

REPUBLIQUE ALGERIENNE DEMOCRATIQUE ET POPULAIRE
MINISTRE DE L'ENSEIGNEMENT SUPERIEUR ET
DE LA RECHERCHE SCIENTIFIQUE
UNIVERSITE SAAD DAHLAB DE BLIDA

Faculté des Sciences de l'ingénieur
Département d'aéronautique



Projet de fin d'étude en vue de l'obtention du diplôme

D'ingénieur d'état
En Aéronautique
Option : Propulsion

THEME

Maillage bidimensionnel et étude d'un écoulement
subsonique autour d'un profil

Présentés par :

Boumentel Lakhdar
Cherif Moustafa

Encadré par:

• Mr. ELAICHI Toufik

Examinatrice, Mlle BENKHEDDA Amina

Dimanche 08/07/2007

Signature

Promotion -2007-

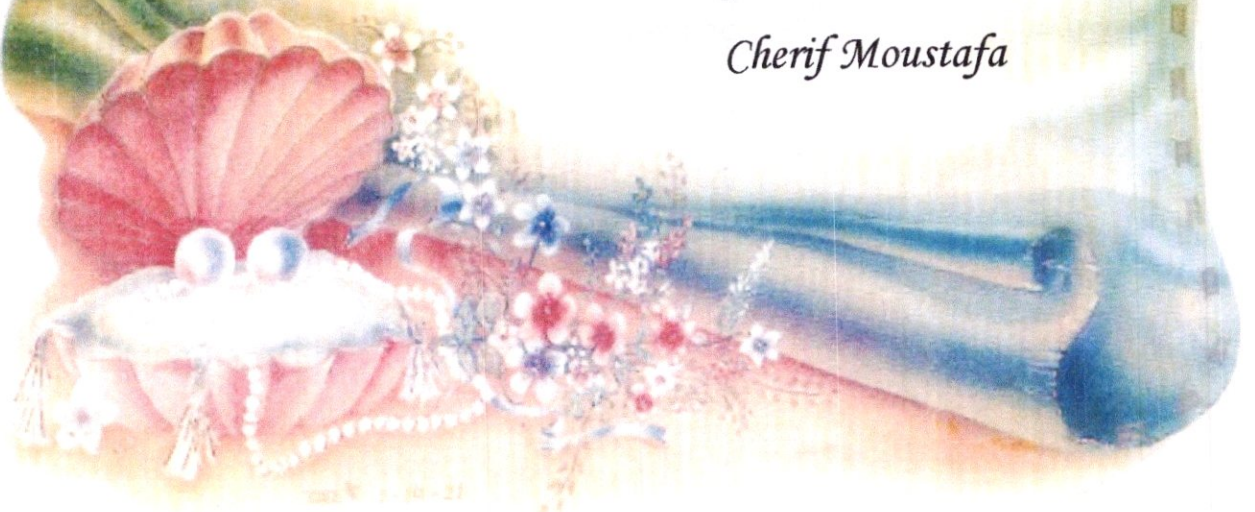
Dédicaces

*Je dédie ce modeste travail
A mes très chers parents en signe
de reconnaissance pour tous les sacrifices
consentis à mon égard, et encouragements tout
au long de mes études.*

*A mes frères et mes sœurs, et à toute
ma famille. A mes amis
chacun par son nom.*



Cherif Moustafa



Dédicaces

*Je dédie ce modeste travail
A mes très chers parents en signe
de reconnaissance pour tous les sacrifices
consentis à mon égard, et encouragements tout
au long de mes études.*

*A mes frères et mes sœurs, et à toute
ma famille. A mes amis
chacun par son nom.*



Boumentel Lakhdar



Remerciement

Ce travail a été réalisé dans le cadre de projet de fin d'étude, au département de l'aéronautique à l'université de Blida.

Nous remercions Allah tout puissant de nous avoir donné la volonté et le courage de mener à bien ce travail.

Nous remercions également tous ceux qui, tout au long de ces années d'étude, nous ont encadré, observé, aidé, conseillé et même supporté, et surtout à nos parents. Sans eux nous ne serions jamais arrivés à ce stade.

Nous tenons particulièrement à remercier notre encadreur, Mr. T.ELAICHI pour ses critiques qui nous ont beaucoup aidé à mener ce travail et ont mieux éclairé nos perspectives malgré ses occupations. Nous lui sommes reconnaissants tout particulièrement pour la confiance totale qu'il nous a témoignée et la liberté qu'il nous a laissée.

Nos plus sincères remerciements vont également à Mr le président, et membres de jury pour l'intérêt qu'ils portent à notre projet.

Un grand salut pour notre haut commandement, et qu'à nos chefs au commandement des forces aériennes.

Nos sincères remerciements au commandement et au personnel de notre école mère, E.P.E.A, qui nous a inculqué les bases des sciences et de l'aéronautique.

Et enfin à tous nos collègues et à tous ceux qui ont contribué, de près ou de loin, à la réalisation de cette mémoire.

Résumé

Ce travail a consisté à faire une étude de la méthode numérique de génération de maillage en deux dimensions.

Le principe de la méthode est exposé, ainsi que les différentes techniques utilisées. Parmi ces techniques on a choisi le modèle elliptique (équation de Poisson) qui est basé sur la résolution des équations aux dérivées partielles.

La méthode de génération de maillage est ensuite appliquée à un écoulement externe subsonique.

Pour effectuer la génération de maillage ainsi que la résolution des équations du problème physique étudié, on a élaboré un programme appelé "Maillage", où les programmes sources sont édités en langage fortran.

En fin, des confrontations avec des résultats publiés dans la littérature ont permis de valider les résultats obtenus.

Mots clés : Méthodes numériques - Génération de maillage - Méthode des différences finies - Aérodynamique - Ecoulement potentiel incompressible.

Abstract

This work has consisted in making a study of the grid generation numerical method in two dimensions.

The principle of the method is exposed, as well as the different techniques used. Among these techniques we have chosen the elliptical model (Poisson equation) which is based on the resolution of the partial differential equations.

The grid generation method is then applied to a subsonic external flow.

To realize the grid generation as well as the resolution of the equations of the studied physical problem, we have elaborated a programme called "Maillage", where the source programmes are edited in FORTRAN language.

At last, confrontations with published results in literature have permitted to validate the obtained results.

Keywords, Numerical methods - Grid generation -Finite differences method - Aerodynamics - Incompressible potential flow.

SOMMAIRE

Dédicace.....	I
Remerciements.....	II
Résumé.....	III
Sommaire.....	IV
Nomenclature.....	VIII
Liste des figures	X

Introduction.....	1
--------------------------	----------

Chapitre I : Génération de maillage

I.1.Classification des techniques de génération de maillage	4
I.1.1.Transformations conformes	4
I.1.2.Méthodes algébriques.....	5
I.1.3.Méthodes numériques.....	5
I.2.Aspects physiques.....	6
I.2.1.Région simplement connexe.....	7
I.2.2.Région doublement (multi-) connexe.....	7
I.3.Transformation du domaine physique en domaine de calcul.....	7
I.3.1.Transformation des domaines simplement connexes.....	7
I.3.2.Transformation des domaines doublements (multi-) connexes.....	11
I.3.2.1.Transformation des obstacles en sous régions.....	11
I.3.2.2.Transformation des obstacles en segments droits.....	12
I.3.2.3.Transformation des obstacles par coupure.....	13
I.4.Formulation et discrétisation des techniques de génération de maillage.....	14
I.4.1.Techniques algébriques.....	14
I.4.1.1.Fonctions de condensation « Stretching » unidimensionnelles.....	14
I.4.1.2.Technique de deux parois.....	15

I.4.1.3. Technique de Gilding.....	17
I.4.2. Génération de maillage par la résolution des équations différentielles aux dérivées partielles.....	20
I.4.2.1. Procédures de génération de maillage elliptiques.....	21
I.4.2.1.1. Les équations de Poisson.....	21
I.4.2.1.2. Les équations de Laplace.....	24
I.4.2.2. Procédure de génération de maillage hyperbolique.....	25
I.4.2.3. Procédure de génération de maillage parabolique	26
I.4.3. Conditions aux limites.....	27

Chapitre II : Résolution numérique

II.1. Formulation mathématique.....	29
II.1.1. Equations de poisson.....	29
II.1.2. Fonctions de contrôle.....	30
II.2. Traitement des conditions aux frontières.....	32
II.2.1. Répartition des points au contour du champ physique.....	32
II.2.2. Répartition des points au contour du champ transformé.....	32
II.3. Résolution numérique.....	35
II.3.1. Discrétisation des équations.....	35
II.3.2. Algorithme de résolution	35
II.3.3. Choix de maillage initial.....	36
II.3.4. Test de convergence	37

Chapitre III : Application à un écoulement externe subsonique

III.1. Etude théorique d'un écoulement de fluide	38
III.1.1. Equations générales du mouvement d'un fluide.....	38
III.1.2. Forces et moments aérodynamiques.....	38
III.2. Hypothèses.....	40
III.3. Equations de l'écoulement.....	41
III.4. Condition de Kutta-Joukowski.....	43
III.5. Détermination de champ de vitesse.....	43

III.6.Caractéristiques aérodynamiques des profils d'ailes	45
III.6.1.Coefficient de pression	45
III.6.2.Coefficients de portance et de traînée	46
III.6.3.Coefficient de moment	46
III.6.4.Type de profils étudiés.....	46
III.7.Résolution numérique	47
III.7.1.Discrétisation de l'équation	47
III.7.2.Algorithme de résolution	48
III.7.3.Coefficients aérodynamiques	49

Chapitre IV : Présentation du programme « Maillage »

IV.1.Présentation du programme de génération de maillage « Grid ».....	50
IV.1.1.Structure général	50
IV.1.2. Principaux modules	51
IV.1.3. Entrée du programme.....	51
IV.2.Présentation du programme de calcul.....	57
IV.2.1.Structure général	57

Chapitre V : L'étude par le CFD et le FLUENT

V 1. Introduction.....	60
V 2. description numérique.....	61
V 2.1. Modélisation mathématique du problème.....	61
VI.2.2.Domaine de l'écoulement.....	61
V.3. Maillage.....	62
VI.4.conditions initiales.....	63
VI.5. Résolution numérique (méthode de volume finis)	63
VI.5.1.Principe de la méthode des volumes finis	64
VI.5.2. Discrétisation des équations gouvernantes utilisée dans le code	
Fluent.....	65
VI.5.3.Les critères de convergence.....	67

Chapitre VI : Analyse des résultats

V.1.Génération de maillage.....	69
V.1.1.Domains d'étude	69
V.1.1.1. Domaines simplement connexes	69
V.1.1.2. Domaines doublement connexes	69
V.1.1.3. Domaines multi-connexes	70
V.1.2. Choix de maillage initial	78
V.1.3. Raffinement de maillage	79
V.1.4. Répartition des lignes coordonnées	81
V.2.Generation de maillage par le logiciel CFD.....	86
V.3.Résultats de l'application	88
V.2.1. Distribution de la pression pariétale	88
V.2.2. Analyse du coefficient de portance	88
Conclusion	96
Références bibliographiques	98
Annexe -A-	99
Annexe -B-	105

NOMENCLATURE

- D : Domaine physique.
 ∂D : Frontière du domaine physique.
 R : Domaine computationnel (Domaine de calcul).
 ∂R : Frontière du domaine computationnel.
 (x, y) : Les coordonnées cartésiennes.
 (ξ, η) : Les coordonnées curvilignes généralisées.
 ξ^*, η^* : coordonnées normalisées.
 $P(\xi, \eta)$: Fonction de contrôle du maillage suivant ξ .
 $Q(\xi, \eta)$: Fonction de contrôle du maillage suivant η .
 J : Le Jacobien.
 a_1, b_1 : Paramètres de la fonction de condensation « Stretching ».
 S : Fonction de condensation « Stretching ».
 r : Abscisse curviligne sur le profil.
 T_1, T_2 : Paramètres de contrôle du maillage orthogonal pour les méthodes algébriques.
- $\left. \begin{array}{l} \alpha \\ \beta \\ \gamma \\ \delta \\ \sigma \\ \tau \end{array} \right\}$: Paramètres métriques liés au plan transformé.
- ω_{opt} : Paramètre de relaxation optimal.
- C : Corde du profil.

- (i, j) : Repère lié à l'obstacle.
- $(i1, j1)$: Repère lié à la direction de la vitesse.
- u, v : Les composantes de la vitesse.
- C_p : Coefficient de pression.
- C_L : Coefficient de portance.
- C_D : Coefficient de traînée.
- C_M : Coefficient de moment.
- θ : Angle d'incidence.
- V : Vitesse locale de l'écoulement du fluide.
- V_∞ : Vitesse de l'écoulement non perturbé (à l'infini).
- V_t : Vitesse tangentielle.
- V_n : Vitesse normale.
- p_∞ : Pression à l'infini (écoulement non perturbé).
- ρ : Masse volumique.
- \vec{F} : La force aérodynamique résultante.
- Ψ : Fonction de courant.
- \vec{h} : Le vecteur unitaire normal à la frontière de l'obstacle.
- \vec{t} : Le vecteur unitaire tangentiel à la frontière de l'obstacle.

Fig .V.3: Volume de contrôle dans un maillage tri dimensionnel non orthogonal.....65

Figure V.4.Présentation d'un point d'intégration point dans un volume de contrôle... 66

Fig.VI.1 : Maillage d'un domaine simplement connexe (écoulement dans une tuyère).....70

Fig.VI.2: Maillage d'un domaine simplement connexe (écoulement dans une conduite).....71

Fig.VI.3 : Maillage autour d'un cylindre.....72

Fig. VI.4 : Maillage autour d'un profil NACA0012
..... 73

Fig. VI.5 : Maillage autour d'un profil NACA0012(avec une frontière externe de type « C »).....74

Fig.VI.6 : Maillage autour d'un profil NACA4412.....75

Fig. VI.7 : Maillage autour de deux profils d'ailes.....76

Fig.VI.8 : Maillage autour de deux cylindres.....77

Fig. VI.9 : Raffinement du maillage..... 80

Fig.VI.10.: **condensation** des lignes coordonnées à l'entrée d'une Tuyère..... 82

Fig.VI.11. : condensation des lignes coordonnées à la sortie d'une tuyère.....83

Fig.VI.12.: condensation des lignes coordonnées sur la paroi supérieur. 84

Fig.VI.13.: condensation des lignes coordonnées sur la paroi inférieur. 85

Fig.VI.14. : Maillage autour un cylindre.....86

Fig.VI.15. :Maillage autour de deux cylindres..... 86

Fig.VI.16.:Maillage autour d'un profil NACA4412..... 87

Fig.VI.17. Maillage autour d'un profil NACA0012..... 87

Fig.VI.18. : Distribution du coefficient de pression sur la surface du profil NACA 0012 avec angle d'incidence $\Theta=0$, et une frontière extérieure de type <<O>> 89

Fig.VI.19. : Distribution du coefficient de pression sur la surface du Profil NACA 0012 avec angle d'incidence $\Theta=2$, et une frontière extérieure de type <<O>>..... 90

Fig.VI.20. Distribution du coefficient de pression sur la surface du profil NACA 0012 avec angle d'incidence $\Theta=5$, et une frontière extérieure de type <<O>>.....	91
Fig.VI.21. : Distribution du coefficient de pression sur la surface du profil NACA 0012 avec angle d'incidence $\Theta=7$, et une frontière extérieure de type <<O>>.....	92
Fig.VI.22. : Distribution du coefficient de pression sur la surface du profil NACA 0012 avec angle d'incidence $\Theta=12$, et une frontière extérieure de type <<O>>.....	93
Fig.VI.23. : Distribution du coefficient de pression sur la surface du profil NACA 0012 avec angle d'incidence $\Theta=16$, et une frontière extérieure de type <<O>>.....	94
Fig.VI.24. : Evolution de la portance en fonction de l'angle d'incidence,pour le profil NACA0012.	95



Introduction

INTRODUCTION

L'utilisation des méthodes numériques dans les études d'aérodynamique sert à fournir un moyen rapide et bon marché de simuler les écoulements des fluides ainsi qu'à mettre au point des outils complémentaires aux données obtenues dans les tunnels aérodynamiques en vue de la conception des véhicules aérospatiaux. Les méthodes numériques mènent aussi à des modèles hybrides (théorie expérience) qui favorisent la compréhension de phénomènes très complexes comme la turbulence et le décrochage dynamique. La simulation numérique, qui est en relation directe avec la physique (problèmes posés par la turbulence et le transfert de chaleur), les mathématiques (développement d'algorithmes toujours plus efficaces) et l'informatique (développement de langages, de compilateurs et d'ordinateurs toujours plus puissants), représente un moyen de recherche courant dont l'évolution et les performances des moyens de calculs ont permis l'essor de l'industrie aérospatiale. On reconnaît aujourd'hui la simulation numérique comme un moyen de conception efficace et indispensable à l'élargissement du champ d'application de l'aérodynamique. Dans la phase de conception d'un nouveau design d'avion, par exemple, la simulation numérique donne l'occasion :

- de simuler des phénomènes physiques complexes ;
- d'étudier les interactions de plusieurs disciplines (thermodynamique, aéroélasticité, etc.) ;
- d'améliorer les modèles théoriques en passant des fluides parfaits (équation d'Euler) aux fluides réels (équations de Navier Stokes) ;
- de mieux optimiser l'appareil en tenant compte d'un plus grand nombre de paramètres, donc en se rapprochant de plus en plus de l'écoulement réel ;
- de raccourcir la durée de mise au point du prototype finale.

Parmi les méthodes numériques utilisées dans le domaine d'aérodynamique, les méthodes des panneaux, la méthode de génération de maillage qui fait l'objet du présent travail.

La génération automatique de maillage s'est développée ces dernières années en une théorie à part. Elle a connu un progrès considérable dans le domaine de génération des systèmes de coordonnées résolus numériquement. Une grande variété de ces systèmes a été présentée dans la littérature. L'application des maillages obtenus a été généralisée à différents domaines d'écoulements externes et internes des fluides, en particulier au domaine de l'aérodynamique.

Notre travail présente les différentes techniques de génération de maillage quadrilatère en deux dimensions, ainsi l'application de cette méthode à un écoulement externe subsonique.

Les différentes méthodes de génération de maillage sont présentées dans le chapitre 1. La formulation mathématique et la résolution numérique de la méthode choisie pour générer le maillage sont présentées dans le chapitre 2. Dans le chapitre 3, nous présentons l'application de cette méthode à un écoulement externe subsonique. En plus, le code de génération de maillage et le code de la résolution du problème physique étudié sont présentés dans le chapitre 4. En fin, des résultats de génération de maillage et de son application sont présentés dans le chapitre 5.



Chapitre I :
Génération de maillage

Génération de maillage

La génération automatique de maillage consiste à générer un système de coordonnées curvilignes qui détermine le champ de calcul dans lequel seront exprimées toutes les équations du problème physique. Ce champ est un rectangle monobloc ou multi blocs obtenu par transformation du domaine physique en domaine computationnel. De nombreux développements des techniques de génération de maillage ont été effectués notamment en ce qui concerne les problèmes à deux dimensions pour des résolutions numériques utilisant soit les éléments finis soit les volumes finis ou les différences finies.

Les différentes méthodes de la génération de maillage diffèrent les unes des autres par les propriétés que vérifient les maillages générés par les modèles mathématiques correspondants. Il est alors nécessaire, avant tout choix de l'une de ces méthodes, de connaître les propriétés optimales que doit vérifier le maillage. Ces propriétés sont :

- Bonne régularité du maillage (lissage) ;
- Adaptation du maillage aux conditions aux frontières ;
- Adaptation du maillage aux propriétés des différentes régions du domaine physique (les régions à forts gradients) ;
- Orthogonalité.

Vu la grande variété des travaux relatifs à la génération de maillage qui existent dans la littérature, nous nous limiterons à ceux qui connaissent une grande application dans les domaines de mécanique des fluides et de transfert de chaleur. Ces travaux sont basés essentiellement sur les méthodes des différences finies.

Les approches les plus populaires pour la résolution du problème de valeur limite et la génération des points intérieurs, sont les suivantes :

- approche utilisant les transformations conformes par interpolation linéaire des nœuds internes ;
- approche par interpolations linéaires des nœuds internes ;
- approche par résolution numérique des équations différentielles aux dérivées partielles.

I.1. Classification des techniques de génération de maillages :

I.1.1. Transformations conformes :

Les approches les plus classiques dans la génération des maillages sont les transformations conformes. Elles utilisent les fonctions élémentaires dans le plan complexe. Dans ces techniques il est possible d'écrire la relation entre les domaines physique (x, y) et computationnel (ξ, η) , à deux dimensions, comme :

$$\begin{bmatrix} dx \\ dy \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} h \cos \theta & -h \sin \theta \\ h \sin \theta & h \cos \theta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} d\xi \\ d\eta \end{bmatrix} \quad (\text{I.1})$$

Avec, h : facteur scalaire.

θ : Angle entre la tangente à la droite ξ et l'axe x .

Lorsqu'une transformation conforme est utilisée, le plan computationnel (ξ, η) est relié au plan physique (x, y) par les équations de **Laplace** :

$$\begin{aligned} \xi_{xx} + \xi_{yy} &= 0 \\ \eta_{xx} + \eta_{yy} &= 0 \end{aligned} \quad (\text{I.2})$$

Et les conditions de **Cauchy Riemann** $\xi_x = \eta_y$ et $\xi_y = -\eta_x$. Ainsi il est possible de construire les solutions $\xi(x, y)$ et $\eta(x, y)$ par superposition et par des transformations conformes (**Milne-Thompson, 1968**) [3].

En utilisant les variables complexes, $z = x + iy$ et $\zeta = \xi + i\eta$, une transformation conforme peut être exprimée symboliquement comme, $Z = F(\zeta)$, ou sous une forme plus pratique :

$$\begin{aligned} dZ &= Hd\zeta \quad \text{ou bien} \quad Z = \int Hd\zeta \\ \text{Où } H &= he^{i\theta} = h(\cos\theta + i \sin\theta). \end{aligned}$$

Nous savons que la transformation conforme est généralement utilisée afin d'obtenir les solutions d'écoulements potentiels bidimensionnels autour des configurations relativement complexes, en ramenant, par une transformation appropriée, le problème à celui d'un écoulement autour d'un obstacle simple tel qu'un cercle de rayon égale à l'unité. Comme dans toute technique de génération de maillage, une transformation conforme consiste à :

il est par conséquent utilisé pour la génération de maillage dans des domaines avec frontières externes arbitrairement localisées.

Les modèles hyperboliques ont été traités par **Starius et al.** Ils sont rapides et génèrent des maillages orthogonaux mais présentent l'inconvénient non généraux et de propager les discontinuités des frontières vers l'intérieur du champ d'étude.

Les modèles paraboliques sont aussi rapides que les modèles hyperboliques. Les maillages qu'ils génèrent sont plus réguliers que ceux des systèmes hyperboliques mais moins que ceux des systèmes elliptiques.

Quant aux modèles elliptiques, ils nécessitent généralement la résolution d'un système d'équations différentielles aux dérivées partielles, souvent non linéaires, avec des conditions aux limites spécifiées sur toutes les frontières. Ces modèles sont plus difficiles à mettre en œuvre et plus lents que les modèles paraboliques ou hyperboliques mais d'un autre côté, ils présentent l'avantage d'être plus généraux, s'appliquer à des configurations de frontières un peu plus complexes. Par ailleurs, les maillages générés par ces modèles sont très réguliers même si les domaines considérés présentent des irrégularités sur les frontières ou distribution des points aux frontières non uniforme. De plus, ces systèmes elliptiques ne propagent pas les discontinuités des frontières vers le champ étudié et génèrent des maillages dont l'orthogonalité est beaucoup mieux vérifiée que dans le cas des méthodes algébriques. En outre, la conformité des maillages est souvent requise avec des systèmes elliptiques, en particulier le système de **Laplace**. Cependant, vu la non linéarité des équations de ces systèmes, il est en général, nécessaire de leur joindre d'autres méthodes de génération de maillage, plus rapides, telles que les méthodes algébriques afin d'assurer une meilleure convergence de la solution.

L'utilisation de ce type de systèmes de coordonnées, a été initialement appliquée aux domaines bidimensionnels simplement connexes

.1.2. Aspects physiques :

Avant d'entamer ces techniques, il convient d'éclaircir les relations existant entre le domaine computation (transformé) et le domaine physique. La schématisation d'une frontière typique entre les domaines physique et computationnel peut être interprétée comme

étant la relation entre une région doublement connexe et simplement connexe.

I.2.1 Région simplement connexe :

Définition : On dit d'un domaine D qu'il est simplement connexe si n'importe quelle surface fermée, dont tous les points sont contenus dans le domaine, délimite un sous domaine contenu intégralement dans le domaine D , [4].

I.2.2 Région doublement (multi-) connexe :

Définition : Une région est dit doublement connexe s'il n'existe que deux chemins non conciliables pour relier deux points quelconques. Dans cette région, il n'existe alors qu'un seul contour fermé irréductible [1].

On peut facilement généraliser ces concepts pour définir des régions multi connexes en terme du nombre de contours irréductibles. Le nombre minimal de coupures nécessaires pour obtenir un domaine simplement connexe, auquel on ajoute 1, indique l'ordre de multiplicité :

$$N \text{ multiplicité} = N \text{ coupures} + 1$$

I.3. Transformation du domaine physique en domaine de calcul :

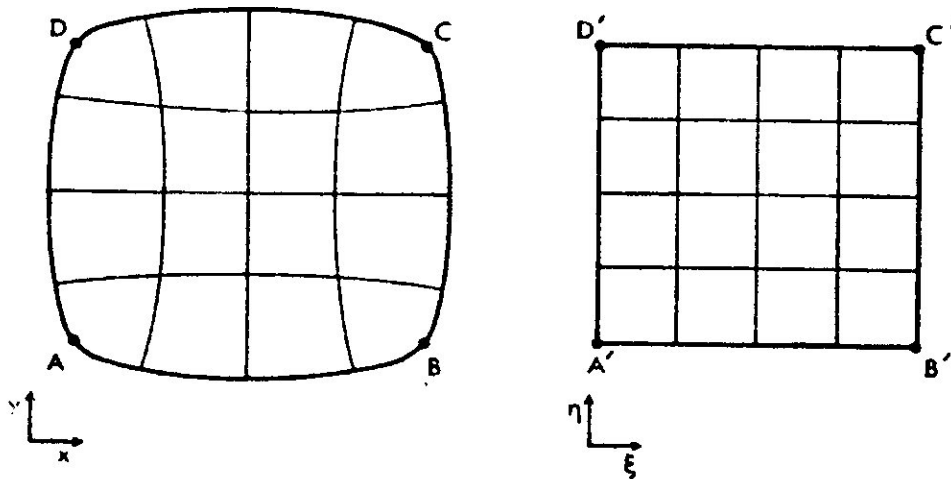
La génération de maillage a été initialement appliquée à des domaines simplement connexes (ne possédant pas d'obstacles). Cette théorie s'est généralisée aux domaines doublement connexes (ayant un obstacle) et aux domaines multi connexes à plusieurs obstacles. Lors de la génération de maillage, il y a transformation du domaine physique en un domaine computationnel ou de calcul, dans lequel aura lieu la résolution numérique du modèle mathématique. Plusieurs méthode de transformation existent. Nous présentons, dans ce qui suit, les méthodes de transformation les plus utilisées [1].

I.3.1. Transformation des domaines simplement connexes :

L'exemple le plus simple qu'on peut citer, est la transformation d'un domaine simplement connexe en un domaine rectangulaire monobloc ou multi blocs. Nous pouvons illustrer cette transformation à travers les différents types existants :

Type 1 :

Ce type de transformation est le plus simple et consiste à transformer un domaine délimité par quatre courbes en un rectangle dans le domaine de calcul. On obtient alors une correspondance entre les discontinuités du domaine transformé avec les sommets A, B, C et D du rectangle.



Domaine physique

Domaine computationnel

Figure. (I.1). Transformation d'un domaine simplement connexe délimité par quatre courbes en un simple rectangle dans le champ de calcul

Type 2 : Ce type de transformation est un peu plus complexe du fait qu'on passe d'un domaine arbitraire de forme en L, qui peut être monobloc ou composé de plusieurs blocs, vers un autre plus régulier. Dans ce cas, deux types de configurations sont possibles :

- a) Transformation d'un domaine physique en forme de L tordu, en un domaine régulier ayant la même forme L dans le domaine de calcul.

