

REPUBLIQUE ALGERIENNE DEMOCRATIQUE ET POPULAIRE

MINISTERE DE L'ENSEIGNEMENT SUPERIEUR ET DE LA RECHERCHE  
SCIENTIFIQUE

UNIVERSITE DES SCIENCES ET DE LA TECHNOLOGIE  
BLIDA

INSTITUT DE GENIE MECANIQUE

**THESE**

présentée par

**AMEUR KHALED**

pour l'obtention du grade de

**MAGISTER**



Sujet

---

**ETUDE NUMERIQUE DES ECOULEMENTS VISQUEUX ET  
INCOMPRESSIBLES AUTOUR DE PROFILS D'AILES**

---

Soutenue le 29/10/1997 devant la commission d'examen :

|                           |                        |            |
|---------------------------|------------------------|------------|
| MM : - N. AIT-MESSAOUDENE | Maître de Conférence   | Président  |
| - M. BELHAMEL             | Directeur de recherche | Examineur  |
| - B. BOUMEDANE            | Chargé de cours        | Examineur  |
| - M. DAMOU                | Maître de conférence   | Examineur  |
| - A. HARHAD               | Maître de Conférence   | Rapporteur |

A la mémoire de ma mère.

✧

A mon père ,  
A mes soeurs ,  
A tous ceux qui me sont chers .

## Avant - propos

Je tiens à exprimer mes plus vives reconnaissances à Monsieur HARHAD qui m'a beaucoup aidé et grâce à qui cette étude a été réalisée.

Je remercie Monsieur AIT MESSAOUDENE qui m'a fait l'honneur de présider le jury de soutenance , ainsi que Messieurs BELHAMEL , BOUMEDANE et DAMOU d'avoir pris de leurs précieux temps afin d'examiner ce travail et de participer au jury .

Je tiens aussi à remercier :

- Mlle GUERRI , attachée de recherche au C.D.E.R.
- Mr D. SEMMAR , chargé d'étude au C.D.E.R.
- Mr S. MOUSSA , chargé d'étude au C.D.E.R.

Ma reconnaissance va également à toutes les personnes qui m'ont aidé de près ou de loin à la réalisation de ce travail et à tous les enseignants qui ont contribué à ma formation .

## ملخص:

الغرض من هذا المشروع هو دراسة سيلان هواء غير منضغط حول مقطع لجناح و بالأخص تحديد المميزات الأيروديناميكية .  
الدراسة العددية منضمة إلى قسمين : القسم الأول مخصص لحساب السيلان الكامن، وفيما يخص هذا الأخير استعملنا ثلاثة طرق (طريقة تحويل طبق، طريقة الألواح، طريقة الفروع المحدودة).  
القسم الثاني يتعلق بتقييم السيلان اللازج ، ذلك بتقدير تطور الطبقات المحددة فوق و تحت المقطع. قيم هذا التقدير بفضل إستعمالنا للطرق الكاملة (طريقة "طويت" للسيلان الهادئ و طريقة "هيد" للسيلان المضطرب).  
النتائج النظرية التي تحصلنا عليها قرنت مع النتائج التجريبية التي حصلت من المراجع ، و هذه الأخيرة تتمثل أغلبيتها في عامل الضغط و الإحتكاك .

## RESUME

Une évaluation numérique des performances aérodynamiques de profils d'ailes de géométries arbitraires est présentée dans ce travail . L'écoulement est supposé bidimensionnel et incompressible .

L'étude est organisée en deux parties : la première est consacrée au calcul de l'écoulement potentiel , ou trois méthodes ont été utilisées ( méthode des transformations conformes , méthode des panneaux et méthode des différences linies ) ; la deuxième partie consiste à évaluer les couches limites qui se développent sur l'extrados et l'intrados du profil . Cette évaluation est faite par les méthodes intégrales (méthode de Thwaites pour le cas laminaire et la méthode de Head pour le turbulent ) .

Les résultats numériques ont été comparés à ceux des références bibliographiques , la bonne concordance de ces derniers nous a confirmé la fiabilité de l'approche entreprise .

## ABSTRACT

A numerical calculation of an incompressible , viscous fluid flow past airfoils is presented in this study .

In first part , we calculate the potential flow with three methods (conformal mapping , pannel and finite differences).

In the second part , we investigate the viscous flow . The boundary layer on both upper and lower surfaces are estimated by integrals methods .

The numerical results are compared with data of references , and they concern essentially the presssure coefficient and the drag coefficient ; we can show a good agreement .

## SOMMAIRE

|   |    |
|---|----|
| Nomenclature .  |    |
| Introduction générale .....   | 1  |
| <br><b>Chapitre 1 : Considérations sur les écoulements incompressibles autour de profils d'ailes .</b>                            |    |
| 1-1- Aperçu historique.....   | 4  |
| 1-2- Différentes approches pour le calcul des écoulements incompressibles autour de profils d'ailes à géométries arbitraires..... | 5  |
| 1-2-1- Première approche .....  | 5  |
| 1-2-2- Deuxième approche .....  | 6  |
| <br>----- <u>1<sup>ère</sup> partie</u> : Calcul de l'écoulement potentiel -----  |    |
| <br><b>Chapitre 2 : Formulation mathématique de l'écoulement potentiel .</b>  |    |
| 2-1- Introduction .....   | 9  |
| 2-2- Equation régissant l'écoulement potentiel bidimensionnel de fluide incompressible .....                                      | 9  |
| 2-3- Méthodes de résolution de l'équation de Laplace (2-3) .....  | 10 |
| 2-4- Conclusion .....   | 11 |
| <br><b>Chapitre 3 : Calcul de l'écoulement potentiel par la méthode des transformations conformes .</b>                           |    |
| 3-1- Introduction.....  | 13 |
| 3-2- Formulation mathématique.....  | 13 |
| 3-2-1- Transformation profil-cercle irrégulier.....   | 13 |
| 3-2-1-1- Facteur reliant les vitesses entre le plan $Z$ et le plan $\zeta'$ .....   | 16 |
| 3-2-2- Transformation cercle irrégulier-cercle régulier.....  | 17 |
| 3-2-2-1- Facteur reliant les vitesses entre le plan $\zeta'$ et le plan $\zeta$ .....   | 21 |
| 3-2-3- Calcul de la vitesse au niveau de la surface du cercle régulier.....   | 22 |
| 3-2-4- Calcul de la vitesse au niveau de la surface du profil.....  | 24 |
| 3-3- Organigramme schématique.....  | 24 |
| 3-4- Résultats.....   | 27 |
| 3-5- Conclusion.....  | 27 |

## Chapitre 4 : Calcul de l'écoulement potentiel par la méthode des panneaux :

|   |    |
|---|----|
| 4-1- Introduction.....  | 33 |
| 4-2- Formulation mathématique de la méthode des panneaux<br>avec distribution de vortex ..... | 33 |
| 4-2-1- Paramètres géométriques .....  | 33 |
| 4-2-2- Calcul du potentiel vitesse au point de contrôle $Pc(i)$ .....                         | 34 |
| 4-2-2-1 Potentiel vitesse de l'écoulement uniforme<br>au point de contrôle $Pc(i)$ .....      | 35 |
| 4-2-2-2 Potentiel vitesse de l'écoulement vortex<br>au point de contrôle $Pc(i)$ .....        | 35 |
| 4-2-2-3 Potentiel vitesse globale au point de contrôle $Pc(i)$ .....                          | 35 |
| 4-2-3- Calcul des densités de circulation $\gamma(j)$ .....                                   | 36 |
| 4-2-4- Calcul du $C_p$ .....  | 42 |
| 4-3- Résolution du système d'équations (4-32) .....   | 44 |
| 4-4- Organigramme schématique.....  | 44 |
| 4-5- Résultats.....   | 46 |
| 4-6- Conclusion .....   | 52 |

## Chapitre 5 : Calcul de l'écoulement potentiel par la méthode des différences finies .

|   |    |
|---|----|
| 5-1- Introduction.....  | 54 |
| 5-2- Relations de transformations.....  | 55 |
| 5-3- Génération de maillage.....  | 57 |
| 5-3-1- Introduction .....   | 57 |
| 5-3-2- Génération de maillage par les équations<br>aux dérivées partielles.....     | 57 |
| 5-3-3- Résolution du système d'équation (5-8) .....                                 | 58 |
| 5-3-4- Discrétisation du système (5-10) .....                                       | 60 |
| 5-3-5- Organigramme schématique.....  | 62 |
| 5-3-6- Résultats.....   | 62 |
| 5-3-7- Conclusion.....  | 64 |
| 5-4- Calcul de l'écoulement potentiel .....   | 69 |
| 5-4-1- Formulation mathématique.....  | 69 |
| 5-4-2- Vitesses et coefficient de pression .....                                    | 69 |
| 5-4-3- Discrétisation et résolution de l'équation (5-22) .....                      | 71 |
| 5-4-4- Condition de Kutta-Joukowski .....   | 72 |
| 5-4-5- Organigramme schématique .....   | 73 |
| 5-4-6- Résultats .....  | 73 |
| 5-4-7- Conclusion.....  | 80 |
| Conclusion sur la 1 <sup>ère</sup> partie (calcul de l'écoulement potentiel ) ..... | 82 |

**Chapitre 6 : Calcul de la couche limite laminaire .**

|   |    |
|---|----|
| 6-1- Introduction.....  | 85 |
| 6-2- Calcul de la couche limite laminaire par<br>les méthodes intégrales..... | 85 |
| 6-2-1- Equation intégrale de Von-Karman.....                                  | 85 |
| 6-2-2- Méthode de Von-Karman et Pohlhausen.....                               | 87 |
| 6-2-3- Méthode de Holstein et Bohlen.....                                     | 89 |
| 6-2-4- Méthode de Waltz et Thwaites.....                                      | 90 |
| 6-2-5- Algorithme de calcul.....  | 93 |
| 6-3- Résultats.....   | 93 |
| 6-4- Conclusion.....  | 95 |

**Chapitre 7 : Calcul de la couche limite turbulente .**

|   |     |
|---|-----|
| 7-1- Introduction.....  | 97  |
| 7-2- Critères généraux de transition .....                                  | 98  |
| 7-2-1- Critère de Michel.....   | 98  |
| 7-2-2- Critère de Cebeci et Smith.....                                      | 98  |
| 7-3- Calcul de la couche limite turbulente par les méthodes intégrales..... | 99  |
| 7-3-1- Méthode de Head.....   | 99  |
| 7-4- Calcul du coefficient de traînée ( $C_x$ ) .....                       | 101 |
| 7-5- Résolution du système d'équations (7-8) et (7-10) .....                | 104 |
| 7-6- Organigramme schématique.....  | 104 |
| 7-7- Résultats.....   | 106 |
| 7-8- Conclusion.....  | 109 |
| Conclusion générale.....  | 111 |

**Bibliographie**

## NOMENCLATURE

### Liste des principales notations

#### Alphabet Latin

- $A_n, B_n$  : Coefficients de la transformation du plan  $\zeta'$  au plan  $\zeta$  .  
 $a_n, b_n$  : Coefficients de la série évaluant  $\varepsilon$  .  
 $b$  : Envergure de l'aile .  
 $C$  : Corde de profil .  
 $C_f$  : Coefficient de frottement pariétal .  
 $C_{fm}$  : Coefficient de frottement pariétal turbulent .  
 $C_p$  : Coefficient de pression .  
 $C_x$  : Coefficient de traînée .  
 $C_y$  : Coefficient de portance .  
 $H$  : Paramètre de forme ( $H = \delta_1/\delta_2$ ) .  
 $J$  : Matrice Jacobienne .  
 $k$  : Paramètre de forme ( $k = \frac{\delta_2^2}{\nu} \frac{du_\varepsilon}{dx}$ ) .  
 $L$  : Longueur d'un panneau .  
 $Max$  : Nombre de Panneaux .  
 $p$  : Pression statique .  
 $P_c$  : Point de contrôle .  
 $Re_\infty$  : Nombre de Reynolds ( $Re_\infty = U_\infty C / \nu$ ) .  
 $R\delta_2$  : Nombre de Reynolds ( $R\delta_2 = Re_\infty U_\infty \delta_2 / C$ ) .  
 $R\sigma$  : Nombre de Reynolds ( $R\sigma = Re_\infty U_\infty \sigma / C$ ) .  
 $S$  : Variable adimensionnelle ( $S = y / \delta$ ) .  
 $T$  : Traînée .  
 $u$  : Composante de la vitesse suivant l'axe des  $x$  .  
 $\bar{u}$  : Composante de la vitesse moyenne suivant l'axe des  $x$  .  
 $u_\varepsilon$  : Vitesse extérieure à la couche limite .  
 $U_\varepsilon$  : Vitesse adimensionnelle extérieure à la couche limite ( $U_\varepsilon = u_\varepsilon / U_\infty$ ) .  
 $U_\infty$  : Vitesse de l'écoulement libre .  
 $V$  : Vecteur vitesse .  
 $v$  : Composante de la vitesse suivant l'axe des  $y$  .  
 $\bar{v}$  : Composante de la vitesse moyenne suivant l'axe des  $y$  .  
 $v_t$  : Vitesse tangentielle à la surface du profil .  
 $V_t$  : Vitesse tangentielle adimensionnelle ( $V_t = v_t / U_\infty$ ) .  
 $W$  : Potentiel complexe .  
 $w$  : Paramètre de surrelaxation .  
 $x, y$  : Coordonnées cartésiennes .  
 $X, Y$  : Coordonnées cartésiennes adimensionnelles ( $X = x / C, Y = y / C$ ) .  
 $x_c, y_c$  : Coordonnées des points de contrôles .  
 $x$  : Partie réelle de la variable complexe  $Z$  .  
 $y$  : Partie imaginaire de la variable complexe  $Z$  .  
 $Z$  : Variable complexe .

