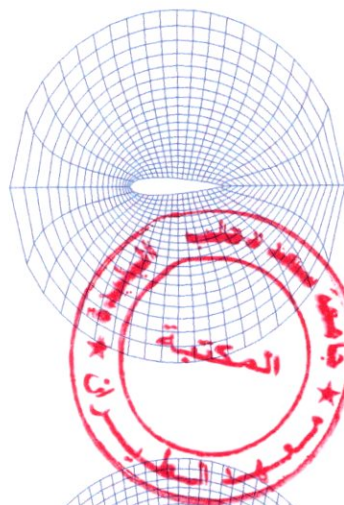
**Tableau V-3 :** Evolution de la convergence en fonction du paramètre de relaxation, pour la figure (V-6-).

### V.1.3. Raffinement de maillage :

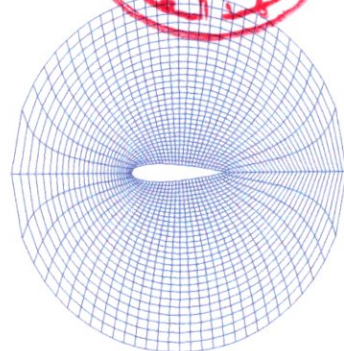
Dans certains problèmes physiques où la précision des calculs est demandée le raffinement de maillage peut jouer un rôle très important. On appelle la solution standard le type de maillage très raffiné, c'est-à-dire qu'au delà de ce raffinement la solution finale (optimale) du problème physique ne change pas. D'autre part, si le problème physique étudié est plus simple et ne nécessite pas la précision des calculs, il est préférable d'utiliser un maillage moins raffiné permet de gagner beaucoup de temps et d'espace mémoire.



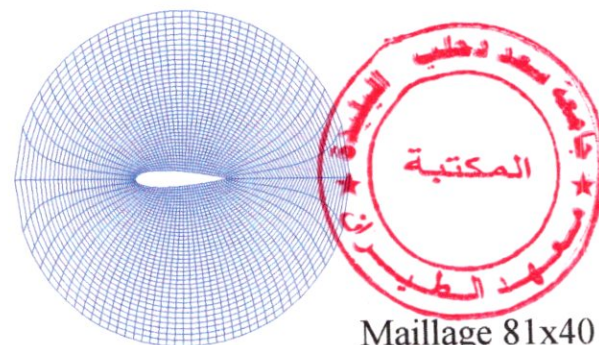
Maillage 21x10



Maillage 41x20



Maillage 61x30



Maillage 81x40

**Fig.V.9. Raffinement de maillage.**

#### V.1.4. Répartition des lignes coordonnées :

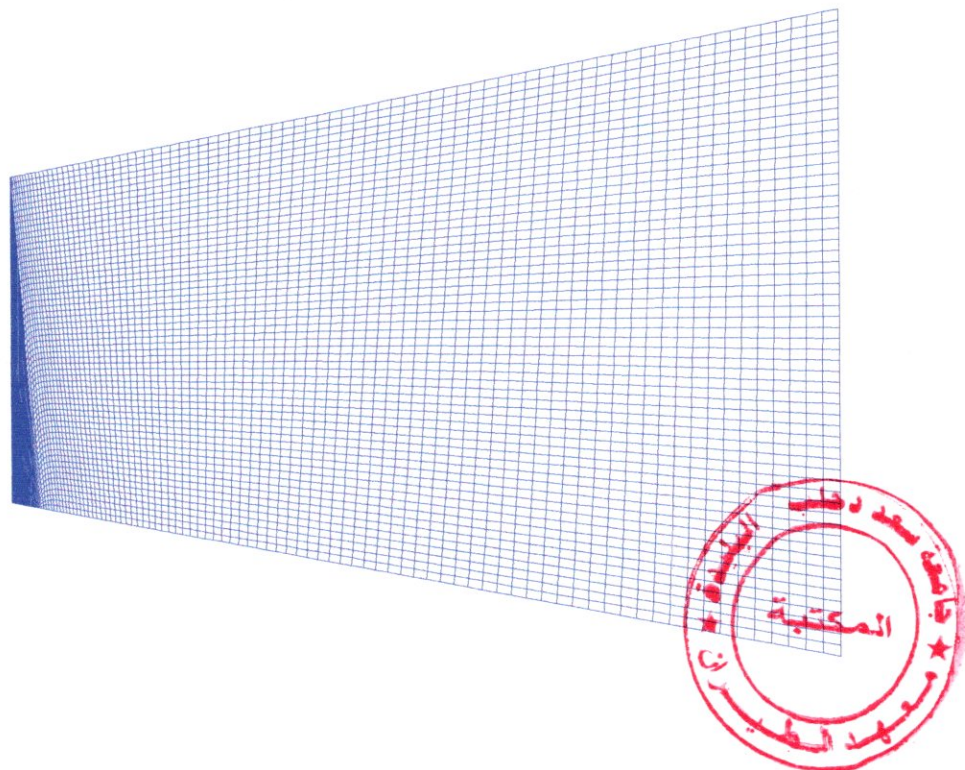
La répartition des lignes coordonnées dans le maillage peut jouer un rôle très important dans certains problèmes physiques. Cette répartition des lignes coordonnées est traduite par la condensation de ces dernières dans des zones bien définies et suivant une direction ( $\xi$  et  $\eta$ ), selon la nature du problème à traiter, tel que des problèmes de couche limite ou de l'apparition d'onde de choc.

Nous avons utilisés la fonction de condensation « Stretching » dans certaines zones de maillage comme, les parois d'une tuyère (Fig.V.12) (Fig.V.13), l'entrée d'une tuyère (Fig.V.10), où la sortie d'une tuyère (Fig.V.11). D'après ces figures, on peut constater la régularité de maillage intérieur, cette régularité ne peut être obtenue que par un choix judicieux des paramètres  $a_1$  et  $b_1$  intervenant dans la fonction de condensation « Stretching ». Généralement, ces paramètres sont déterminés après plusieurs essais, en les faisant varier de chaque côté du rectangle (champ transformé).