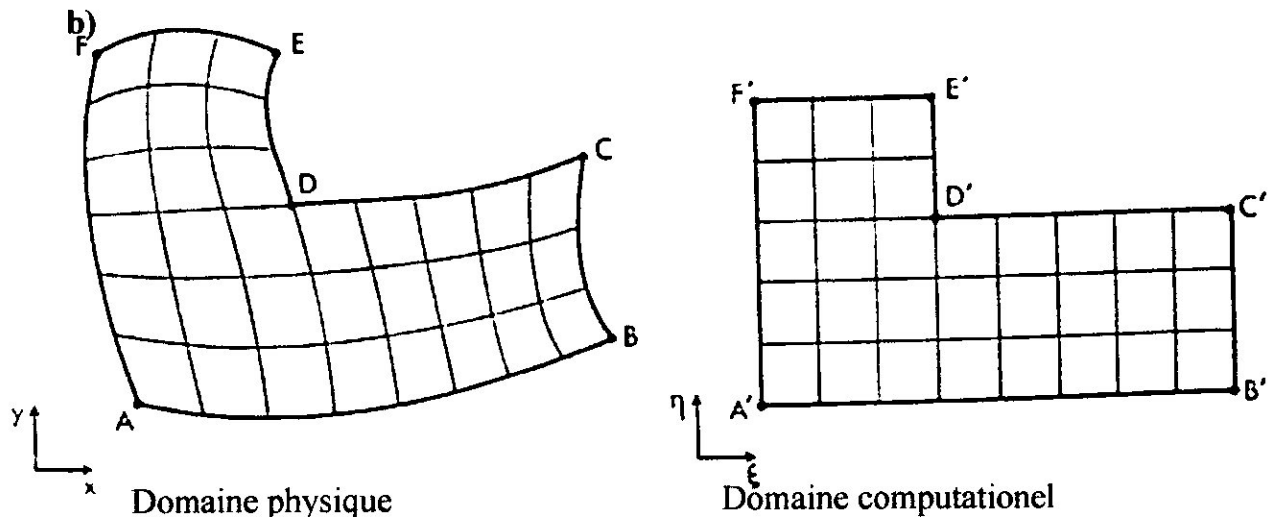


Figure. (I.2). Transformation d'un domaine simplement connexe en forme de L en un domaine régulier possédant la même forme en L.

b) Transformation d'un domaine simplement connexe en forme de L en un domaine rectangulaire monobloc dans le champ de calcul. Ce type de configuration assure une grande facilité dans l'établissement d'un algorithme de calcul dans le champ transformé. Cependant, il convient de la mauvaise précision du maillage au voisinage des points A et D à cause de la discontinuité qui existe en ces points.

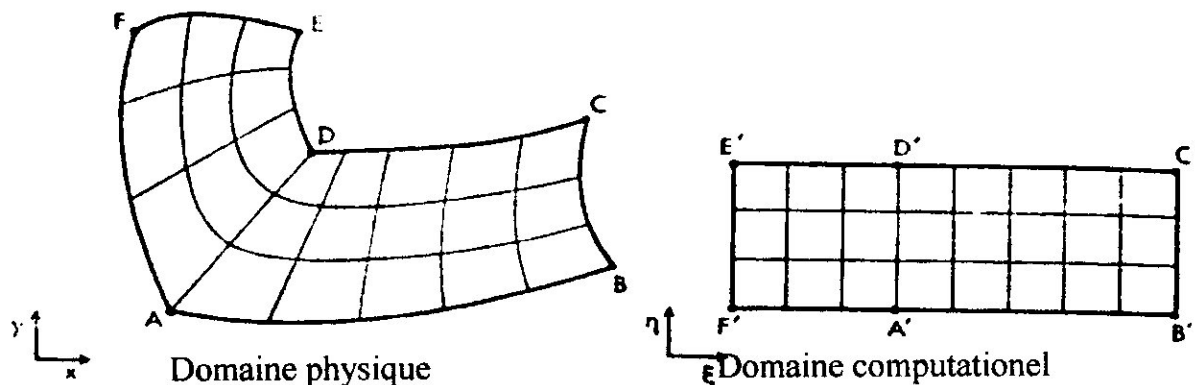


Figure (I.3) : Transformation d'un domaine physique en forme de L en un rectangle monobloc

Type 3 : Lorsque la frontière du domaine physique est de forme plus compliquée, la configuration du champ transformé est plus variée. Ainsi pour le même domaine physique, plusieurs cas sont possibles comme illustré dans ce qui suit :

a) Le cas de la transformation de la figure (I.4) a lieu lorsqu'on a un écoulement autour d'un obstacle courbe ABD et dont les points A et D représentent les points d'arrêt. Dans ce cas, ce type de transformation est très approprié.

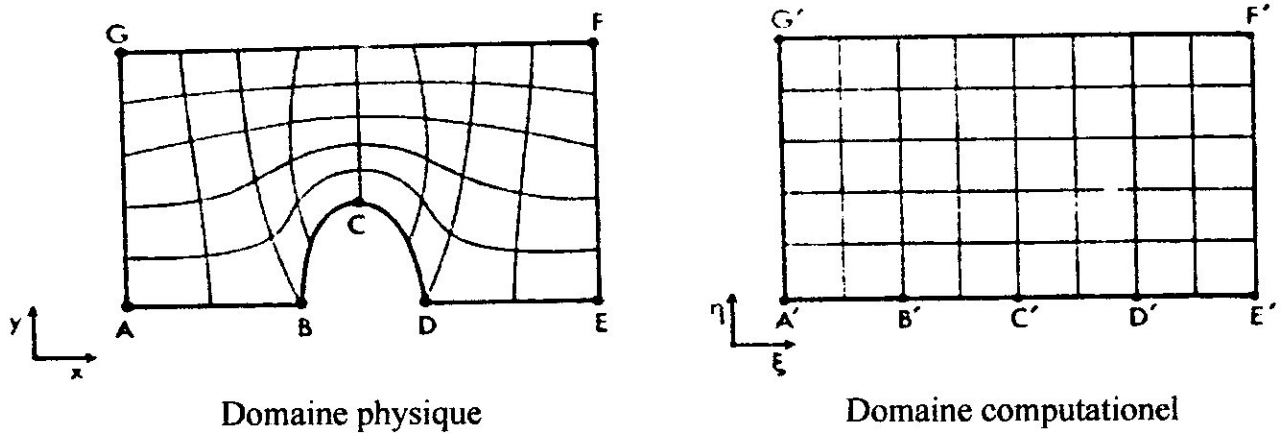


Figure. (I.4). Transformation par aplatissement de l'obstacle.

b) Le cas de la transformation de figure (I.5) se rencontre lorsque le point C subit une grande distorsion du fait qu'un grand nombre de points peuvent être attirés au voisinage de ce dernier.

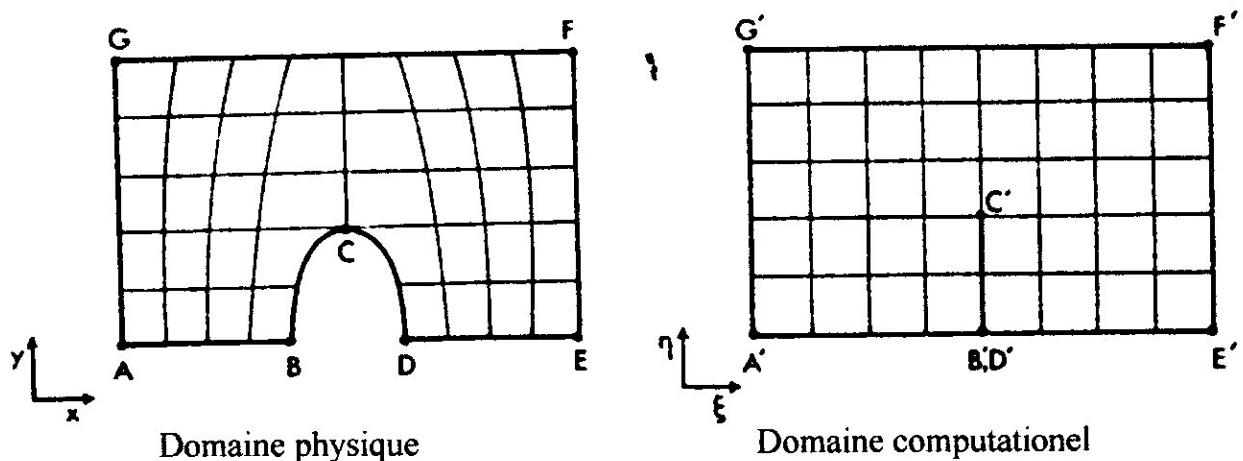


Figure. (I.5). Transformation de l'obstacle en un plaque.

c) Ce type de configuration de est similaire à celui de Fig (I.3), à l'exception de la plus grande distorsion du maillage qui apparaît, dans ce cas ,aux points G et F au lieu des points B et D comme dans le cas de la Fig (I.3). En outre, puisque les points G et F se trouvent sur la frontière extérieure où règne l'écoulement uniforme, l'erreur en ces points est plus faible qu'aux points B et D.

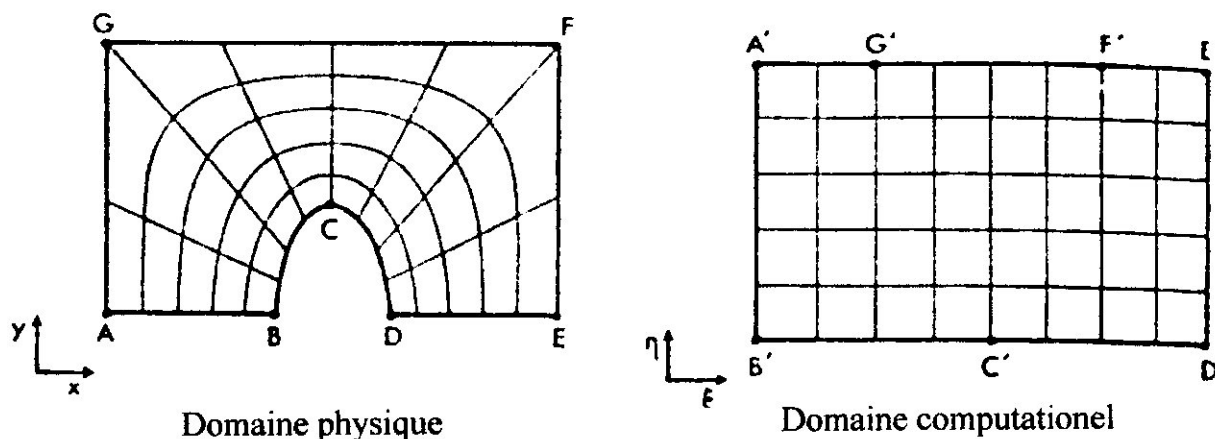


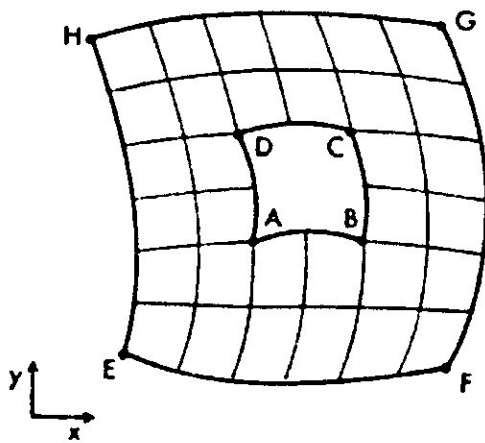
Figure. (I.6). Transformation par aplatissage de l'obstacle avec une bonne résolution.

I.3.2. Transformation des domaines doublements (multi-) connexes :

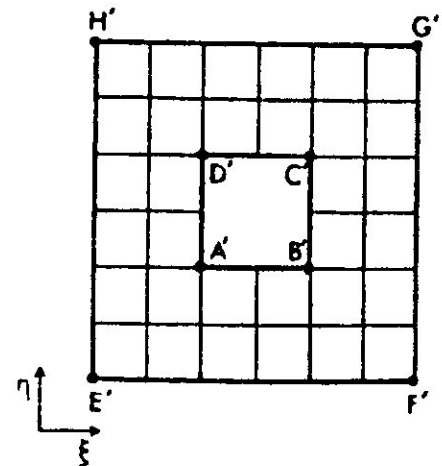
Nous avons déjà cité dans l'aspect physique les différents régions topologiques que l'on peut rencontrer et parmi les quelles on trouve les régions doublement connexes. L'exemple le plus typique est l'écoulement interne dans une conduite avec obstacles. En outre, on peut aussi citer l'écoulement externe autour d'un ou plusieurs obstacles comme dans le cas des ailettes d'une hélice ou les profils d'ailes et qui fait l'objet de la présente étude. Il est important de noter que ces transformations dépendent essentiellement de la forme des obstacles. Nous présentons maintenant quelques exemples illustratifs dans les paragraphes, qui suivent.

I.3.2.1. Transformation des obstacles en sous régions :

Lorsqu'on possède un obstacle ayant une épaisseur relativement plus importante comparée à son allongement, il est plus approprié de le transformer dans ce cas en un rectangle, en essayant de conserver le même degré de connexité.



Domaine physique

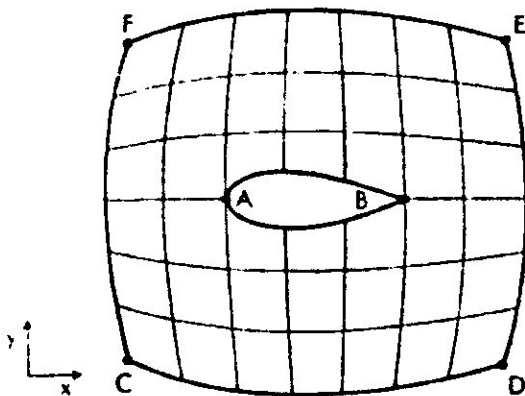


Domaine computationnel

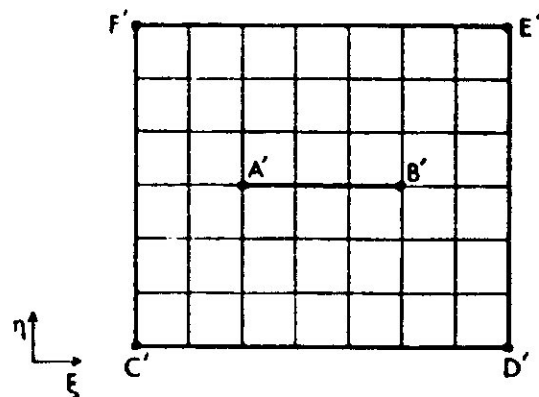
Figure. (I.7). Transformation de l'obstacle en sous région.

I.3.2.2. Transformation des obstacles en segments de droites :

Ce type de transformation s'effectue dans le cas où les obstacles considérés ont des épaisseurs relativement faibles. Un exemple d'illustration est donné dans ce cas :



Domaine physique



Domaine computationnel

Figure. (I.8). Transformation de l'obstacle en un segment de droite.

I.3.2.3. Transformation des obstacles par coupure :

Cette technique constitue un outil très efficace pour palier au problème de distorsion qui apparaît lors de la transformation de l'obstacle en une sous région ou en segment dans le champ de calcul. Elle permet l'obtention d'un domaine transformé rectangulaire simplement connexe et cela peut être effectué par l'introduction d'une (ou plus) coupure dans le domaine physique.

Les types de configurations les plus utilisées en aérodynamique externe sont le type "O" et le type "C".

Configuration de type "C":

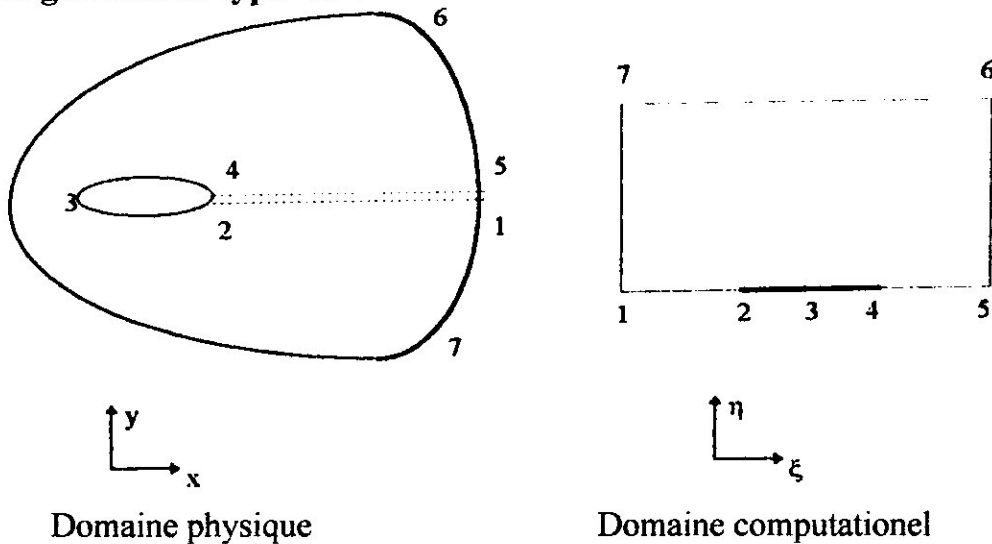


Figure. (I.9). Transformation du domaine physique par coupure
(Configuration type C)

Configuration de type "O" :

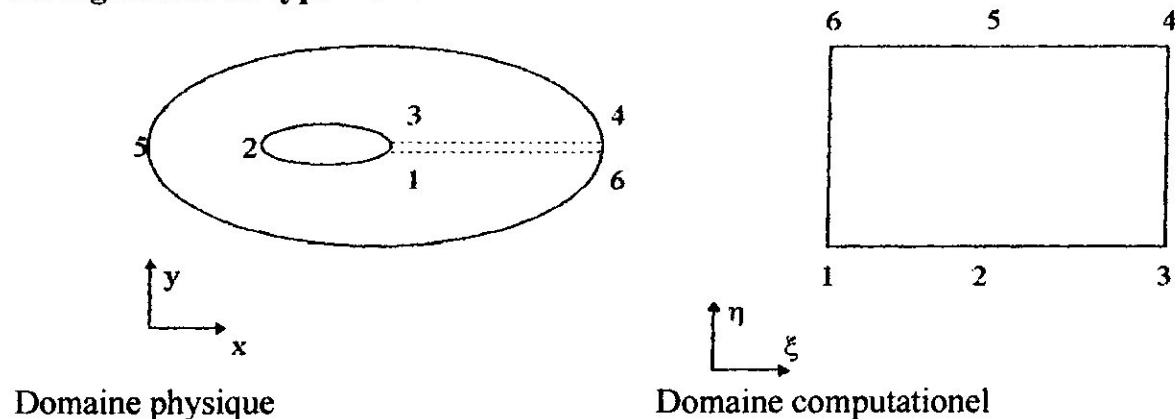


Figure. (I.10). Transformation du domaine physique par coupure
(Configuration type O).

I.4. Formulation et analyse des techniques de génération de maillage :

Compte tenu de la grande variété des travaux relatifs à la génération de maillage existent dans la littérature, nous nous limiterons à ceux qui connaissent une grande application en aérodynamique. Nous présentons dans ce qui suit les techniques les plus utilisées pour générer le plan transformé :

I.4.1. Techniques algébriques :

Les méthodes algébriques les plus utilisées dans la génération des maillages sont celles qui interpolent les points des frontières pour générer les points intérieurs. L'interpolation explicite peut être en une dimension ou en deux dimension.

La qualité demandée est que le maillage généré doit être bien conditionné en le variant doucement vers un maillage orthogonal, car ces techniques ont l'inconvénient de propager les discontinuités vers l'intérieur du domaine.

La distribution des points du maillage à l'intérieur est gouvernée par les fonctions de condensation, Stretching, aux frontières.

I.4.1.1. Fonctions de condensation « stretching » unidimensionnelles :

Les fonctions de condensation sont largement utilisées pour la distribution des points le long des frontières particulières ainsi que des régions spécifiques (à forts gradients) du domaine qui nécessite un traitement avec une grande précision. Pour les écoulements autour des corps, il est nécessaire d'introduire ces fonctions pour résoudre les problèmes où les gradients des variables physiques sont larges.

Il est désirable d'exprimer les variables dépendantes et indépendantes dans la fonction de condensation «Stretching» sous une forme normalisée. Dans ce cas, la variable indépendante appropriée est :

$$\eta^* = \frac{\eta - \eta_1}{\eta_2 - \eta_1} \quad (1.3)$$

avec : $0 \leq \eta^* \leq 1$ où $\eta_1 \leq \eta \leq \eta_2$

Une fonction de condensation « Stretching » proposée par **Robert (1971)** et modifiée par **Eisemann (1979)** [3], est la suivante :

$$S = a_1 \eta^* + (1 - a_1) \left(1 - \frac{\tanh[b_1(1 - \eta^*)]}{\tanh(b_1)} \right) \quad (I.4)$$

Où a_1 et b_1 sont des paramètres de condensation des lignes coordonnées.

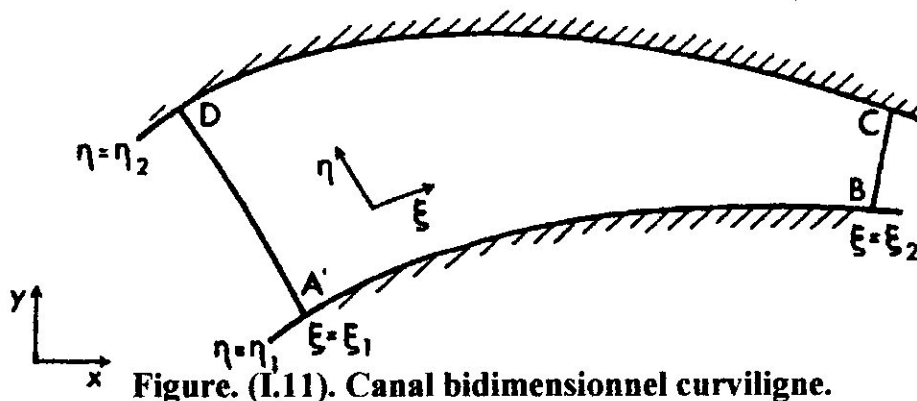
I.4.1.2. Technique de deux parois :

Cette méthode est généralement illustrée par un canal bidimensionnel courbe, voir Fig. (I.11). Il est souvent nécessaire que les fonctions de condensation « Stretching », $S_{AD}(\eta^*)$ et $S_{BC}(\eta^*)$ soient définies pour contrôler la distribution des points au dessous des frontières. Des équations équivalentes à celles de (I.4) sont utilisées pour générer $S_{AD}(\eta^*)$ et $S_{BC}(\eta^*)$. Pour obtenir la valeur de S entre les surfaces AD et BC , une simple interpolation linéaire est recommandée, d'où :

$$S = S_{AD} + \xi^* (S_{BC} - S_{AD}) \quad (I.5)$$

Où

$$\xi^* = \frac{\xi - \xi_1}{\xi_2 - \xi_1}$$



De la même façon, la distribution des points le long des frontières AB et CD est contrôlée par les fonctions « Stretching » $r_{DC}(\xi^*)$ et $r_{AB}(\xi^*)$. Si r_{AB} et r_{DC} sont considérées comme étant les coordonnées généralisées mesurées le long de la surface, alors $X_{AB}(r_{AB})$ et $Y_{AB}(r_{AB})$ se suivent directement. Il en est de même pour $X_{DC}(r_{DC})$ et $Y_{DC}(r_{DC})$.

La technique des deux parois utilise des moyens d'interpolation pour générer les points intérieurs entre les deux frontières AB et DC. Une simple interpolation linéaire est donnée dans ce qui suit :

$$\begin{aligned} X(\xi, \eta) &= (1-S)X_{AB}(r_{AB}) + S X_{DC}(r_{DC}) \\ Y(\xi, \eta) &= (1-S)Y_{AB}(r_{AB}) + S Y_{DC}(r_{DC}) \end{aligned} \quad (I.6)$$

Où S est donnée par (I.4).

La difficulté dans l'interpolation précédente réside dans le fait que les points du maillage, adjacents à la frontière, peuvent devenir tordus si les points sur les frontières correspondantes (X_{AB}, Y_{AB}) et (X_{DC}, Y_{DC}) sont en dehors de l'alignement. Par conséquent, il est préférable de remplacer (I.6) par :

$$\begin{aligned} X(\xi, \eta) &= \mu_1(s)X_{AB}(r_{AB}) + \mu_2(s)X_{DC}(r_{DC}) + T_1\mu_3(s)\left(\frac{dY_{AB}}{dr_{AB}}(r_{AB})\right) + T_2\mu_4(s)\left(\frac{dY_{DC}}{dr_{DC}}(r_{DC})\right) \\ Y(\xi, \eta) &= \mu_1(s)Y_{AB}(r_{AB}) + \mu_2(s)Y_{DC}(r_{DC}) - T_1\mu_3(s)\left(\frac{dX_{AB}}{dr_{AB}}(r_{AB})\right) - T_2\mu_4(s)\left(\frac{dX_{DC}}{dr_{DC}}(r_{DC})\right) \end{aligned}$$

où :

$$\begin{aligned} \mu_1(s) &= 2s^3 - 3s^2 + 1 & , & \quad \mu_2(s) = -2s^3 + 3s^2 \\ \mu_3(s) &= s^3 - 2s^2 + s & , & \quad \mu_4(s) = s^3 - s^2 \end{aligned} \quad (I.7)$$

Les paramètres T_1 et T_2 sont utilisés pour contrôler la distance à l'intérieur du maillage à partir de laquelle l'orthogonalité est renforcée.

I.4.1.3. Technique de Gilding :

Dans ce paragraphe, une nouvelle technique de génération de maillage est développée pour répondre aux besoins de nombreux problèmes physiques pratiques.

Cette technique a été proposée par **B.H.Gilding (1988)** [1]. Comme dans toute technique algébrique, elle utilise les fonctions de condensation.

Considérons un domaine D simplement connexe dans le plan physique rapporté à un système de coordonnées cartésiennes (x, y) . Comme précédemment, on choisit une région de forme quadrilatérale.

$$R = \{(\xi, \eta) : \xi_1 < \xi < \xi_2, \eta_1 < \eta < \eta_2\}$$

$$\partial D = \{(x(\xi, \eta_1), y(\xi, \eta_1)) : \xi_1 \leq \xi \leq \xi_2\} \cup \{(x(\xi_2, \eta), y(\xi_2, \eta)) : \eta_1 \leq \eta \leq \eta_2\} \\ \cup \{(x(\xi, \eta_2), y(\xi, \eta_2)) : \xi_2 \geq \xi \geq \xi_1\} \cup \{(x(\xi_1, \eta), y(\xi_1, \eta)) : \eta_2 \geq \eta \geq \eta_1\}$$

Notre objectif est de trouver l'expression qui définit le domaine :

$$\bar{D} = \{x(\xi, \eta), y(\xi, \eta) : (\xi, \eta) \in \bar{R}\}$$

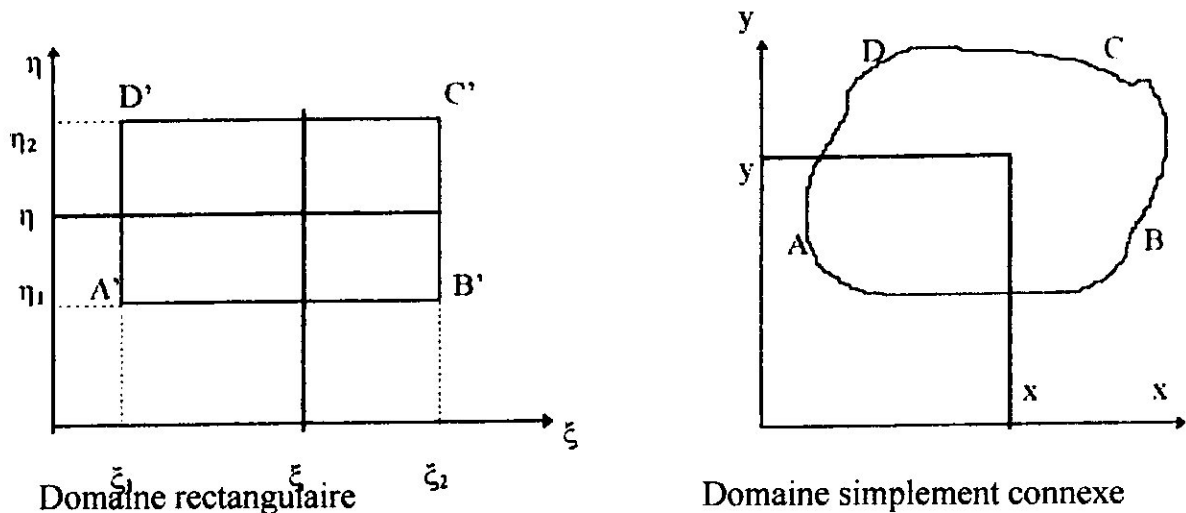


Figure. (I.12). Transformation du domaine physique en un domaine rectangulaire par la technique de Gilding.