### Alphabet Grecque

- $\alpha, \beta, \gamma$  : Paramètre de transformation .  
 $\alpha$  : Angle d'attaque .  
 $\beta$  : Angle entre l'axe des x et la normale au panneau .  
 $\gamma$  : Densité de circulation .  
 $\Gamma$  : Circulation .  
 $\Gamma_1, \Gamma_2, \Gamma_3$  et  $\Gamma_4$  : Domaine du plan physique .  
 $\Gamma_1^*, \Gamma_2^*, \Gamma_3^*$  et  $\Gamma_4^*$  : Domaine du plan transformé .  
 $\delta$  : Epaisseur de la couche limite .  
 $\delta_1$  : Epaisseur de déplacement de la couche limite .  
 $\delta_2$  : Epaisseur de quantité de mouvement de la couche limite .  
 $\varepsilon$  : Variable ( $\varepsilon = \phi - \theta$ ) .  
 $\eta, \xi$  : Coordonnées du plan transformé ( plan de calcul ) .  
 $\zeta$  : Variable complexe dans le cercle régulier .  
 $\zeta^*$  : variable complexe dans le cercle irrégulier .  
 $\theta$  : Coordonnée angulaire de la variable  $\zeta^*$  ( voir fig.3-1 ) .  
 $\theta$  : Angle entre l'axe des x et le panneau .  
 $\lambda$  : Variable adimensionnelle (  $k = \frac{\delta^2}{\nu} \frac{du_c}{dx}$  ) .  
 $\lambda$  :  $a e^\lambda$  est le rayon du cercle régulier .  
 $\mu$  : Viscosité dynamique de l'air .  
 $\nu$  : Viscosité cinématique de l'air .  
 $\rho$  : Masse volumique de l'air .  
 $\sigma$  : Longueur de l'arc .  
 $\tau$  : Vecteur tangent unité .  
 $\tau_p$  : Contrainte de frottement pariétale .  
 $\phi$  : Potentiel vitesse .  
 $\phi$  : Coordonnée angulaire de la variable  $\zeta$  .  
 $\Psi$  : Fonction de courant .  
 $\Psi_0$  : Ligne de courant correspondant à la paroi du profil .  
 $\Psi$  :  $a e^\Psi$  est le rayon du cercle irrégulier .  
 $\Psi_0$  : Valeur moyenne de  $\Psi$  .

### Indices inférieurs

- $i, j$  : Position des noeuds .  
 $x, y, \xi, \eta$  : Dérivées partielles premières .  
 $xx, yy, \xi\xi, \eta\eta$  : Dérivées partielles secondes .  
 $\xi\eta$  : Dérivée partielle croisée .  
BF : Relatif au bord de fuite .  
t : Relatif au point de transition .  
 $\infty$  : Infini ( très loin de l'obstacle ) .

### Indices supérieurs

k : Relatif à une itération .

\* : Relatif au plan transformé .

## **Introduction générale**

## Introduction générale

Le présent travail est une contribution à l'étude d'un écoulement incompressible autour de profils d'ailes à géométries arbitraires.

C'est une étude qui nous intéresse en fait à plus d'un titre puisque en plus de la modélisation numérique, elle présente un grand intérêt du point de vue pratique et technologique.

En effet, le champ d'application de cette étude est assez large et s'étend sur différents domaines, tels que l'aéronautique, l'énergie éolienne et les turbomachines.

Le problème consiste à évaluer les performances d'un profil, en particulier les forces de portance et de traînée pour une incidence donnée. Ces dernières résultent de l'intégration des forces élémentaires de pression et de viscosité qui s'exercent sur le profil.

Le premier chapitre est consacré à une revue bibliographique très sommaire des différentes approches qui existent pour évaluer ces forces.

Les calculs entrepris dans ce mémoire sont organisés essentiellement en deux parties.

En premier, on s'intéressera à la région éloignée du profil, où les effets de la viscosité peuvent être négligés. Une description assez succincte de l'écoulement potentiel est faite dans le deuxième chapitre.

Une vaste panoplie de méthodes existe pour la résolution de l'écoulement potentiel. On présentera les trois principales qui sont la méthode des transformations conformes, la méthode des panneaux et la méthode des différences finies. Pour chacune de ces techniques, nous allons développer un programme de calcul dont la description et la mise en oeuvre feront respectivement l'objet des chapitres trois, quatre et cinq.

L'information essentielle qu'on peut tirer à partir du calcul de l'écoulement potentiel est bien sur la force de portance, et par conséquent la pression statique tout au long du profil. La connaissance de cette dernière est une donnée nécessaire pour mener à bien la seconde partie de notre travail qui est le calcul de la force de traînée.

La deuxième partie de notre travail consiste à l'étude de la région confinée près de la paroi où les effets des forces de viscosité cessent d'être négligeables devant ceux des forces d'inertie et de pression.

Le calcul des couches limites qui se développent au niveau de l'extrados et de l'intrados se fera grâce aux méthodes intégrales .

En pratique , l'écoulement laminaire existe assez rarement . Ainsi , dans un souci d'approcher au mieux la réalité , la couche limite sera considérée sous sa forme la plus courante ; c'est à dire , le régime laminaire sur une courte distance , ensuite une phase de transition et enfin le régime turbulent .

La méthode intégrale de THWAITES , objet du sixième chapitre , a été choisie pour le calcul de la couche limite laminaire .

Enfin , on a consacré le septième chapitre à l'évaluation de la couche limite turbulente . Des critères ayant pour base des résultats expérimentaux , nous donnent la position approximative du point de transition . Ce dernier est précisément le point de départ du calcul de la couche limite turbulente qui sera évaluée grâce à la méthode intégrale de HEAD .

**Chapitre 1 :**

**Considérations sur les écoulements  
incompressibles  
autour de profils d'ailes**

## Chapitre 1

### Considérations sur les écoulements incompressibles autour de profils d'ailes

#### 1-1-Aperçu historique :

Depuis la nuit des temps , l'homme ne cessa de ménager ses efforts afin de conquérir les airs . En effet , beaucoup de légendes existent sur l'imitation de l'oiseau par l'homme . Cependant , aucun aspect sur l'aérodynamique du vol ne ressort de ces mythes . On a par exemple le célèbre mythe de Dedale , ou Icare qui avait fixé sur son dos des ailes faites de plumes d'oiseaux , s'approcha tellement du soleil que la cire assemblant ses ailes fondit sous l'effet de la chaleur .Le seul paramètre technologique qu'on peut en tirer ici est la méconnaissance d'Icare de la résistance des matériaux à la chaleur .

Si on passe de la légende à l'histoire , on trouvera beaucoup de grands hommes qui essayèrent d'étudier le vol de l'oiseau et spéculèrent sur la possibilité du vol humain . On citera surtout Léonard de VINCI (1452-1519) et Abasse Ibn FERNAS (845-888) qui paya de sa vie la dernière de ses expériences .

Il faudra attendre le début du vingtième siècle pour que le premier vol motorisé d'un plus lourd que l'air ait lieu et cela grâce aux frères WRIGHT (USA,1903) . A cette date l'aérodynamique était essentiellement expérimentale . La théorie mathématique avait beaucoup de lacunes . Elle n'arrivait pas à expliquer la sustentation obtenue par une surface courbée à angle d'incidence nulle , et le paradoxe de d'ALEMBERT ne faisait qu'accentuer la carence de cette théorie .

Cette carence va s'amenuiser assez rapidement et avant le début de la grande guerre une théorie de l'aile assez complète sera mise sur pied . Ainsi , vers 1908 M.W.KUTTA et indépendamment N.E.JOUKOWSKI réussirent à évaluer la portance des ailes à envergure infinie . Pour ce qui est du caractère tridimensionnel , le mérite de sa résolution revient à F.W.LANCASTER et L.PRANDTL . Le génie de ce dernier ne s'arrêtera pas là , puisque déjà en 1904 , il publia un article montrant que la viscosité d'un fluide , comme l'eau et l'air , affecte l'écoulement d'une façon assez conséquente uniquement une fine couche adjacente à la paroi de l'obstacle . En dehors de cette couche , la viscosité peut être négligée , ainsi la théorie des écoulements potentiels peut être utilisée avec une grande précision . PRANDTL , montra aussi que la finesse de cette couche permet d'énormes simplifications dans les équations de mouvement d'un fluide visqueux , ce qui a permis pour la première fois l'analyse mathématique du problème de frottement . A partir de cette date , le concept de couche limite était né , et devint une part importante de la mécanique des fluides .

## 1-2-Différentes approches pour le calcul des écoulements incompressibles autour de profils d'ailes à géométries arbitraires :

Le problème des écoulements visqueux incompressibles autour de profils d'ailes a fait l'objet de recherches approfondies de la part des ingénieurs et des chercheurs . On remarque essentiellement deux différentes approches pour l'étude de ce phénomène :

- 1) Le domaine d'écoulement est considéré dans sa totalité visqueux , d'où nécessité de résoudre les équations complètes de Navier-Stokes . Avec les moyens de calcul numérique qui deviennent de plus en plus puissants et performants , cette voie prend de plus en plus de l'ampleur ; mais reste néanmoins assez compliquée et surtout onéreuse.
- 2) Le domaine d'écoulement est partagé en deux régions : une région très voisine de la paroi du profil , où les effets visqueux sont dominants et une région externe où les effets de la viscosité sont négligés . Ainsi , on calcule d'abord l'écoulement potentiel , l'information obtenue sur la pression nous permet d'aborder par la suite l'évaluation des couches limites qui se développent sur les parois du profil .

### 1-2-1- Première approche :

J.F.THOMPSON et F.C.THAMES [1] ont pu résoudre numériquement les équations de Navier-Stokes pour un écoulement incompressible et transitoire autour de corps de géométrie bidimensionnelle arbitraire . Un schéma implicite a été utilisé avec une formulation tourbillon-fonction de courant . Toutes les équations ont été discrétisées par des différences finies centrées et ont été résolues simultanément à chaque pas temporel par la méthode SOR (méthode de Gauss-Seidel avec surrelaxation) . Il faut noter que cette résolution n'a pu se faire qu'après avoir maîtrisé la génération de maillage . En effet, une des faiblesses des différences finies dans le passé fut la mauvaise représentation des frontières courbées dans la grille de calcul . Différentes méthodes ont été testées pour y remédier à ce problème comme on peut le voir dans le "Review" de Z.WARZI et J.F.THOMPSON [2] . Des interpolations ont été essayées au niveau des frontières qui ne coïncident pas avec les lignes de coordonnées , mais sans grand succès vu que ceci introduit des irrégularités dans une zone très sensible où de sévères gradients ont lieu .

Cependant , si un système de coordonnées curvilignes est trouvé avec les frontières du domaine d'étude qui coïncident avec les lignes de coordonnées constantes , ce problème disparaît et les différences finies donnent de bons résultats . Un tel système de coordonnées est souvent généré comme solution d'un système d'équations différentielles elliptiques avec des conditions aux limites de type Dirichlet . Un code de calcul (TOMCAT ) a été élaboré dans ce sens par J.F.THOMPSON , F.C.THAMES et C.W.MASTIN [3] , où il permet le traitement de n'importe quel nombre de corps de géométrie bidimensionnelle totalement arbitraire .

### 1-2-2- Deuxième approche :

La deuxième approche ne peut débiter que par un calcul de l'écoulement potentiel car lors de l'évaluation des couches limites la pression est supposée connue .

L'investigation de l'écoulement potentiel peut se faire par une multitude de méthodes , on dénombre généralement trois catégories :

- a) Méthodes des transformations conformes , où le champs d'écoulement est transformé en un autre de géométrie plus simple avec une solution connue . La méthode de T.THEODORSEN [4] est la pièce maîtresse de ces techniques , malheureusement elle est limitée aux écoulements bidimensionnels . D.C.IVES [5] a pu étendre cette procédure aux corps multiples ( tel que profil d'aile avec volet ) .
- b) Méthodes des éléments finis et des différences finies . Ici le calcul est effectué sur la totalité du champ d'écoulement . La méthode des différences finies , comme nous avons pu le voir plus haut , n'a pu être appliquée aux corps de géométrie arbitraires qu'après avoir développé la génération de maillage .
- c) Méthodes des équations intégrales ou communément appelées méthodes des panneaux , utilisent de simples solutions de l'équation de Laplace ( tels que source, doublet , ... ) [6,7] . Ces écoulements élémentaires sont superposés afin d'obtenir une solution qui satisfait les conditions aux limites du problème qui nous intéresse . L'intensité de ces singularités est déterminée d'une telle façon à ce que le champs de vitesse induit satisfait la condition qui consiste à annuler la composante normale de vitesse sur la surface du corps aux niveaux de certains points . Cette démarche a été portée à un tel niveau de raffinement qu'actuellement elle est capable de traiter l'écoulement autour de corps multiples tridimensionnels de géométrie arbitraire . L'exemple de l'écoulement autour de la navette spatiale montée sur un Boeing 747 calculé entièrement par la méthode des panneaux [8] , nous donne une idée assez précise de la puissance de cette dernière .