Les valeurs de ces paramètres, relatives aux exemples que nous avons présentés sont regroupées dans les tableaux suivants :

Côté	Côté 1	Côté 2	Côté 3	Côté 4
a <sub>1</sub>	0.0	1.0	2.0	1.0
b <sub>1</sub>	2.0	2.0	2.0	2.0

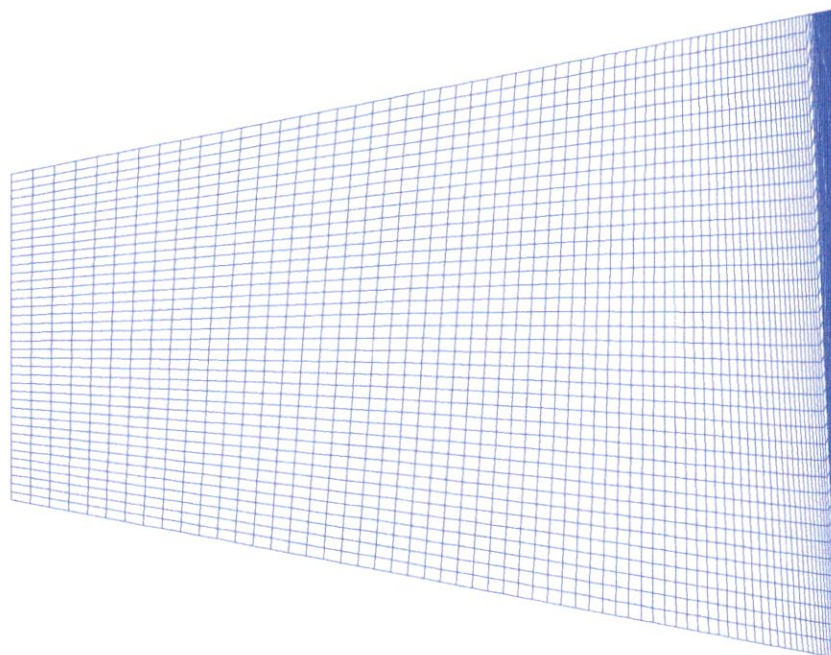
Tableau V-4 : Valeurs des paramètres de la fonction Stretching pour la figure (V-10)



**Fig.V.10. condensation des lignes coordonnées à l'entrée d'une tuyère**

Côté	Côté 1	Côté 2	Côté 3	Côté 4
$a_1$	2.0	1.0	0.0	1.0
$b_1$	2.0	2.0	2.0	2.0

Tableau V-5 : Valeurs des paramètres de la fonction Stretching pour la figure (V-11)

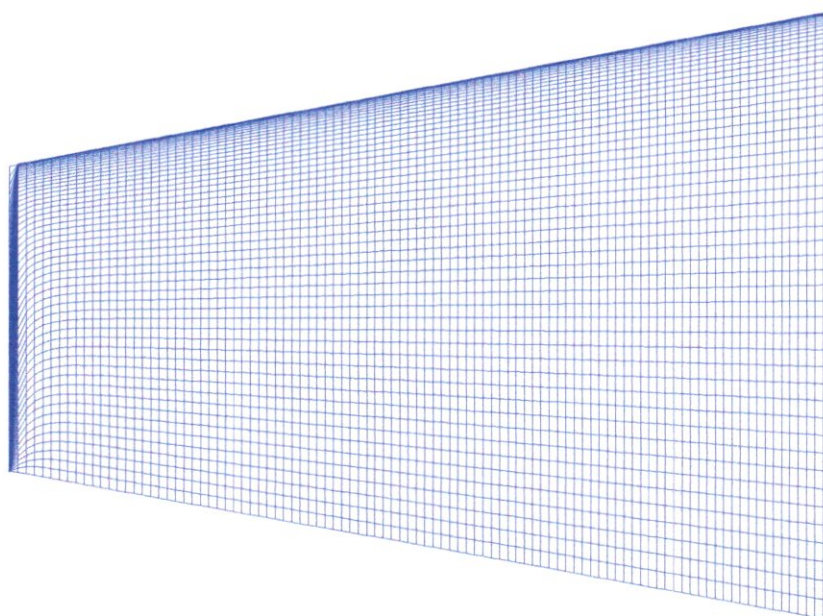


**Fig.V.11. condensation des lignes coordonnées à la sortie d'une  
tuyère**



Côté	Côté 1	Côté 2	Côté 3	Côté 4
$a_1$	1.0	2.0	1.0	2.0
$b_1$	2.0	2.0	2.0	2.0

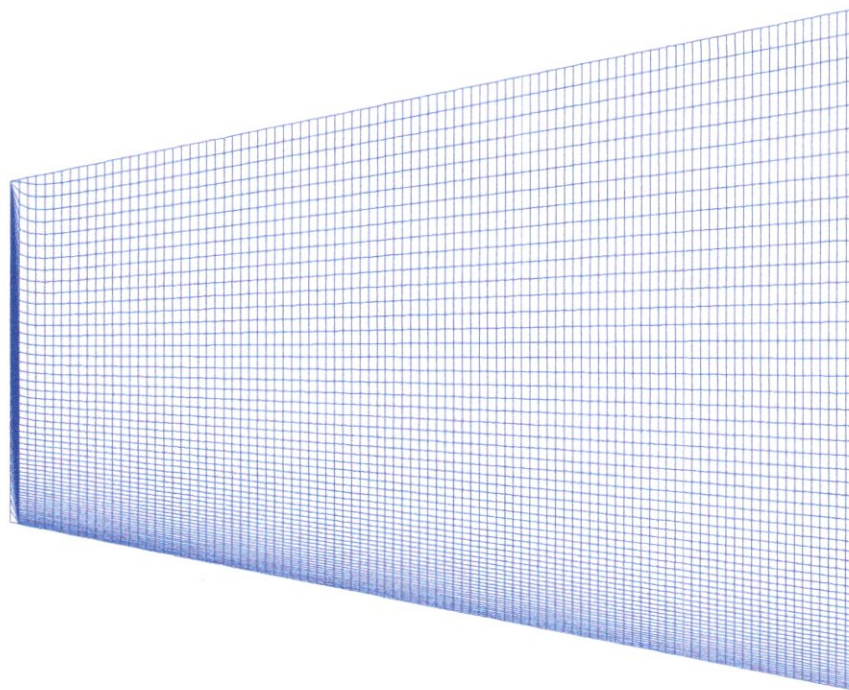
Tableau V-6 : Valeurs des paramètres de la fonction Stretching pour la figure (V-12)



**Fig.V.12. condensation des lignes coordonnées sur la paroi supérieur.**

Côté	Côté 1	Côté 2	Côté 3	Côté 4
$a_1$	1.0	0.1	1.0	0.1
$b_1$	2.0	2.0	2.0	2.0

Tableau V-7 : Valeurs des paramètres de la fonction Stretching pour la figure (V-13)



**Fig.V.13. condensation des lignes coordonnées sur la paroi inférieur.**

## **V.2. Résultats de l'application :**

### **V.2.1. Distribution de la pression pariétale :**

La méthode de génération de maillage est mise en valeur par application à un écoulement autour d'un profil d'aile NACA 0012 et NACA4412. Les figures (V.14) (V.15) représentent l'évolution de la pression pariétale pour différents angles d'incidence.