Pour tout points $(\xi, \eta) \in \bar{R}$, on pose $\alpha(\xi, \eta)$ la projection normale du points $(x(\xi, \eta), y(\xi, \eta))$ sur la ligne reliant les points $(x(\xi_1, \eta), y(\xi_1, \eta))$ et $(x(\xi_2, \eta), y(\xi_2, \eta))$ dans le plan physique. L'équation de la droite joignant les deux points, susmentionnés, est donnée par :

$$\delta_x(\eta)\{y - y(\xi_1, \eta)\} = \delta_y(\eta)\{x - x(\xi_1, \eta)\}$$

Avec : (I.8)

$$\delta_x(\eta) = x(\xi_2, \eta) - x(\xi_1, \eta)$$

$$\delta_y(\eta) = y(\xi_2, \eta) - y(\xi_1, \eta)$$

D'autre part, l'équation de la normale à cette droite, obtenue en projetant le point $(x(\xi, \eta), y(\xi, \eta))$ sur elle, est donnée par :

$$\delta_y(\eta)\{y - y(\xi, \eta)\} = \delta_x(\eta)\{x - x(\xi, \eta)\} \quad (I.9)$$

Le Point (x_α, y_β) d'intersection de la projection avec cette ligne, est défini par :

$$x_\alpha(\xi, \eta) = x(\xi_1, \eta) + \alpha(\xi, \eta)\delta_x(\eta) \quad (I.10)$$

$$y_\alpha(\xi, \eta) = y(\xi_1, \eta) + \alpha(\xi, \eta)\delta_y(\eta)$$

où :

$$\alpha(\xi, \eta) = \frac{[\{x(\xi, \eta) - x(\xi_1, \eta)\}\delta_x(\eta) + \{y(\xi, \eta) - y(\xi_1, \eta)\}\delta_y(\eta)]}{[\delta_x^2(\eta) + \delta_y^2(\eta)]}$$

De la même façon, on définit la projection normalisée du point $(x(\xi, \eta), y(\xi, \eta))$ sur la ligne d'extrémité $(x(\xi, \eta_1), y(\xi, \eta_1))$ et $(x(\xi, \eta_2), y(\xi, \eta_2))$ comme :

$$x_\beta(\xi, \eta) = x(\xi, \eta_1) + \beta(\xi, \eta)\varepsilon_x(\xi) \quad (I.11)$$

$$y_\beta(\xi, \eta) = y(\xi, \eta_1) + \beta(\xi, \eta)\varepsilon_y(\xi)$$

où :

$$\beta(\xi, \eta) = \frac{\{x(\xi, \eta) - x(\xi, \eta_1)\varepsilon_x(\xi) + \{y(\xi, \eta) - y(\xi, \eta_1)\varepsilon_y(\xi)\}}{[\varepsilon_x^2(\xi) + \varepsilon_y^2(\xi)]}$$

$$\varepsilon_x(\xi) = x(\xi, \eta_2) - x(\xi, \eta_1)$$

$$\varepsilon_y(\xi) = y(\xi, \eta_2) - y(\xi, \eta_1)$$

on pose : $\alpha_i(\xi) = \alpha(\xi, \eta_i)$

Avec: $i = 1, 2$

$$\beta_i(\eta) = \beta(\xi_i, \eta)$$

On suppose que $\alpha_i(\xi)$ et $\beta_i(\eta)$ sont définis et continus sur : $\xi_1 \leq \xi \leq \xi_2$ et $\eta_1 \leq \eta \leq \eta_2$ respectivement. De plus, on pose :

$$\alpha_i(\xi_1) = 0 \quad \alpha_i(\xi_2) = 0$$

et

avec: $i = 1, 2$

$$\beta_i(\eta_1) = 0 \quad \beta_i(\eta_2) = 0$$

Ainsi, on définit la forme normalisée par :

$$\begin{aligned} \alpha(\xi, \eta) &= \{1 - \beta(\xi, \eta)\} \alpha_1(\xi) + \beta(\xi, \eta) \alpha_2(\xi) \\ \beta(\xi, \eta) &= \{1 - \alpha(\xi, \eta)\} \beta_1(\eta) + \alpha(\xi, \eta) \beta_2(\eta) \end{aligned} \quad (I.12)$$

Pour tout $(\xi, \eta) \in R$, en éliminant les deux inconnues dans les deux équations précédents, il vient :

$$\begin{aligned} \alpha(\xi, \eta) &= \frac{\{1 - \beta_1(\eta)\} \alpha_1(\xi) + \beta_1(\eta) \alpha_2(\xi)}{d(\xi, \eta)} \\ \beta(\xi, \eta) &= \frac{\{1 - \alpha_1(\xi)\} \beta_1(\eta) + \alpha_1(\xi) \beta_2(\eta)}{d(\xi, \eta)} \end{aligned} \quad (I.13)$$

Avec : $d(\xi, \eta) = 1 - \{\alpha_2(\xi) - \alpha_1(\xi)\} \{\beta_2(\eta) - \beta_1(\eta)\}$

Finalement, notons que si $\alpha_1(\xi) > 0$, $\alpha_2(\xi) < 1$ et $\beta_1(\eta) > 0$, $\beta_2(\eta) < 1$, alors le dénominateur $d(\xi, \eta)$ dans (I.13) est différent de zéro. Par conséquent, il est clair que $0 < \alpha(\xi, \eta) < 1$ et $0 < \beta(\xi, \eta) < 1$. En outre, si $\alpha_1(\xi) = \alpha_2(\xi)$ pour quelques valeurs de $\xi \in [\xi_1, \xi_2]$, alors l'expression de α se réduit à $\beta(\xi, \eta) = \beta_1(\xi, \eta) = \beta_2(\xi, \eta)$ pour tout $\eta \in [\eta_1, \eta_2]$. De même, si $\beta_1(\eta) = \beta_2(\eta)$ pour quelques valeurs de $\eta \in [\eta_1, \eta_2]$, alors l'expression de α se réduit à $\beta(\xi, \eta) = \beta_1(\xi, \eta) = \beta_2(\xi, \eta)$ pour tout $\xi \in [\xi_1, \xi_2]$. Avec $\alpha(\xi, \eta)$ et $\beta(\xi, \eta)$ définis par (I.13), l'inversion des équations (I.9) et (I.11) nous donne l'expression générale de tout point $(x, y) \in D$, comme :

$$x(\xi, \eta) = \frac{[x_\alpha(\xi, \eta)\delta_x(\eta) + y_\alpha(\xi, \eta)\delta_y(\eta)]\varepsilon_y(\xi) - [x_\beta(\xi, \eta)\varepsilon_x(\xi) + y_\beta(\xi, \eta)\varepsilon_y(\xi)]\delta_y(\eta)}{\Delta(\xi, \eta)}$$

$$y(\xi, \eta) = \frac{[x_\beta(\xi, \eta)\varepsilon_x(\xi) + y_\beta(\xi, \eta)\varepsilon_y(\xi)]\delta_x(\eta) - [x_\alpha(\xi, \eta)\delta_x(\eta) + y_\alpha(\xi, \eta)\delta_y(\eta)]\varepsilon_x(\xi)}{\Delta(\xi, \eta)}$$

$$\text{Avec : } \Delta(\xi, \eta) = \delta_x(\eta)\varepsilon_y(\xi) - \varepsilon_x(\xi)\delta_y(\eta) \quad (\text{I.14})$$

I.4.2. Génération de maillages par la résolution des équations différentielles aux dérivées partielles :

La majorité des problèmes de physique et de technologie peuvent être décrits en termes d'équations différentielles aux dérivées partielles. En outre, la plupart de ces problèmes s'inscrivent naturellement dans l'une des trois catégories suivantes :

- Problème d'équilibre.
- Problème à valeurs propres.
- Problème de propagation.

Avant de résoudre de tels problèmes par des méthodes, il faut générer le maillage. On peut alors opter pour la résolution d'un autre système d'équations différentielles aux dérivées partielles afin de déterminer le maillage. Les propriétés des maillages générés par cette approche sont notamment reliées aux propriétés des équations différentielles aux dérivées partielles utilisées comme équations de génération de maillage.

Cependant, l'utilisation de ces équation conduit à un système d'équations non linéaires couplées en x et y, notées par :

$$\begin{aligned}\alpha_m x_{\xi\xi} - 2\beta_m x_{\xi\eta} + \gamma_m x_{\eta\eta} &= -J^2(x_\xi P + x_\eta Q) \\ \alpha_m y_{\xi\xi} - 2\beta_m y_{\xi\eta} + \gamma_m y_{\eta\eta} &= -J^2(y_\xi P + y_\eta Q)\end{aligned}\quad (I.17)$$

Avec :

$$\begin{aligned}\alpha_m &= x_\eta^2 + y_\eta^2 \\ \beta_m &= x_\xi y_\eta + y_\xi x_\eta \\ \gamma_m &= x_\xi^2 + y_\xi^2 \\ J &= x_\xi y_\eta - x_\eta y_\xi\end{aligned}\quad (I.18)$$

Les équations (I.17) avec (I.18) ont été dérivées et popularisées par **Thompson et al (1974)** [3], en transformant le système d'équations suggéré, comme générateur de maillage. Il est à noter que α_m , β_m et γ_m sont les coefficients métriques. Dans le cas où $\beta_m=0$, le maillage est orthogonal. Il est alors conseillé de substituer $\beta_m=0$ dans (I.17). Cependant, cette contrainte n'assure pas l'orthogonalité. Par contre, cela peut conduire à une intersection à angle droit des lignes coordonnées du maillage avec les frontières (surface du profile). La solution de ce système d'équations peut être obtenue par l'utilisation d'une linéarisation appropriée et d'une représentation des dérivées par des différences finies centrales.

Remarque :

Dans tout ce qui suivre, on pose $\Delta\xi = \Delta\eta = 1$ dans le plan computationnel. Ce choix n'affecte pas le maillage dans le plan physique.

I.4.2.1.1.b. Discrétisation et algorithme de calcul :

La résolution du système (I.17) est effectuée dans le champ transformé muni des coordonnées curviligne (ξ, η) . Les opérateurs de dérivation sont approchés par des schémas aux différences finies centrées d'ordre deux.

Pour $P = Q = 0$, le résidu en maillage carré pour $\xi=ih$ ($i=0, \dots, N$), $\eta=jh$ ($j=0, \dots, M$), peut être représenté comme :

$$R_{i,j}^k = \alpha_{mij}^k (U_{i+1,j}^k - 2U_{i,j}^k + U_{i-1,j}^k) - 2\beta_{mij}^k (U_{i+1,j+1}^k - U_{i-1,j+1}^k - U_{i+1,j-1}^k + U_{i-1,j-1}^k) + \gamma_{mij}^k (U_{i,j+1}^k - 2U_{i,j}^k + U_{i,j-1}^k)\quad (I.19)$$

où $U = U(x, y)$ représente l'inconnue au point (i, j) à l'itération direct k.

De même, les paramètres métriques α_m , β_m et γ_m sont approchés par des schémas aux différences finies centrées d'ordre deux, d'où :

$$\begin{aligned}\alpha_{mi,j} &= 0.25 [(X_{i,j+1}^k - X_{i,j-1}^k)^2 + (Y_{i,j+1}^k - Y_{i,j-1}^k)^2] \\ \beta_{mi,j} &= 0.25 [(X_{i+1,j}^k - X_{i-1,j}^k)(Y_{i,j+1}^k - Y_{i,j-1}^k) + (Y_{i+1,j}^k - Y_{i-1,j}^k)(X_{i,j+1}^k - X_{i,j-1}^k)] \\ \gamma_{mi,j} &= 0.25 [(X_{i+1,j}^k - X_{i-1,j}^k)^2 + (Y_{i+1,j}^k - Y_{i-1,j}^k)^2]\end{aligned}\quad (I.20)$$

Il s'ensuit que la solution de (I.17) peut être obtenue en utilisant le schéma stationnaire linéaire de points successifs en surlaxation **SOR** :

$$U_{i,j}^{k+1} = U_{i,j}^k + \frac{\omega_{opt} R_{i,j}^k}{2(\alpha_{mi,j} + \gamma_{mi,j})} \quad (I.21)$$

Où ω_{opt} est le paramètre de relaxation défini dans l'intervalle [1,2].

La même procédure est utilisée dans le cas où on introduit les fonctions de contrôle dans le résidu R_{ij}^k .

I.4.2.1.1.c. Fonctions de contrôle de maillage :

Les propriétés de filtrage inhérentes aux équations de Laplace assurent que, dans le cas d'absence d'une frontière curviligne, les lignes coordonnées sont éventuellement espacées. Cependant, près des frontières convexes, l'espacement des mailles devient serré. Tandis que près des frontières concaves, l'espacement du maillage devient clairsemé. Ces propriétés ne sont pas, souvent, désirables pour la génération de maillage où il est essentiel que le maillage près de la frontière, réfléchit l'image de celle-ci. Le contrôle de l'espacement des lignes coordonnées peut être obtenu par l'introduction des fonctions sources dans l'équation de Laplace qui sont ainsi converties en équation de type Poisson. Le problème majeur, pour une génération de maillage automatique, est de choisir ces fonction sources d'une manière judicieuse. Des méthodes automatiques ont été développées (Thomas, Middlecoff et St Eger 1979-1980), dans ce sens. Dans l'approche qui va suivre, une forme simplifiée des termes sources P et Q est donnée par [1] :

$$P = P_0(\xi)e^{-a(\eta-\eta_1)} \quad (I.22)$$

$$Q = Q_0(\xi)e^{-b(\eta-\eta_1)}$$

Où η_1 correspond à η_{\min} de la frontière interne (profil),

P_0, Q_0 constantes qui varient dans la direction de ξ
et a, b des constants usuelles .

Un autre type de fonctions sources toujours proposées par **T.D.Thomas** et **J.F.Middlecoff**, est le cas où les fonctions P et Q sont de type linéaire. L'idée de base de cette approche est d'utiliser les points aux frontières pour calculer ces fonctions sources, qui sont alors interpolées dans le champ. En utilisant les équations elliptiques Précédentes et en supposant que toutes les dérivées secondes qui traversent la frontière sont nulles, on obtient les équation suivantes [1] :

$$P = - \frac{(x_{\xi\xi} x_{\xi} + y_{\xi\xi} x_{\xi})}{x_{\xi}^2 + y_{\xi}^2} (\xi_x^2 + \xi_y^2) \quad (I.23)$$

$$Q = - \frac{(x_{\eta\eta} x_{\eta} + y_{\eta\eta} x_{\eta})}{x_{\eta}^2 + y_{\eta}^2} (\eta_x^2 + \eta_y^2)$$

A partir d'ici et pour une distribution des points aux frontières parfaite, les fonctions de contrôles peuvent être calculées pour réfléchir cet espacement dans le champ.

1.4.2.1.2. Equations de Laplace :

1.4.2.1.2.a. Formulation mathématique :

Dans cette partie, un autre type de système elliptique est présenté. Cependant, **Ives (1982)** [3] recommande, pour générer les points intérieurs rapidement après avoir spécifié les points sur les frontières, la résolution des équations suivantes :

$$X_{\xi\xi} + X_{\eta\eta} = 0 \quad (I.24)$$

$$Y_{\xi\xi} + Y_{\eta\eta} = 0$$

Il convient de signaler que cette procédure peut être généralisée à plusieurs obstacles isolés tels que les profils d'aile et volets.

1.4.2.1.2.b. Discrétisation et algorithme de calcul :

Les opérateurs de dérivation sont approchés par des schémas aux différences finies centrées d'ordre deux. Ainsi, nous obtenons les équations suivantes :

$$\begin{aligned} X_{i+1,j}^K - 2X_{i,j}^* + X_{i-1,j}^{K+1} + X_{i,j+1}^K - 2X_{i,j}^* + X_{i,j-1}^{K+1} &= 0 \\ Y_{i+1,j}^K - 2Y_{i,j}^* + Y_{i-1,j}^{K+1} + Y_{i,j+1}^K - 2Y_{i,j}^* + Y_{i,j-1}^{K+1} &= 0 \end{aligned} \quad (I.25)$$

En appliquant le schéma itératif **SOR** aux équations précédentes, on obtient :

$$\begin{aligned} X_{i,j}^{K+1} &= \omega_{opt} X_{i,j}^K + (1 - \omega_{opt}) X_{i,j}^* \\ Y_{i,j}^{K+1} &= \omega_{opt} Y_{i,j}^K + (1 - \omega_{opt}) Y_{i,j}^* \end{aligned} \quad (I.26)$$

1.4.2.2. Procédure de génération de maillage hyperbolique :

Ce type de procédure de génération de maillage est moins développé que ceux des procédures elliptiques bien qu'il possède des caractéristiques désirables. Cependant, le type, qu'on a utilisé, est celui développé par **Starius, St Eger** et **Chaussée**, qui est donné par [1] :

$$\begin{aligned} \nabla \xi \cdot \nabla \eta &= \xi_x \eta_x + \xi_y \eta_y = \varphi \\ \xi_x \eta_y - \xi_y \eta_x &= J \end{aligned} \quad (I.27)$$

Où J et φ Représentent le jacobien et la fonction sources respectivement.

L'orthogonalité est obtenue par une simple élimination de φ ($\varphi=0$). L'inconvénient de cette technique est lié au manque de contrôle direct de la distribution des points sur les frontières extérieures.

Par ailleurs, les valeurs de x_{ij}^* et y_{ij}^* sont données par :

$$x_{i,j}^* = \frac{x_{i,j-1}^{K+1} + (A+B)x_{i-1,j}^{K+1} + (A-B)x_{i+1}^K - B(x_{i-1,j-1}^{K+1} - x_{i+1,j-1}^K)}{1+2A} + S_x \quad (I.31)$$

$$y_{i,j}^* = \frac{y_{i,j-1}^{K+1} + (A+B)y_{i-1,j}^{K+1} + (A-B)y_{i+1}^K - B(y_{i-1,j-1}^{K+1} - y_{i+1,j-1}^K)}{1+2A} + S_y$$

Pour les indices, i varie de 2 à $IMAX - 1$ et j varie de 2 à $JMAX - 1$

I.4.3. Conditions aux limites :

La frontière externe, qui délimite le domaine physique, est prise de forme O (circulaire), de forme C ou de forme H. Par contre, le domaine computationnel obtenu est un domaine rectangulaire monobloc permettant ainsi de simplifier tout calcul basé sur lui. Ce dernier est obtenu par introduction d'une ou plusieurs coupures dans le domaine physique. Ces coupures, qui se trouvent à l'intérieur du champ physique, constituent alors des frontières fictives reliant la frontière externe aux contours des obstacles. Cependant, dans le domaine computationnel, ces coupures correspondent à des paires de segments superposables représentés sur les côtés du rectangle. Elles doivent vérifier un certain nombre de propriétés, qui sont :

- périodicité de la solution sur les coupures :

Les coordonnées et les caractéristiques physiques (fonction de courant, le nombre de Mach, la masse volumique, ...) sont identiques sur les segments d'une même paire de coupures ;

- les segments d'une même paire de coupure (ξ, η) , ont des valeurs égales ou opposées.

D'autre part, les contours des obstacles et la frontière externe sont aussi représentés par des segments sur les côtés du domaine computationnel. Par ailleurs, sachant que la frontière externe peut influencer sur la solution physique son éloignement ainsi que par sa configuration géométrique, un choix judicieux de cette frontière est alors indispensable.

En outre, l'existence de ces coupures impose une grande complexité dans la programmation. De ce fait, il est préférable d'évaluer les dérivées des fonctions au niveau de ces segments à part, comme par exemple dans le cas d'une frontière extérieure de type O où on a :

Pour générer le maillage, nous avons choisi pour notre étude le modèle elliptique (par équation de poisson) parmi les méthodes de génération de maillage par résolution des équations différentielles aux dérivées partielles, proposé par Thompson (1974) [3], et ce pour les propriétés qu'il vérifie qui sont :

- Adaptation du maillage aux frontières ;
- Distribution régulière des lignes coordonnées ;
- Transformation biunivoque du domaine physique au domaine d'étude (c'est-à-dire, le système ne propage pas les discontinuités des frontières vers le champ étudié) ;
- L'orthogonalité.

II.1. Formulation mathématique :

II.1.1. Equations de poisson :

Le modèle elliptique que nous avons choisi est constitué d'un système d'équation aux dérivées partielles non linéaires donné par :

$$\begin{aligned}\xi_{xx} + \xi_{yy} &= P(\xi, \eta) \\ \eta_{xx} + \eta_{yy} &= Q(\xi, \eta)\end{aligned}\tag{II.1}$$

où P et Q sont des fonctions utilisées pour contrôler le maillage intérieur.

La résolution de ce système est effectuée dans le domaine transformé des coordonnées curvilignes (ξ, η) .

Ce système dans le domaine transformé est donné par :

$$\begin{aligned}\alpha X_{\xi\xi} - 2\beta X_{\xi\eta} + \gamma X_{\eta\eta} + \delta(PX_{\xi} + QX_{\eta}) &= 0 \\ \alpha Y_{\xi\xi} - 2\beta Y_{\xi\eta} + \gamma Y_{\eta\eta} + \delta(PY_{\xi} + QY_{\eta}) &= 0\end{aligned}\tag{II.2}$$

Où :

$$\begin{aligned}\alpha &= X_{\eta}^2 + Y_{\eta}^2 \\ \beta &= X_{\xi}Y_{\eta} + Y_{\xi}X_{\eta}\end{aligned}$$

$$\gamma = X_{\xi}^2 + Y_{\xi}^2$$

$$\delta = (X_{\xi}Y_{\eta} - X_{\eta}Y_{\xi})^2$$

avec les condition aux frontières de type **Dirichlet**, données par :

$$X = X_i(\xi, \eta) \quad (\text{II.3})$$

$$Y = Y_i(\xi, \eta)$$

avec $i = 1, N$.

N : nombre total de segments correspondant aux contours des obstacles, aux coupures et à la frontière externe.

II.1.2. Fonctions de contrôle :

Pour contrôler le maillage nous avons choisi les fonctions proposées par Thompson et al (1977) [3] donnés par :

$$P(\xi, \eta) = - \sum_{l=1}^L a_l \operatorname{sgn}(\xi - \xi_l) \exp(-c_l |\xi - \xi_l|)$$

$$- \sum_{m=1}^M b_m \operatorname{sgn}(\xi - \xi_m) \exp \left[-d_m \left[(\xi - \xi_m)^2 + (\eta - \eta_m)^2 \right]^{1/2} \right]$$

$$Q(\xi, \eta) = - \sum_{l=1}^L a_l \operatorname{sgn}(\eta - \eta_l) \exp(-c_l |\eta - \eta_l|)$$

$$- \sum_{m=1}^M b_m \operatorname{sgn}(\eta - \eta_m) \exp \left[-d_m \left[(\xi - \xi_m)^2 + (\eta - \eta_m)^2 \right]^{1/2} \right]$$

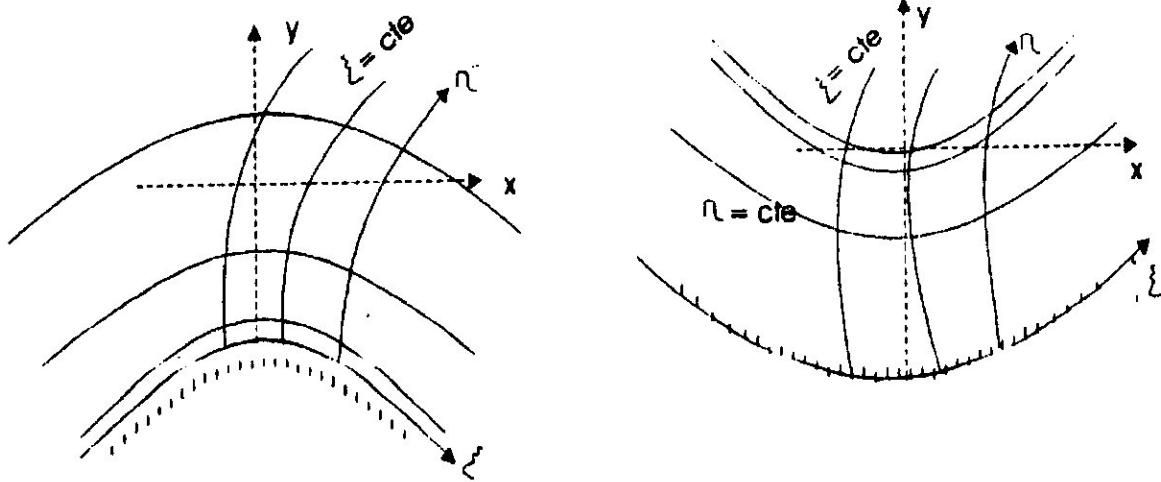
(II.4)

La fonction sgn est définie par :

$$\operatorname{sgn}(x) = 1 \quad \text{si } x \text{ est positive,}$$

$$= 0 \quad \text{si } x = 0,$$

$$= -1 \quad \text{si } x \text{ est négative.}$$



Attraction des lignes coordonnées de même nature η vers la frontière convexe
 Répulsion des lignes coordonnées de même nature η de la frontière concave

Figure.II .1. Attraction et répulsion des lignes coordonnées.

Ces fonctions sont constituées de deux types de termes :

Termes à attraction (répulsion) vers les lignes :

Ils sont représentés par :

$$-\sum_{l=1}^L a_l \operatorname{sgn}(\xi - \xi_l) \exp(-c_l |\xi - \xi_l|) \quad (\text{dans } P(\xi, \eta)),$$

$$-\sum_{l=1}^L a_l \operatorname{sgn}(\eta - \eta_l) \exp(-c_l |\eta - \eta_l|) \quad (\text{dans } Q(\xi, \eta)).$$

Dans le premier terme, les lignes coordonnées du maillage, sur lesquelles la coordonnée curviligne ξ est constante, s'attirent ou se repoussent suivant le signe de P, vers les lignes coordonnées choisies de même type ($\xi_l = cte \quad l = 1, L$).

Le même raisonnement est valable pour le deuxième terme avec les lignes coordonnées sur lesquelles la coordonnée curviligne η est constante.

Termes à attraction (répulsion) vers des points :

Ils sont représentés par :

$$-\sum_{m=1}^M b_m \operatorname{sgn}(\xi - \xi_m) \exp\left[-d_m \left[(\xi - \xi_m)^2 + (\eta - \eta_m)^2\right]^{1/2}\right] \quad (\text{dans } P(\xi, \eta)),$$

$$-\sum_{m=1}^M b_m \operatorname{sgn}(\eta - \eta_m) \exp\left[-d_m \left[(\xi - \xi_m)^2 + (\eta - \eta_m)^2\right]^{1/2}\right] \quad (\text{dans } Q(\xi, \eta)).$$

Dans le premier terme, les lignes du maillage sur lesquelles la coordonnée curviligne ξ est constante sont attirées ou repoussées vers des points choisis $((\xi_m, \eta_m) \ m = 1, M)$.

Le même raisonnement est applicable au deuxième terme pour des lignes coordonnées sur lesquelles la variable η est constante.

Les amplitudes a_l, b_m de même que les coefficients d'amortissement c_l, d_m , peuvent avoir des valeurs différentes, dans les deux fonctions P et Q. Ces coefficients peuvent aussi être différentes sur les lignes ou sur les points choisis vers lesquels sont attirées ou repoussées les autres lignes.

II.2. Traitement des conditions aux frontières :**II.2.1. Répartition des points sur les contours du champ physique :**

La répartition des points sur la frontière externe, les contours des obstacles et sur les coupures sont effectués par la fonction de condensation « Stretching ». Les coordonnées des points sont introduites, à partir d'une origine choisie, en partant dans le sens contraire des aiguilles d'une montre.

II.2.2. Répartition des points sur les contours du champ transformé :

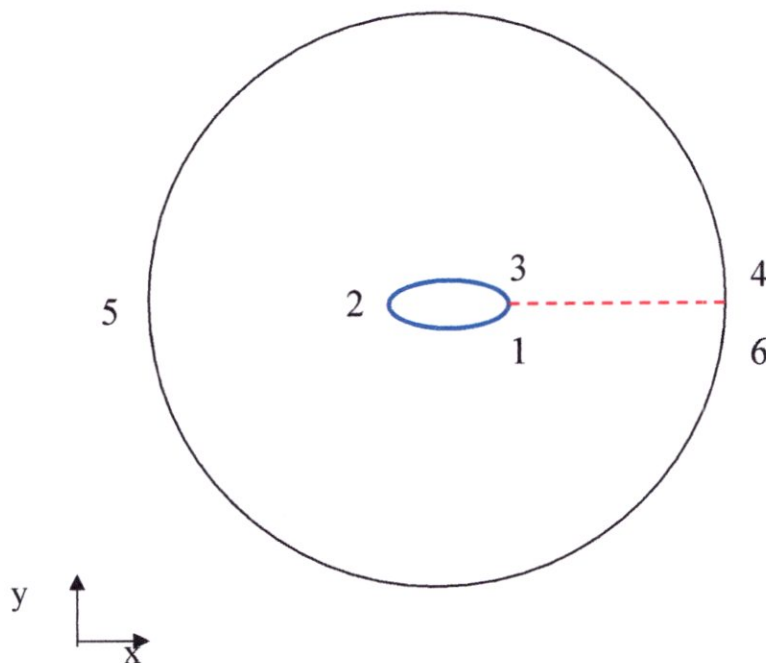
La répartition des points dans le champ transformé dépend de la configuration choisie, une variété de configurations du champ transformé existe. Elle dépend essentiellement du type de domaine d'étude, celui-ci pouvant être simplement, doublement connexe ou multi-

connexe. Par ailleurs, cette multitude de configurations dépend aussi d'une part du nombre de segments par lesquels sont représentés les contours des obstacles et la frontière externe, d'autre part du type de disposition des segments des contours et des coupures sur les côtés du rectangle (le champ transformé).

Pour cela, la première étape consiste à choisir les points localisés sur les frontières (fictives ou réelles) du domaine physique, qui correspondent aux extrémités du champ transformé (les points sommets du rectangle).

Pour les domaines doublement connexes, les segments correspondant à la frontière externe et au contour de l'obstacle sont représentés sur deux cotés opposés du champ transformé. Les deux autres cotés du rectangle correspondent, dans ce cas, à des segments de coupure (Figure.II.2)

Pour les domaines multi-connexes, le contour d'un obstacle ainsi que la frontière externe peuvent correspondre à un ou plusieurs segments dans le champ transformé. Ces segments ainsi que ceux des coupures peuvent être représentés soit sur plusieurs cotés soit sur le même coté du rectangle (Figure.II.3). Dans ce cas également, l'égalité du nombre de points sur les deux cotés opposés du rectangle est toujours vérifiée. Les segments de coupure d'une même paire sont positionnés nécessairement sur le même coté du rectangle ou sur deux cotés opposés.