Pour ce qui est du calcul des couches limites , on dénombre essentiellement deux méthodes :

- a) Résolution numérique des équations locales de la couche limite . Cette méthode a été et est encore abondamment développée . On notera que les deux techniques les plus répandues pour un tel calcul sont les différences finies et les volumes finis . Cette dernière a été particulièrement développée par S.V.PATANKAR et B.SPALDING [9] pour calculer des écoulements visqueux très généraux , débordant même du cadre de la couche limite . Son principe , comme son nom l'indique est d'intégrer les équations sur un volume de contrôle . Le caractère parabolique des équations de la couche limite nous permet en général d'aboutir , après discrétisation , à un système d'équations algébriques tridiagonales . Ainsi , ce système est aisément résolu par l'algorithme TDMA qui n'est pas un grand "consommateur" de temps de calcul et de place mémoire . Une multitude de code de calcul existe dans la littérature , on citera surtout celui de SPALDING , le GENMIX [10] ou il résout les problèmes d'écoulement de type couche limite bidimensionnelle avec un modèle de turbulence qui est en l'occurrence celui de la longueur de mélange . Par la suite , le GENMIX a

été repris par de nombreux chercheurs qui l'ont perfectionné , en lui rajoutant entre autre de nouveaux modèles de turbulence et la prise en compte du caractère tridimensionnel .

- b) Méthodes de calcul dites intégrales . Depuis leur introduction par Von Karman et Polhausen [11,12,13] , ces méthodes ont connu un très large développement et ont été appliquées aussi bien en écoulement laminaire que turbulent . Historiquement , la raison de leur succès est clairement liée à leur simplicité de mise en oeuvre . Le principe de ces méthodes est de travailler avec les équations globales de la couche limite . Ainsi , on est conduit à accepter de ne pas faire appel à l'équation de quantité de mouvement locale qui décrit l'évolution de la vitesse , mais seulement à sa forme intégrale ( équation de Von-Karman ) . Il est clair que l'objectif de ces méthodes est d'aboutir à de simples équations différentielles ordinaires , mais il faudra en contrepartie se satisfaire d'un certain degré d'approximation . Les méthodes intégrales sont un outil à part entière de la panoplie des méthodes de calcul en aérodynamique . Loin de concurrencer les techniques de résolution numérique des équations locales , elles en sont plutôt complémentaires .

On vient de passer en revue d'une façon très sommaire les deux approches de calcul des écoulements visqueux incompressibles . Dans les chapitres qui vont suivre , on présentera avec plus de détails la deuxième approche . Ainsi , notre travail se fera en deux parties et dans l'ordre suivant : calcul de l'écoulement potentiel et par la suite évaluation des couches limites .

## **Chapitre 2 :**

### **Formulation mathématique de l'écoulement potentiel**

## Chapitre 2

### Formulation mathématique de l'écoulement potentiel

#### 2-1-Introduction :

Un écoulement incompressible non visqueux est totalement décrit par l'équation de continuité et les équations d'Euler . Ces dernières sont assez simples par rapport aux équations de Navier-Stokes mais restent difficiles à résoudre .

Cependant , comme les effets de la viscosité sont confinés très près de la paroi , l'écoulement peut être considéré comme parfait ; c'est à dire dénué de tous les effets de la viscosité . Cette hypothèse a pour conséquence directe l'irrotationnalité de l'écoulement et ceci nous permet de simplifier énormément le problème .

#### 2-2-Equation régissant l'écoulement potentiel bidimensionnel de fluide incompressible :

La condition d'irrotationnalité est :

$$\nabla \times \mathbf{V} = 0 \quad (2-1)$$

Ceci implique l'existence d'un potentiel de vitesse  $\phi$

$$\mathbf{V} = \nabla \phi \quad (2-2)$$

La substitution de l'expression (2-2) dans l'équation de continuité nous donne ,

$$\nabla^2 \phi = \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2} = 0 \quad (2-3)$$

## Chapitre 2

### Formulation mathématique de l'écoulement potentiel

#### 2-1-Introduction :

Un écoulement incompressible non visqueux est totalement décrit par l'équation de continuité et les équations d'Euler . Ces dernières sont assez simples par rapport aux équations de Navier-Stokes mais restent difficiles à résoudre .

Cependant , comme les effets de la viscosité sont confinés très près de la paroi , l'écoulement peut être considéré comme parfait ; c'est à dire dénué de tous les effets de la viscosité . Cette hypothèse a pour conséquence directe l'irrotationnalité de l'écoulement et ceci nous permet de simplifier énormément le problème .

#### 2-2-Equation régissant l'écoulement potentiel bidimensionnel de fluide incompressible :

La condition d'irrotationnalité est :

$$\nabla \times \mathbf{V} = 0 \quad (2-1)$$

Ceci implique l'existence d'un potentiel de vitesse  $\phi$

$$\mathbf{V} = \nabla \phi \quad (2-2)$$

La substitution de l'expression (2-2) dans l'équation de continuité nous donne ,

$$\nabla^2 \phi = \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2} = 0 \quad (2-3)$$

Avec les conditions aux limites suivantes :

\* Vitesse normale à la paroi nulle :

$$\frac{\partial \phi}{\partial n} = \text{cte} \quad (2-4)$$

\* Vitesse au loin de notre profil égale à celle de l'écoulement uniforme :

$$\phi = x \cos \alpha + y \sin \alpha \quad (2-5)$$

### 2-3-Méthodes de résolution de l'équation de Laplace (2-3):

Ainsi, les équations régissant notre écoulement ont été réduites à une simple équation de Laplace (2-3), avec les conditions aux limites spécifiques (2-4) et (2-5). Malgré la simplicité et la bonne connaissance de l'équation de Laplace, le nombre de solutions analytiques est très limité. La difficulté réside essentiellement au niveau des conditions aux limites.

Le problème de l'écoulement potentiel défini par l'équation (2-3) peut être résolu analytiquement seulement pour une catégorie de frontière très limitée. La technique de séparation de variable est très bien adaptée dans ce cas. L'intérêt pratique de telles solutions n'est pas vraiment évident, sauf pour la validité d'autres techniques de résolution.

Pour le cas bidimensionnel seulement, le problème de l'écoulement potentiel régi par l'équation de Laplace peut être remplacé par un problème de recherche de transformations conformes qui conviennent à nos frontières.

L'équation (2-3) peut être aussi résolue par différences finies, volumes finis et éléments finis. Suivant ces méthodes numériques, ce n'est pas la solution de l'équation (2-3) qui est recherchée mais plutôt la solution d'un système approché représentant l'équation (2-3). Ces méthodes ont pour principe la recherche de solution non pas en tout point de l'espace entourant notre profil, mais en des points discrets définis par l'intersection de deux ensembles de lignes formant la grille de calcul. Discrétiser l'équation (2-3) et les conditions aux limites (2-4) et (2-5), revient à transformer les opérateurs différentiels en des expressions algébriques; ceci nous fera aboutir à un système d'équations linéaires. Ce système peut être résolu par différentes méthodes numériques, on citera surtout les méthodes itératives telle que la méthode de Gauss-Seidel.

D'autres méthodes existent et qui exploitent la possibilité de superposer de simples solutions de l'équation de Laplace. Ainsi, un nombre assez considérable de solutions bidimensionnelles peut être obtenu en supposant l'existence de singularités dans le fluide.

Les singularités les plus usuelles sont , les sources , les doublets et les vortex . Mais , la faiblesse de cette méthode réside dans le fait qu'elle ne commence pas avec des frontières bien déterminées mais accepte les frontières obtenues par la distribution des singularités . D'autres techniques existent , appelées communément méthodes des panneaux , utilisent aussi la combinaison de solutions simples mais dans le sens où les conditions aux limites sont satisfaites . Les méthodes des panneaux donnent de bons résultats aussi bien en bidimensionnel qu'en tridimensionnel , ce qui explique sa large utilisation dans l'industrie aéronautique et automobile .

#### 2-4-Conclusion :

On vient de passer en revue la majorité des méthodes de calcul de l'écoulement potentiel . Dans les chapitres qui vont suivre , et dans un souci de comparaison , pas moins de trois méthodes seront présentées , à savoir la méthode des transformations conformes , la méthode des panneaux et la méthode des différences finies .

Pour chacune de ces techniques , un programme de calcul sera développé , dont le résultat essentiel sera la vitesse tangentielle à la paroi du profil . A noter , que le calcul du coefficient de pression (  $C_p$  ) et du coefficient de portance (  $C_y$  ) découle directement de l'évaluation de cette vitesse .

## **Chapitre 3 :**

### **Calcul de l'écoulement potentiel par la méthode des transformations conformes**

## Chapitre 3

### Calcul de l'écoulement potentiel par la méthode des transformations conformes

#### 3-1-Introduction :

L'utilisation de potentiel complexe dans l'étude des écoulements non visqueux , nous permet d'analyser une multitude d'écoulements autour de formes géométriques assez simples . Pour des géométries plus complexes , on est amené à transformer le plan en un autre où les conditions aux limites sont plus simples ; c'est le but des transformations conformes .

L'intérêt pratique d'une telle méthode est qu'elle permet de transformer non seulement un corps solide de géométrie complexe en un autre corps de géométrie plus simple , mais également l'écoulement tout autour .

Dans ce qui va suivre , on présentera une méthode numérique permettant l'évaluation des performances aérodynamiques de corps profilés de section arbitraire . Cette étude aura pour base la théorie des transformations conformes développée par T.Theodorsen [4].

Cette théorie consiste en un premier temps à transformer le profil d'aile en un cercle irrégulier par la transformation de Joukowski , ensuite en un cercle exact par une série de transformations . Comme l'écoulement autour d'un cercle est connu dans ses moindres détails , on est en mesure de calculer la répartition des vitesses et des pressions autour du profil d'aile .

#### 3-2-Formulation mathématique :

##### 3-2-1-Transformation profil-cercle irrégulier :

La transformation de Joukowski s'écrit ,

$$Z = \zeta' + \frac{a^2}{\zeta'} \quad (3-1)$$

elle nous permet de transformer un cercle dans le plan  $\zeta'$  en profils d'aile dans le plan  $Z$ . Il faut noter que les profils obtenus ne sont pas utilisés en pratique .

Comme la majorité des profils d'ailes se ressemblent, ainsi la même transformation (3-1) appliquée à des profils plus pratiques (tels que la famille des NACA) aboutit à un cercle irrégulier.

Le problème réside dans le fait que l'écoulement autour du cercle irrégulier est inconnu. Theodorsen a pu le résoudre en transformant l'écoulement autour du pseudo-cercle en un écoulement autour d'un cercle régulier grâce à un processus qui converge assez rapidement.

On place notre profil à étudier dans le plan  $Z$  avec les points  $(-2a,0)$  et  $(2a,0)$  comme coordonnées respectives du bord d'attaque et du bord de fuite.

La transformation (3-1) relie le point,

$$Z = x + iy \quad (3-2)$$

au point,

$$\zeta = a e^{\Psi + i\theta} \quad (3-3)$$

On remplace les équations (3-2) et (3-3) dans l'expression (3-1), on obtient :

$$x = 2a \cos \theta \cosh \Psi$$

$$y = 2a \sin \theta \sinh \Psi \quad (3-4)$$

Comme les coordonnées du profil  $(x,y)$  sont connues, alors la géométrie du cercle irrégulier dans le plan  $\zeta$  peut être obtenue à partir des relations précédentes.