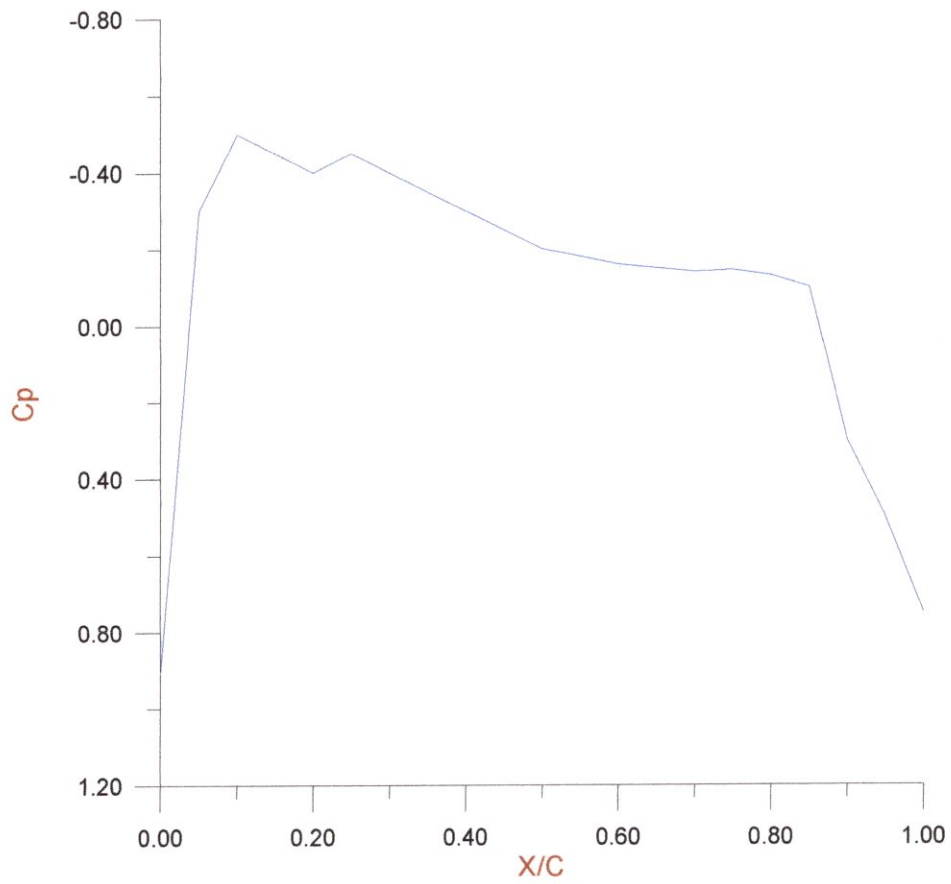
La première constatation qui ressort de ses figures est l'existence d'une zone de dépression sur l'extrados et de surpression sur l'intrados. Cette différence de pression sur l'intrados et l'extrados met en évidence le mécanisme de la portance. Cette portance dépend de l'incidence vu que l'écart de pression qui apparaît entre les deux surfaces du profil d'aile est plus important lorsque l'incidence augmente.

### **V.2.2. Analyse du coefficient de portance :**

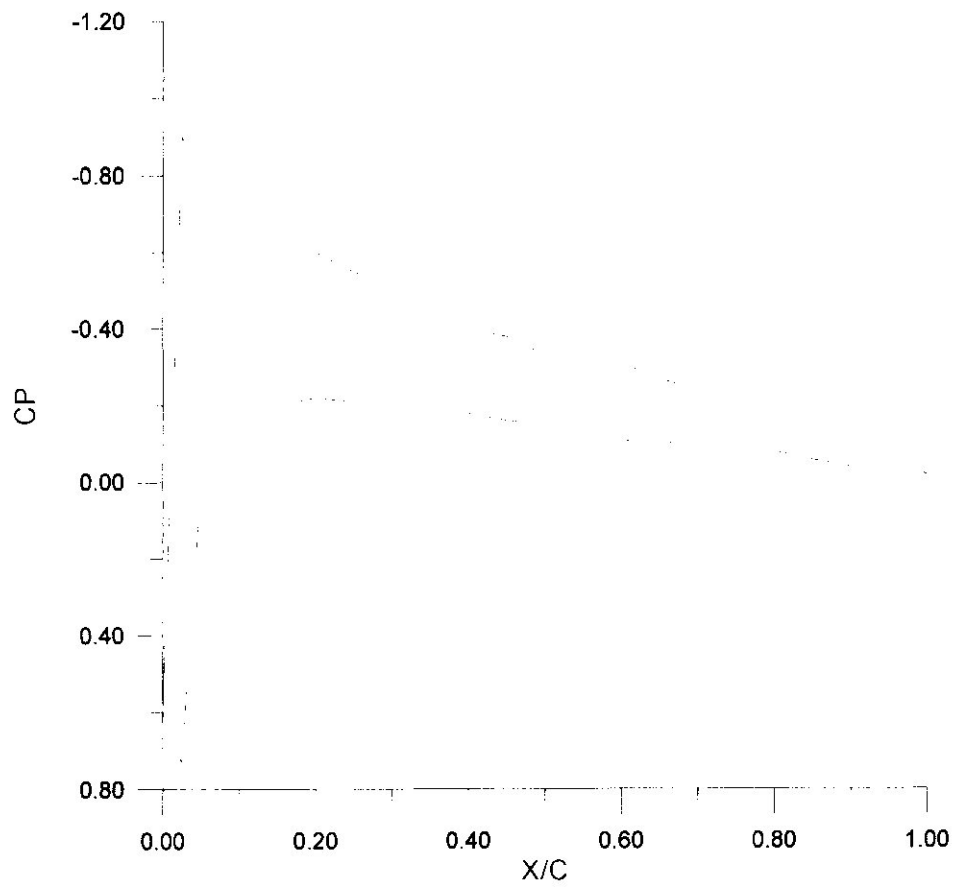
La courbe représentée sur la figure (V.16) illustre la variation du coefficient de portance avec l'angle d'incidence pour le profil d'aile (NACA0012).