Champ physique

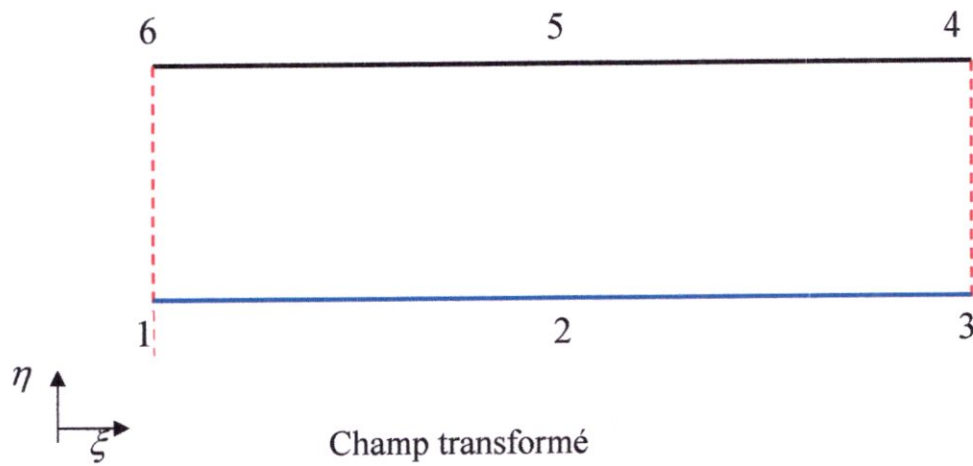


Figure.II.2. Transformation d'un domaine doublement connexe.

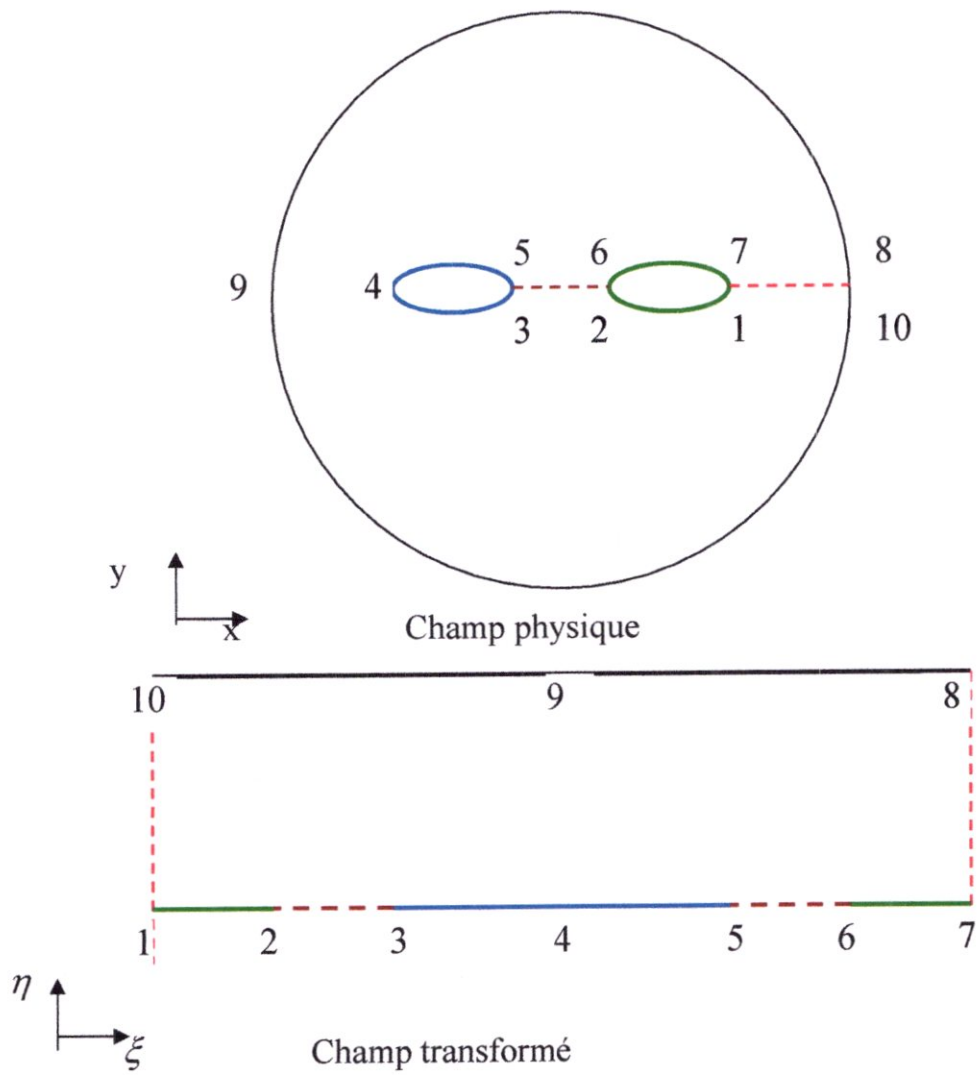



Figure.II.3. Transformation d'un domaine multi-connexe

II.3.4. Test de convergence :

Les itérations de système (II.7) sont stoppées à la convergence, le critère de convergence est donné par :

$$\text{Max} \left(\left| \frac{X_{i,j}^{k+1} - X_{i,j}^k}{X_{i,j}^{k+1}} \right|, \left| \frac{Y_{i,j}^{k+1} - Y_{i,j}^k}{Y_{i,j}^{k+1}} \right| \right) \leq 10^{-4} \quad (\text{II.10})$$



Chapitre III :
Application a un
écoulement externe
subsonique

on peut définir les coefficients :

de la portance :
$$C_L = \frac{L}{q_\infty S} ,$$

de la traînée :
$$C_D = \frac{D}{q_\infty S} ,$$

de la force normale :
$$C_N = \frac{N}{q_\infty S} ,$$

de la force axiale :
$$C_A = \frac{T}{q_\infty S} ,$$

et de moment de tangage :
$$C_M = \frac{M}{q_\infty Sl} .$$

Où S et l sont respectivement la surface de référence et la longueur de référence.

III.2. Hypothèses :

Considérons l'écoulement bidimensionnel, stationnaire et irrotationnel d'un fluide parfait (homogène, incompressible et non visqueux). On supposera de plus qu'il n'y a pas de décollement de l'écoulement de la surface du corps.

La bidirectionnalité de l'écoulement est assurée pour une section d'aile assez loin des extrémités, afin de négliger les effets de bord.

L'hypothèse d'irrotationnalité, qui suppose que le fluide part de l'état de repos ou d'écoulement uniforme sous l'influence de forces dérivant d'un potentiel.

L'écoulement résultant à chaque instant est alors irrotationnel.

III.3. Equations de l'écoulement :

L'étude de cet écoulement consiste essentiellement à résoudre l'équation de **Laplace** pour la fonction de courant Ψ :

$$\frac{\partial^2 \Psi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \Psi}{\partial y^2} = 0 \quad (\text{III.6})$$

avec les conditions aux frontières :

- Sur la frontière de l'obstacle :

$$\Psi(x, y) = cte$$

- A l'infini :

Dans le cas général, l'écoulement arrive avec une vitesse V_∞ et incidence θ , d'où :

$$\Psi(x, y) = y \cos \theta - x \sin \theta$$

La fonction de courant $\Psi(x, y)$ est adimensionnée relativement à la corde C du profil d'aile et à la vitesse V_∞ du fluide à l'infini.

La frontière externe qui délimite le domaine physique est prise de forme O (circulation).

La résolution du système précédent s'effectue dans le champ transformé (ξ, η) sur le maillage généré. Par conséquent, le système, composé de l'équation physique et des conditions aux frontières, est transformé dans le champ des coordonnées curvilignes (ξ, η) .

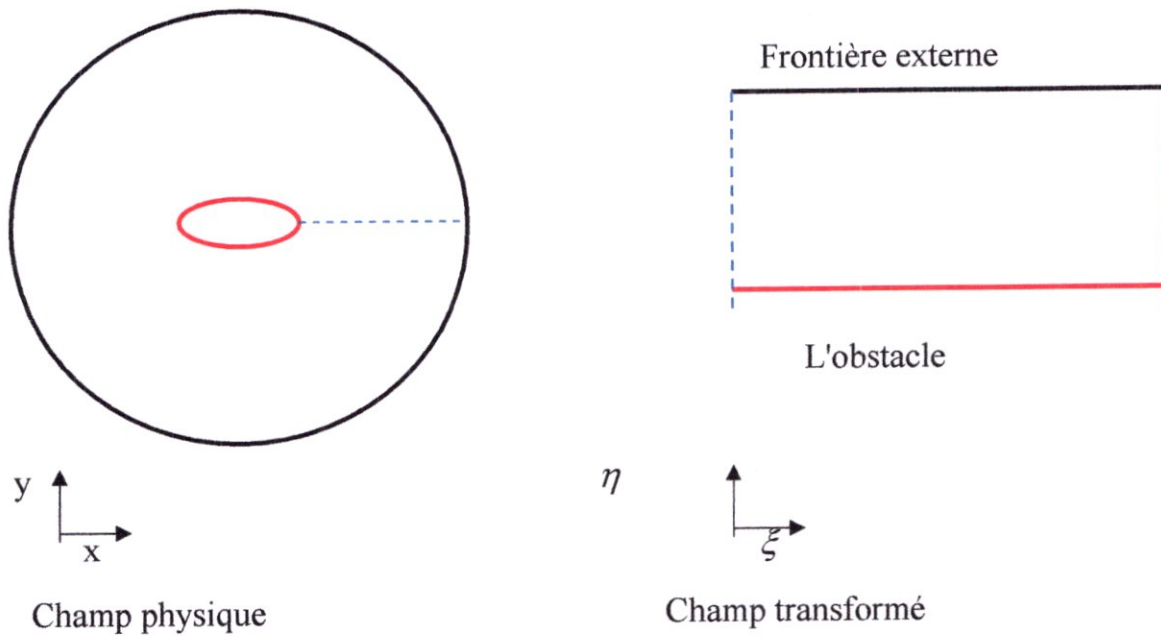


Figure.III.4. Le champ physique et le champ transformé.

L'équation de Laplace en Ψ est transformée comme suit :

$$\alpha \Psi_{\xi\xi} - 2\beta \Psi_{\xi\eta} + \gamma \Psi_{\eta\eta} + \sigma \Psi_{\eta} + \tau \Psi_{\xi} = 0 \quad (\text{III.7})$$

où $\alpha, \beta, \gamma, \sigma$ et τ sont des coefficients obtenus lors de la transformation (Annexe-A-).

Avec les conditions aux frontières :

- Sur la frontière de l'obstacle :

La frontière de l'obstacle coïncide avec la ligne coordonnée $\eta = \eta_1$, soit

$$\Psi(\xi, \eta) = \Psi_0 \quad \text{avec } \Psi_0: \text{ valeur à déterminer.}$$

- Sur la frontière externe :

La frontière externe coïncide avec la ligne coordonnée $\eta = \eta_2$

$$\Psi(\xi, \eta) = y(\xi, \eta_2) \cos\theta - x(\xi, \eta_2) \sin\theta$$

III.4. Condition de Kutta-Joukowski :

Cette condition provient de l'étude de l'écoulement autour du bord de fuite observé pour la première fois par le mathématicien allemand Wilhelm Kutta en 1902 et qui permet de trouver une valeur unique de la circulation au bord de fuite du profil.

Afin d'examiner l'écoulement stationnaire d'un fluide parfait incompressible, nous tiendrons compte de deux formes différentes pour la géométrie du bord de fuite du profil et nous exprimerons la condition de Kutta comme suit :

a) Pour un profil se terminant par un dièdre, le bord de fuite lui-même est un point d'arrêt. Soit les vitesses de l'écoulement au bord de fuite, BF, V_e tangente à l'extrados et V_i tangente à l'intrados ; on a deux vitesses de directions différentes en un même point BF, ce qui n'est possible que si les deux vitesses sont nulles et que le point BF est un point d'arrêt où $V_e = V_i = 0$.

b) Pour un profil se terminant par un point de rebroussement, la vitesse à l'extrados et à l'intrados au bord de fuite a la même valeur finie. Dans ce cas, les vitesses V_e et V_i ont la même direction au point BF et ont toutes deux une valeur finie. Cependant, la pression au bord de fuite a une valeur unique P_{BF} et l'équation de Bernoulli, appliquée à l'extrados et à l'intrados du profil dans la proximité du bord de fuite, conduit à :

$$P_{BF} + \frac{1}{2} \rho V_e^2 = P_{BF} + \frac{1}{2} \rho V_i^2$$

Il en résulte que $V_e = V_i$, [4].

III.5. Détermination de champ de vitesse :

Dans le champ de calcul (ξ, η) , les composantes (u, v) de la vitesse \vec{V} s'expriment par (Annexe-A-):

$$u = \frac{\partial \Psi}{\partial y} = (x_\xi \Psi_\eta - x_\eta \Psi_\xi) / J \quad (\text{III.8})$$

$$v = -\frac{\partial \Psi}{\partial x} = (y_\xi \Psi_\eta - y_\eta \Psi_\xi) / J$$

Où J constitue le Jacobien de la transformation.

La paroi de l'obstacle confondue avec la ligne coordonnée $\eta = \eta_1$, correspond à une ligne de courant, d'où $\Psi_\xi = 0$. De là, nous obtenons :

$$u = x_\xi \Psi_\eta / J \quad (\text{III.9})$$

$$v = y_\xi \Psi_\eta / J$$

Dans le champ (ξ, η) , la vitesse tangentielle est obtenue par projection de $\vec{V}^p(u, v)$ sur le vecteur unitaire tangent à la surface de l'obstacle.

$$\vec{V}_t^p = \vec{V}^p \cdot \vec{t} \quad (\text{III.10})$$

avec : \vec{t} vecteur tangent unitaire donné par (Annexe-A-) :

$$\vec{t} = (x_\xi \vec{i} + y_\xi \vec{j}) / \sqrt{\gamma} \quad (\text{III.11})$$

d'où, l'expression de la vitesse tangentielle en fonction de u, v :

$$\vec{V}_t^p = (ux_\xi \vec{i} + vy_\xi \vec{j}) / \sqrt{\gamma} \quad (\text{III.12})$$

et en fonction de Ψ :

$$\vec{V}_t^p = \Psi_\eta \sqrt{\gamma} / J \quad (\text{III.13})$$

La dérivée Ψ_η au obstacle est calculée par un schéma aux différences finies décentrées d'ordre 2 (Annexe-B-).

Le bord de fuite étant un point de discontinuité de la vitesse tangentielle \vec{V}_t^p , le calcul de celle-ci s'effectue par extrapolation sur l'intrados et l'extrados.

L'extrapolation choisie est linéaire, donnant [2] :

- Du côté de l'intrados :

$$V_t(1) = 2V_t(2) - V_t(3) \quad (\text{III.14})$$

- Du côté de l'extrados :

$$V_t(I_{\max}) = 2V_t(I_{\max} - 1) - V_t(I_{\max} - 2) \quad (\text{III.15})$$

III.6. Caractéristiques aérodynamiques des profils d'ailes :**III.6.1. Coefficient de pression :**

Le coefficient de pression (ou le nombre d'Euler, E_u) permet d'indiquer les pressions sous forme adimensionnelle. Il s'agit du rapport entre les forces de pression et les forces d'inertie [4]:

$$E_u = C_p = \frac{\Delta p}{\left(\frac{1}{2} \rho V_\infty^2\right)} \quad (\text{III.16}) \text{ où :}$$

$$\Delta p = p - p_\infty$$

p = pression local.

L'application de l'équation de Bernoulli donnée par :

$$p + \frac{1}{2} \rho V^2 = cte \quad (\text{III.17})$$

Entre l'infini et un point quelconque sur la frontière de l'obstacle donne :

$$\begin{aligned} p_\infty + \frac{1}{2} \rho V_\infty^2 &= p + \frac{1}{2} \rho V_t^2 \\ \Rightarrow p - p_\infty &= \frac{1}{2} \rho V_\infty^2 \left(1 - \frac{V_t^2}{V_\infty^2}\right) \\ \Rightarrow \frac{p - p_\infty}{\frac{1}{2} \rho V_\infty^2} &= 1 - \frac{V_t^2}{V_\infty^2} \end{aligned} \quad (\text{III.18})$$

$$(\text{III.16}) \text{ et } (\text{III.18}) \Rightarrow C_p = 1 - \frac{V_t^2}{V_\infty^2} = 1 - \frac{\gamma}{J^2} \Psi_\eta^2 .$$

En fin, on peut écrire :

$$C_p = 1 - \frac{\gamma}{J^2} \Psi_\eta^2 \quad (\text{III.19})$$

III.6.2. Coefficients de portance et de traînée :

Dans un fluide parfait, la force qui apparaît sur l'obstacle se réduit à la force de pression exercée par le fluide, les forces de viscosité et de gravité étant supposées négligeables. En conséquence, nous avons sous forme adimensionnelle [2] :

$$\vec{F} = -\oint C_p h \vec{n} dr \quad (\text{III.20})$$

où r est l'abscisse curviligne et \vec{h} la normale à la surface de l'obstacle.

On peut aussi écrire :

$$\begin{aligned} \vec{F} &= C_L \vec{j}_1 + C_D \vec{i}_1 && \text{dans } (\vec{i}_1, \vec{j}_1) \text{ (repère Eiffel).} \\ \vec{F} &= C_N \vec{j} + C_A \vec{i} && \text{dans } (\vec{i}, \vec{j}) \text{ (repère Lilienthal).} \end{aligned} \quad (\text{III.21})$$

En plus, on peut montrer (Annexe-A-) que nous avons aussi :

$$\vec{h} = (-y_\xi \vec{i} + x_\eta \vec{j}) / \sqrt{\gamma} \quad (\text{III.22})$$

$$dr = \sqrt{\gamma} d\xi$$

En fin, on détermine :

$$\begin{aligned} C_L &= -\oint C_p x_\xi d\xi \\ C_D &= \oint C_p y_\xi d\xi \end{aligned} \quad (\text{III.23})$$

III.6.3. Coefficient de moment :

On le définit par :

$$C_M = \frac{1}{C} \left(\oint C_p x \vec{h}_j dr - \oint C_p y \vec{h}_i dr \right) \quad (\text{III.24})$$

III.6.4. Type de profils étudiés :

Les profils considérés dans ce travail sont de type NACA XXYY, ils sont symétriques par rapport à la ligne moyenne, le premier chiffre (X) représente la cambrure relative

maximale en pourcentage de la corde, le deuxième indique la position de cette cambrure en pourcentage de la corde et les deux derniers chiffres (YY) représentent l'épaisseur relative maximale, toujours en pourcentage de la corde. Par exemple, dans le cas du profil NACA4412 :

- le 4 représente la cambrure relative maximale (4 %) ;
- le 4 représente la position de la cambrure maximale (40 %) ;
- le 12 représente l'épaisseur relative maximale (12 %).

Dans le cas des profils symétriques de cette famille, on se sert de l'expression suivante pour calculer la forme géométrique [4] :

$$\pm Y_e = \frac{e}{0.2} \left(0.2969\sqrt{x} - 0.1260x - 0.3537x^2 + 0.2843x^3 - 0.1015x^4 \right) \quad (\text{III.25})$$

Où e représente l'épaisseur maximum du profil par rapport à la corde.

III.7. Résolution numérique :

III.7.1. Discrétisation de l'équation :

Par application des schémas aux différences finies à l'équation (III.7) on obtient l'équation discrète suivante pour la fonction de courant Ψ :

$$\begin{aligned} \Psi_{i,j} = & \frac{\alpha}{2(\alpha + \gamma)} (\Psi_{i+1,j} + \Psi_{i-1,j}) - \frac{\beta}{4(\alpha + \gamma)} (\Psi_{i+1,j+1} - \Psi_{i+1,j-1} - \Psi_{i-1,j+1} + \Psi_{i-1,j-1}) \\ & + \frac{\gamma}{2(\alpha + \gamma)} (\Psi_{i,j+1} + \Psi_{i,j-1}) + \frac{\tau}{4(\alpha + \gamma)} (\Psi_{i+1,j} - \Psi_{i-1,j}) + \frac{\sigma}{4(\alpha + \gamma)} (\Psi_{i,j+1} - \Psi_{i,j-1}) \end{aligned} \quad (\text{III.26})$$

avec i varie de 2 à imax -1 et j de 2 à jmax -1 .

Les opérateurs de dérivation de l'équation (III.7) sont également approchés à la coupure par des schémas aux différences finies d'ordre deux. Cependant, vu que la coupure est considérée comme frontière fictive, une transformation de ces schémas est alors nécessaire. Cette transformation, basée sur la vérification de la propriété de continuité à la coupure, est fonction de la disposition des segments de cette coupure sur les cotés du rectangle (champ transformé).

L'équation précédente, discrétisée à la coupure, est donnée pour le premier segment de coupure par :

$$\Psi_{i,j} = \frac{\alpha}{2(\alpha + \gamma)} (\Psi_{2,j} + \Psi_{i_{\max-1},j}) - \frac{\beta}{4(\alpha + \gamma)} (\Psi_{2,j+1} - \Psi_{2,j-1} - \Psi_{i_{\max-1},j+1} + \Psi_{i_{\max-1},j-1})$$

$$+ \frac{\gamma}{2(\alpha + \gamma)} (\Psi_{1,j+1} + \Psi_{1,j-1}) + \frac{\tau}{4(\alpha + \gamma)} (\Psi_{2,j} - \Psi_{i_{\max-1},j}) + \frac{\sigma}{4(\alpha + \gamma)} (\Psi_{1,j+1} - \Psi_{1,j-1}) \quad (\text{III.27})$$

Pour $i = 1$ et j allant de 2 à $j_{\max} - 1$.

La même discrétisation pour le deuxième segment de coupure ($i = i_{\max}$), puisque les deux segments sont superposés .

III.7.2. Algorithme de résolution :

Les équations discrétisées (III.26) et (III.27) de la fonction de courant Ψ sont résolues numériquement par la méthode de surelaxation (SOR) par points.

A l'aide de cette méthode, l'expression du nième +1 itération de Ψ , au nœud (i, j)

S'écrit :

$$\Psi_{i,j}^{n+1} = (1 - \omega_{opt}) \Psi_{i,j}^n + \omega_{opt} \Psi_{i,j}^n \quad (\text{III.28})$$

où :

ω_{opt} : Coefficient d'accélération de convergence de la méthode de surelaxation SOR.

$\Psi_{i,j}^n$: Donnée par les équations (III.26) et (III.27).

La vérification de la convergence de la solution de Ψ est effectuée par le test suivant :


$$\text{Max} \left| \frac{\Psi_{i,j}^{n+1} - \Psi_{i,j}^n}{\Psi_{i,j}^{n+1}} \right| \leq 10^{-4} \quad (\text{III.29})$$

III.7.3. Coefficients aérodynamiques :

Le système d'équations (III.23) des coefficients de portance et de traînée, et l'équation (III.24) de coefficient de moment sont résolus numériquement par la méthode de quadrature trapézoïdale, suivant le schéma qui suit :

$$\oint f d\xi = \frac{1}{2}(f(1,1) + f(\text{Im } ax,1)) + \sum_{i=2}^{\text{Im } ax-1} f(i,1) \quad (\text{III.30})$$

Le contour de l'obstacle est confondu avec une ligne coordonnée $\eta = \text{cte}$ correspondante à $j = 1$.



Chapitre IV :
Présentation du
programme

Nous présentons dans cette partie de notre travail le programme de calcul qu'on a élaboré, pour effectuer la génération de maillage et la résolution des équations liées au problème physique étudié.

Nous avons conçu à cette opération deux programmes informatiques écrits en langage FORTRAN, l'un a consisté à développer l'algorithme de technique de génération de maillage exposé dans le chapitre 2 ainsi que les algorithmes des techniques algébriques adoptées pour la génération de maillage initial, dans un seul programme de calcul, tandis que, le deuxième programme qu'on a conçu, permet la résolution des équations physiques.

IV.1. Présentation de programme génération de maillage :

IV.1.1. Structure général :

Le programme qu'on a développé, est conçu suivant une structure modulaire. Cette dernière signifie qu'il est composé d'une partie principale assurant la gestion globale et d'un ensemble de modules ou sous-programmes.

Dans ce programme, le déroulement des calcul est effectué en deux étapes principales de calcul de (x, y) . La première étape, qui consiste elle-même en plusieurs sous-programmes, permet la détermination des points (x, y) sur toute la frontière du domaine (frontière externe, frontières des obstacles et les coupures) en partant dans le sens contraire des aiguilles d'une montre. Ensuite et une fois les coordonnées de toute la frontière déterminées, on passe à la deuxième étape qui permet la détermination des points intérieurs de maillage.

L'exploitation de ce programme peut être effectuée pour la génération des maillages indépendamment de la résolution des équations physiques.

IV.1.2. Principaux modules :

Notre programme est constitué de cinq modules principaux gérés par un programme principal :

Module 1 :

Le sous-programme « Lregion », pour le calcul de la longueur d'une région spécifique, c'est-à-dire la longueur entre deux points de contrôle successifs sur la frontière, suivant x et y.

Module 2 :

Le sous-programme « Lcôte », pour le calcul de la longueur total de chaque côte, suivant x et y.

Module 3 :

Le sous-programme « Position », pour calculer les coordonnées (x, y) et déterminer les indices (i, j) de chaque point incrément sur la frontière.

Module 4 :

Le sous-programme « Minitial », pour générer le maillage initial.

Module 5 :

Le sous-programme « Poisson », pour déterminer la distribution des nœuds internes de maillage par résolution des équations de Poisson.

IV.1.3. Entrée du programme :

CHOIX : Choix de technique de génération de maillage.

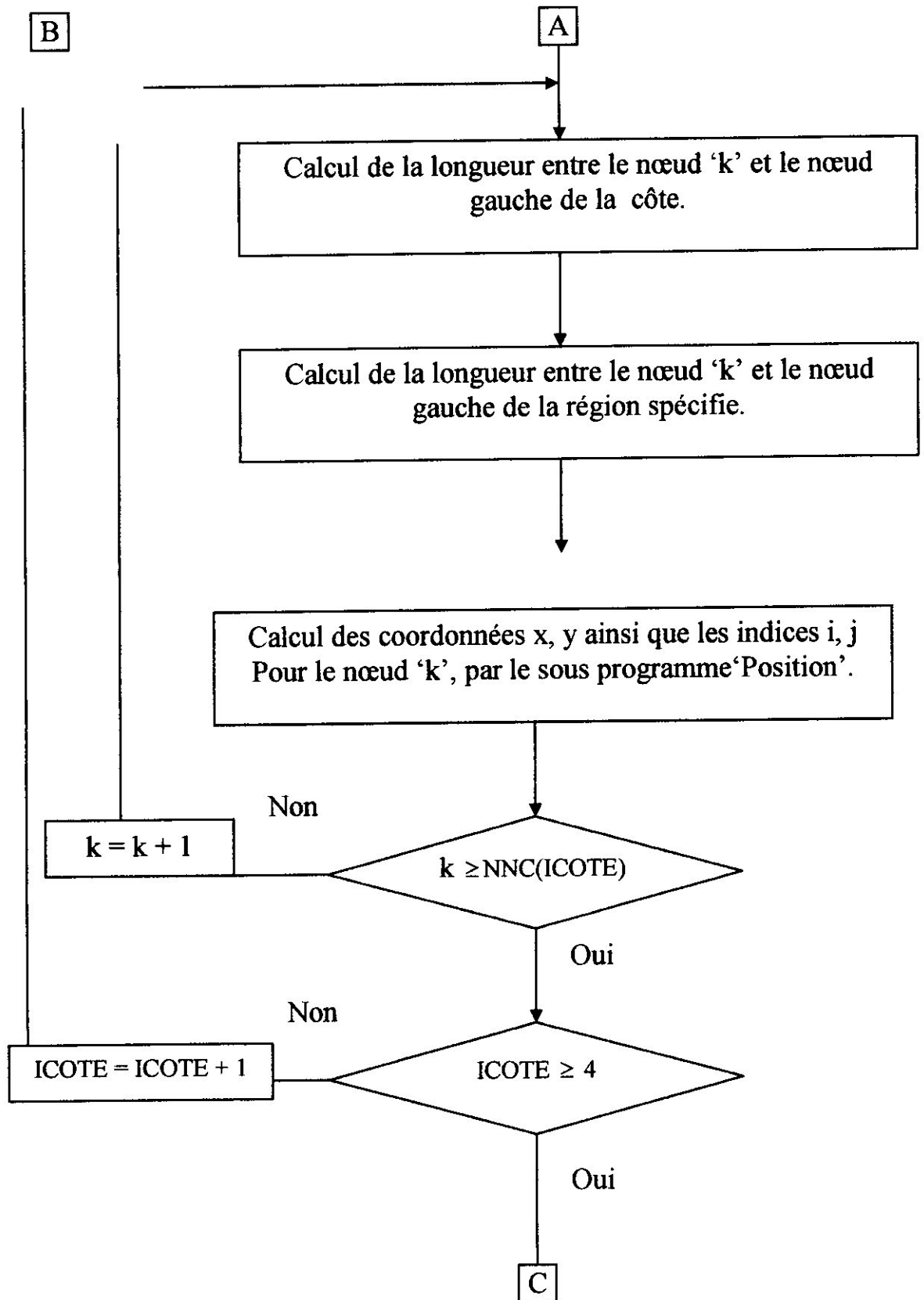
N,M : Les dimensions des tableaux x et y .