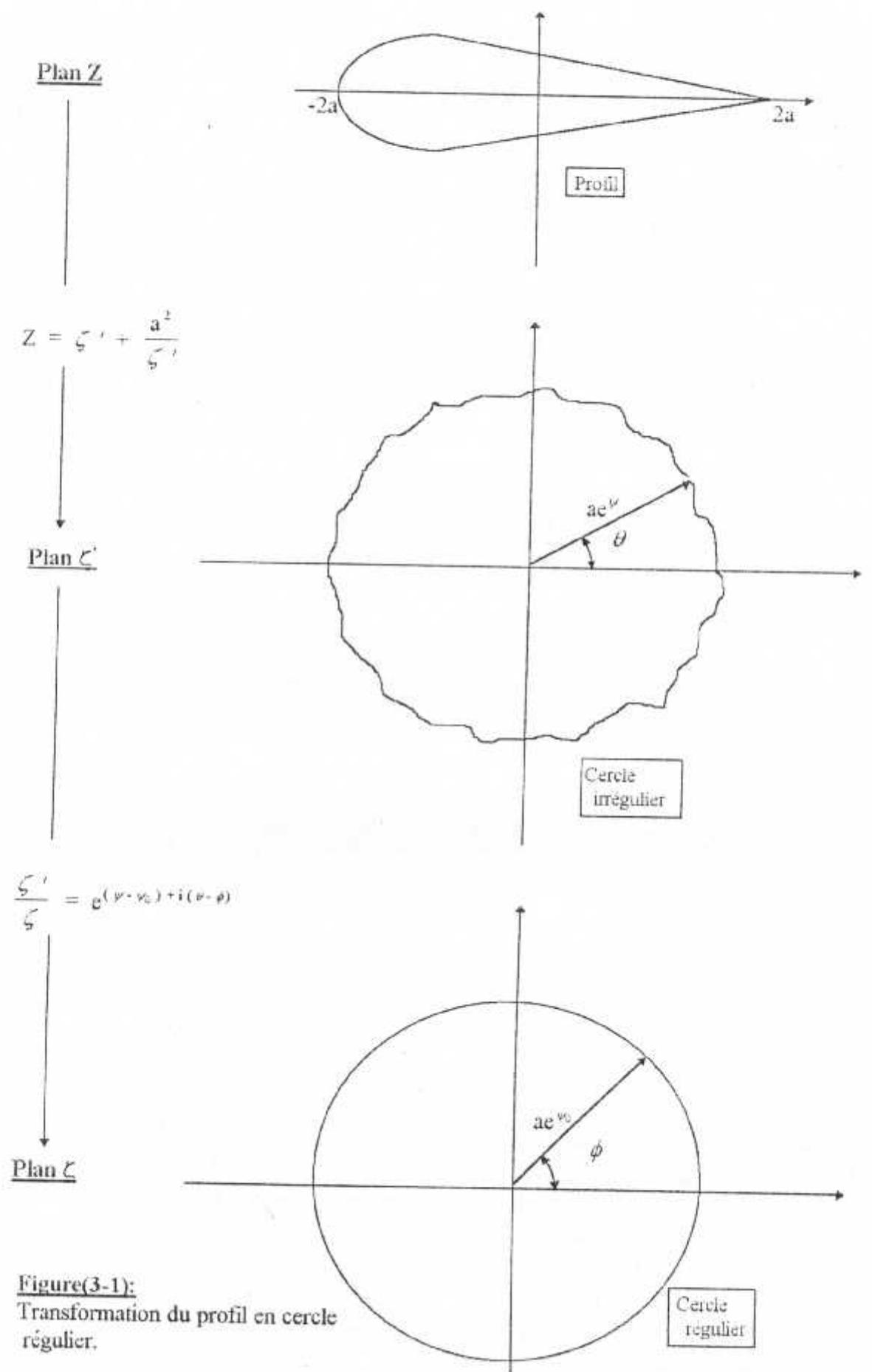
On a

$$\cosh^2 \Psi - \sinh^2 \Psi = 1 \quad (3-5)$$

à partir des relations (3-4), on tire

$$\cosh \Psi = \frac{x}{2a \cos \theta}$$

$$\sinh \Psi = \frac{y}{2a \sin \theta} \quad (3-6)$$



$$Z = \zeta' + \frac{a^2}{\zeta'}$$

$$\frac{\zeta'}{\zeta} = e^{(\nu - \nu_0) + i(\theta - \phi)}$$

**Figure(3-1):**  
Transformation du profil en cercle régulier.

On remplace les expressions (3-6) dans l'équation (3-5), on obtient :

$$\frac{x^2}{4a^2 \cos^2 \theta} - \frac{y^2}{4a^2 \sin^2 \theta} = 1 \quad (3-7)$$

Après arrangement, l'équation (3-7), devient :

$$\sin^4 \theta + \left( \frac{x^2}{4a^2} + \frac{y^2}{4a^2} - 1 \right) \sin^2 \theta - \frac{y^2}{4a^2} = 0 \quad (3-8)$$

La résolution de cette équation nous donne ,

$$\theta = \text{Arcsin} \left\{ \frac{1}{\sqrt{2}} \left[ \left( 1 - \frac{x^2}{4a^2} - \frac{y^2}{4a^2} \right) + \sqrt{\left( \frac{x^2}{4a^2} + \frac{y^2}{4a^2} - 1 \right)^2 + \frac{y^2}{a^2}} \right] \right\} \quad (3-9)$$

On a ,

$$\cosh \psi + \sinh \psi = e^\psi \quad (3-10)$$

On remplace les équations (3-4) dans la formule (3-10), on obtient :

$$\psi = \log \left( \frac{x}{2a \cos \theta} + \frac{y}{2a \sin \theta} \right) \quad (3-11)$$

Avec les expressions (3-9) et (3-11), le cercle irrégulier est totalement décrit .

### 3-2-1-1-Facteur reliant les vitesses entre le plan Z et le plan $\zeta'$ :

Le facteur reliant les vitesses entre le plan Z et le plan  $\zeta'$  est  $\frac{dZ}{d\zeta'}$  .

On dérive la transformation (3-1) par rapport à  $\zeta'$ , on obtient :

$$\frac{dZ}{d\zeta'} = 1 - \frac{a^2}{\zeta'^2} = \frac{1}{\zeta'} \left[ \zeta' - \frac{a^2}{\zeta'} \right] \quad (3-12)$$

On remplace l'équation (3-3) dans l'expression (3-12), et après simplification, on a :

$$\frac{dZ}{d\zeta'} = \frac{1}{\zeta'} [2a \cos\theta \sinh\psi + i 2a \sin\theta \cosh\psi] \quad (3-13)$$

### 3-2-2-Transformation cercle irrégulier-cercle régulier :

La deuxième étape est de trouver les relations entre l'écoulement du plan  $\zeta'$  et celui du plan  $\zeta$ . Les coordonnées du plan  $\zeta$  sont définies par,

$$\zeta = a e^{\lambda + i\phi} \quad (3-14)$$

Le cercle irrégulier dans le plan  $\zeta'$  est transformé en un cercle exact dans le plan  $\zeta$  par la transformation suivante :

$$\zeta' = \zeta \text{Exp} \left[ \sum_{n=1}^m (A_n + iB_n) \frac{1}{\zeta^n} \right] \quad (3-15)$$

A partir des équations (3-3) et (3-14), on obtient :

$$\frac{\zeta'}{\zeta} = e^{(\psi-\lambda) + i(\theta-\phi)} \quad (3-16)$$

On remplace la transformation (3-15) dans l'équation (3-16), on a :

$$(\psi - \lambda) + i(\theta - \phi) = \sum_{n=1}^m (A_n + iB_n) \frac{1}{\zeta^n} \quad (3-17)$$

On remplace  $\zeta$  dans l'expression (3-17), par sa forme polaire c'est à dire ,

$$\zeta = R (\cos\phi + i \sin\phi) \quad (3-18)$$

avec

$$R = a e^{\lambda} \quad (3-19)$$

D'où l'équation (3-17) qui devient :

$$\begin{aligned} (\psi - \lambda) + i(\theta - \phi) &= \sum_{n=1}^{\infty} \left( \frac{A_n}{R^n} \cos(n\phi) + \frac{B_n}{R^n} \sin(n\phi) \right) \\ &+ i \sum_{n=1}^{\infty} \left( -\frac{A_n}{R^n} \sin(n\phi) + \frac{B_n}{R^n} \cos(n\phi) \right) \end{aligned} \quad (3-20)$$

On égalise les parties imaginaires et les parties réelles de l'équation (3-20), on obtient les deux séries de Fourier suivantes :

$$\psi - \lambda = \sum_{n=1}^{\infty} \left( \frac{A_n}{R^n} \cos(n\phi) + \frac{B_n}{R^n} \sin(n\phi) \right) \quad (3-21)$$

$$\theta - \phi = \sum_{n=1}^{\infty} \left( \frac{B_n}{R^n} \cos(n\phi) - \frac{A_n}{R^n} \sin(n\phi) \right) \quad (3-22)$$

Afin que l'écart entre cercle irrégulier et cercle régulier soit minimum, la valeur de  $\lambda$  correspondant au cercle non déformé est prise égale à :

$$\lambda = \psi_0 = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \psi \, d\phi \quad (3-23)$$

D'où la transformation (3-18) qui devient :

$$\frac{\zeta'}{\zeta} = e^{(\psi - \nu c) + i(\theta - \phi)} \quad (3-24)$$

Si  $\psi$  est supposé fonction seulement de  $\phi$ , alors  $(\theta - \phi)$  peut être calculé à partir de la procédure développée par Naiman :

La fonction  $\Psi$  est approximée par une série trigonométrique finie de la forme :

$$\begin{aligned} \Psi(\phi) = \Psi_0 + [a_n \cos(n\phi) + b_n \sin(n\phi)] \\ + \sum_{m=1}^{n-1} [a_m \cos(m\phi) + b_m \sin(m\phi)] \end{aligned} \quad (3-25)$$

Si  $\Psi$  est spécifié au niveaux des points équidistants  $\left(0, \frac{\pi}{n}, \frac{2\pi}{n}, \dots, \frac{(2n-1)}{n}\pi\right)$  dans l'intervalle  $[0, 2\pi]$ , alors l'équation (3-23) peut s'écrire ,

$$\Psi_0 = \frac{1}{2\pi} \sum_{r=0}^{2n-1} \Psi_r \quad (3-26)$$

Où  $\Psi_r$  sont les valeurs de  $\Psi$  à ,

$$\phi_r = \frac{r\pi}{n} \quad (3-27)$$

avec  $r = 0, 1, 2, \dots, 2n-1$

D'après la définition des séries de Fourier, on tire directement ,

$$a_m = \frac{1}{n} \sum_{r=0}^{2n-1} \psi_r \cos\left(m \frac{r\pi}{n}\right) \quad m = 1, 2, \dots, n-1 \quad (3-28)$$

$$b_m = \frac{1}{n} \sum_{r=0}^{2n-1} \psi_r \sin\left(m \frac{r\pi}{n}\right) \quad m = 1, 2, \dots, n-1 \quad (3-29)$$

$$a_n = \frac{1}{n} \sum_{r=0}^{2n-1} \psi_r (-1)^r \quad (3-30)$$

$$b_n = 0 \quad (3-31)$$

Comme (3-21) et (3-22) sont deux fonctions conjuguées alors l'équation (3-23) peut s'écrire ,

$$\phi - \theta = \varepsilon(\phi) = \sum_{m=1}^{n-1} [a_m \sin(m\phi) - b_m \cos(m\phi)] + a_n \sin(n\phi) \quad (3-32)$$

On remplace les équations (3-28) , (3-29) , (3-30) et (3-31) dans la relation (3-32) , après simplification et arrangement , on a :

$$\varepsilon(\phi) = \frac{1}{n} \sum_{r=0}^{2n-1} \psi_r \sum_{m=1}^{n-1} \sin\left(m\phi - m \frac{r\pi}{n}\right) + \frac{1}{2n} \sin(n\phi) \sum_{r=0}^{2n-1} \psi_r (-1)^r \quad (3-33)$$

Si  $\varepsilon$  est évalué aux mêmes points ou  $\Psi$  est donné , c'est à dire aux points ,

$$\phi_s = \frac{s\pi}{n} \quad (3-34)$$

le dernier terme de l'équation (3-33) s'annule et la variable  $\left(\phi - \frac{r\pi}{n}\right)$  devient :

$$\phi - \frac{r\pi}{n} = \phi_s - \frac{r\pi}{n} = \frac{s\pi}{n} - \frac{r\pi}{n} = (s-r) \frac{\pi}{n} = -k \frac{\pi}{n} \quad (3-35)$$

avec

$$k = r-s \quad (3-36)$$

Enfin, l'équation (3-33) s'écrit :

$$\varepsilon(\phi) = -\frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} \psi_k \sum_{m=1}^{n-1} \sin\left(m \frac{k\pi}{n}\right) \quad (3-37)$$

Une expression plus simple de (3-37) peut être obtenue, on a :

$$\sum_{m=1}^{n-1} \sin\left(m \frac{k\pi}{n}\right) = \begin{cases} \cotg \frac{k\pi}{2n} & \text{si } k \text{ est impair} \\ 0 & \text{si } k \text{ est pair} \end{cases} \quad (3-38)$$

d'où,

$$\varepsilon(\phi) = -\frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} \psi_k \cotg \frac{k\pi}{2n} \quad (3-39)$$

avec  $k$  impair

### 3-2-2-1-Facteur reliant les vitesses entre le plan $\zeta'$ et le plan $\zeta$ :

Le facteur reliant les vitesses entre le plan  $\zeta'$  et le plan  $\zeta$  est  $\frac{d\zeta'}{d\zeta}$ .

A partir de la transformation (3-24), on a :

$$\frac{1}{\zeta'} \frac{d\zeta'}{d\zeta} = \frac{d}{d\zeta}(\log \zeta) + \frac{d}{d\zeta}(\psi + i\theta) - \frac{d}{d\zeta}(i\phi) \quad (3-40)$$

A partir de la relation (3-14), on a :

$$\frac{d}{d\zeta}(\log \zeta) = \frac{d}{d\zeta}(i\phi) \quad (3-41)$$

Cette relation nous permet de simplifier l'expression (3-40),

$$\frac{1}{\zeta'} \frac{d\zeta'}{d\zeta} = \frac{d}{d\zeta}(\psi + i\theta) \quad (3-42)$$

A partir de la relation (3-41), on a :

$$\frac{1}{\zeta} = i \frac{d\theta}{d\zeta} \left( 1 + \frac{d\varepsilon}{d\theta} \right) \quad (3-43)$$

Enfin, on remplace l'équation (3-43) dans l'expression (3-42) et on obtient le  $\frac{d\zeta'}{d\zeta}$  recherché,

$$\frac{d\zeta'}{d\zeta} = \frac{\zeta'}{\zeta} \frac{1 - i \left( \frac{d\psi}{d\theta} \right)}{1 + \left( \frac{d\varepsilon}{d\theta} \right)} \quad (3-44)$$

### 3-2-3-Calcul de la vitesse au niveau de la surface du cercle régulier :

Dans le plan  $\zeta$ , l'écoulement autour du cercle de rayon ( $a e^{\psi_0}$ ) est décrit par le potentiel complexe suivant :

$$W(\zeta) = U_{\infty} \left[ \zeta e^{-i\alpha} + \frac{a^2 e^{2i\psi_0}}{\zeta e^{-i\alpha}} \right] + i \frac{\Gamma}{2\pi} \log \left( \frac{\zeta}{a e^{i\psi_0}} \right) \quad (3-45)$$

La vitesse sur le cercle régulier est donnée par :

$$\frac{dW}{d\zeta} = U_{\infty} \left[ e^{-i\alpha} - \frac{a^2 e^{2i\psi_0}}{\zeta^2 e^{-i\alpha}} \right] + i \frac{\Gamma}{2\pi \zeta} \quad (3-46)$$