Le coefficient de portance s'annule pour une incidence nulle puis augmente proportionnellement avec l'angle d'attaque.

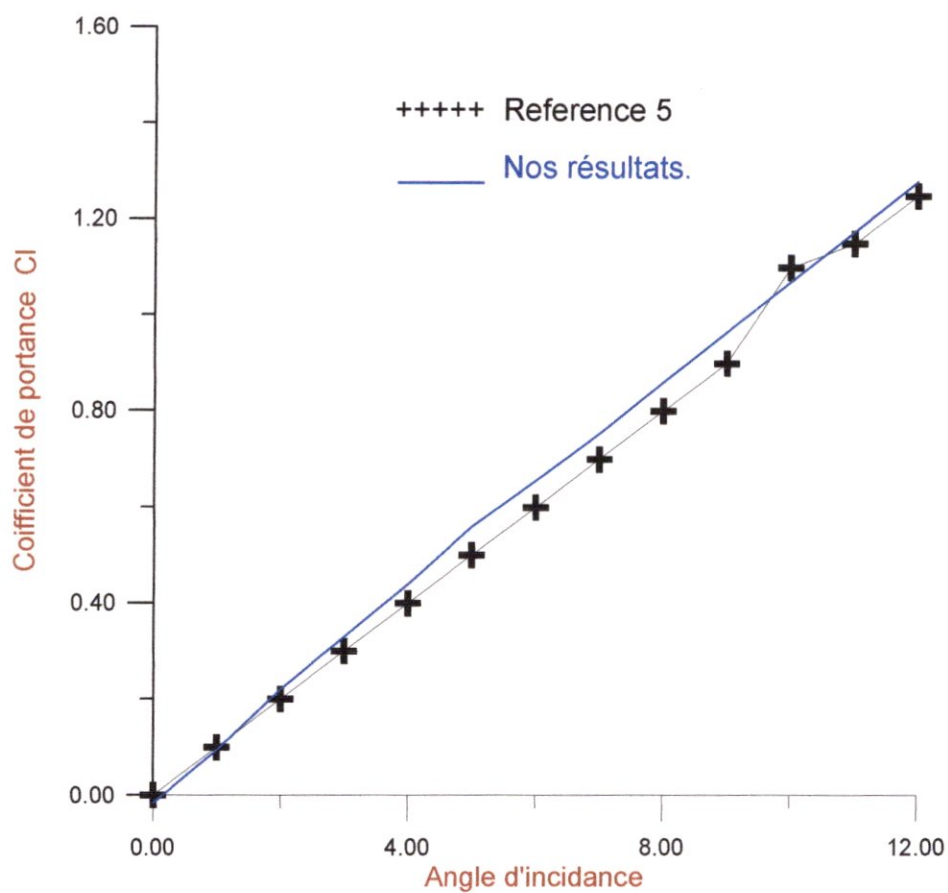
Quant pour le profil cambré NACA4412, l'évolution de son coefficient de portance suit la même allure que pour le profil symétrique. Néanmoins, dans ce cas, les valeurs sont plus élevées. De plus, nous remarquons que pour ce profil, la portance nulle correspond à une valeur de l'incidence négative



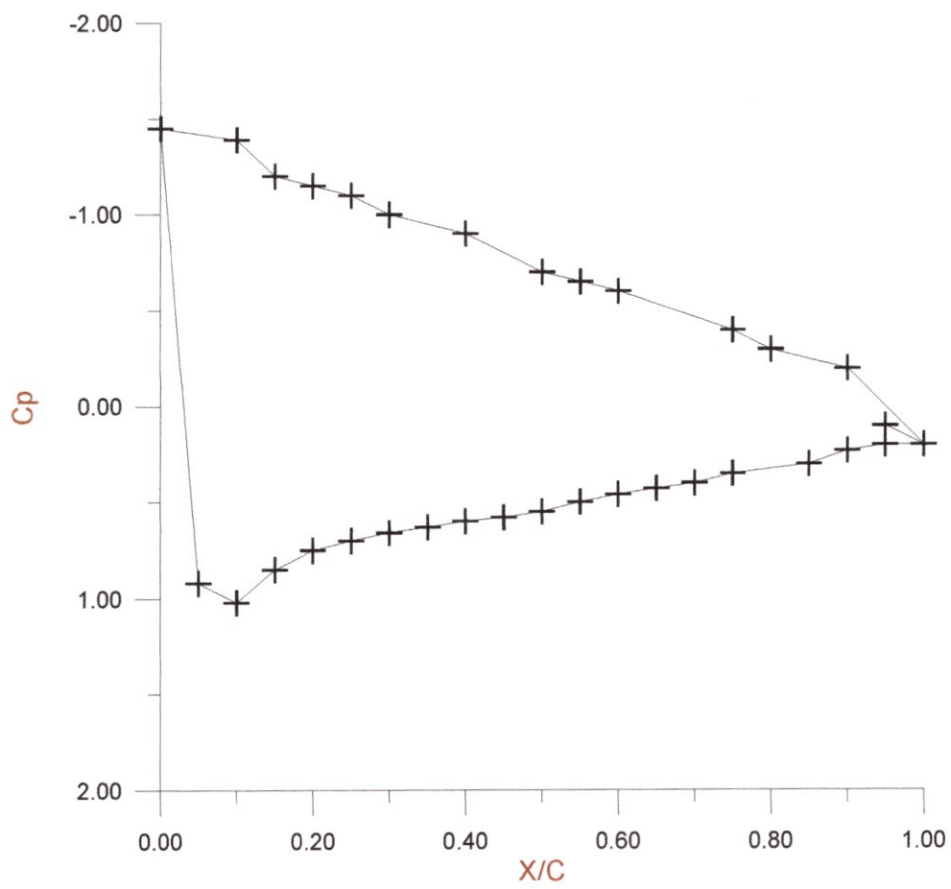
**Fig.V.14. Distribution du coefficient de pression sur la surface du profil NACA0012(avec angle d'incidence  $\Theta=0$ .)**



**Fig.V.15. Distribution du coefficient de pression sur la surface du profil NACA0012 (avec angle d'incidence  $\Theta=2$ )**