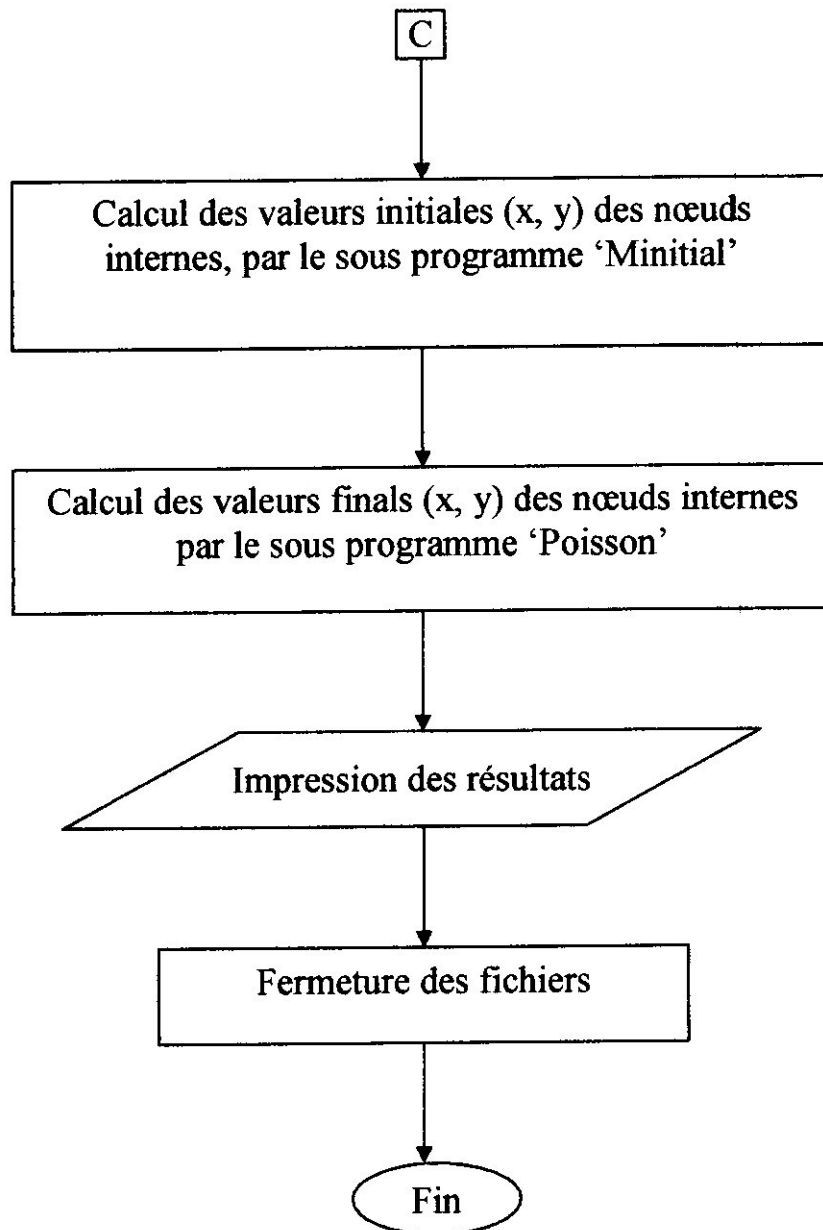
NNS : Le nombre de points spécifiques sur toute la frontière. XPC[NNS], YPC[NNS] : Les coordonnées des points spécifiques.

OMEGA : Le paramètre de relaxation du schéma itératif SOR.

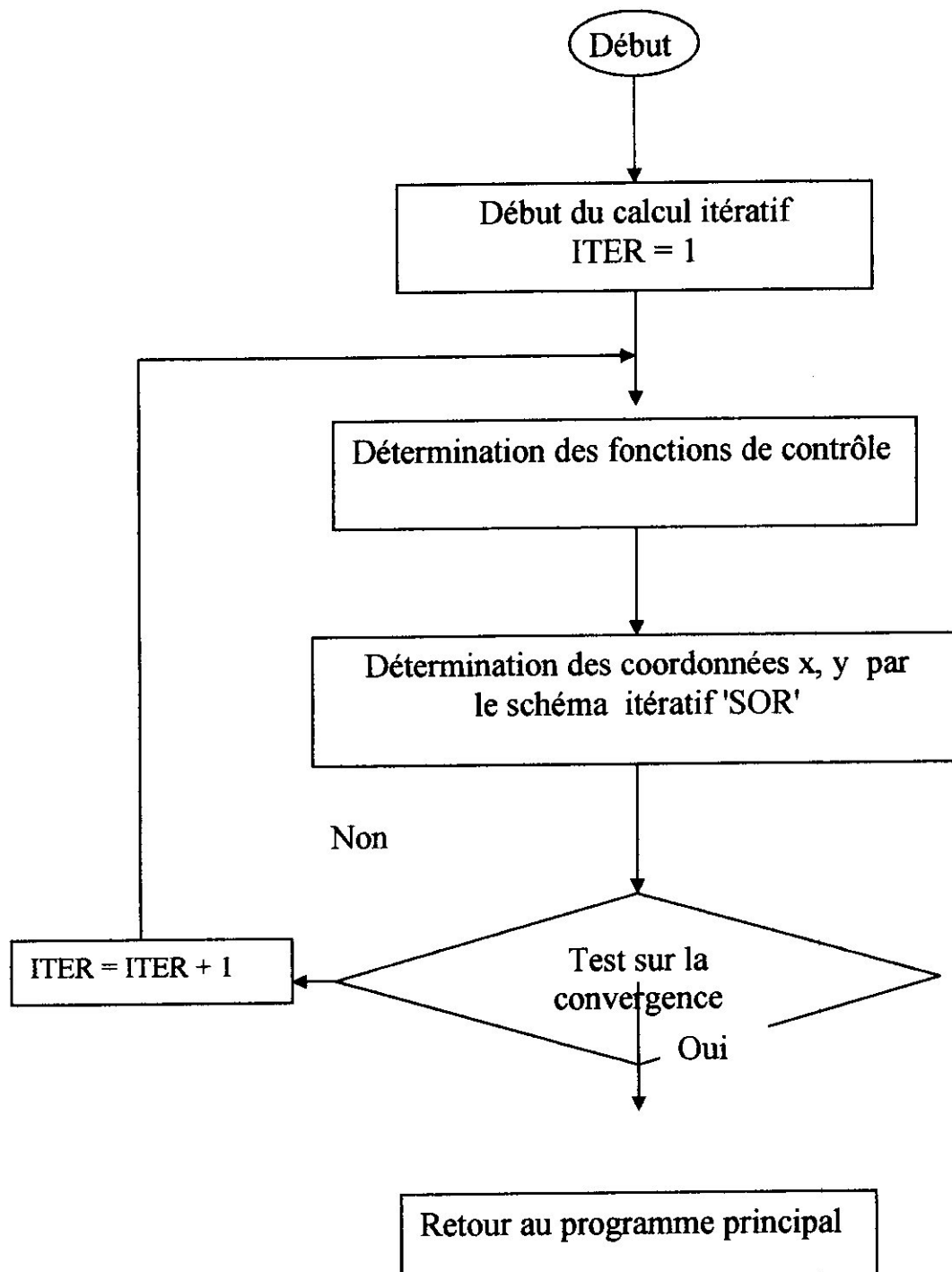
EPS : La précision voulu pour le schéma itératif SOR.

a1[4], b1[4] : Coefficients de la fonction de condensation Stretching pour chaque cote.





Organigramme du sous-programme «Poisson » :



IV.2. Présentation du programme de résolution des systèmes physiques :

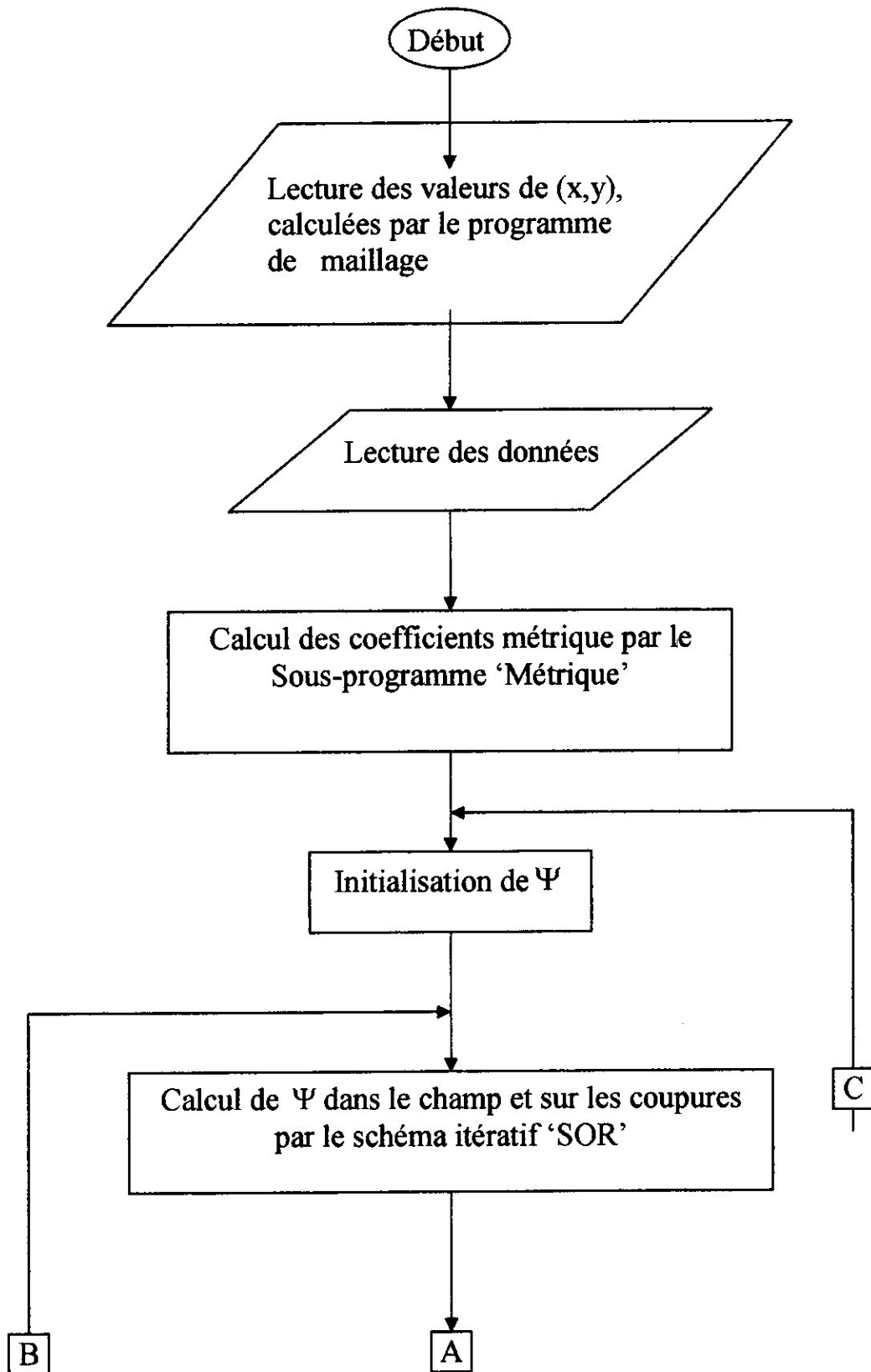
IV.2.1. Structure général :

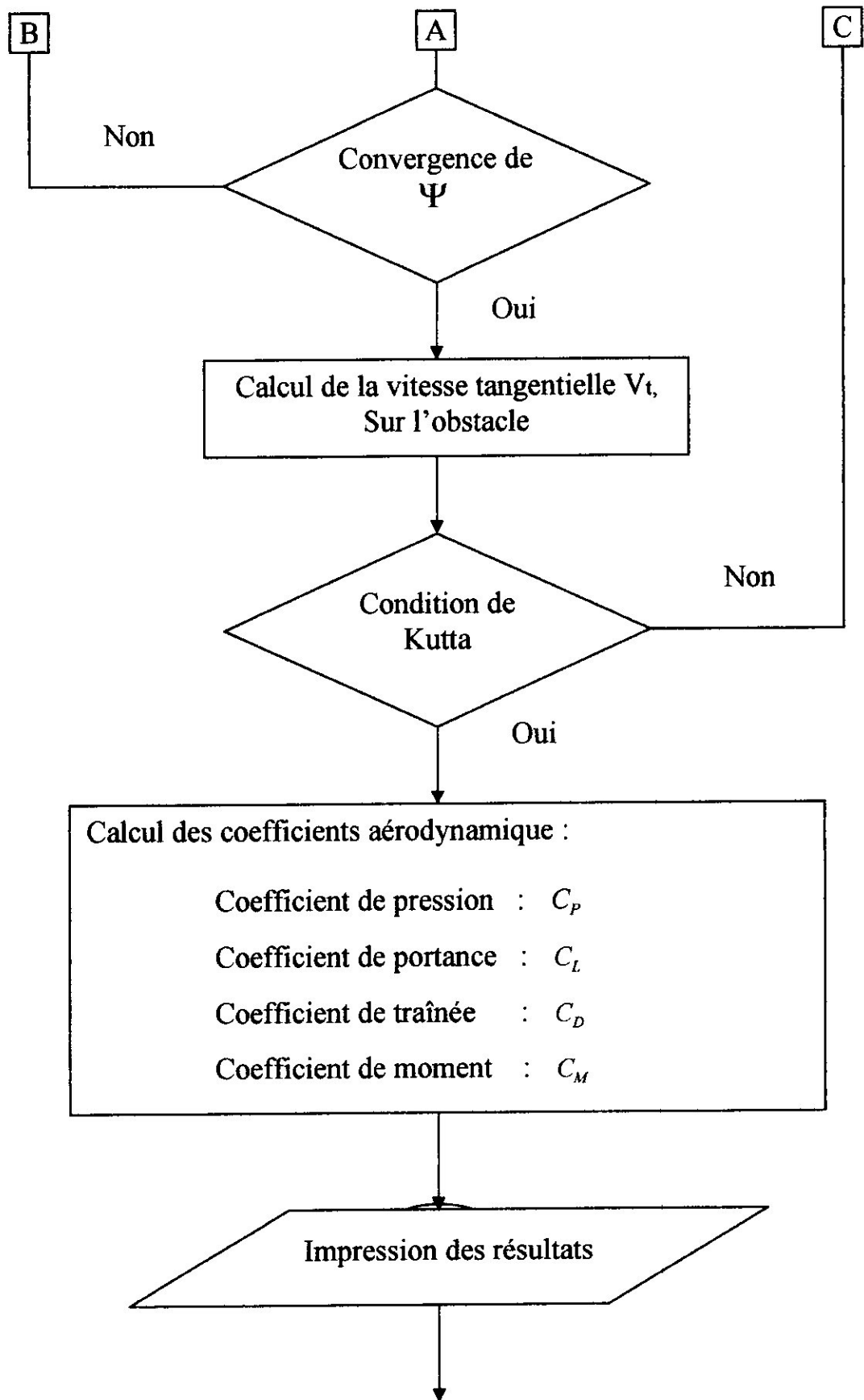
Le programme qu'on a conçu permet la résolution de l'équation de courant Ψ dans le champ transformé par application de la méthode de génération de maillage, ainsi que la détermination des coefficients de portance et de traînée.


Ce programme est composé de trois modules principaux, le premier permet de calculer les coefficients métriques aux différents points du maillage généré par le premier programme, le calcul de ces coefficients est effectué par des schémas approchés aux différences finies. Ces schémas diffèrent les uns des autres suivant la position du point étudié, à l'intérieur de domaine physique, sur les coupures ou sur le contour des obstacles. Le deuxième module permet de calculer ' Ψ ' à l'intérieur du domaine et sur les coupures par le schémas itératif 'SOR' et le troisième module permet de déterminer les coefficients de portance, de traînée et de moment.

Le cheminement de calcul du programme est résumé par l'organigramme suivant :

Organigramme de calcul:







Chapitre V :
Application par
le ICEM-CFD
et Fluent

V.1. INTRODUCTION :

• **CFD** : est l'acronyme anglais de « Computational Fluid Dynamics » désignant conventionnellement le large domaine incluant les solutions numériques des équations décrivant le mouvement d'un fluide par des méthodes numériques, les équations de Navier Stokes, de continuité ainsi que de toutes les autres équations de conservation. La CFD s'est développée d'une curiosité mathématique pour devenir un outil essentiel dans pratiquement toutes les branches de la dynamique des fluides, de la propulsion aérospatiale et aux prédictions météorologiques en passant par le dessin des coques de bateaux.

La simulation des écoulements turbulents peut prendre différentes formes, la première dite simulation directe, consiste à résoudre les équations de Navier- Stokes in stationnaires sans aucune modélisation. Pour pouvoir englober toutes les échelles de turbulence, le recours à des codes numériques assez complexes et des maillages très fins rend ce type de simulation inapplicable au domaine industriel. La deuxième, établie par Brown et Roshko, simule les grandes échelles (Large Eddy Simulation : LES) permettant l'emploi des maillages de grandes tailles. Les échelles plus fines sont calculées en utilisant des schémas de fermeture (Sub Grid Modelling : SGM). Malgré ces propriétés, son temps de calcul assez grand lui a réservé le même sort que sa précédente. Le dernier type de simulation est la procédure classique de traitement statistique, qui consiste à un passage à la moyenne après décomposition en valeur moyenne et fluctuante. Un système ouvert d'équations est alors nécessitant des schémas de fermeture.

Le profil :

Pendant longtemps, le profil a été considéré, principalement, à cause de sa forme comme un organe annexe dont le rôle consiste essentiellement à assurer la portance des avions à un régime donné grâce à une adaptation convenable de sa forme géométrique.

Au fur du temps, CFD avait évolué, permettant actuellement de répondre à cette condition avec une précision satisfaisante.

L'objectif, de ce travail, est de présenter une simulation d'un écoulement autour d'un profil. Bien que l'écoulement du cas étudié à une géométrie simple, et il est considéré comme une étape indispensable pour évaluer les capacités et puissances de différentes approches. En outre, la simplicité du cas test permet d'examiner tous les paramètres numériques impliqués dans les simulations et de comprendre les causes entre les différents résultats obtenus.

V.2.description numérique

V.2.1.Modélisation mathématique du problème

Le logiciel Fluent propose un nombre assez important d'options qui déterminent la forme des équations de Navier Stokes et des équations de transport des scalaires supplémentaires. L'utilisateur a le choix entre un écoulement tridimensionnel ou bidimensionnel, monophasique ou multiphasique (homogène ou non), turbulent ou laminaire, permanent ou non permanent, incompressible (avec ou sans approximation de Boussinesq) ou compressible, avec ou sans transfert de chaleur, avec ou sans introduction de substances. Pour les écoulements turbulents, Fluent permet d'utiliser les deux catégories classiques les modèles reposant sur le concept de la viscosité turbulente et les modèles de fermeture du second ordre. Ainsi, l'utilisateur peut employer :

- soit le modèle $k\epsilon$ classique
- soit le modèle " $k\epsilon$ bas-Reynolds" adapté aux faibles nombres de Reynolds
- soit le modèle " RNG- $k\epsilon$ " qui est une alternative au modèle $k\epsilon$ pour les très grands nombres de Reynolds. Dans ce modèle, seule l'équation en ϵ est modifiée.

Ce qui concerne notre travail on a choisi un écoulement bidimensionnel, incompressible stationnaire.

V.2.2.Domaine de l'écoulement

V.2.2.1.Géométrie

Dans un premier temps, l'utilisateur est tenu de choisir un système de coordonnées afin de caractériser sa géométrie. Les domaines pouvant varier suivant les études, il peut employer des coordonnées cartésiennes ou cylindriques. Il peut alors définir son domaine d'écoulement. Dans le cas d'une géométrie très simple, engendrée au pire par un assemblage de blocs rectangulaires positionnés dans les directions du système de

coordonnées, il suffit de donner au logiciel les dimensions (en nombre de cellules) de chacun des blocs ainsi que la manière dont ils sont soudés les uns aux autres. Dans le cas d'une géométrie plus compliquée, l'utilisateur doit avoir recours au pré- processeur afin d'indiquer, dans le système de coordonnées choisi, les coordonnées des points délimitant chaque bloc de formes potentiellement irrégulières. Dans les deux cas, il est ensuite possible d'introduire une zone solide dans l'espace ainsi défini de façon à pouvoir inclure un obstacle dans l'écoulement. Comme cette inclusion consiste à fournir au logiciel les "numéros" des cellules qui devront être considérées comme des cellules solides, la forme de cette zone ne peut être choisie quelconque puisqu'elle dépend directement du maillage. Dans le cas où l'utilisateur aurait à imposer un obstacle solide de forme trop complexe pour être définie grâce à l'assemblage de cellules de la grille, il pourrait l'introduire au départ comme partie intégrante de la géométrie. Enfin, dans le système de coordonnées choisi, il est tenu de spécifier les valeurs des composantes du vecteur de la gravité.

Dans notre travail la géométrie de profil a été réalisée par le code Solid Works est montré sur la figure suivante.

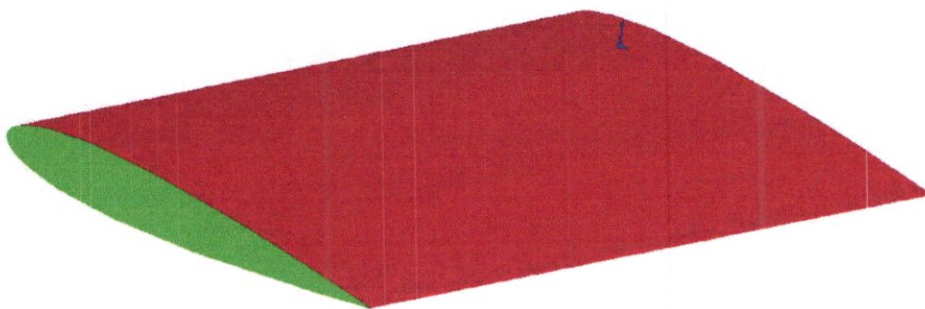


Fig V.1: Aile d'avion (NACA 0012) fait par le logiciel Solid Works.

V.3. Maillage

Le maillage a été réalisé par le code ICEM.CFD aussi. Et cela par transformation du domaine physique en un domaine numérique

Cette opération consiste à définir un certain nombre de nœuds en divisant le domaine de calcul en un nombre fini de volumes de contrôle ; le maillage doit couvrir le domaine physique (contenir au moins la couche limite et suivre son développement le

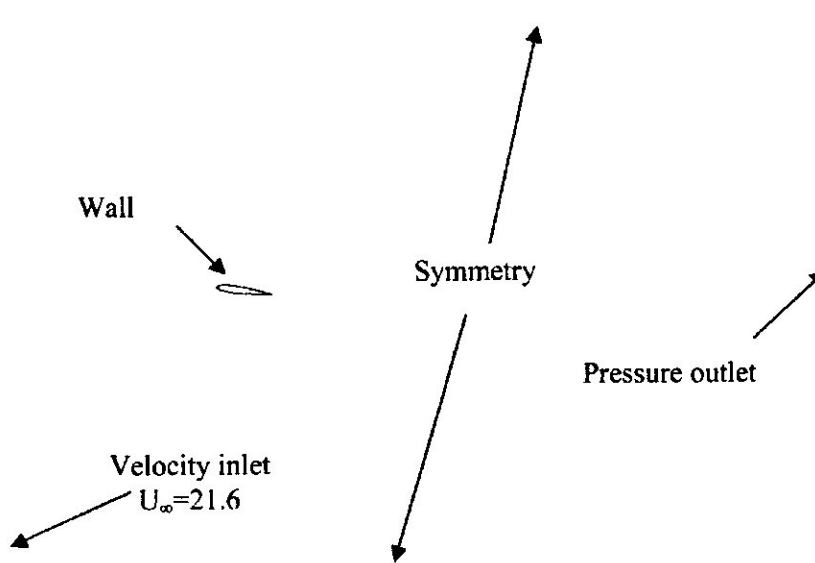
long du domaine. Cette transformation du domaine physique en un domaine de calcul permet la bonne définition des conditions aux limites du domaine décrit.

V.4. conditions initiales

Le logiciel Fluent permet de fournir des conditions initiales qui représentent l'état de base du modèle à l'instant où commence la simulation.

Dans ce travail on a pris les conditions initiales suivantes :

V.4.1. Condition aux limites:



FigV.2.: condition aux limites pour 2D.

V.5. Résolution numérique (méthode de volume finis)

Les équations moyennes de transport sont très complexes et ne peuvent pas être résolues analytiquement ; cependant il existe des méthodes numériques permettant la résolution de ces équations avec une précision considérable telle que la méthode des éléments finis, la méthode de différences finies et la méthode des volumes finis ; cette dernière est la plus utilisée actuellement dans les codes de calculs commerciaux. La méthode des volumes finis a été introduite dans le domaine du calcul numérique des écoulements par MacDonald (1971), Mac Cormack et Pully (1972), pour la résolution

des écoulements bidimensionnels, et par Rizzi et Inouye (1973) pour la résolution des écoulements tridimensionnels. L'avantage de la résolution par la méthode des volumes finis réside dans le caractère conservatif des équations, ainsi que dans la simplicité de la discrétisation du domaine d'écoulement.

V.5.1.Principe de la méthode des volumes finis

Le domaine de calcul est divisé en une série de sous domaines appelés volumes de contrôle. Ces volumes de contrôle enveloppent tout le domaine de calcul sans chevauchement, de telle façon que la somme de leurs volumes soit égale exactement au volume du domaine de calcul. Un point est positionné au centre de chaque volume et est appelé centre du volume de contrôle, il sera noté P , figure (III.4). Les nœuds des volumes voisins seront notés suivant leurs positions N , S , W , E , T et B (se rapportant aux directions *North*, *South*, *West*, *East*, *Top* et *Bottom* respectivement). Dans la méthode des volumes finis les lois de conservation (de la masse, de la quantité de mouvement et de l'énergie) sont exprimées localement sous une forme intégrale. La pierre angulaire de cette méthode réside dans le théorème de Gauss (appelé aussi le théorème de la divergence ou théorème d'Ostrogradski) et qui permet de transformer une intégrale de volume en une intégrale de surface. Le but de cette méthode est de convertir l'équation différentielle générale en un système d'équations algébriques en mettant en relation les valeurs de la variable considérée ϕ aux points nodaux adjacents d'un volume de contrôle typique. Cela est obtenu par l'intégration de l'équation différentielle gouvernante dans ce volume de contrôle avec l'approximation des différents termes (convection, diffusion et source).

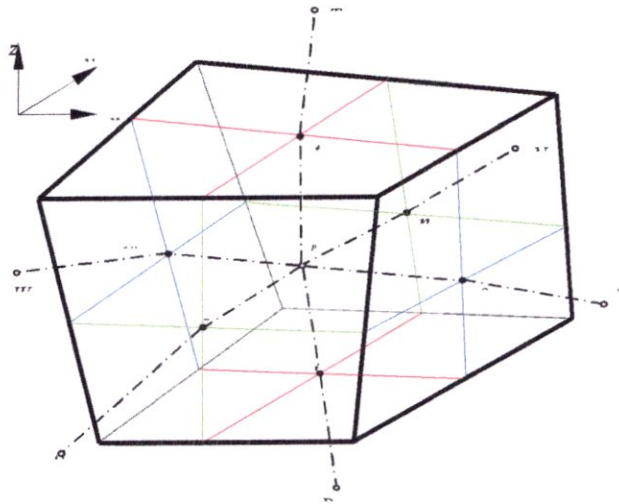


Fig .V.3: Volume de contrôle dans un maillage tri dimensionnel non orthogonal.

V.5.2. Discrétisation des équations gouvernantes utilisée dans le code Fluent

Chaque noeud est entouré par un ensemble de surfaces qui comportent un élément de volume. Toutes les variables du problème et les propriétés du fluide sont stockées aux noeud de l'élément. Considérant la forme moyenne des équations de conservation de la masse, quantité de mouvement et l'énergie, exprimés en coordonnées cartésiennes. ou sous la forme générale suivante :

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_j} (\rho U_j) = 0 \quad (\text{VI.5})$$

$$\frac{\partial}{\partial t} (\rho U_i) + \frac{\partial}{\partial x_j} (\rho U_j U_i) = - \frac{\partial P}{\partial x_i} + \frac{\partial}{\partial x_j} \left(\mu_{\text{eff}} \left(\frac{\partial U_i}{\partial x_j} + \frac{\partial U_j}{\partial x_i} \right) \right) \quad (\text{VI.6})$$

$$\frac{\partial}{\partial t} (\rho \phi) + \frac{\partial}{\partial x_j} (\rho U_j \phi) = \frac{\partial}{\partial x_j} \left(\Gamma_{\text{eff}} \left(\frac{\partial \phi}{\partial x_j} \right) \right) + S_\phi \quad (\text{VI.7})$$

Où :

Γ est le terme de diffusion.

S est le terme source.