Les points d'arrêt sont calculés à partir de l'équation suivante :

$$\frac{dW}{d\zeta} = 0 \quad (3-47)$$

A partir de cette équation , on tire la circulation ,

$$\Gamma = 2\pi U_{\infty} i \left( \frac{a^2 e^{2i\psi_0}}{\zeta e^{-i\alpha}} - \zeta e^{-i\alpha} \right) \quad (3-48)$$

La condition de Kutta-Joukowski exige un point d'arrêt au bord de fuite , c'est à dire à  $\zeta = a e^{i\psi_0 + i\psi_{BF}}$  , d'où la circulation (3-48) qui devient :

$$\Gamma = 4\pi U_{\infty} a e^{i\psi_0} \sin(\alpha - \psi_{BF}) \quad (3-49)$$

On remplace cette circulation et  $\zeta = a e^{i\psi_0 + i\psi}$  dans l'équation (3-46) , après arrangement et simplification , on obtient :

$$\left| \frac{dW}{d\zeta} \right| = 2 U_{\infty} [\sin(\alpha - \psi_{BF}) - \sin(\alpha - \psi)] \quad (3-50)$$

### 3-2-4-Calcul de la vitesse au niveau de la surface du profil :

La vitesse sur la surface du profil est donnée par :

$$|V| = \left| \frac{dW}{dZ} \right| = \left| \frac{dW}{d\zeta} \right| \left| \frac{d\zeta}{d\zeta'} \right| \left| \frac{d\zeta'}{dZ} \right| \quad (3-51)$$

On multiplie l'équation (3-13) par (3-44) , après simplification et passage à la valeur absolue , on obtient :

$$\left| \frac{dZ}{d\zeta} \right| = \frac{2}{e^{\psi_0}} \frac{\sqrt{1 + \left( \frac{d\psi}{d\theta} \right)^2}}{\left[ 1 + i \frac{d\zeta}{d\theta} \right]} \sqrt{\sinh^2 \psi + \sin^2 \theta} \quad (3-52)$$

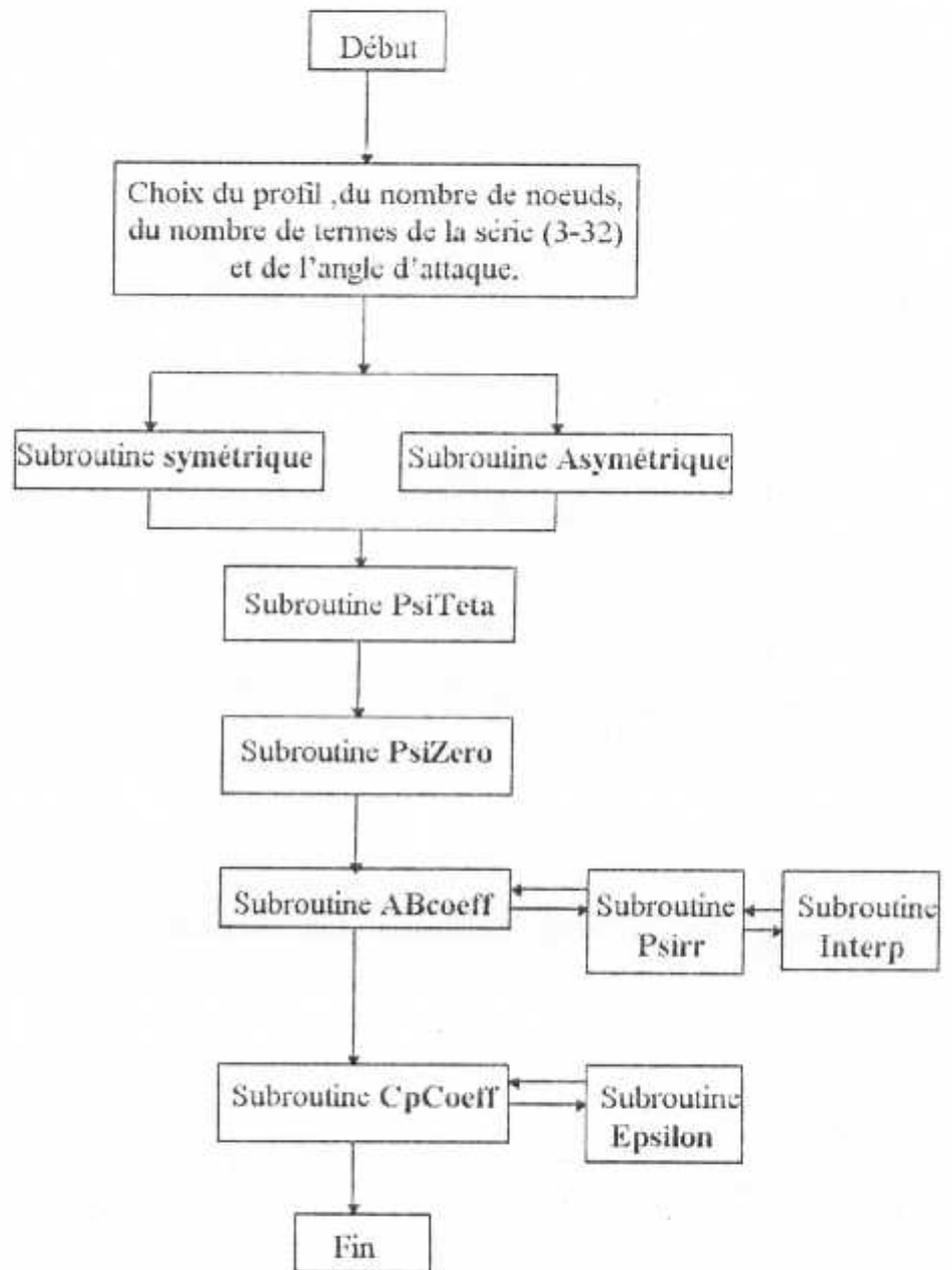
On divise l'équation (3-50) par (3-52) et on obtient la vitesse locale en un point quelconque de la section de l'aile égale à :

$$\frac{|V|}{U_\infty} = \frac{\left[ 1 + \frac{d\zeta}{d\theta} \right] \left[ \sin(\alpha - \epsilon_{NY}) - \sin(\alpha - \phi) \right] e^{\psi_0}}{\sqrt{\left[ 1 + \left( \frac{d\psi}{d\theta} \right)^2 \right] (\sinh^2 \psi + \sin^2 \theta)}} \quad (3-53)$$

### 3-3-Organigramme schématique :

la présente méthode a été mise sous la forme d'un programme de calcul . Comme on peut le voir sur l'organigramme (figure 3-2) , les étapes de calcul pour l'obtention du coefficient de pression pour une section du profil donné sont les suivantes :

Figure(3-2): Organigramme schématique du programme de calcul.



1) - On choisit d'abord le profil , le nombre de noeuds tout autour , le nombre de termes de la série (3-32) et l'angle d'attaque . La subroutine SYMETRIQUE nous permet de choisir entre neuf profils symétriques du type NACA (du NACA 0006 au NACA 0024) . Pour ce qui est des profils asymétriques , la subroutine ASYMETRIQUE nous permet de choisir entre le NACA 23012 et le NACA 4412 . Les géométries de ces différents profils ont été mises sous la forme de polynômes d'interpolation . Ceci facilite énormément la tâche surtout lors du choix du nombre de noeuds . Pour les profils symétriques leur polynôme a été tiré de la référence [4] ; en ce qui concerne les autres profils , il a fallu les construire par une méthode numérique qui est en l'occurrence celle des moindres carrés .

Il est à noter que ce programme de calcul est valable pour n'importe quelle géométrie . Le choix de la famille des NACA n'est lié qu'à l'abondance des résultats expérimentaux relatifs à ces profils , ce qui nous permet de valider nos résultats sans trop de difficultés .

2)- On calcule les caractéristiques du cercle irrégulier grâce à la subroutine PsiTeta ,

\* Calcul de  $\theta$  à partir de l'équation (3-9).

\* Calcul de  $\psi$  à partir de l'équation (3-11).

3)- Calcul de  $\psi_0$  par l'intermédiaire de la subroutine PsiZero.

\*  $\psi_0$  est calculé à partir de l'équation (3-23) où  $\phi$  est remplacé par  $\theta$ .

4) - Appel de la subroutine Abcoeff , afin de calculer les coefficients a et b de la série (3-32) . Les deux subroutines Psirr et Interp sont indispensables pour évaluer a et b , puisque elles évaluent les différents  $\psi_r$  .

5) - Enfin , on calcule le coefficient de pression par l'intermédiaire de la subroutine CpCoeff . Cette dernière fera appel à son tour à la subroutine Epsilon pour évaluer

$$\varepsilon , \frac{d\varepsilon}{d\theta} \text{ et } \frac{d\psi}{d\theta} .$$

\*  $\varepsilon$  est calculé à partir de la série (3-32) .

\*  $\frac{d\varepsilon}{d\theta}$  est calculé analytiquement à partir de l'équation (3-32) .

\*  $\frac{d\psi}{d\theta}$  est calculé analytiquement à partir de l'équation (3-25) .

Puisque  $\Psi$  est normalement connu en fonction de  $\theta$  , alors en première approximation , on prend  $\phi = \theta$  et on calcule  $\varepsilon , \frac{d\varepsilon}{d\theta}$  et  $\frac{d\psi}{d\theta}$  ; on répétera cette procédure jusqu'à obtention de la précision voulue ( une dizaine de fois est largement suffisant ) .

La référence [4] préconise de se raccorder à chaque itération à l'étape 3 pour réévaluer  $\psi_0$  . Il s'est avéré que ceci " alourdit " le programme sans qu'il y'ait un changement significatif dans la précision des résultats .

### 3-4-Résultats:

Plusieurs tests sur l'influence du nombre de noeuds ont été faits , on notera qu'à partir d'une soixantaine de noeuds , les résultats s'améliorent énormément . Ainsi , le nombre 75 a été retenu et tous les résultats qui vont suivre seront obtenus avec ce même nombre de noeuds .

Le programme de calcul est appliqué à deux types de profil . L'un symétrique , le NACA 0012 et l'autre asymétrique , le NACA 4412 .

La figure (3-3) montre l'évolution du coefficient de pression autour du NACA 0012 à angle d'incidence nulle . On constate que les résultats obtenus sont en parfait accord avec les résultats expérimentaux de la référence [4] .

Toujours avec le même profil , on a porté l'évolution du  $C_p$  sur les figures (3-4) , (3-5) et (3-6) pour les angles d'attaque suivant :  $2^\circ$  ,  $5^\circ$  et  $8^\circ$  . On notera la bonne concordance avec les résultats numériques de la référence [14] . Ces derniers ont été obtenus à partir de la résolution numérique de l'équation de Laplace ( méthode des différences finies ) .

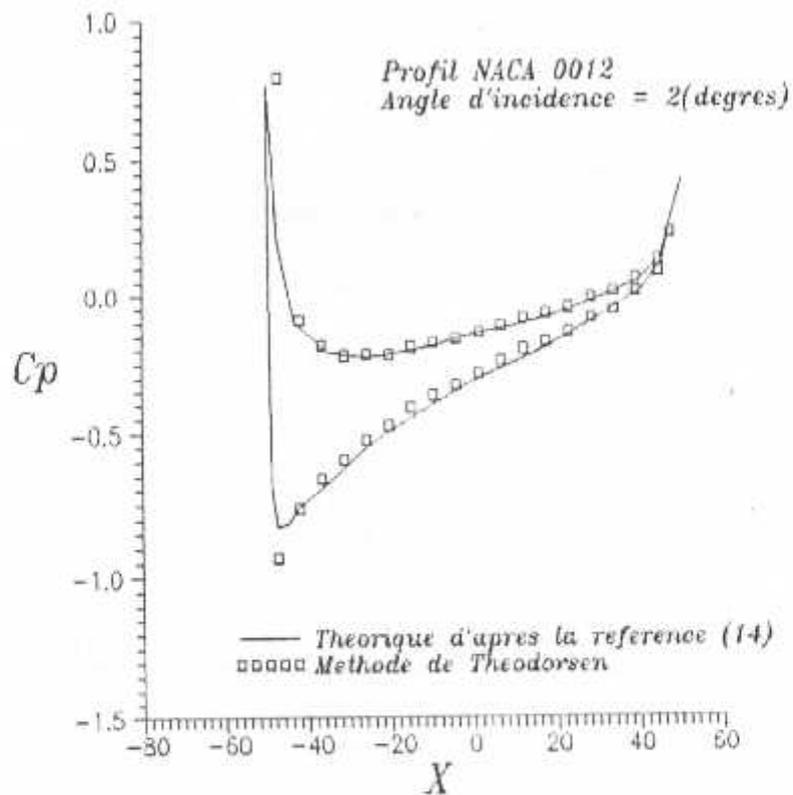
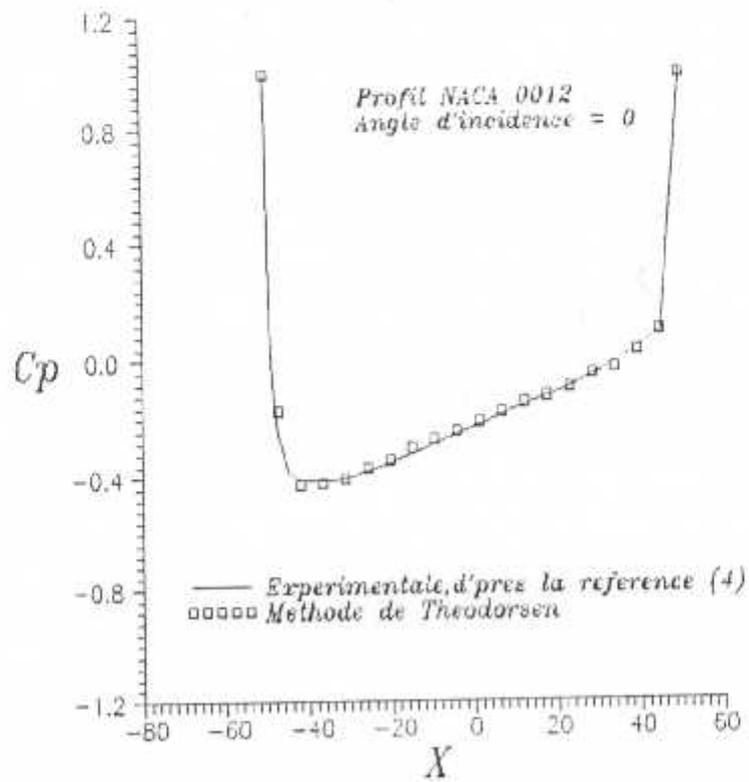
Pour ce qui est du profil NACA 4412 , les figures (3-7) , (3-8) , (3-9) et (3-10) nous donnent la répartition de pression pour respectivement les angles d'attaque suivant  $2^\circ$  ,  $5^\circ$  ,  $8^\circ$  et  $16^\circ$  , ces résultats ont été comparés avec ceux de la référence [14] , on remarque une nette concordance .