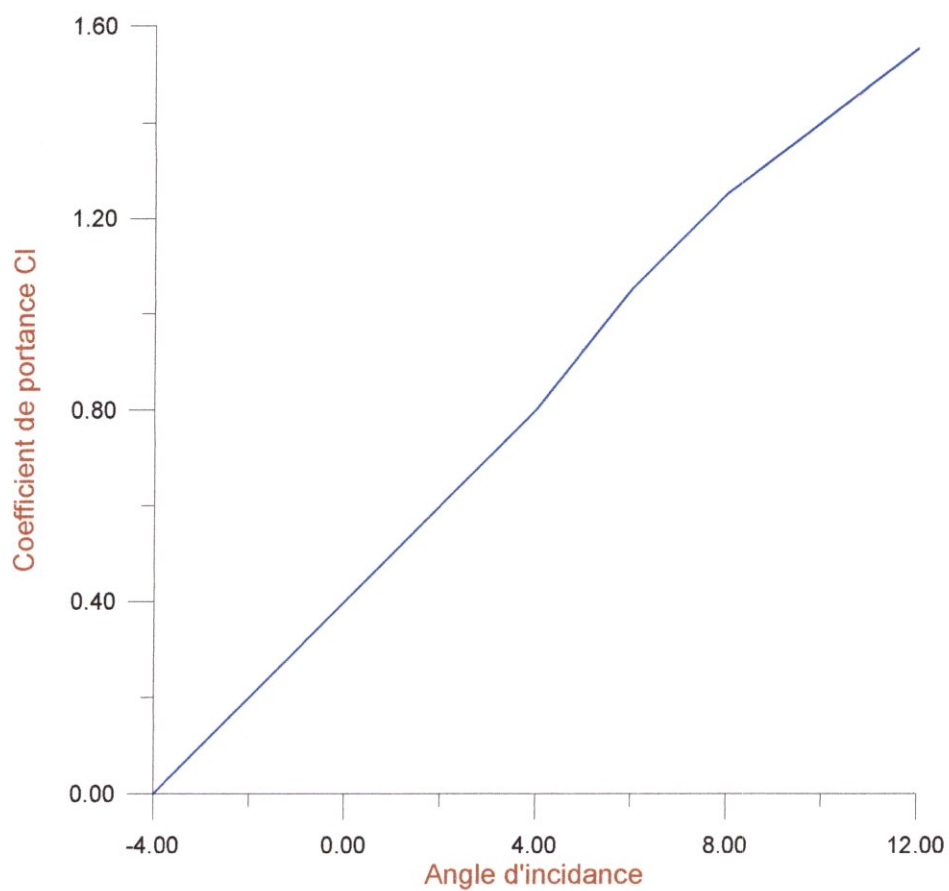


**Fig.V.16. Evolution de la portance en fonction de l'angle d'incidence.  
pour le profil NACA0012**



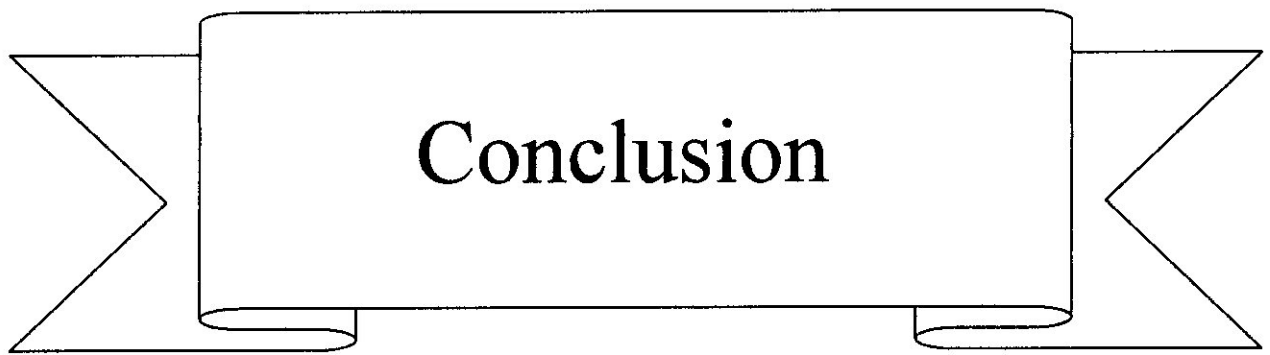
**Fig.V.17. Distribution du coefficient de pression sur la surface du profil NACA4412 (avec angle d'incidence  $\Theta=4$ )**





**Fig.V.18. Evolution de la portance en fonction de l'angle d'incidence.  
pour le profil NACA4412**





Ce travail a consisté à faire une étude de la méthode numérique de génération de maillage en deux dimensions. En particulier, nous avons développé et appliqué la méthode à coordonnées curvilignes régie par un modèle elliptique (équation de poisson).

Outre cette méthode, nous nous sommes également intéressés à un certain nombre de techniques algébriques de génération de maillage, ces méthodes se distinguent des méthodes à coordonnées curvilignes essentiellement par la simplicité et la rapidité avec laquelle les maillages sont générés. Cependant et contrairement à la méthode à coordonnées curvilignes, elliptique, l'application d'une de ces méthodes algébriques peut être conditionnée par le type de configuration du domaine choisi. Par ailleurs les maillages correspondants peuvent comporter des irrégularités dues principalement à la propagation des discontinuités à partir des frontières vers l'intérieur du champ. Les maillages obtenus par ces méthodes ont servi essentiellement à accélérer la convergence de la solution de modèle elliptique.

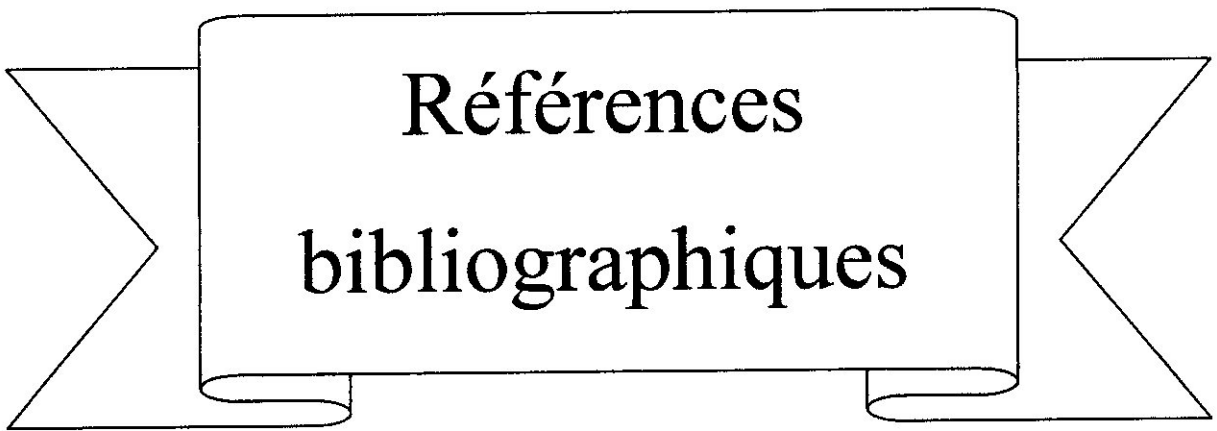
Par ailleurs, afin d'obtenir une meilleure adaptation du maillage, les fonctions de condensation sont utilisées pour la distribution des points le long des frontières particulières ainsi que des régions spécifiques du domaine qui nécessitent un traitement avec une grande précision. D'autre part, des fonctions de contrôle sont introduites dans l'équation de poisson pour contrôler l'espacement des lignes coordonnées.