Ces équations peuvent être intégrées dans un volume de contrôle, en utilisant le théorème de la divergence de Gauss pour convertir les intégrales de volume en intégrales de surface comme suit :

$$\frac{\partial}{\partial t} \int_V \rho \, dv + \int_S \rho U_j \, dn_j = 0 \quad \dots\dots\dots (III.8)$$

$$\frac{\partial}{\partial t} \int_V \rho U_i \, dv + \int_S \rho U_j U_i \, dn_j = - \int_S P \, dn_j + \int_S \mu_{\text{eff}} \left(\frac{\partial U_i}{\partial x_j} + \frac{\partial U_j}{\partial x_i} \right) \, dn_j + \int_V S_{u_i} \, dv \quad \dots\dots\dots (III.9)$$

$$\frac{\partial}{\partial t} \int_V \rho \phi \, dv + \int_S \rho U_j \phi \, dn_j = - \int_S \Gamma_{\text{eff}} \left(\frac{\partial \phi}{\partial x_j} \right) \, dn_j + \int_V S_\phi \, dv \quad \dots\dots\dots (III.10)$$

La première étape pour résoudre numériquement ces équations continues est d'employant des fonctions discrètes. Considérant maintenant un élément de maille isolé tel que celui montré ci-dessous (figure VI.5) :

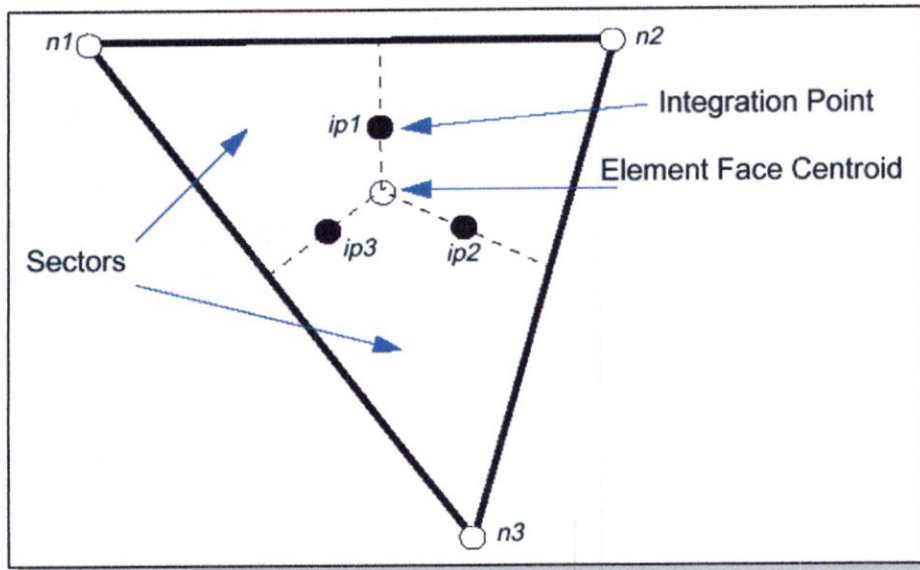


Figure V.4. Présentation d'un points d'intégration point dans un volume de contrôle.

Les points d'intégration, ipn, sont situées au centre de chaque segment de surface dans un élément 3D entourant le volume de contrôle. La forme discrète des équations intégrales sont écrites comme suit :

$$V \left(\frac{\rho - \rho^0}{\Delta t} \right) + \sum_{ip} (\rho U_j \Delta n_j)_{ip} = 0 \quad (\text{III.11})$$

$$V \left(\frac{\rho U_i - \rho^0 U_i^0}{\Delta t} \right) + \sum_{ip} \dot{m}_{ip} (U_i)_{ip} = \sum_{ip} (P \Delta n_j)_{ip} + \sum_{ip} \left(\mu_{\text{eff}} \left(\frac{\partial U_i}{\partial x_j} + \frac{\partial U_j}{\partial x_i} \right) \Delta n_j \right)_{ip} + \bar{S}_u V$$

(III.12)

$$V \left(\frac{\rho \phi - \rho^0 \phi^0}{\Delta t} \right) + \sum_{ip} \dot{m}_{ip} \phi_{ip} = \sum_{ip} \left(\Gamma_{\text{eff}} \left(\frac{\partial \phi}{\partial x_j} \right) \Delta n_j \right)_{ip} + \bar{S}_\phi V$$

(III.13)

Sachant que :

V : est le volume d'intégration de la grandeur Φ

ip : est l'indice d'intégration par point (intégration point.)

Δn_j : est la surface d'intégration de la grandeur Φ

Δt : est un intervalle de temps (timestep)

Notant qu'un schéma arrière du premier ordre a été utilisé dans cette équation.

L'indice supérieur 0 se rapporte au vieux niveau de temps. Le débit massique discret

\dot{m}_{ip} traversent une surface du volume de contrôle est donnée par :

$$\dot{m}_{ip} = (\rho U_j \Delta n_j)_{ip}^0 \quad (\text{VI.14})$$

V.5.3. Les critères de convergence

Une procédure est convergente si toute erreur tend à décroître au cours des itérations.

Elle a convergée lorsque les itérations ne produisent plus de changements significatifs

sur les variables selon un critère qui doit être défini par l'utilisateur. Le critère de

convergence est donc utilisé pour stopper le processus itératif lorsqu'il est satisfait. Le

critère de convergence utilisé par Fluent repose sur le résidu d'une équation du

problème définie par l'utilisateur. En toute rigueur, le résidu correspond à la somme,

sur toutes les mailles, des erreurs effectuées sur l'équation discrétisée en question

lorsque les variables déterminées par le processus sont réintégrées dans l'équation

discrétisée. Par définition :

$$R = \sum_{\text{mailles}} \left(\sum_{nb} a_{nb} + S_u - a_p \Phi_p \right) \quad (\text{VI.11})$$

En choisissant une équation du système ainsi qu'une valeur de résidu à ne pas dépasser sur cette équation, l'utilisateur fixe un indicateur de convergence. A chaque itération, le résidu est calculé sur l'équation choisie et dès que le résidu passe en deçà de la valeur fixée, le processus s'arrête considérant que les calculs ont convergé et passe au pas de temps suivant. Il est important de noter que la valeur de résidu à imposer n'est pas adimensionnelle. Enfin un nombre maximum d'itérations pour chaque pas de temps est requis afin que le processus de résolution soit stoppé en cas d'oscillation ou de divergence, même si le critère de convergence n'est pas encore satisfait. Un nombre minimum d'itérations est également demandé pour forcer la procédure itérative même si le critère de convergence est déjà vérifié.

En ce qui concerne les sous itérations du solveur linéaire, il est nécessaire de spécifier pour chaque équation, soit un nombre fixe de sous itérations, soit un facteur de réduction du résidu (résidu final/résidu initial) compris entre 0 et 1 associé à un nombre maximum et minimum d'itérations.



Chapitre VI :
Analyse des résultats

Nous exposons, dans ce chapitre , quelques résultats que nous avons obtenus par utilisation du programme « Maillage » décrit dans le chapitre III, pour la génération de maillage et la détermination de l'écoulement potentiel incompressible stationnaire autour d'un profil d'aile .

La méthode de génération de maillage est mise en valeur par les maillages que nous avons générés pour des domaines d'études simplement connexes, doublement connexes ou multi connexes. Nous présentons également les maillages obtenus par l'utilisation de la fonction de condensation. D'autre part le raffinement de maillage et l'influence de choix du maillage initiale à la convergence sont étudiés.

En fin une mise en valeur de la méthode de génération de maillage est effectuée par son application à un écoulement potentiel incompressible stationnaire autour d'un profil d'aile avec une configuration de la frontière externe du domaine de type « O ». Les résultats ont été comparés avec les résultats publiés dans la littérature.

On présente aussi dans ce chapitre la génération de maillage par le logiciel CFD et son application dans le logiciel Fluent à un écoulement potentiel incompressible stationnaire autour d'un profil d'aile

VI.1. Génération de maillage :

VI.1.1. Domaines d'étude :

VI.1.1.1. Domaines simplement connexes :

La méthode de génération de maillage est appliquée et testée sur plusieurs domaines simplement connexes de forme rectangulaire courbée qui représente l'écoulement interne dans une tuyère (Fig.V.1) ou dans une conduite (Fig.V.2).

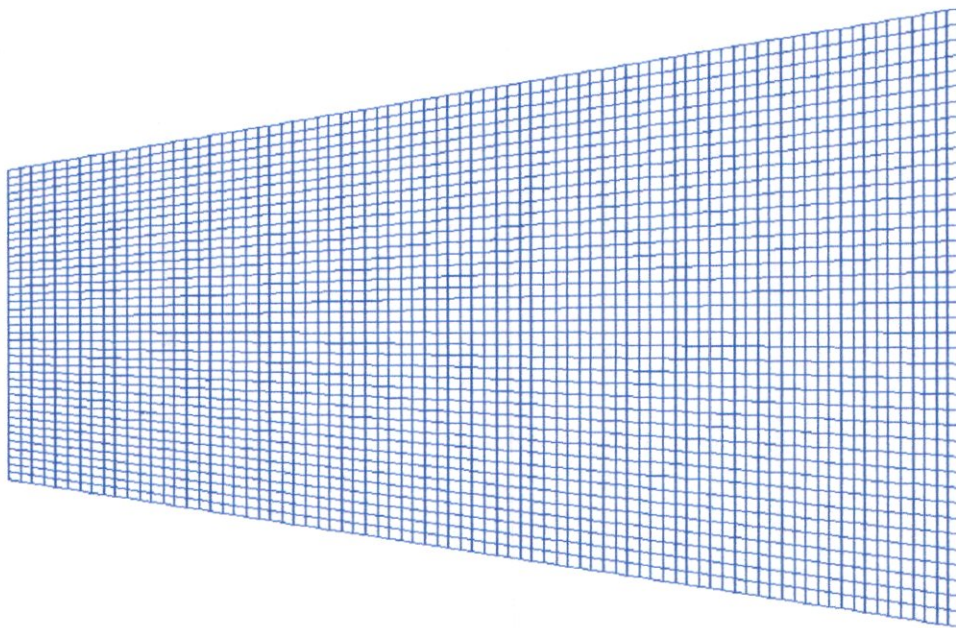
VI.1.1.2. Domaines doublement connexes :

La génération de maillage est ensuite appliquée au domaines doublements connexes (à un obstacle), pour différentes formes géométriques d'obstacles ; forme cylindrique (Fig.V.3), forme d'un profil d'aile NACA0012 (Fig.V.4), (Fig.V.5) et NACA4412 (Fig.V.6).

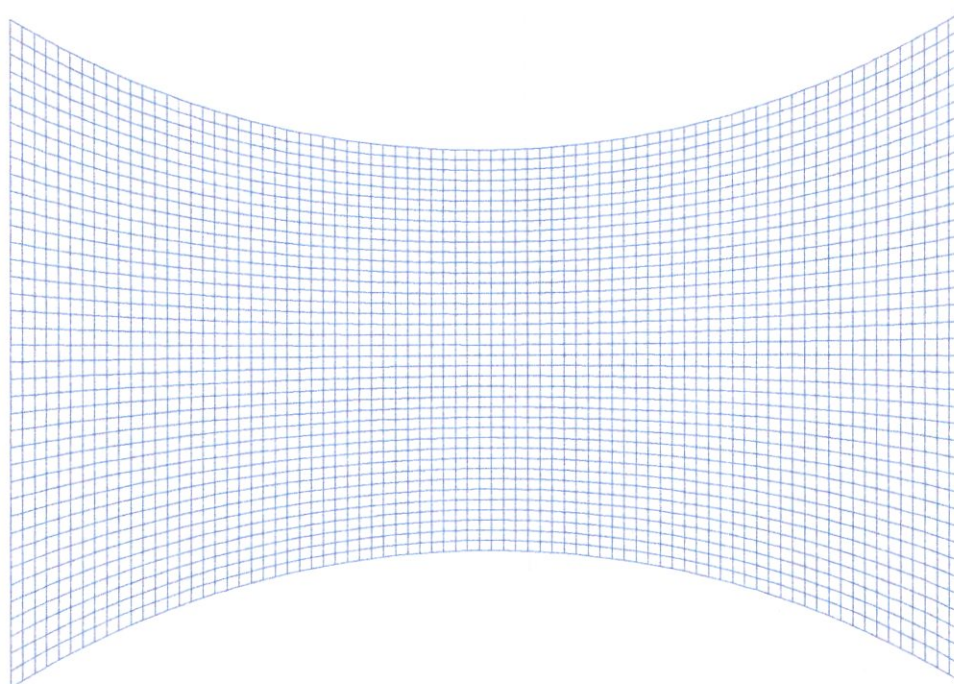
VI.1.1.3. Domaines multi connexes :

Les domaines multi connexes (à deux ou plusieurs obstacles) représentent en générale les champs où la génération de maillages réguliers peut s'avérer très difficile lorsqu'elle s'effectue par des méthodes autres que la méthode elliptique, en particulier par les méthodes algébriques.

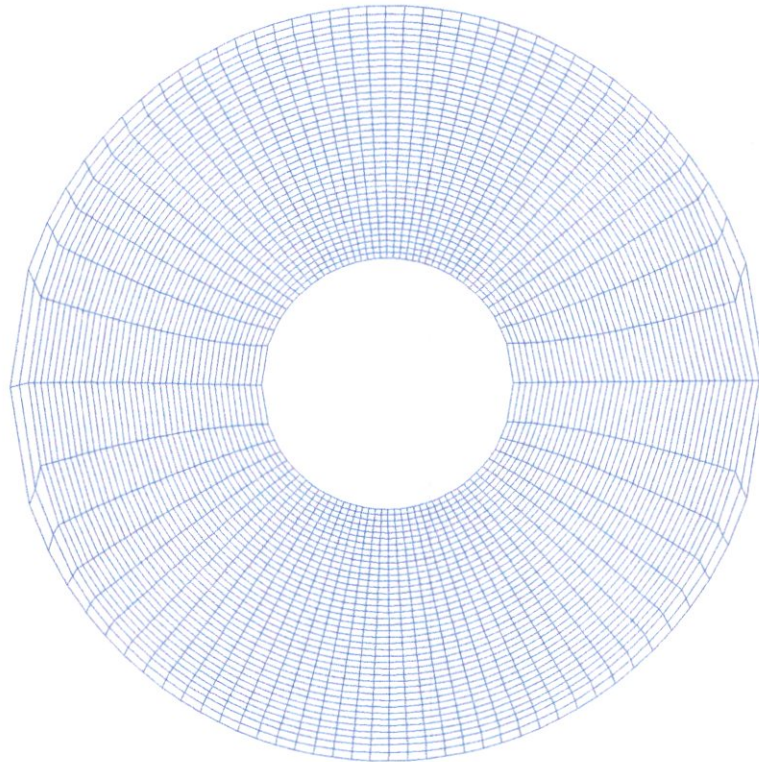
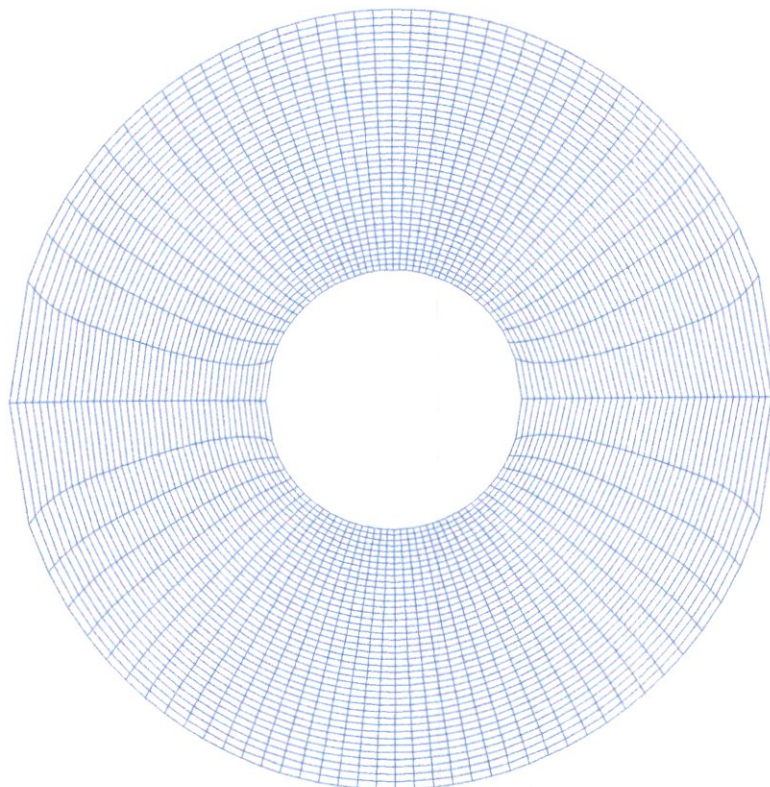
Nous avons représenté dans la figure (Fig.V.7) L'écoulement autour d'une combinaison aile-empennage, puis l'écoulement autour de deux cylindres (Fig.V.8).

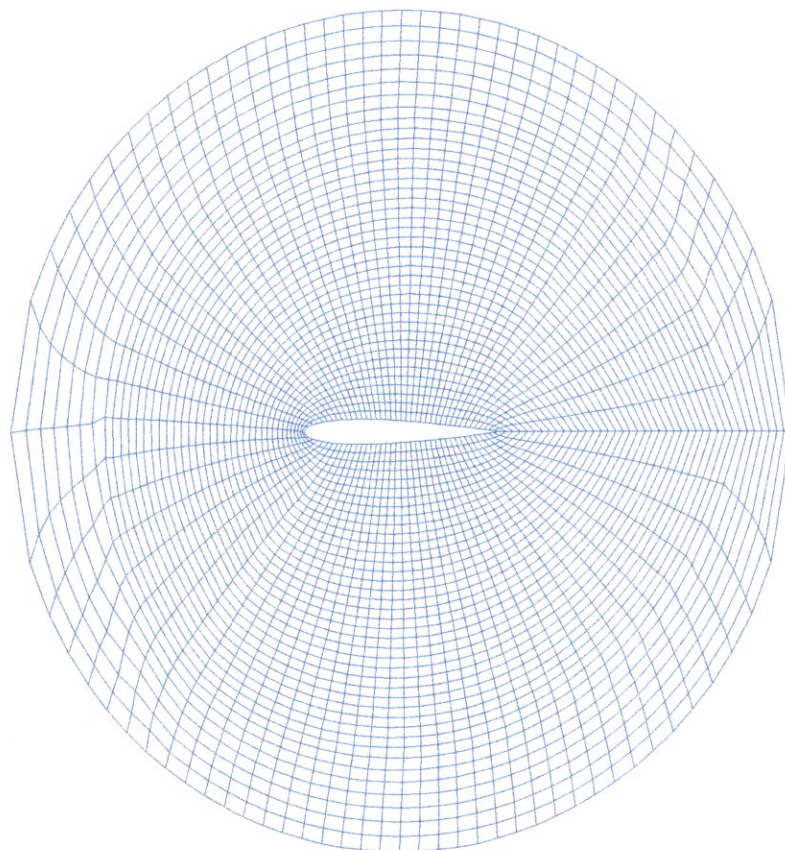
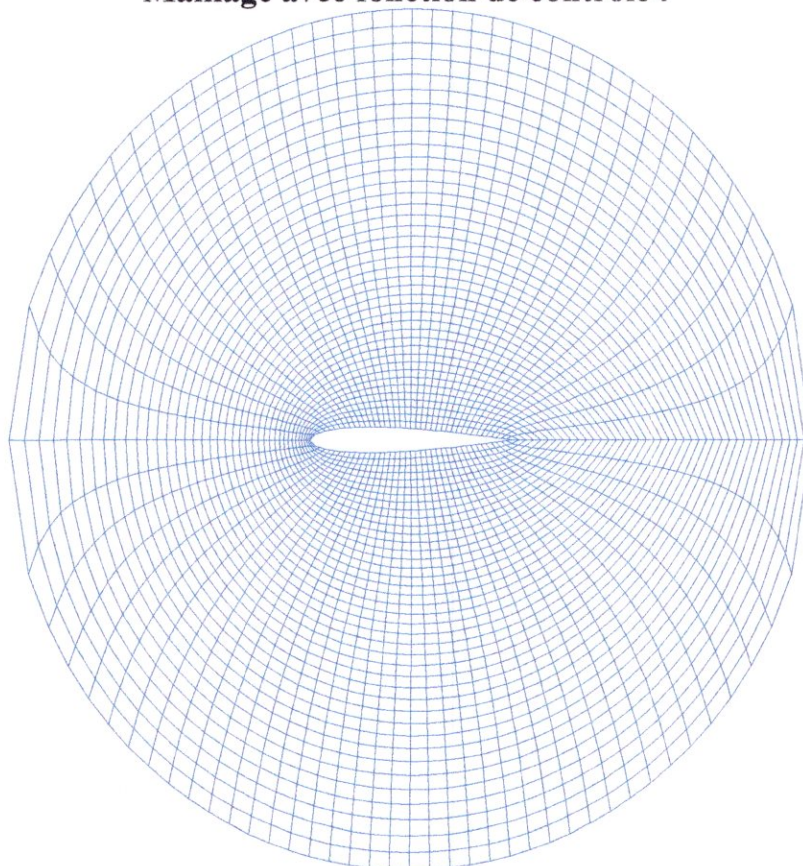


**Fig.VI.1.Maillage d'un domaine simplement connexe
(écoulement dans une tuyère)**

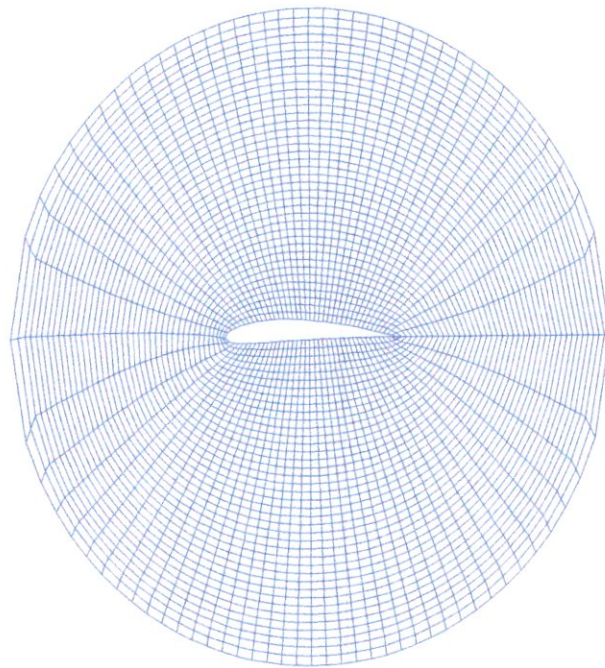


**Fig.VI.2.Maillage d'un domaine simplement connexe
(écoulement dans une conduite)**

Maillage Sans la fonction de contrôle :**Maillage avec la fonction de contrôle****Fig.VI.3. Maillage autour un cylindre.**

Maillage Sans la fonction de contrôle :**Maillage avec fonction de contrôle :****Fig.VI.4. Maillage autour d'un profil NACA0012**

Maillage sans fonction de contrôle



Maillage avec fonction de contrôle

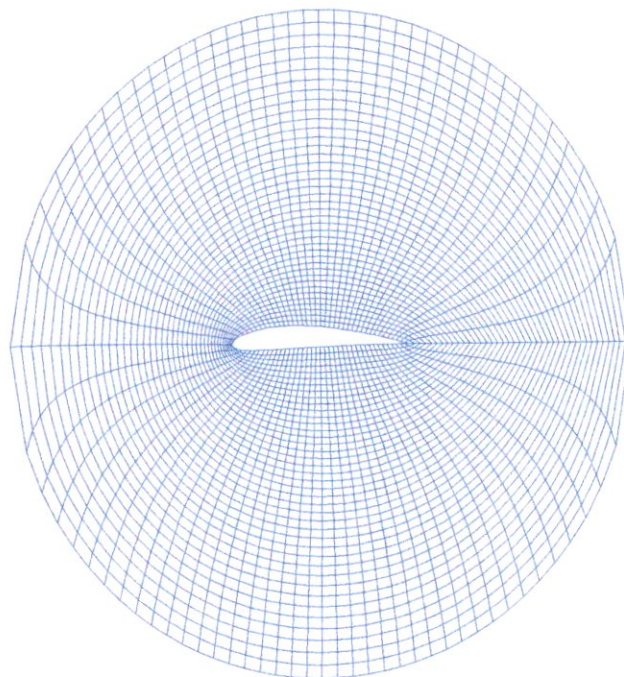


Fig.VI.6. Maillage autour d'un profil NACA4412

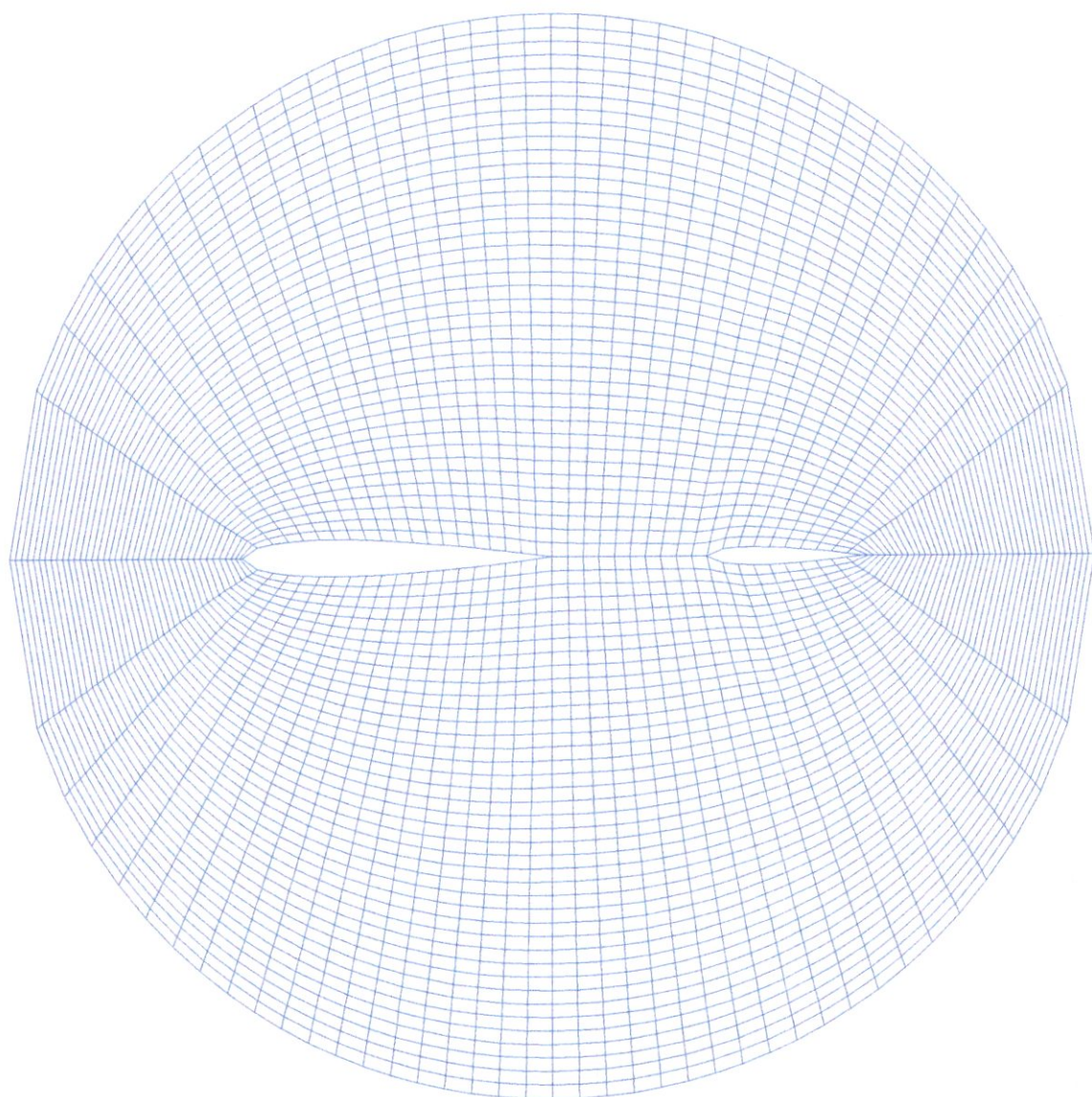


Fig.VI.7. Maillage autour de deux profils d'ailes

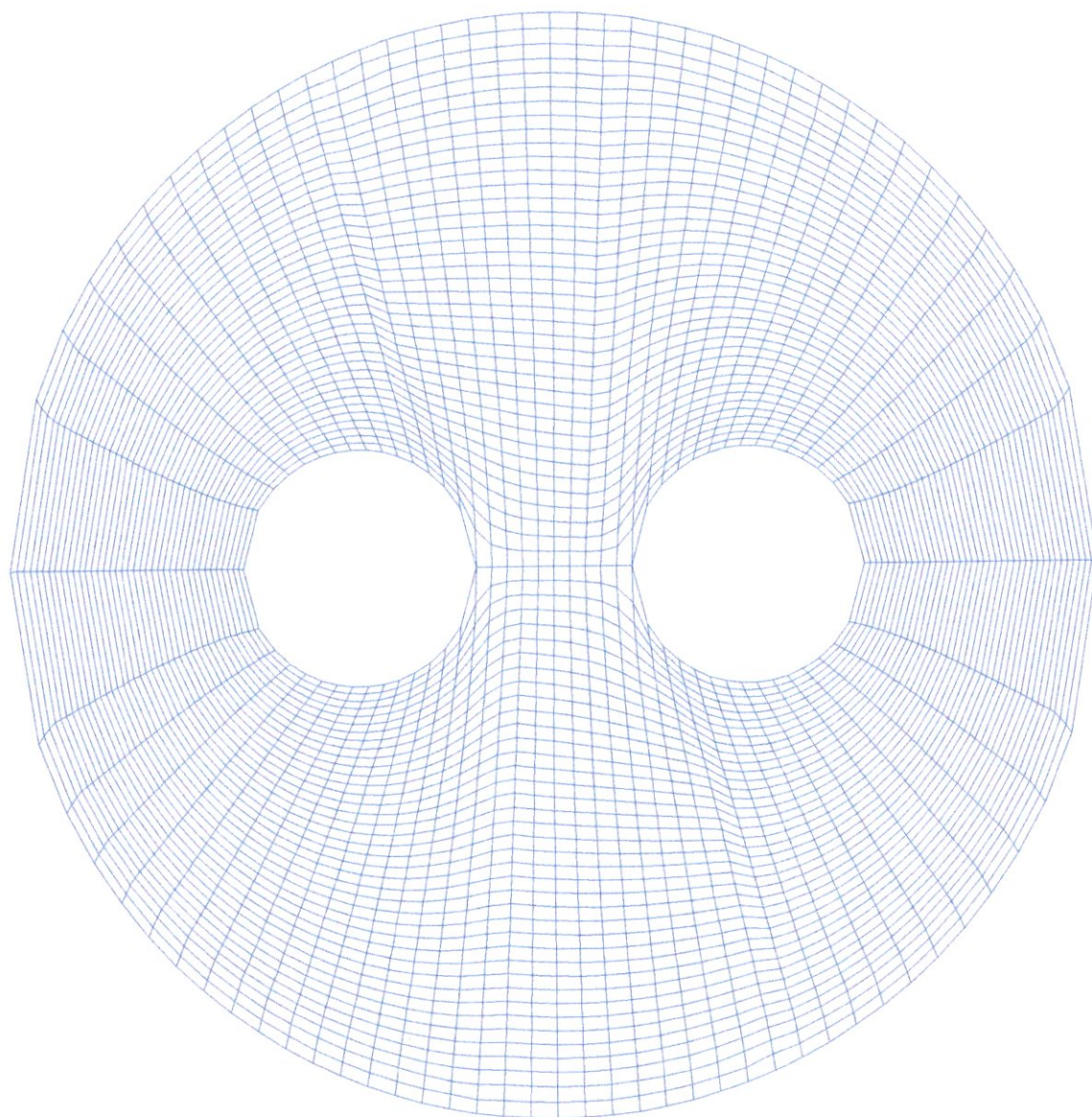


Fig.VI.8. Maillage autour de deux cylindres

VI.1.2. Choix de maillage initial :

Le choix de maillage initial nécessite la prise en compte du temps de convergence du processus itératif du modèle elliptique. Ce choix dépend essentiellement de la configuration de champ transformé et de la forme géométrique de l'obstacle également, nous avons choisi dans notre étude la méthode de deux parois pour générer le maillage initiale.