### 3-5-Conclusion :

Nous venons de présenter des résultats obtenus par un programme de calcul dont la conception est basée sur la méthode des transformations conformes .

Ce qu'on notera avec force , se sont les bons résultats générés avec la grande facilité de mise en oeuvre de la méthode . En effet , l'essentiel des calculs se résument , comme on a pu le voir , en l'évaluation d'une simple série , ce qui a pour conséquence directe la très faible consommation de place mémoire et de temps de calcul .

**Figure (3-3):** Evolution du  $C_p$  autour du profil NACA 0012 à angle d'incidence nul



**Figure (3-4):** Evolution du  $C_p$  autour du NACA 0012 à  $\alpha = 2^\circ$

Figure (3-5): Evolution du  $C_p$  autour du NACA 0012 à  $\alpha = 5^\circ$

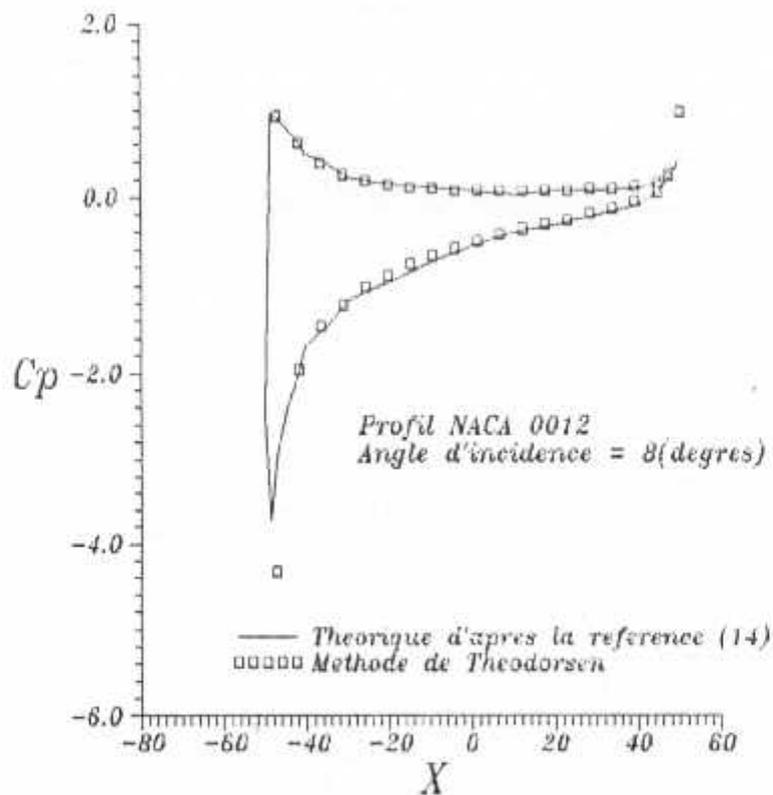
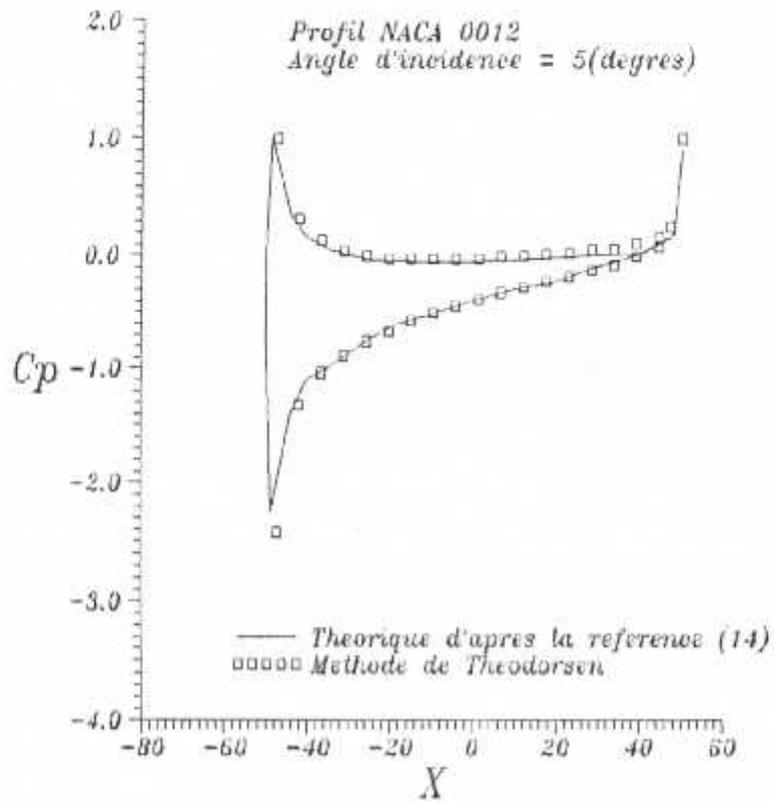


Figure (3-6): Evolution du  $C_p$  autour du NACA 0012 à  $\alpha = 8^\circ$

Figure (3-7): Evolution du  $C_p$  autour du NACA 4412 à  $\alpha = 2^\circ$

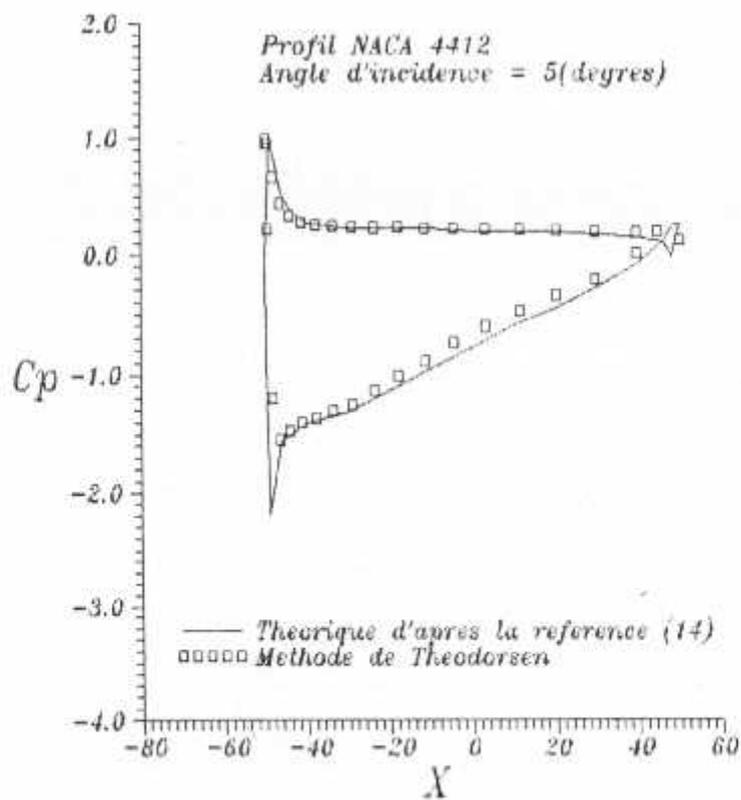
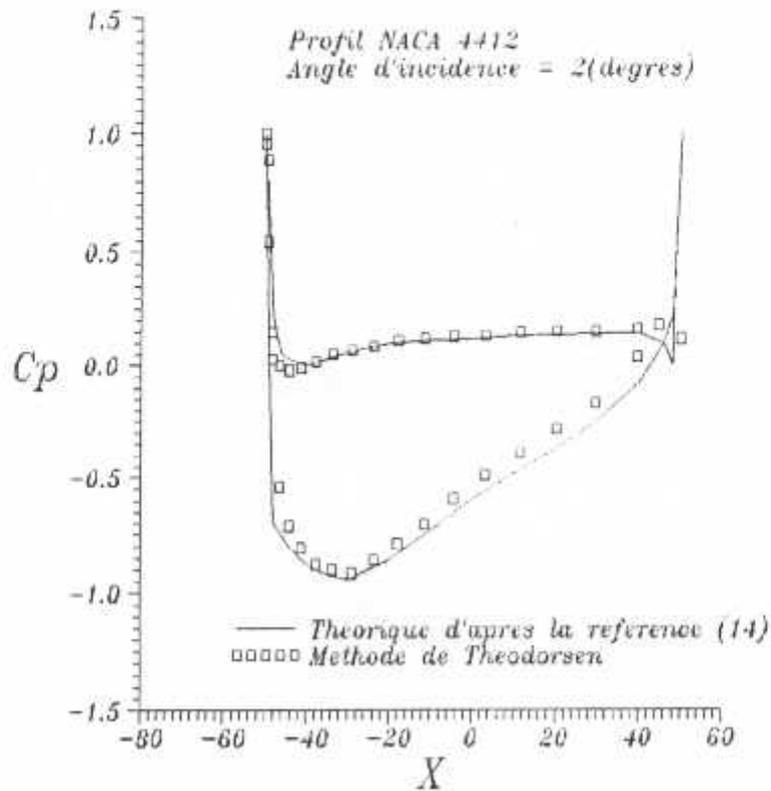


Figure (3-8): Evolution du  $C_p$  autour du NACA 4412 à  $\alpha = 5^\circ$

Figure (3-9): Evolution du  $C_p$  autour du NACA 4412 à  $\alpha = 8^\circ$

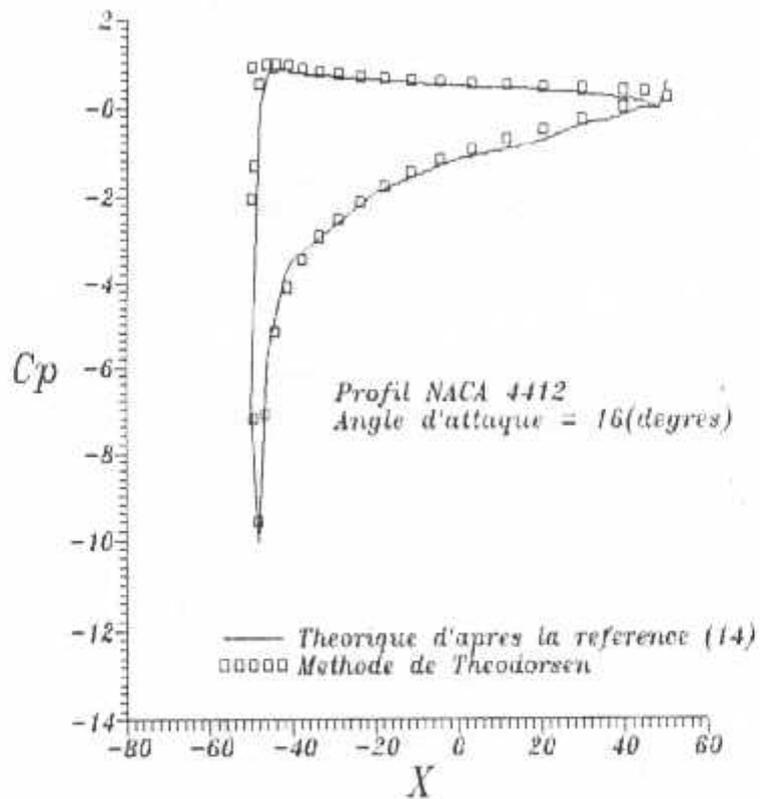
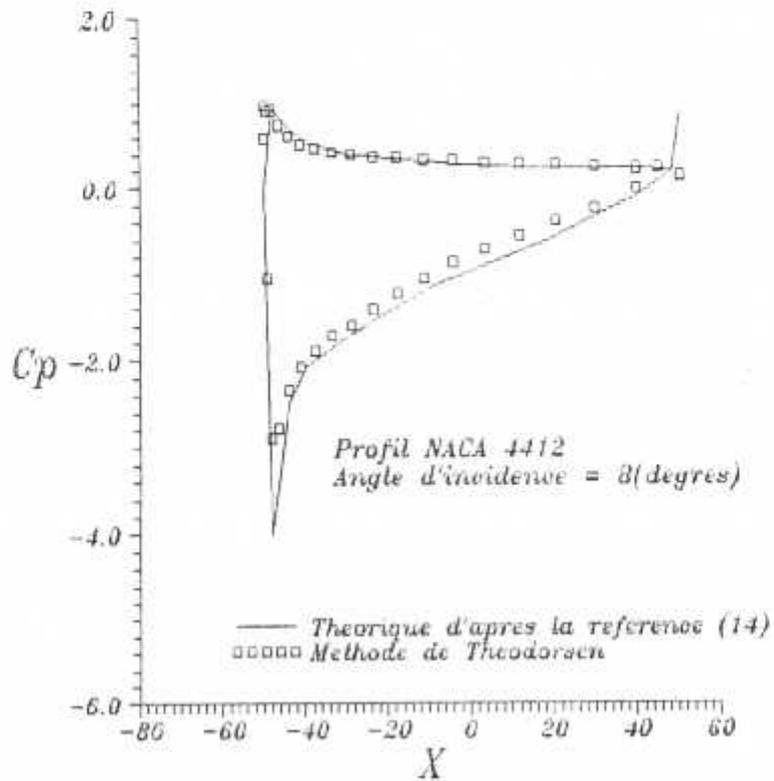


Figure (3-10): Evolution du  $C_p$  autour du NACA 4412 à  $\alpha = 16^\circ$

## **Chapitre 4 :**

### **Calcul de l'écoulement potentiel par la méthode des panneaux**

## Chapitre 4

### Calcul de l'écoulement potentiel par la méthode des panneaux

#### 4-1-Introduction :

La superposition d'un écoulement uniforme et d'une source aboutit à un corps bidimensionnel de forme circulaire face à l'écoulement et ouvert à l'aval . Si un puits est rajouté à la source sur le côté ouvert , on obtient un corps ovale . Plus la distance entre source et puits diminue , et plus la forme du corps tend vers le cercle . Ainsi , avec un écoulement uniforme et une paire de puits-source , des corps fermés de géométrie variée peuvent être générés .