D'après les résultats de maillage obtenus, nous avons pu conclure que la méthode à coordonnées curvilignes elliptique est générale, pouvant s'appliquer dans des domaines d'étude simplement connexes, doublement connexes ou multi-connexes. Par ailleurs, cette méthode est applicable avec des formes arbitraires d'obstacles et de la frontière externe.

En fin, comme l'objectif de l'étude de tous problèmes de génération de maillage est son application à un problème physique réel, nous avons appliqués cette

méthode à coordonnées curvilignes, associée aux techniques algébriques à un écoulement potentiel ,incompressible, autour de différents types de profils d'ailes.

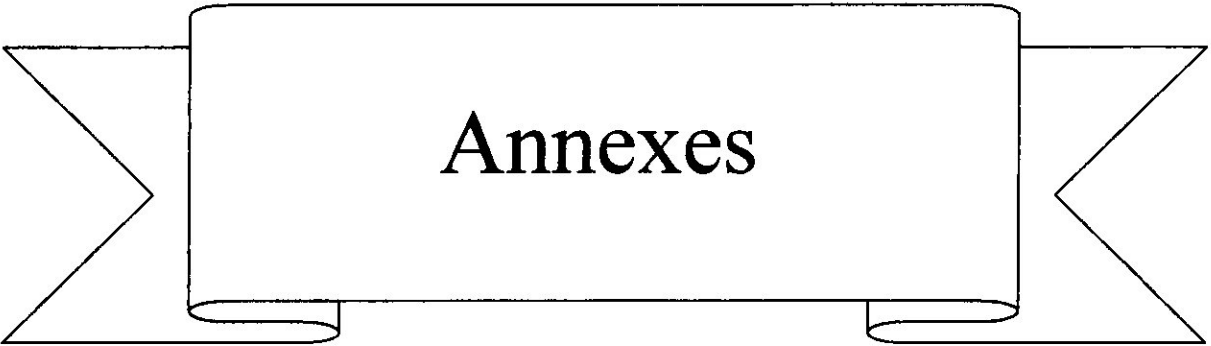
L'analyse des résultats de cette application nous a révélé que cette méthode de génération de maillage constitue un très bon outil de calcul numérique, permettant de décrire les phénomènes physiques avec une très bonne approche des résultats expérimentaux. Il a noter également que l'application de la méthode de génération de maillage est indépendante de la nature mathématique des équations qui régissent le problème physique et qui peut être : elliptique, parabolique ou hyperbolique. De ce fait, lors de l'application de cette méthode, aucune condition n'est imposée sur la nature physique du problème à étudier. Ce qui permet d'avancer que cette méthode pourrait s'appliquer à des problèmes physiques autre que celui de l'écoulement potentiel, tels que les problèmes de transfert de chaleur ou d'écoulement visqueux.



Références  
bibliographiques

## Références bibliographiques

- [1]. **Toufik EL AICHI**, Application des techniques de génération de maillages pour le calcul d'écoulements potentiels transsoniques stationnaires, thèse de magister, Université de Blida, Mars 1997.
- [2]. **Latifa BOUNAR**, Etude des techniques de génération de maillage, application en aérodynamique externe, thèse de magister, Université des sciences et de la technologie "HOUARI Boumedienne" d'Alger, Février 1995.
- [3]. **C. A. J. Fletcher**, Computational Techniques for Fluid Dynamics 2, Springer-Verlage, Heidelberg, 1991.
- [4]. **ION Paraschivoiu**, Aérodynamique subsonique, édition de l'école polytechnique de Montréal, 1998.
- [5]. **I.H.Abbott and A.E.Von Donhoff**, Theory of Wing Sections, Dover Publication 1949.
- [6]. **INGE.L.RYHMING**, Dynamique des fluides, Un cours de base du deuxième cycle universitaire 1984.



## Annexe -A-

### **Transformations du plan de coordonnées cartésiennes(x,y) aux plan de coordonnées généralisées( $\xi, \eta$ ) :**

La transformation du domaine (x,y) au domaine (  $\xi, \eta$  ) se fait par le passage de plusieurs étapes et à l'aide des différentes procédures. On présente dans cette partie quelques procédures de ce passage. Nous supposons dans ce qui suit :

$f(x,y)$  : est une fonction deux fois continûment dérivable.

$F(x,y)$  : est une fonction vectorielle continûment dérivable, donnée par :

$$\vec{F}(x,y) = F_1(x,y) \vec{i} + F_2(x,y) \vec{j}$$

#### **A-1 Dérivées :**

##### **A-1-1 Dérivées de $\xi(x,y)$ et $\eta(x,y)$ :**

Préliminaire :

La transformation du champ (x,y) en champ s'effectue par :

$$\begin{pmatrix} \xi \\ \eta \end{pmatrix} = \begin{cases} \xi(x,y) \\ \eta(x,y) \end{cases}$$

On détermine les dérivées de  $\xi$  et  $\eta$  par :

$$\begin{cases} d\xi = \xi_x dx + \xi_y dy \\ d\eta = \eta_x dx + \eta_y dy \end{cases}$$

La matrice de passage est :

$$J_1 = \begin{bmatrix} \xi_x & \xi_y \\ \eta_x & \eta_y \end{bmatrix}$$

La transformation inverse, si elle existe est donnée par :

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{cases} x(\xi, \eta) \\ y(\xi, \eta) \end{cases}$$

De la même manière, on détermine les dérivées de x et y :

$$\begin{cases} dx = x_\xi d\xi + x_\eta d\eta \\ dy = y_\xi d\xi + y_\eta d\eta \end{cases}$$

La matrice inverse  $J_2$ , de la matrice de passage  $J_1$ , est :

$$J_2 = \begin{bmatrix} x_\xi & x_\eta \\ y_\xi & y_\eta \end{bmatrix}$$

Soit  $J = \det J_2 = x_\xi y_\eta - y_\xi x_\eta$

La relation entre les deux matrices est :