Nous résumons les résultats concernant les temps du convergence pour différentes valeurs du paramètre de relaxation dans les tableaux suivants :

Paramètre de relaxation	1.2	1.3	1.5	1.6	1.7	1.75	1.8	1.85	1.9
Nombre d'itérations	6	8	22	33	34	32	9	2	3

Tableau VI-1 : Evolution de la convergence en fonction du paramètre de relaxation ,pour la figure (V-3-).

Paramètre de relaxation	1.2	1.3	1.5	1.6	1.7	1.75	1.8	1.85	1.9
Nombre d'itérations	31	61	85	75	58	3	9	7	5

Tableau VI-2 : Evolution de la convergence en fonction du paramètre de relaxation ,pour la figure (V-4-).

Paramètre de relaxation	1.2	1.3	1.5	1.6	1.7	1.75	1.8	1.85	1.9
Nombre d'itérations	26	48	79	72	57	2	6	5	5

Tableau VI-3 : Evolution de la convergence en fonction du paramètre de relaxation, pour la figure (V-6-).

VI.1.3. Raffinement de maillage :

Dans certains problèmes physiques où la précision des calculs est demandée le raffinement de maillage peut jouer un rôle très important. On appelle la solution standard le type de maillage très raffiné, c'est-à-dire qu'au delà de ce raffinement la solution finale (optimale) du problème physique ne change pas. D'autre part, si le problème physique étudié est plus simple et ne nécessite pas la précision des calculs, il est préférable d'utiliser un maillage moins raffiné permet de gagner beaucoup de temps et d'espace mémoire.

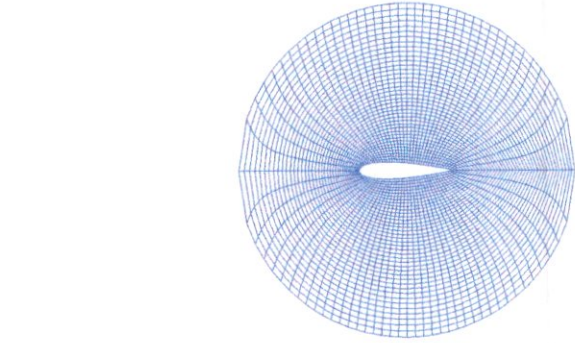
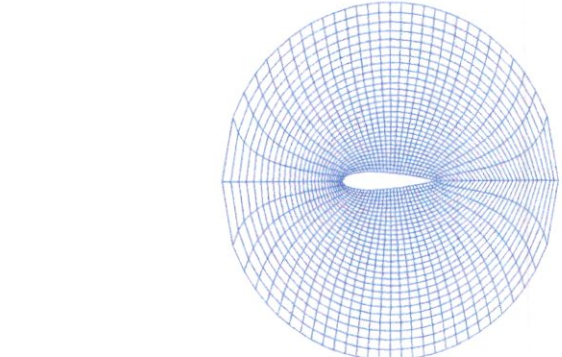
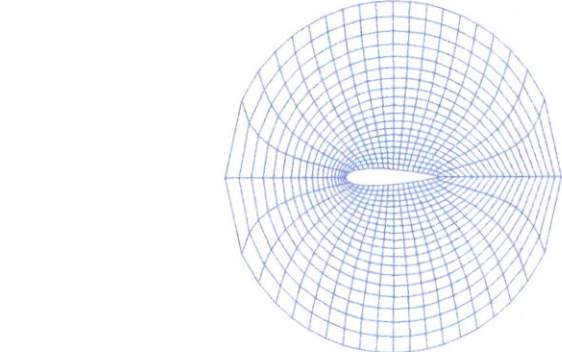
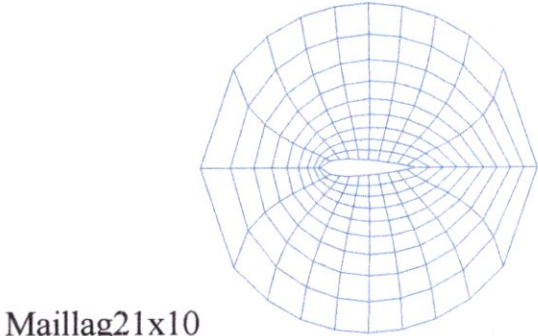


Fig.VI.9. Raffinement de maillage. (NACA0012)

VI.1.4. Répartition des lignes coordonnées :

La répartition des lignes coordonnées dans le maillage peut jouer un rôle très important dans certains problèmes physiques. Cette répartition des lignes coordonnées est traduite par la condensation de ces dernières dans des zones bien définies et suivant une direction (ξ et η), selon la nature du problème à traiter, tel que des problèmes de couche limite ou de l'apparition d'onde de choc.

Nous avons utilisés la fonction de condensation « Stretching » dans certaines zones de maillage comme, les parois d'une tuyère (Fig.V.12) (Fig.V.13), l'entrée d'une tuyère (Fig.V.10), où la sortie d'une tuyère (Fig.V.11). D'après ces figures, on peut constater la régularité de maillage intérieur, cette régularité ne peut être obtenue que par un choix judicieux des paramètres a_1 et b_1 intervenant dans la fonction de condensation « Stretching ». Généralement, ces paramètres sont déterminés après plusieurs essais, en les faisant varier de chaque côté du rectangle (champ transformé).

Les valeurs de ces paramètres, relatives aux exemples que nous avons présentés sont regroupées dans les tableaux suivants :

Côté	Côté 1	Côté 2	Côté 3	Côté 4
a1	2.0	1.0	0.0	1.0
b1	2.0	2.0	2.0	2.0

Tableau VI-5 : Valeurs des paramètres de la fonction Stretching pour la figure (V-11)

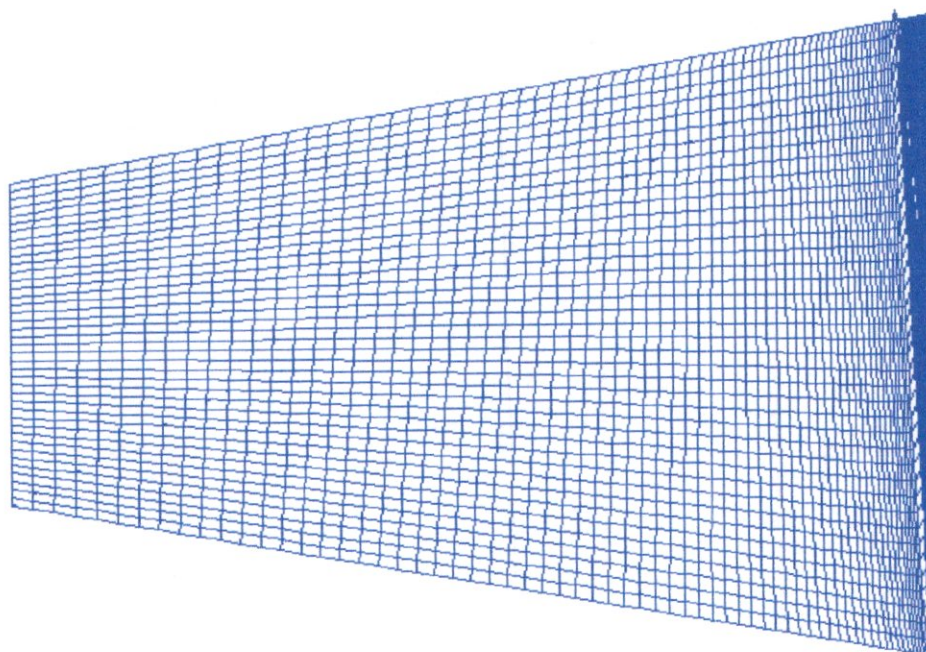


Fig.VI.11. condensation des lignes coordonnées à la sortie d'une tuyère

Côté	Côté 1	Côté 2	Côté 3	Côté 4
a1	1.0	2.0	1.0	2.0
b1	2.0	2.0	2.0	2.0

Tableau VI-6 : Valeurs des paramètres de la fonction Stretching pour la figure (V-12)

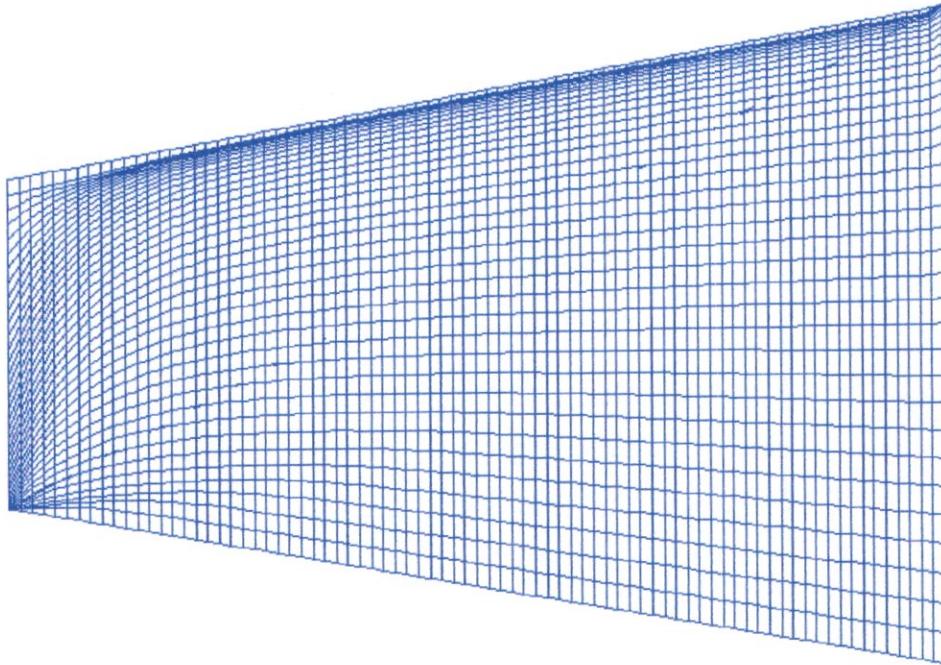


Fig.VI.12. condensation des lignes coordonnées sur la paroi supérieur.

Côté	Côté 1	Côté 2	Côté 3	Côté 4
a1	1.0	0.1	1.0	0.1
b1	2.0	2.0	2.0	2.0

Tableau VI-7 : Valeurs des paramètres de la fonction Stretching pour la figure (V-13)

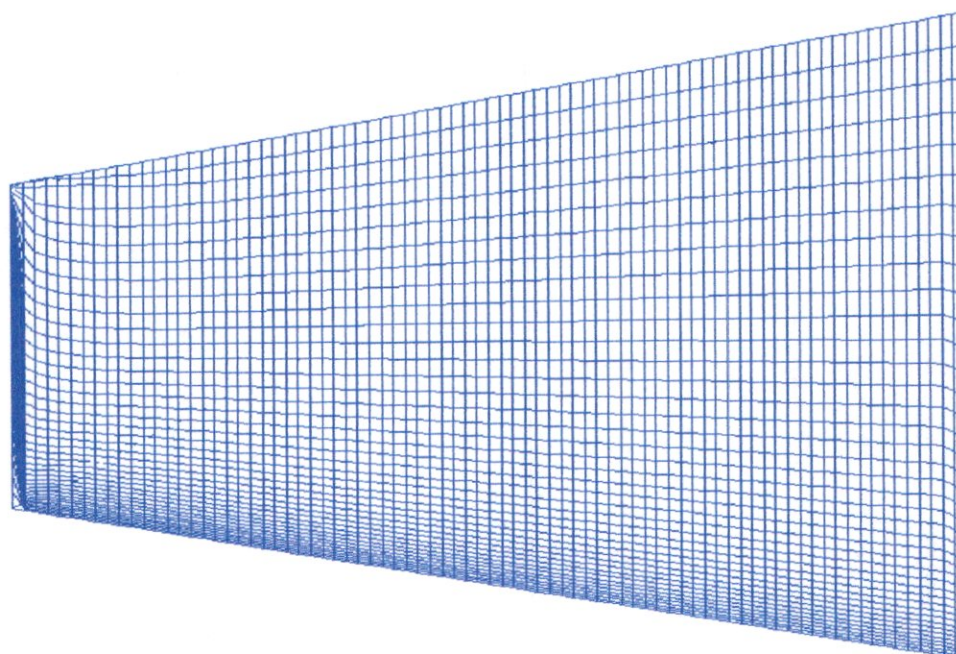
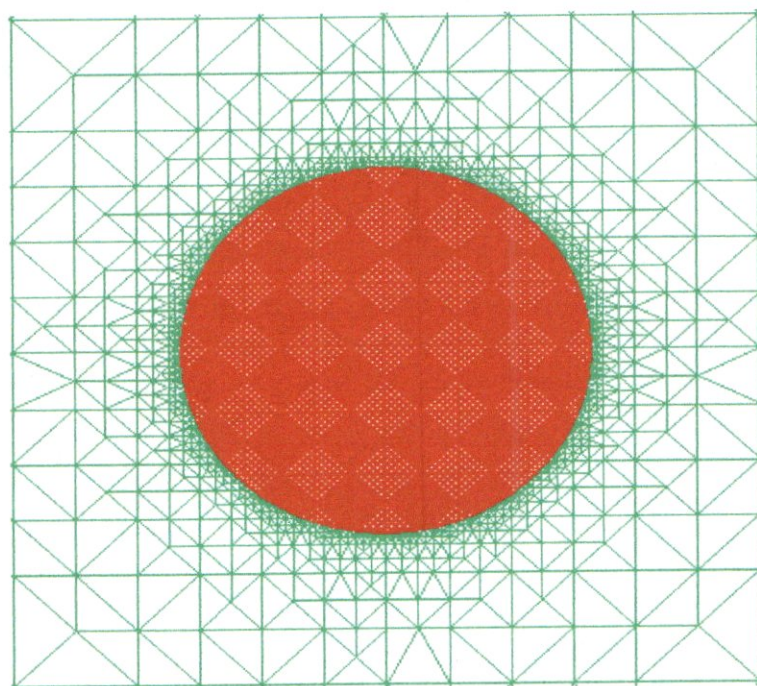
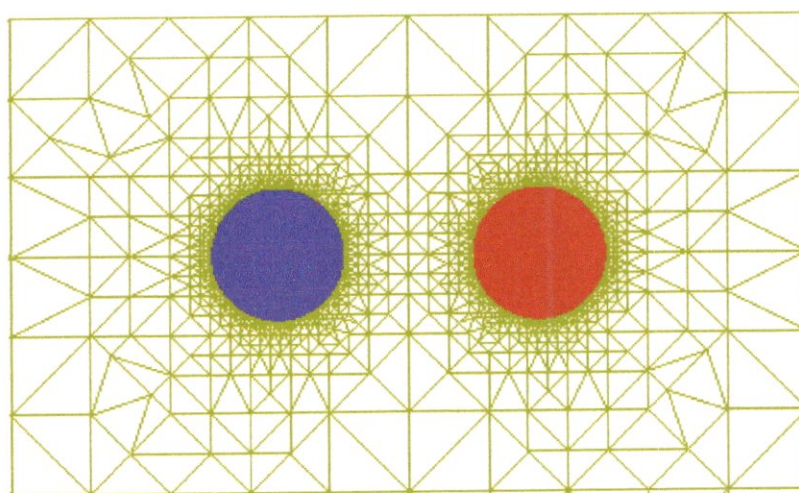


Fig.VI.13. condensation des lignes coordonnées sur la paroi
Inférieur

VI.2. Génération de maillage par le logiciel CFD :**Fig.VI.14. : Maillage autour un cylindre.****Fig.VI.15. Maillage autour de deux cylindres**

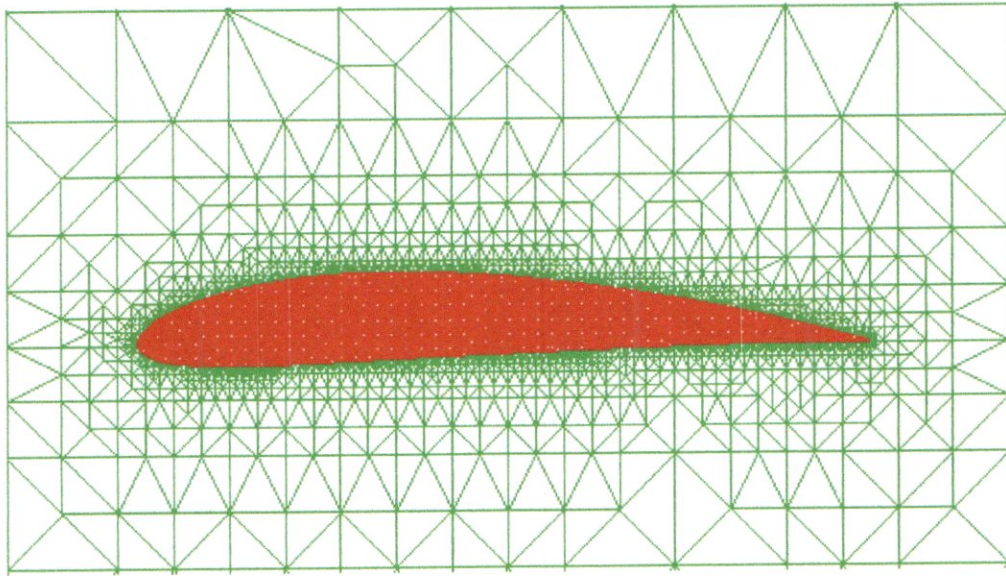


Fig.VI.16. Maillage autour d'un profil NACA4412

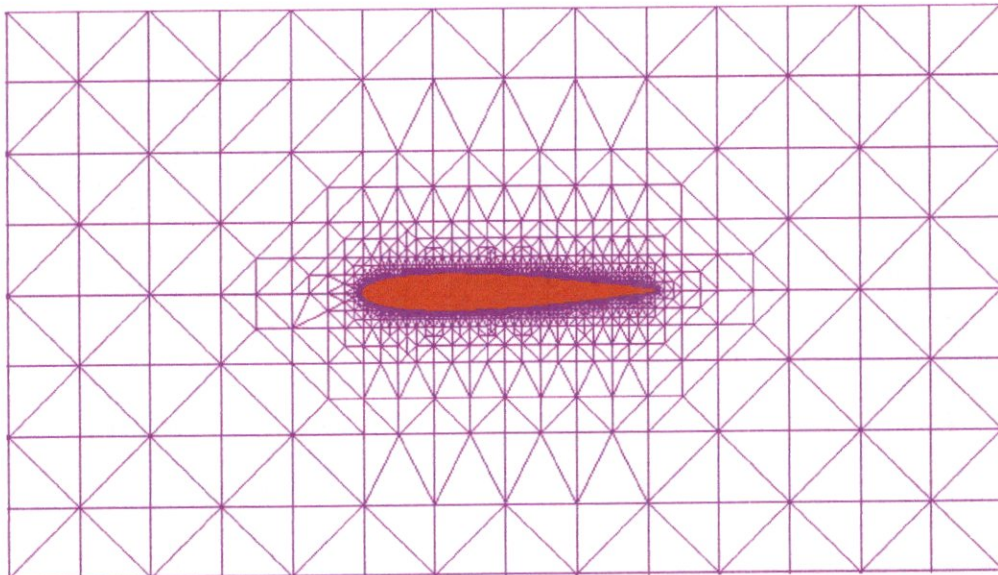


Fig.VI.17. Maillage autour d'un profil NACA0012

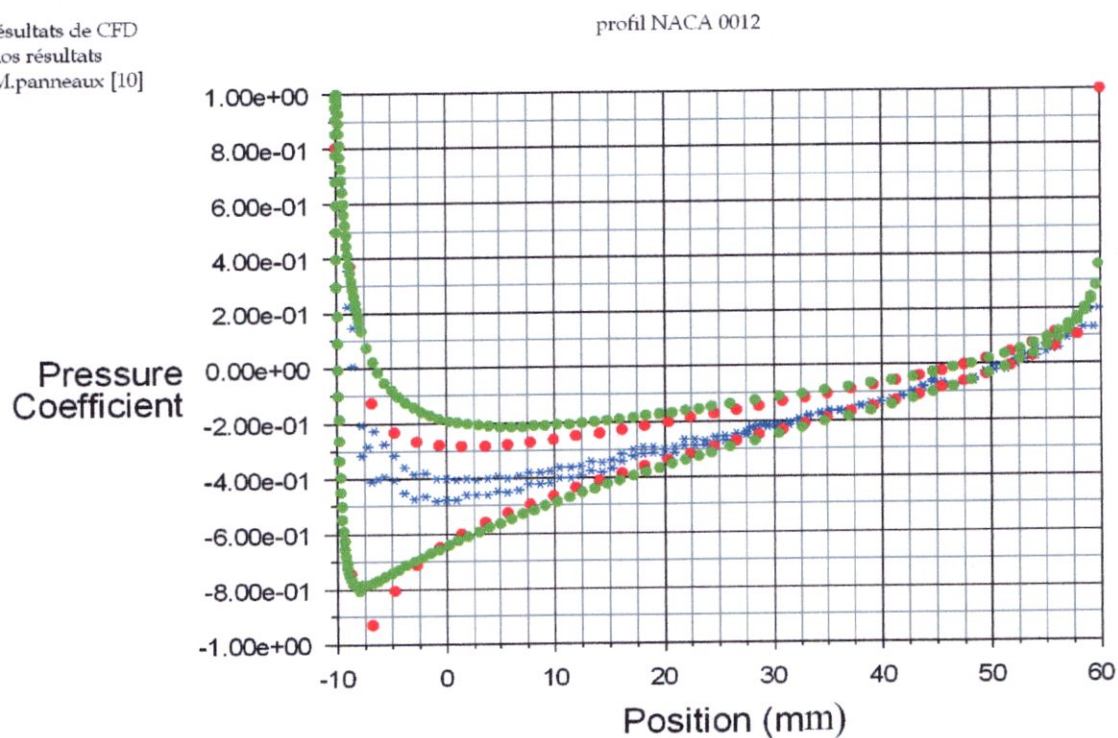


Fig.VI.19. Distribution du coefficient de pression sur la surface du profil

NACA 0012

Maillage de type <<O>> 69x18

Mach=0.3 α=2

CL=0.19348 Cd=-0.01048 Cm=-0.05183

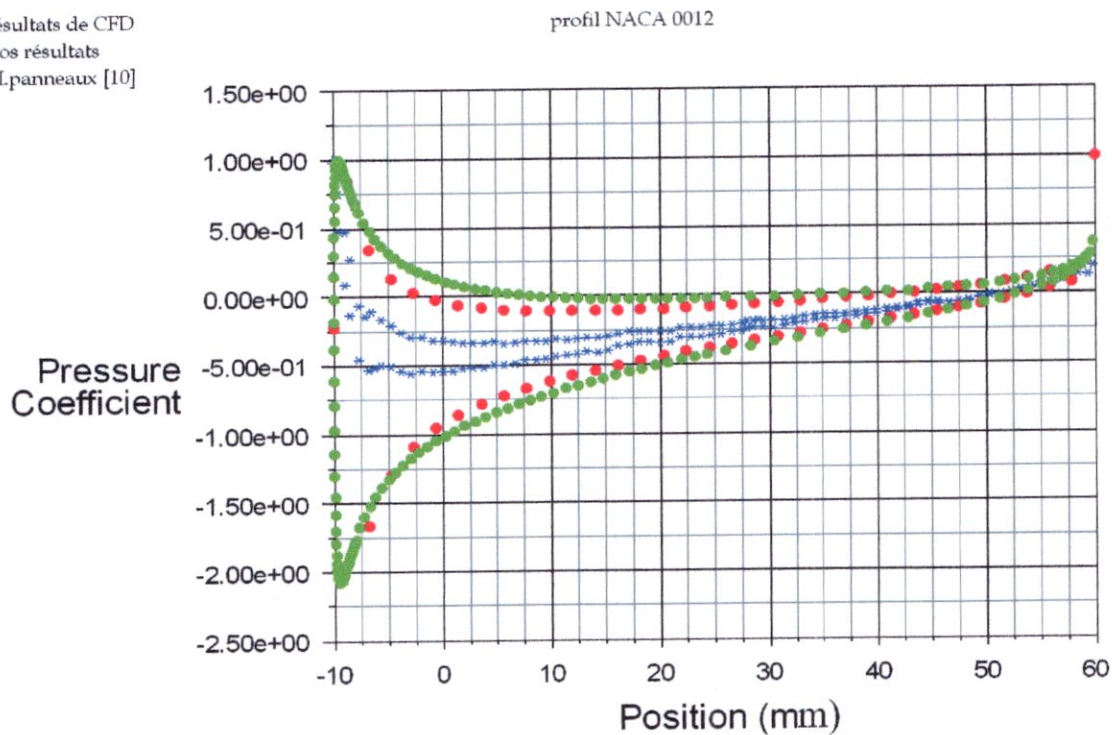


Fig.VI.20. Distribution du coefficient de pression sur la surface du profil

NACA 0012

Maillage de type <<O>> 69x18

Mach=0.3

$\alpha=5$

CL=0.48258

Cd=-0.50651

Cm=-0.12931

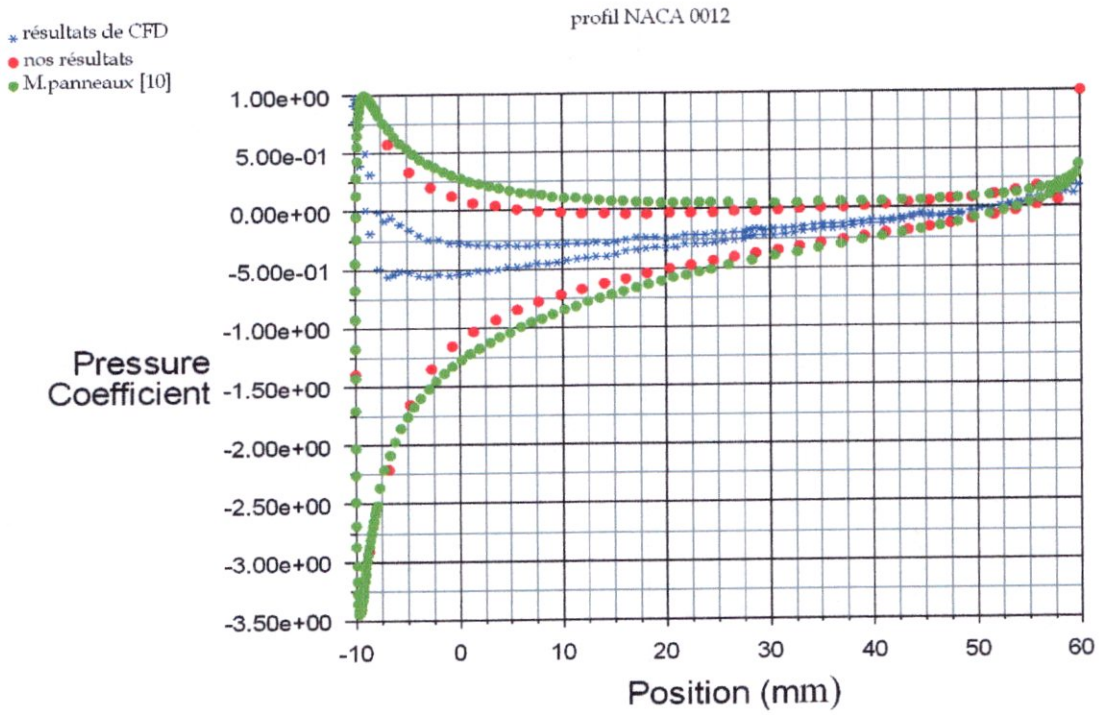


Fig.VI.21. Distribution du coefficient de pression sur la surface du profil NACA 0012