Le problème avec une telle approche est que le corps obtenu n'est pas connu au départ . Bien sûr , on peut toujours tâtonner jusqu'à obtenir l'écoulement autour de l'objet qu'on veut étudier , mais une telle démarche est impensable , vu son caractère aléatoire .

Dans ce chapitre on présentera la méthode des panneaux qui utilise la superposition de solutions simples mais dans le sens où la géométrie du corps à étudier est une donnée et non pas un résultat .

La méthode des panneaux tire son nom de la subdivision de la surface du corps à étudier en un nombre fini de segments . Au milieu de ces segments , des singularités sont placées .

Pour un profil non portant , une distribution de source le long de la surface donne de très bons résultats . Pour un profil portant , il suffira de rajouter des doublets .

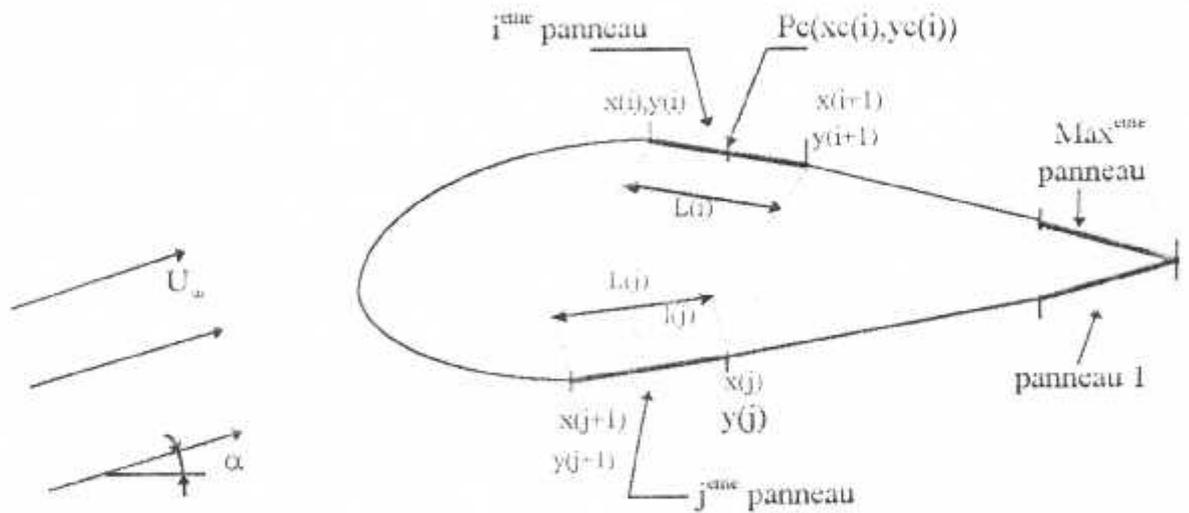
Une autre approche consiste à distribuer des vortex le long de la paroi du profil à étudier . Cette méthode fera l'objet d'une description plus approfondie dans les paragraphes qui vont suivre .

#### 4-2-Formulation mathématique de la méthode des panneaux avec distribution de vortex :

L'essentiel de la méthode consiste à rechercher la circulation , afin que la surface du profil soit une ligne de courant (vitesse normale à la paroi nulle) et que la condition de Kutta-Joukowski soit satisfaite .

##### 4-2-1-Paramètres géométriques :

L'évaluation du potentiel vitesse se fera au niveau de points appelés points de contrôle . Ces derniers sont placés à mi-distance de deux coordonnées de profil consécutifs .



**Figure 4-1:** approximation d'un profil par Max panneaux.

Les coordonnées de notre profil sont :

$$(x(j), y(j)) \quad (4-1)$$

Les coordonnées des points de contrôle sont :

$$(x_c(i), y_c(i)) = \left( \frac{x(i) + x(i+1)}{2}, \frac{y(i) + y(i+1)}{2} \right) \quad (4-2)$$

La longueur du  $j^{\text{eme}}$  panneau est :

$$L(j) = \sqrt{(x(j+1) - x(j))^2 + (y(j+1) - y(j))^2} \quad (4-3)$$

#### 4-2-2-Calcul du potentiel vitesse au point de contrôle Pc(i) :

Le potentiel vitesse au point de contrôle est la somme de deux écoulements différents , l'un dû à l'écoulement uniforme , l'autre à l'écoulement vortex des Max panneaux .

#### 4-2-2-1-Potentiel vitesse de l'écoulement uniforme au point de contrôle Pc(i) :

Le potentiel vitesse de l'écoulement uniforme faisant un angle  $\alpha$  avec l'horizontale , s'écrit :

$$\phi_1 = U_\infty (x_c(i) \cos\alpha + y_c(i) \sin\alpha) \quad (4-4)$$

#### 4-2-2-2-Potentiel vitesse de l'écoulement vortex au point de contrôle Pc(i) :

L'écoulement vortex au point de contrôle Pc(i) dû au seul panneau j , s'écrit :

$$\Delta\phi_2 = - \frac{1}{2\pi} \int_0^{l(j)} \gamma(l(j)) \operatorname{Arctg} \left( \frac{y_c(i) - y_c(j)}{x_c(i) - x_c(j)} \right) dl(j) \quad (4-5)$$

d'où le potentiel vitesse induit par les Max panneaux au point de contrôle Pc(i) ,

$$\phi_2 = - \frac{1}{2\pi} \sum_{j=1}^{\text{Max}} \int_0^{L(j)} \gamma(l(j)) \operatorname{Arctg} \left( \frac{y_c(i) - y_c(j)}{x_c(i) - x_c(j)} \right) dl(j) \quad (4-6)$$

#### 4-2-2-3-Potentiel vitesse globale au point de contrôle Pc(i) :

Le potentiel vitesse globale , dû à l'écoulement uniforme et aux Max vortex , au point de contrôle Pc(i) , s'écrit :

$$\phi = \phi_1 + \phi_2 \quad (4-7)$$

On remplace les équations (4-4) et (4-6) dans la formule (4-7) ,on obtient :

$$\phi = U_\infty (x_c(i) \cos\alpha + y_c(i) \sin\alpha) - \frac{1}{2\pi} \sum_{j=1}^{\text{Max}} \int_0^{L(j)} \gamma(l(j)) \operatorname{Arctg} \left( \frac{y_c(i) - y_c(j)}{x_c(i) - x_c(j)} \right) dl(j) \quad (4-8)$$

Remarque :

La distribution de la densité de circulation le long du  $j^{\text{ème}}$  panneau est supposée linéaire de la forme ,

$$\gamma(l(j)) = \frac{(\gamma(j+1) - \gamma(j))}{L(j)} l(j) + \gamma(j) \quad (4-9)$$

Le calcul numérique est directement lié à la détermination des densités de circulation  $\gamma(j)$  .  
Connaissant ces dernières , on peut calculer la distribution de pression et ainsi la portance.

4-2-3-Calcul des densités de circulation  $\gamma(j)$  :

La détermination des densités de circulation se fera grâce à la condition au limite pariétale . Au niveau de la paroi de notre profil , il n'y a pas d'écoulement dans la direction normale . Ceci se traduit par ,

$$\frac{\partial}{\partial n_i} [\phi(xc(i), yc(i))] = 0 \quad (4-10)$$

$i = 1, 2, \dots, \text{Max}$

Pour simplifier les calculs , on pose  $\Gamma(l(j)) = \frac{\gamma(l(j))}{2\pi U_\infty}$

On remplace le potentiel vitesse global (4-8) dans l'équation (4-10) , on obtient :

$$\frac{\partial}{\partial n_i} (xc(i) \cos\alpha + yc(i) \sin\alpha) - \sum_{j=1}^{\text{Max}} \int_0^{L(j)} \Gamma(l(j)) \frac{\partial}{\partial n_i} \left[ \text{Arctg} \left( \frac{yc(i) - yc(j)}{xc(i) - xc(j)} \right) \right] dl(j) = 0 \quad (4-11)$$

où l'intégration se fait sur toute la longueur du  $j^{\text{ème}}$  panneau et la sommation sur tous les panneaux . on notera que  $\Gamma(i)$  ne génère pas de composante normale de vitesse au niveau du  $i^{\text{ème}}$  panneau .

Calcul du 1<sup>er</sup> terme de l'équation (4-11) :

Le premier terme de l'équation (4-11) s'écrit ,

$$\frac{\partial}{\partial n_i} (xc(i) \cos\alpha + yc(i) \sin\alpha) = \frac{dxc(i)}{dn_i} \cos\alpha + \frac{dyc(i)}{dn_i} \sin\alpha \quad (4-12)$$

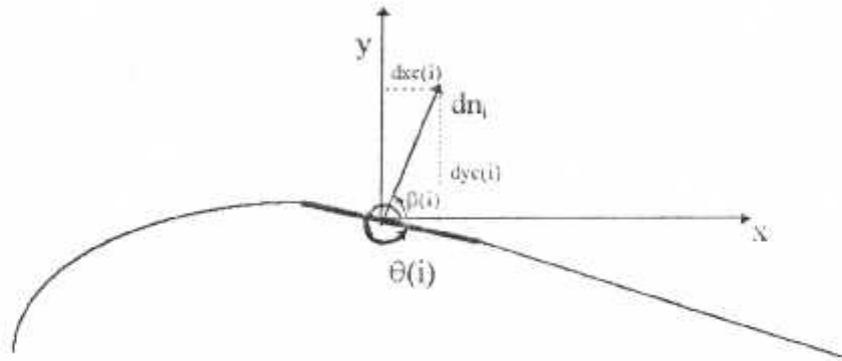


Figure (4-2) : Vecteur normal au  $i^{\text{ème}}$  panneau

D'après la figure ci-dessus , on a :

$$\frac{dxc(i)}{dn_i} = \cos \beta(i) \quad \text{et} \quad \frac{dyc(i)}{dn_i} = \sin \beta(i)$$

et comme  $\theta(i) = \beta(i) + 3\pi/2$

d'où ,

$$\frac{dxc(i)}{dn_i} = -\sin \theta (i) \quad \text{et} \quad \frac{dyc(i)}{dn_i} = \cos \theta (i) \quad (4-13)$$

D'après la figure ci-contre , on a :

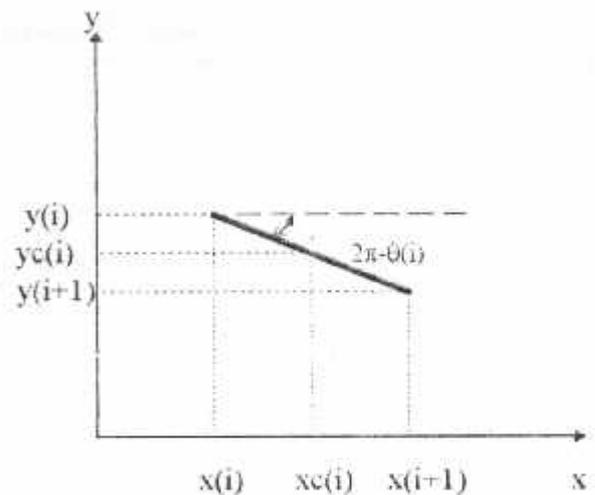
$$\text{tg}(2\pi - \theta) = \frac{y(i) - yc(i)}{xc(i) - x(i)}$$

d'où

$$\text{tg}(\theta) = \frac{yc(i) - y(i)}{xc(i) - x(i)}$$

enfin ,

$$\theta = \text{Arctg} \frac{yc(i) - y(i)}{xc(i) - x(i)} \quad (4-14)$$



Figure(4-3) :  $i^{\text{ème}}$  panneau

On remplace les dérivées (4-13) dans l'équation (4-12), on obtient :

$$\frac{\partial}{\partial n_i} (x_c(i) \cos \alpha + y_c(i) \sin \alpha) = -\sin(\theta(i) - \alpha) \quad (4-15)$$