$J_1 = \frac{1}{J}$  (la matrice transposée des cofacteurs de  $J_2$ )

$$\begin{bmatrix} \xi_x & \xi_y \\ \eta_x & \eta_y \end{bmatrix} = \frac{1}{J} \begin{bmatrix} y_\eta & -x_\eta \\ -y_\xi & x_\xi \end{bmatrix}$$



D'où les expressions des dérivées premières :

$$\begin{aligned}\xi_x &= \frac{y_\eta}{J} & \xi_y &= -\frac{x_\eta}{J} \\ \eta_x &= -\frac{y_\xi}{J} & \eta_y &= \frac{x_\xi}{J}\end{aligned}$$

Et des dérivées secondes :

$$\begin{aligned}\xi_{xx} &= (\xi_x y_{\xi\eta} + \eta_x y_{\eta\eta})/J - (\xi_x^2 J_\xi + \xi_x \eta_x J_\eta)/J \\ \xi_{yy} &= -(\eta_y x_{\eta\eta} + \xi_y x_{\xi\xi})/J - (\xi_y \eta_y J_\eta + \xi_y^2 J_\xi)/J \\ \xi_{xy} &= (\eta_y y_{\eta\eta} + \xi_y y_{\xi\eta})/J - (\xi_x \xi_y J_\xi + \xi_x \eta_x J_\eta)/J \\ \eta_{xx} &= -(\xi_x y_{\xi\xi} + \eta_x y_{\xi\eta})/J - (\eta_x \xi_x J_\xi + \eta_x^2 J_\eta)/J \\ \eta_{yy} &= (\eta_y x_{\xi\eta} + \xi_y x_{\xi\xi})/J - (\xi_y \eta_y J_\xi + \eta_y^2 J_\eta)/J \\ \eta_{xy} &= (\eta_y y_{\xi\eta} + \xi_y y_{\xi\xi})/J - (\eta_x \eta_y J_\eta + \xi_x \eta_x J_\xi)/J\end{aligned}$$

**A-1-2 Dérivées de  $f(x,y)$  :**

$$f_x = \left( \frac{\partial f}{\partial x} \right)_y = (y_\eta f_\xi - y_\xi f_\eta)/J$$

$$f_y = \left( \frac{\partial f}{\partial y} \right)_x = (x_\xi f_\eta - x_\eta f_\xi)/J$$

**A-2 Transformation des dérivées des vecteurs :**

**Laplacien de  $f$  :**

$$\begin{aligned}\nabla^2 f &= (\alpha f_{\xi\xi} - 2\beta f_{\xi\eta} + \gamma f_{\eta\eta})/J^2 + (\alpha x_{\xi\xi} - 2\beta x_{\xi\eta} + \gamma x_{\eta\eta})(y_\xi f_\eta - y_\eta f_\xi)/J^3 \\ &+ (\alpha y_{\xi\xi} - 2\beta y_{\xi\eta} + \gamma y_{\eta\eta})(x_\xi f_\eta - x_\eta f_\xi)/J^3\end{aligned}$$

Cette expression est équivalente à :

$$\nabla^2 f = (\alpha f_{\xi\xi} - 2\beta f_{\xi\eta} + \gamma f_{\eta\eta} + \sigma f_{\eta} + \tau f_{\xi}) / J^2$$

Avec :

$$J = x_{\xi} y_{\eta} - x_{\eta} y_{\xi}$$

$$\alpha = x_{\eta}^2 + y_{\eta}^2$$

$$\beta = x_{\xi} y_{\eta} + y_{\xi} x_{\eta}$$

$$\gamma = x_{\xi}^2 + y_{\xi}^2$$

$$\sigma = (y_{\xi} dx - x_{\xi} dy) / J$$

$$\tau = (x_{\eta} dy - y_{\eta} dx) / J$$

$$dx = \alpha x_{\xi\xi} - 2\beta x_{\xi\eta} + \gamma x_{\eta\eta}$$

$$dy = \alpha y_{\xi\xi} - 2\beta y_{\xi\eta} + \gamma y_{\eta\eta}$$

**Gradient de  $f$  :**

$$\vec{\nabla} f = (y_{\eta} f_{\xi} - y_{\xi} f_{\eta}) / J \vec{i} + (y_{\xi} f_{\eta} - y_{\eta} f_{\xi}) / J \vec{j}$$

**Divergent de  $\vec{F}$  :**

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{F} = [y_{\eta} (F_1)_{\xi} - y_{\xi} (F_1)_{\eta} + x_{\xi} (F_2)_{\eta} - x_{\eta} (F_2)_{\xi}] / J$$

**A-3 Les vecteurs tangent et normale dans le champ  $(\xi, \eta)$  :**

Les vecteurs tangent et normal à la courbe  $f(x,y)$  sont données par :

$$\vec{n}^{(s)} = \frac{\nabla f}{|\nabla f|}$$

Pour  $f(x,y)$  correspondant à  $\eta(x,y)$ , cette expression devient :

$$\vec{n}^{(\eta)} = \frac{\nabla \eta}{|\nabla \eta|}$$

En utilisant l'équation de gradient de  $f$ , le vecteur unitaire normal à une ligne  $\eta = \text{cte}$  est donné par :

$$\vec{n}^{(\eta)} = (-y_{\xi} \vec{i} + x_{\xi} \vec{j}) / \sqrt{\gamma}$$

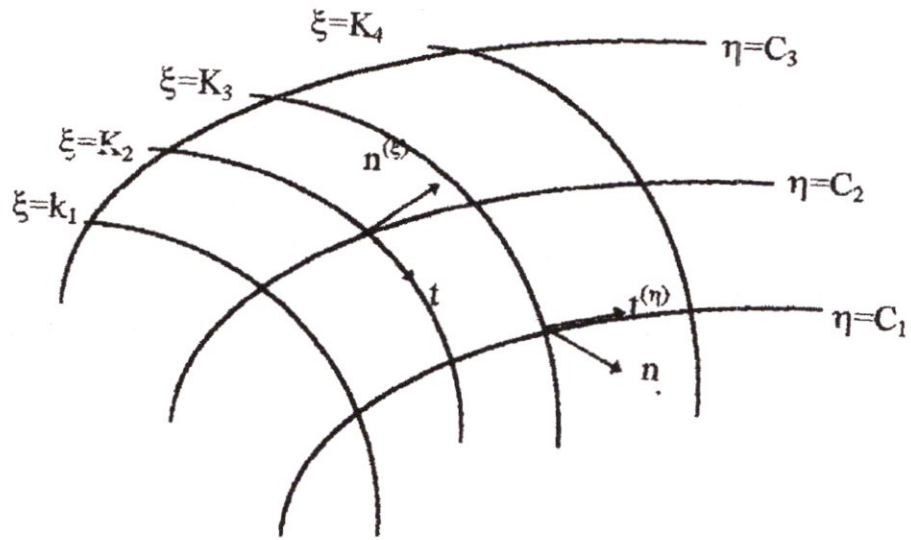
De la même manière, on définit l'expression du vecteur unitaire normal à une ligne coordonnée  $\xi = \text{cte}$  :

$$\vec{n}^{(\xi)} = \frac{\nabla \xi}{|\nabla \xi|} = (y_{\eta} \vec{i} - x_{\eta} \vec{j}) / \sqrt{\alpha}$$