Maillage de type <<O>> 69x18

Mach=0.3

$\alpha=7$

CL=0.673049

Cd=-0.096222

Cm=-0.180354

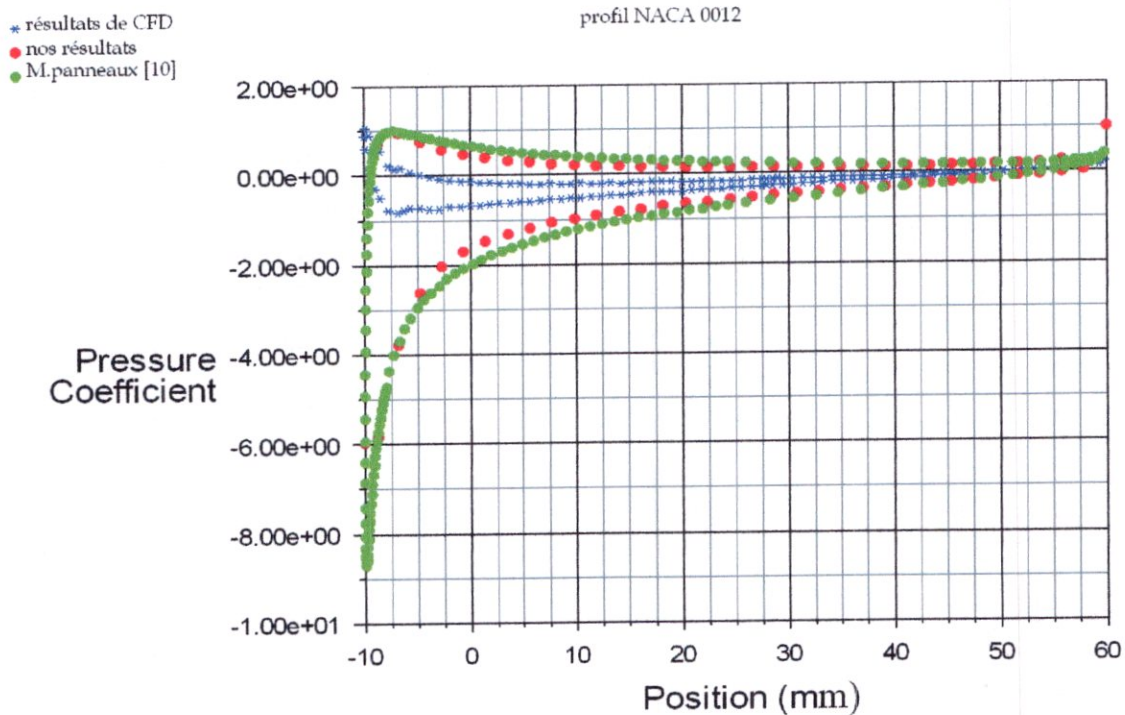


Fig.VI.22. Distribution du coefficient de pression sur la surface du profil NACA 0012

Maillage de type <<O>> 69x18

Mach=0.3

CL= 0.9530364

$\alpha=12$

Cd= -0.1916780

Cm= -0.2553743

indication de

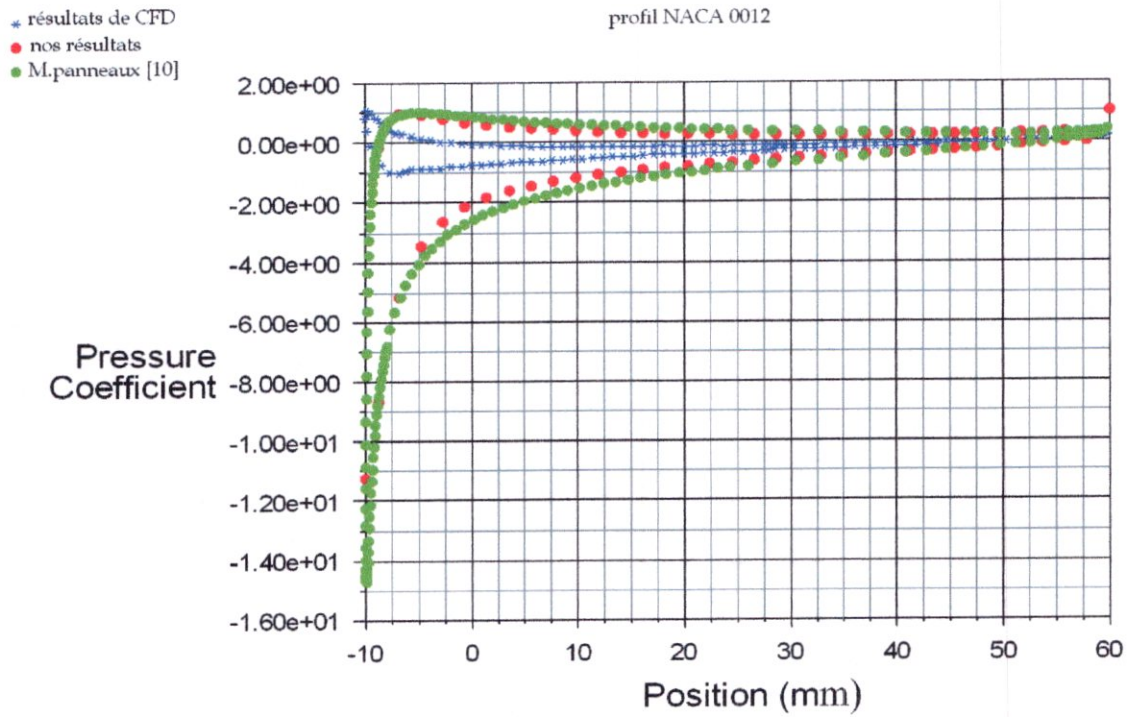


Fig.VI.23. Distribution du coefficient de pression sur la surface du profil NACA 0012

Maillage de type <<O>> 69x18

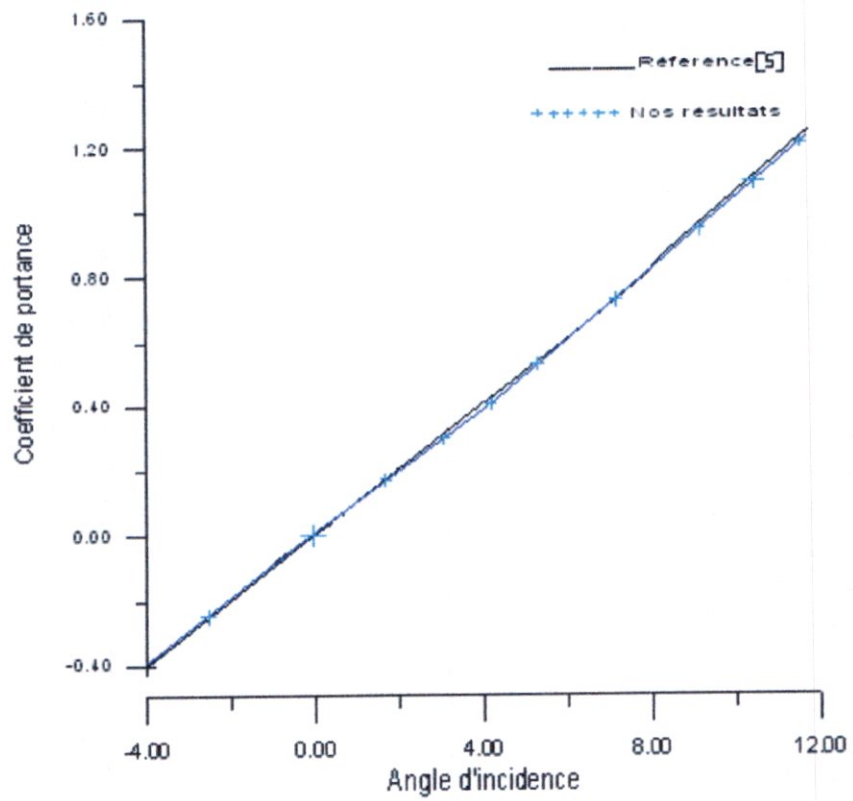
Mach=0.3

$\alpha=16$

CL= 1.134566

Cd= -0.2735361

Cm= -0.3040069



**Fig.VI.24. Evolution de la portance en fonction de l'angle d'incidence.
pour le profil NACA0012**



Conclusion

Ce travail a consisté à faire une étude de la méthode numérique de génération de maillage en deux dimensions. En particulier, nous avons développé et appliqué la méthode à coordonnées curvilignes régie par un modèle elliptique (équation de poisson).

Outre cette méthode, nous nous sommes également intéressés à un certain nombre de techniques algébriques de génération de maillage, ces méthodes se distinguent des méthodes à coordonnées curvilignes essentiellement par la simplicité et la rapidité avec laquelle les maillages sont générés. Cependant et contrairement à la méthode à coordonnées curvilignes, elliptique, l'application d'une de ces méthodes algébriques peut être conditionnée par le type de configuration du domaine choisi. Par ailleurs les maillages correspondants peuvent comporter des irrégularités dues principalement à la propagation des discontinuités à partir des frontières vers l'intérieur du champ. Les maillages obtenus par ces méthodes ont servi essentiellement à accélérer la convergence de la solution de modèle elliptique.

Par ailleurs, afin d'obtenir une meilleure adaptation du maillage, les fonctions de condensation sont utilisées pour la distribution des points le long des frontières particulières ainsi que des régions spécifiques du domaine qui nécessitent un traitement avec une grande précision. D'autre part, des fonctions de contrôle sont introduites dans l'équation de poisson pour contrôler l'espacement des lignes coordonnées.

D'après les résultats de maillage obtenus, nous avons pu conclure que la méthode à coordonnées curvilignes elliptique est générale, pouvant s'appliquer dans des domaines d'étude simplement connexes, doublement connexes ou multi-connexes. Par ailleurs, cette méthode est applicable avec des formes arbitraires d'obstacles et de la frontière externe.

En fin, comme l'objectif de l'étude de tous problèmes de génération de maillage est son application à un problème physique réel, nous avons appliqué cette méthode à coordonnées curvilignes, associée aux techniques algébriques à un écoulement potentiel, incompressible, autour de différents types de profils d'ailes.

L'analyse des résultats de cette application nous a révélé que cette méthode de génération de maillage constitue un très bon outil de calcul numérique, permettant de décrire les phénomènes physiques avec une très bonne approche des résultats expérimentaux. Il faut noter également que l'application de la méthode de génération de maillage est indépendante de la nature mathématique des équations qui régissent le

problème physique et qui peut être : elliptique, parabolique ou hyperbolique. De ce fait, lors de l'application de cette méthode, aucune condition n'est imposée sur la nature physique du problème à étudier. Ce qui permet d'avancer que cette méthode pourrait s'appliquer à des problèmes physiques autre que celui de l'écoulement potentiel, tels que les problèmes de transfert de chaleur ou d'écoulement visqueux.

Ainsi que, Les résultats obtenus avec le code de calcul, nous avons donné une idée sur l'intérêt de la modélisation et la simulation numérique avec les logiciels.

En général, les résultats obtenus avec ce code de calcul sont en bonne concordance avec les résultats expérimentaux.

Pour cela, beaucoup de recommandations doivent être présent en considération en particulier, le maillage doit être aussi fin près de la paroi du profil, afin de détecter les détails de l'écoulement quantitativement et qualitativement.

Références bibliographiques

- [1]. **Toufik EL AICHI**, Application des techniques de génération de maillages pour le calcul d'écoulements potentiels transsoniques stationnaires, thèse de magister, Université de Blida, Mars 1997.
- [2]. **Latifa BOUNAR**, Etude des techniques de génération de maillage, application en aérodynamique externe, thèse de magister, Université des sciences et de la technologie "HOUARI Boumedienne" d'Alger, Février 1995.
- [3]. **C. A. J. Fletcher**, Computational Techniques for Fluid Dynamics 2, Springer-Verlage, Heidelberg, 1991.
- [4]. **ION Paraschivoiu**, Aérodynamique subsonique, édition de l'école polytechnique de Montréal, 1998.
- [5]. **I.H.Abbott and A.E.Von Donhoff**, Theory of Wing Sections, Dover Publication 1949.
- [6]. **INGE.L.RYHMING**, Dynamique des fluides, Un cours de base du deuxième Cycle Universitaire 1984.
- [7] **Stadius .G**, Construction of orthogonal curvilinear meshes by solving initial value problems, Dept of computer sciences report N° 53, Uppsala University, Sweden (1974)
- [8] **R.M.Olsen**, Essentials of engineering fluid mechanics, third edition.
- [9] **P.Rebuffet**, Aérodynamique expérimentale, troisième édition Dunod 1969.
- [10] **T.Cebeci**, Convective Heat Transfert, Second Revised Edition, Springer.
- [11] **P.Vu**, CFD study of wing tip vortices for inverted airfoils in ground effect, Cranfield University.



Annexes

Annexe -A-

Transformations du plan de coordonnées cartésiennes(x,y) aux plan de coordonnées généralisées(ξ, η) :

La transformation du domaine (x,y) au domaine (ξ, η) se fait par le passage de plusieurs étapes et à l'aide des différentes procédures. On présente dans cette partie quelques procédures de ce passage. Nous supposons dans ce qui suit :

$f(x,y)$: est une fonction deux fois continûment dérivable.

$F(x,y)$: est une fonction vectorielle continûment dérivable, donnée par :

$$\vec{F}(x,y) = F_1(x,y) \vec{i} + F_2(x,y) \vec{j}$$

A-1 Dérivées :

A-1-1 Dérivées de $\xi(x,y)$ et $\eta(x,y)$:

Preliminaire :

La transformation du champ (x,y) en champ s'effectue par :

$$\begin{pmatrix} \xi \\ \eta \end{pmatrix} = \begin{cases} \xi(x, y) \\ \eta(x, y) \end{cases}$$

On détermine les dérivées de ξ et η par :

$$\begin{cases} d\xi = \xi_x dx + \xi_y dy \\ d\eta = \eta_x dx + \eta_y dy \end{cases}$$

La matrice de passage est :

$$J_1 = \begin{bmatrix} \xi_x & \xi_y \\ \eta_x & \eta_y \end{bmatrix}$$

La transformation inverse, si elle existe est donnée par :

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{cases} x(\xi, \eta) \\ y(\xi, \eta) \end{cases}$$

De la même manière, on détermine les dérivées de x et y :

$$\begin{cases} dx = x_\xi d\xi + x_\eta d\eta \\ dy = y_\xi d\xi + y_\eta d\eta \end{cases}$$

La matrice inverse J_2 , de la matrice de passage J_1 , est :

$$J_2 = \begin{bmatrix} x_\xi & x_\eta \\ y_\xi & y_\eta \end{bmatrix}$$

Soit $J = \det J_2 = x_\xi y_\eta - y_\xi x_\eta$

La relation entre les deux matrices est :

$J_1 = \frac{1}{J}$ (la matrice transposée des cofacteurs de J_2)

$$\begin{bmatrix} \xi_x & \xi_y \\ \eta_x & \eta_y \end{bmatrix} = \frac{1}{J} \begin{bmatrix} y_\eta & -x_\eta \\ -y_\xi & x_\xi \end{bmatrix}$$

D'où les expressions des dérivées premières :

$$\xi_x = \frac{y_\eta}{J} \qquad \xi_y = -\frac{x_\eta}{J}$$

$$\eta_x = -\frac{y_\xi}{J} \qquad \eta_y = \frac{x_\xi}{J}$$

Et des dérivées secondes :

$$\xi_{xx} = (\xi_x y_{\xi\eta} + \eta_x y_{\eta\eta})/J - (\xi_x^2 J_\xi + \xi_x \eta_x J_\eta)/J$$

$$\xi_{yy} = -(\eta_y x_{\eta\eta} + \xi_y x_{\xi\xi})/J - (\xi_y \eta_y J_\eta + \xi_y^2 J_\xi)/J$$

$$\xi_{xy} = (\eta_y y_{\eta\eta} + \xi_y y_{\xi\eta})/J - (\xi_x \xi_y J_\xi + \xi_x \eta_x J_\eta)/J$$

$$\eta_{xx} = -(\xi_x y_{\xi\xi} + \eta_x y_{\xi\eta})/J - (\eta_x \xi_x J_\xi + \eta_x^2 J_\eta)/J$$

$$\eta_{yy} = (\eta_y x_{\xi\eta} + \xi_y x_{\xi\xi})/J - (\xi_y \eta_y J_\xi + \eta_y^2 J_\eta)/J$$

$$\eta_{xy} = (\eta_y y_{\xi\eta} + \xi_y y_{\xi\xi})/J - (\eta_x \eta_y J_\eta + \xi_x \eta_x J_\xi)/J$$

A-1-2 Dérivées de $f(x,y)$:

$$f_x = \left(\frac{\partial f}{\partial x} \right)_y = (y_\eta f_\xi - y_\xi f_\eta)/J$$

$$f_y = \left(\frac{\partial f}{\partial y} \right)_x = (x_\xi f_\eta - x_\eta f_\xi)/J$$

A-2 Transformation des dérivées des vecteurs :

Laplacien de f :

$$\nabla^2 f = (\alpha f_{\xi\xi} - 2\beta f_{\xi\eta} + \gamma f_{\eta\eta})/J^2 + (\alpha x_{\xi\xi} - 2\beta x_{\xi\eta} + \gamma x_{\eta\eta})(y_\xi f_\eta - y_\eta f_\xi)/J^3$$

$$+ (\alpha y_{\xi\xi} - 2\beta y_{\xi\eta} + \gamma y_{\eta\eta})(x_{\xi} f_{\eta} - x_{\eta} f_{\xi}) / J^3$$

Cette expression est équivalente à :

$$\nabla^2 f = (\alpha f_{\xi\xi} - 2\beta f_{\xi\eta} + \gamma f_{\eta\eta} + \sigma f_{\eta} + \tau f_{\xi}) / J^2$$

Avec :

$$J = x_{\xi} y_{\eta} - x_{\eta} y_{\xi}$$

$$\alpha = x_{\eta}^2 + y_{\eta}^2$$

$$\beta = x_{\xi} y_{\eta} + y_{\xi} x_{\eta}$$

$$\gamma = x_{\xi}^2 + y_{\xi}^2$$

$$\sigma = (y_{\xi} dx - x_{\xi} dy) / J$$

$$\tau = (x_{\eta} dy - y_{\eta} dx) / J$$

$$dx = \alpha x_{\xi\xi} - 2\beta x_{\xi\eta} + \gamma x_{\eta\eta}$$

$$dy = \alpha y_{\xi\xi} - 2\beta y_{\xi\eta} + \gamma y_{\eta\eta}$$

Gradient de f :

$$\overset{\vee}{\nabla} f = (y_{\eta} f_{\xi} - y_{\xi} f_{\eta}) / J_i^{\vee} + (y_{\xi} f_{\eta} - y_{\eta} f_{\xi}) / J_j^{\vee}$$

Divergent de $\overset{\vee}{F}$:

$$\overset{\vee}{\nabla} \cdot \overset{\vee}{F} = [y_{\eta} (F_1)_{\xi} - y_{\xi} (F_1)_{\eta} + x_{\xi} (F_2)_{\eta} - x_{\eta} (F_2)_{\xi}] / J$$

A-3 Les vecteurs tangent et normale dans le champ (ξ, η) :

Les vecteurs tangent et normal à la courbe $f(x,y)$ sont données par :

$$\hat{h}^{(f)} = \frac{\nabla f}{|\nabla f|}$$

Pour $f(x,y)$ correspondant à $\eta(x,y)$, cette expression devient :

$$\hat{h}^{(\eta)} = \frac{\nabla \eta}{|\nabla \eta|}$$

En utilisant l'équation de gradient de f , le vecteur unitaire normal à une ligne $\eta = \text{cte}$ est donné par :

$$\hat{h}^{(\eta)} = (-y_{\xi}^p + x_{\xi}^j) / \sqrt{\gamma}$$

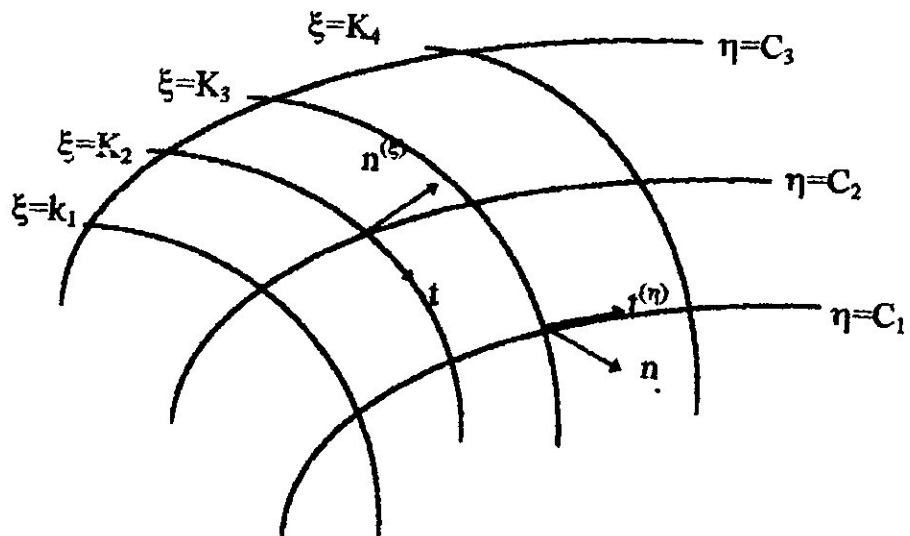
De la même manière, on définit l'expression du vecteur unitaire normal à une ligne coordonnée $\xi = \text{cte}$:

$$\hat{h}^{(\xi)} = \frac{\nabla \xi}{|\nabla \xi|} = (y_{\eta}^p - x_{\eta}^j) / \sqrt{\alpha}$$

Les vecteurs tangents à la ligne coordonnée $\eta = \text{cte}$, respectivement à la ligne $\xi = \text{cte}$ sont donnés par :

$$\hat{t}^{(\eta)} = \hat{h}^{(\eta)} * K = (x_{\xi}^p + y_{\xi}^j) / \sqrt{\gamma}$$

$$\hat{t}^{(\xi)} = \hat{h}^{(\xi)} * K = -(x_{\eta}^p + y_{\eta}^j) / \sqrt{\alpha}$$



Annexe -B-**Approximation par la méthode des différences finies****B-1 Approximation par les différences centrées d'ordre 2 :**

Soit une fonction deux fois continûment dérivable $f(\xi, \eta)$, définie pour :

$$2 \leq i \leq I_{\max} - 1$$

$$2 \leq j \leq J_{\max} - 1$$

L'approximation des dérivées premières donné :

$$(f_{\xi})_{i,j} = (f_{i+1,j} - f_{i-1,j})/2$$

$$(f_{\eta})_{i,j} = (f_{i,j+1} - f_{i,j-1})/2$$

L'approximation des dérivées secondes donné :

$$(f_{\xi\xi})_{i,j} = f_{i+1,j} - 2f_{i,j} + f_{i-1,j}$$

$$(f_{\xi\eta})_{i,j} = (f_{i+1,j+1} - f_{i+1,j-1} + f_{i-1,j-1} - f_{i-1,j+1})/4$$

$$(f_{\eta\eta})_{i,j} = f_{i,j+1} - 2f_{i,j} + f_{i,j-1}$$

B-2 Approximation par les différences décentrées d'ordre 2, des dérivées premières:

Cette approche est appliquée sur les segments correspondant aux frontières d'obstacles ou de frontière externe. Suivant la position du segment sur le coté du rectangle, nous obtenons:

B-2-1 Sur le coté bas:

$$\begin{array}{ccc} I_1 & & I_2 \\ & \text{-----} & \\ & & J=1 \end{array}$$

Pour $I_1 \leq I \leq I_2$:

$$f_{\eta} = -0.5(f(I,3) - 4(I,2) + 3f(I,1))$$

Au point $(I_1,1)$:

$$f_{\xi} = -0.5(f(I_1 + 2,1) - 4(I_1 + 1,1) + 3f(I_1,1))$$

Au point $(I_2,1)$:

$$f_{\xi} = 0.5(f(I_2 - 2,1) - 4(I_2 - 1,1) + 3f(I_2,1))$$

B-2-2 Sur le coté haut:

$$\begin{array}{ccc} I_1 & & I_2 \\ & \text{-----} & \\ & & J=J_{\max} \end{array}$$

Pour $I_1 \leq I \leq I_2$:

$$f_{\eta} = 0.5(f(I, J_{\max} - 2) - 4(I, J_{\max} - 1) + 3f(I, J_{\max}))$$

Au point (I_1, J_{\max}) :

$$f_{\xi} = -0.5(f(I_1 + 2, J_{\max}) - 4(I_1 + 1, J_{\max}) + 3f(I_1, J_{\max}))$$

Au point (I_2, J_{\max}) :

$$f_{\xi} = 0.5(f(I_2 - 2, J_{\max}) - 4(I_2 - 1, J_{\max}) + 3f(I_2, J_{\max}))$$

B-2-3 Sur le coté gauche:

$$I = 1 \quad \begin{array}{c} J_2 \\ | \\ J_1 \end{array}$$

Pour $J_1 \leq J \leq J_2$:

$$f_{\xi} = -0.5(f(3, J) - 4(2, J) + 3f(1, J))$$

Au point $(1, J_1)$:

$$f_{\eta} = -0.5(f(1, J_1 + 2) - 4(1, J_1 + 1) + 3f(1, J_1))$$

Au point $(1, J_2)$:

$$f_{\eta} = 0.5(f(1, J_2 - 2) - 4(1, J_2 - 1) + 3f(1, J_2))$$

B-2-4 Sur le coté droit:

$$I = I_{\max} \quad \begin{array}{c} J_2 \\ | \\ J_1 \end{array}$$

Pour $J_1 \leq J \leq J_2$:

$$f_{\xi} = 0.5(f(I_{\max} - 2, J) - 4(I_{\max} - 1, J) + 3f(I_{\max}, J))$$

Au point (I_{\max}, J_1) :

$$f_{\eta} = -0.5(f(I_{\max}, J_1 + 2) - 4(I_{\max}, J_1 + 1) + 3f(I_{\max}, J_1))$$

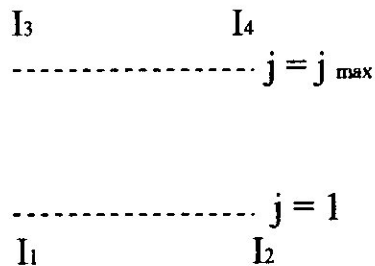
Au point (I_{\max}, J_2) :

$$f_{\eta} = 0.5(f(I_{\max}, J_2 - 2) - 4(I_{\max}, J_2 - 1) + 3f(I_{\max}, J_2))$$

B-3 Approximations par les différences centrées d'ordre 2 aux coupures :

Les segments de coupure d'une même paire peuvent être disposés sur le même côté du rectangle (champ transformé) qui correspond à une même ligne coordonnée ou sur des côtés opposés. Nous donnons ci-dessous les schémas aux différences finies correspondant aux différentes dispositions des segments de coupure sur les côtés du rectangle.

B-3-1 Un segment en bas, un autre en haut :



Sur le côté bas : $I_1 < i < I_2$

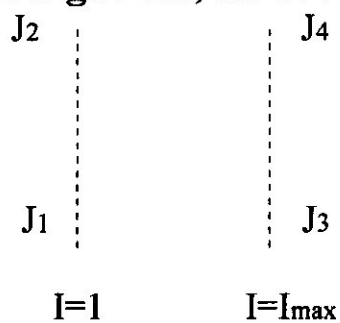
$$x_{\xi} = 0.5(x(i+1,1) - x(i-1,1))$$

$$x_{\eta} = 0.5(x(i,2) - x(i, J_{\max} - 1))$$

$$x_{\eta\eta} = x(i,2) - 2x(i,1) + x(i, J_{\max} - 1)$$

$$x_{\xi\eta} = 0.25(x(i+1,2) - x(i+1, J_{\max} - 1) + x(i-1, J_{\max} - 1) - x(i-1,2))$$

Les valeurs de dérivées pour le côté haut sont identiques à celles du côté bas à cause de la superposition des deux segments disposés sur les deux côtés.

B-3-2 Un segment à gauche, un autre à droite :

Sur le coté gauche : $J_1 < j < J_2$

$$x_{\xi} = 0.5(x(2, j) - x(I_{\max} - 1, j))$$

$$x_{\eta} = 0.5(x(1, j+1) - x(1, j-1))$$

$$x_{\xi\xi} = x(2, j) - 2(1, j) + x(I_{\max} - 1, j)$$