Les vecteurs tangents à la ligne coordonnée  $\eta = \text{cte}$ , respectivement à la ligne  $\xi = \text{cte}$  sont donnés par :

$$\vec{t}^{(\eta)} = \vec{n}^{(\eta)} * K = (x_{\xi} \vec{i} + y_{\xi} \vec{j}) / \sqrt{\gamma}$$

$$\vec{t}^{(\xi)} = \vec{n}^{(\xi)} * K = -(x_{\eta} \vec{i} + y_{\eta} \vec{j}) / \sqrt{\alpha}$$



**Annexe -B-****Approximation par la méthode des différences finies****B-1 Approximation par les différences centrées d'ordre 2 :**

Soit une fonction deux fois continûment dérivable  $f(\xi, \eta)$ , définie pour :

$$2 \leq i \leq I_{\max} - 1$$

$$2 \leq j \leq J_{\max} - 1$$

L'approximation des dérivées premières donné :

$$(f_{\xi})_{i,j} = (f_{i+1,j} - f_{i-1,j})/2$$

$$(f_{\eta})_{i,j} = (f_{i,j+1} - f_{i,j-1})/2$$

L'approximation des dérivées secondes donné :

$$(f_{\xi\xi})_{i,j} = f_{i+1,j} - 2f_{i,j} + f_{i-1,j}$$

$$(f_{\xi\eta})_{i,j} = (f_{i+1,j+1} - f_{i+1,j-1} + f_{i-1,j-1} - f_{i-1,j+1})/4$$

$$(f_{\eta\eta})_{i,j} = f_{i,j+1} - 2f_{i,j} + f_{i,j-1}$$

**B-2 Approximation par les différences décentrées d'ordre 2, des dérivées premières:**

Cette approche est appliquée sur les segments correspondant aux frontières d'obstacles ou de frontière externe. Suivant la position du segment sur le coté du rectangle, nous obtenons:

**B-2-1 Sur le coté bas:**

$$\begin{array}{ccc} I_1 & & I_2 \\ \hline & & J=1 \end{array}$$

Pour  $I_1 \leq I \leq I_2$  :

$$f_{\eta} = -0.5(f(I,3) - 4(I,2) + 3f(I,1))$$

Au point  $(I_1,1)$  :

$$f_{\xi} = -0.5(f(I_1 + 2,1) - 4(I_1 + 1,1) + 3f(I_1,1))$$

Au point  $(I_2,1)$  :

$$f_{\xi} = 0.5(f(I_2 - 2,1) - 4(I_2 - 1,1) + 3f(I_2,1))$$

**B-2-2 Sur le coté haut:**

$$\begin{array}{ccc} I_1 & & I_2 \\ \hline & & J=J_{\max} \end{array}$$

Pour  $I_1 \leq I \leq I_2$  :

$$f_{\eta} = 0.5(f(I, J_{\max} - 2) - 4(I, J_{\max} - 1) + 3f(I, J_{\max}))$$

Au point  $(I_1,1)$  :

$$f_{\xi} = -0.5(f(I_1 + 2, J_{\max}) - 4(I_1 + 1, J_{\max}) + 3f(I_1, J_{\max}))$$

Au point  $(I_2,1)$  :

$$f_{\xi} = 0.5(f(I_2 - 2, J_{\max}) - 4(I_2 - 1, J_{\max}) + 3f(I_2, J_{\max}))$$

**B-2-3 Sur le coté gauche:**

$$\begin{array}{ccc} & & J_2 \\ & & | \\ I = 1 & & | \\ & & | \\ & & J_1 \end{array}$$

Pour  $J_1 \leq J \leq J_2$  :

$$f_{\xi} = -0.5(f(3, J) - 4(2, J) + 3f(1, J))$$

Au point  $(1, J_1)$  :

$$f_{\eta} = -0.5(f(1, J_1 + 2) - 4(1, J_1 + 1) + 3f(1, J_1))$$

Au point  $(1, J_2)$  :

$$f_{\eta} = 0.5(f(1, J_2 - 2) - 4(1, J_2 - 1) + 3f(1, J_2))$$

**B-2-4 Sur le coté droit:**

$$I = I_{\max} \quad \begin{array}{c} J_2 \\ | \\ J_1 \end{array}$$

Pour  $J_1 \leq J \leq J_2$  :

$$f_{\xi} = 0.5(f(I_{\max} - 2, J) - 4(I_{\max} - 1, J) + 3f(I_{\max}, J))$$

Au point  $(I_{\max}, J_1)$  :

$$f_{\eta} = -0.5(f(I_{\max}, J_1 + 2) - 4(I_{\max}, J_1 + 1) + 3f(I_{\max}, J_1))$$

Au point  $(I_{\max}, J_2)$  :

$$f_{\eta} = 0.5(f(I_{\max}, J_2 - 2) - 4(I_{\max}, J_2 - 1) + 3f(I_{\max}, J_2))$$

### **B-3 Approximations par les différences centrées d'ordre 2 aux coupures :**

Les segments de coupure d'une même paire peuvent être disposés sur le même coté du rectangle (champ transformé) qui correspond à une même ligne coordonnée ou sur des cotés opposés. Nous donnons ci-dessous les schémas aux différences finies correspondant aux différentes dispositions des segments de coupure sur les cotés du rectangle.





$$x_{\xi\xi} = x(2, j) - 2(1, j) + x(I_{\max} - 1, j)$$

$$x_{\xi\eta} = 0.25(x(2, j+1) - x(2, j-1) + x(I_{\max} - 1, j-1) - x(I_{\max} - 1, j+1))$$