Calcul du 2<sup>ème</sup> terme de l'équation (4-11) :

Le deuxième terme de l'équation (4-11) s'écrit ,

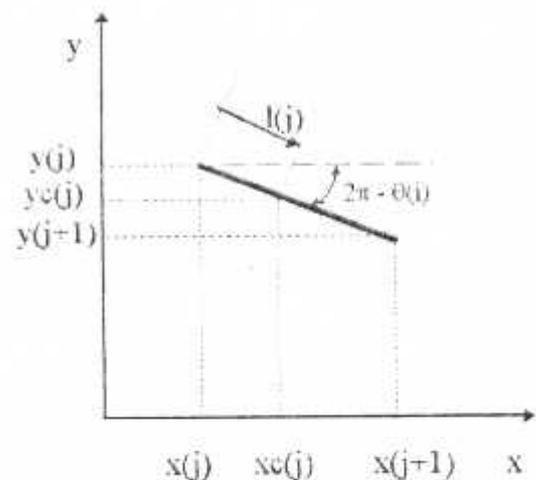
$$\sum_{j=1}^{Nuc} \int_0^{L(j)} \Gamma(l(j)) \frac{\partial}{\partial n_i} \left[ \text{Arctg} \left( \frac{y_c(i) - y_c(j)}{x_c(i) - x_c(j)} \right) \right] dl(j) \quad (4-16)$$

Calculons d'abord la dérivée qui se trouve à l'intérieur de cette expression ,

$$\frac{\partial}{\partial n_i} \left[ \text{Arctg} \left( \frac{y_c(i) - y_c(j)}{x_c(i) - x_c(j)} \right) \right] = \frac{(x_c(i) - x_c(j)) \cos \theta(i) + (y_c(i) - y_c(j)) \sin \theta(i)}{(x_c(i) - x_c(j))^2 + (y_c(i) - y_c(j))^2} \quad (4-17)$$

D'après figure ci-contre , on a :

$$\begin{aligned} x_c(j) &= x(j) + l(j) \cos \theta(j) \\ y_c(j) &= y(j) + l(j) \sin \theta(j) \end{aligned} \quad (4-18)$$



Figure(4-4): j<sup>ème</sup> panneau

On remplace les expressions (4-18) dans l'équation (4-17), on obtient :

$$\frac{\partial}{\partial n_i} \left[ \text{Arctg} \left( \frac{yc(i) - yc(j)}{xc(i) - xc(j)} \right) \right] = \frac{[xc(i) - xc(j)] \cos\theta(i) + [yc(i) - y(j)] \sin\theta(i) - l(j) \cos[\theta(i) - \theta(j)]}{[xc(i) - xc(j)]^2 + [yc(i) - y(j)]^2 - 2[[xc(i) - xc(j)] \cos\theta(j) + [yc(i) - y(j)] \sin\theta(j)] l(j) + l^2(j)}$$

(4-19)

On pose

$$\begin{aligned} A1 &= [xc(i) - xc(j)] \cos\theta(i) + [yc(i) - y(j)] \sin\theta(i) \\ A2 &= \cos(\theta(i) - \theta(j)) \\ A3 &= [xc(i) - xc(j)]^2 + [yc(i) - y(j)]^2 \\ A4 &= -[[xc(i) - xc(j)] \cos\theta(j) + [yc(i) - y(j)] \sin\theta(j)] \end{aligned}$$

(4-20)

On remplace ces paramètres dans l'équation (4-19), on a :

$$\frac{\partial}{\partial n_i} \left[ \text{Arctg} \left( \frac{yc(i) - y(j)}{xc(i) - xc(j)} \right) \right] = \frac{A1 + A2 l(j)}{A3 + 2 A4 l(j) + l^2(j)}$$

(4-21)

On passe maintenant au calcul de l'intégrale contenue dans l'expression (4-16),

$$\int_0^{L(j)} \Gamma(l(j)) \frac{\partial}{\partial n_i} \left[ \text{Arctg} \left( \frac{yc(i) - yc(j)}{xc(i) - xc(j)} \right) \right] dl(j)$$

(4-22)

On remplace la circulation (4-9) et l'équation (4-21) dans l'intégrale (4-22), on obtient :

$$\int_0^{L(j)} \left( \frac{\Gamma(j+1) - \Gamma(j)}{L(j)} l(j) + \Gamma(j) \right) \frac{A1 + A2 l(j)}{A3 + 2 A4 l(j) + l^2(j)} dl(j)$$

(4-23)

On somme l'expression (4-23) et après arrangement, on obtient :

$$\sum_{j=1}^{\text{Max}} (\Pi - I_2) \Gamma(j) + I_2 \Gamma(j+1) \quad (4-24)$$

avec

$$\Pi = \int_0^{L(j)} \frac{A1 - A2.L(j)}{A3 + 2.A4.L(j) + L^2(j)} dl(j)$$

et

$$I_2 = \int_0^{L(j)} \frac{A1 - A2.L(j)}{A3 + 2.A4.L(j) + L^2(j)} \frac{L(j)}{L(j)} dl(j) \quad (4-25)$$

Le calcul des intégrales (4-25), nous donne :

$$\Pi = -0,5.A2.B3 - B1.B4$$

et

$$I_2 = -A2 - 0,5 \frac{B5.B3}{L(j)} + B4 \frac{A2.B2 + A4.B1}{L(j)} \quad (4-26)$$

avec ,

$$B1 = \sin(\theta(i) - \theta(j))$$

$$B2 = (xc(i) - x(j)) \sin\theta(j) - (yc(i) - y(j)) \cos\theta(j)$$

$$B3 = \log \frac{L^2(j) + 2.A4.L(j) + A3}{A3}$$

$$B4 = \text{Arctg} \frac{B2.L(j)}{A3 + A4.L(j)}$$

$$B5 = (xc(i) - x(j)) \cos(\theta(i) - 2.\theta(j)) + (yc(i) - y(j)) \cos(\theta(i) - 2.\theta(j)) \quad (4-27)$$

Ainsi , l'équation (4-23) devient :

$$\sum_{j=1}^{\text{Max}} -Cn_1(i, j) \Gamma(j) - Cn_2(i, j) \Gamma(j+1) \quad (4-28)$$

$i = 1, 2, \dots, \text{Max}$

Enfin, l'équation (4-10) s'écrit :

$$\sum_{j=1}^{\text{Max}} Cn_1(i, j) \Gamma(j) + Cn_2(i, j) \Gamma(j-1) = \sin(\theta(i) - \alpha) \quad (4-29)$$

$i = 1, 2, \dots, \text{Max}$

avec,

$$Cn_2(i, j) = -I_2 = A_2 + 0,5 \frac{B_5 \cdot B_3}{L(j)} - \frac{(A_2 \cdot B_2 + A_4 \cdot B_1) B_4}{L(j)}$$

et

$$Cn_1(i, j) = I_2 - I_1 = -I_1 - Cn_2(i, j) \quad (4-30)$$

L'équation (4-29) représente un système à Max équations linéaires mais à Max+1 inconnues. Pour pouvoir résoudre ce système, il nous faut une nouvelle équation. Cette dernière est obtenue à partir de la condition de Kutta-Joukowski au bord de fuite.

La condition de Kutta-Joukowski est satisfaite en requérant l'égalité des deux vitesses tangentielles adjacentes au bord de fuite, c'est à dire aux points de contrôles 1 et Max. Ainsi, l'équation additionnelle est :

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2} \gamma(1) + \sum_{j=2}^{\text{Max}} \frac{\gamma(j)}{2\pi} \int_0^{L(j)} \frac{\partial}{\partial t_1} \left[ \arctg \left( \frac{yc(1) - yc(j)}{xc(1) - xc(j)} \right) \right] dl(j) \\ & + \frac{\partial}{\partial t_1} [xc(1) \cos \alpha - yc(1) \sin \alpha] \\ & = \frac{1}{2} \gamma(\text{Max}) + \sum_{j=1}^{\text{Max}-1} \frac{\gamma(j)}{2\pi} \int_0^{L(j)} \frac{\partial}{\partial t_{\text{Max}}} \left[ \arctg \left( \frac{yc(\text{Max}) - yc(j)}{xc(\text{Max}) - xc(j)} \right) \right] dl(j) \\ & + \frac{\partial}{\partial t_{\text{Max}}} [xc(\text{Max}) \cos \alpha - yc(\text{Max}) \sin \alpha] \end{aligned} \quad (4-31)$$

Pour la satisfaction de cette condition, il est important que les panneaux 1 et Max soient très petits, afin que l'écoulement à leurs milieux représente celui du bord de fuite.

En simplifiant l'écriture du système d'équation (4-29), on obtient :

$$\sum_{j=1}^{Max-1} An(i, j) \Gamma(j) = b(i) \quad (4-32)$$

$i = 1, 2, \dots, Max-1$

Avec ,

pour  $i = 1, Max$

$$b(i) = \sin(\alpha i) - \alpha$$

$$\begin{aligned} * j = 1 & \quad , An(i, j) = Cn_1(i, j) \\ * j = 2, \dots, Max & \quad , An(i, j) = Cn_1(i, j) + Cn_2(i, j-1) \\ * j = Max + 1 & \quad , An(i, j) = Cn_2(i, j-1) \end{aligned}$$

pour  $i = Max + 1$  (condition de Kutta-Joukowski)

$$b(i) = 0$$

$$\begin{aligned} * j = 1 & \quad , An(i, j) = 1 \\ * j = 2, \dots, Max & \quad , An(i, j) = 0 \\ * j = Max + 1 & \quad , An(i, j) = 1 \end{aligned}$$

(4-33)

#### 4-2-4-Calcul du Cp :

Afin de calculer le Cp , on a besoin de la vitesse tangentielle qui s'écrit :

$$vt(i) = \frac{\partial}{\partial t_i} [\phi(xc(i), yc(i))] \quad (4-34)$$

On remplace le potentiel vitesse (4-8) dans vt ( i ) , on obtient :

$$\begin{aligned} vt(i) = & \frac{\partial}{\partial t_i} U_{\infty} (xc(i) \cos \alpha + yc(i) \sin \alpha) \\ & + \frac{\gamma(i)}{2} + \sum_{j=1}^{Max} \int_0^{L(j)} \frac{\gamma(j)}{2\pi} \frac{\partial}{\partial t_i} \left[ \text{Arctg} \left( \frac{yc(i) - y(j)}{xc(i) - x(j)} \right) \right] dl(j) \end{aligned} \quad (4-35)$$

où l'intégrale est prise sur toute la longueur du  $j^{\text{ème}}$  panneau, et la sommation s'étend sur tous les panneaux sauf sur le  $i^{\text{ème}}$ . La contribution de ce dernier est représentée par  $\gamma(i)/2$ .

On a :

$$\frac{dx(i)}{dt_i} = \cos\theta(i) \quad \text{et} \quad \frac{dy(i)}{dt_i} = \sin\theta(i) \quad (4-36)$$

On remplace les dérivées (4-36) dans la vitesse (4-35), on a :

$$Vt(i) = \cos\theta(i) \cos\alpha + \sin\theta(i) \sin\alpha + \pi \Gamma(i) - \sum_{j=i}^{\text{Max}} \int_0^{L(j)} \Gamma(j) \frac{\{xc(i) - x(j)\} \sin\theta(i) + \{yc(i) - y(j)\} \cos\theta(i)}{\{xc(i) - x(j)\}^2 + \{yc(i) - y(j)\}^2} dl(j) \quad (4-37)$$

On remarque que l'intégrale contenue dans la vitesse (4-37) est la même qu'on a vue précédemment ; ainsi, on évitera les étapes de calcul et on a directement :

$$Vt(i) = \cos(\theta(i) - \alpha) + \pi \Gamma(i) + \sum_{j=i}^{\text{Max}} [Ct_1(i, j) \Gamma(j) + Ct_2(i, j) \Gamma(j+1)] \quad (4-38)$$

avec,

$$Ct_1(i, j) = 0,5 B1 B3 - A2 B4 - Ct_2(i, j)$$

$$Ct_2(i, j) = B1 + 0,5 \frac{D1 B3}{L(j)} + (A2 A4 - B1 B2) \frac{B4}{L(j)}$$

et

$$D1 = \{xc(i) - x(j)\} \sin(\theta(i) - 2\theta(j)) + \{yc(i) - y(j)\} \sin(\theta(i) - 2\theta(j)) \quad (4-39)$$

L'équation (4-38) peut encore se simplifier et se mettre sous la forme suivante :

$$Vt(i) = \cos(\theta(i) - \alpha) + \pi \Gamma(i) + \sum_{j=i}^{Max+1} At(i, j) \Gamma(j) \quad (4-40)$$

Avec,

pour  $i = 1, \text{Max}$

$$\begin{aligned} *j = 1 & \quad , At(i, j) = Ct_1(i, j) \\ *j = 2, \dots, \text{Max} & \quad , At(i, j) = Ct_1(i, j) + Ct_2(i, j-1) \\ *j = \text{Max} + 1 & \quad , At(i, j) = Ct_2(i, j-1) \end{aligned}$$

(4-41)

#### 4-3-Résolution du système d'équations (4-32) :

Dans le programme de calcul (qu'on présentera dans le paragraphe suivant), l'essentiel du travail, revient à résoudre le système d'équations linéaires (4-32).

Il existe deux sortes de méthodes pour la résolution d'un tel système ; les méthodes directes telle que l'inversion de matrice et les méthodes itératives telle que la méthode de Gauss-Seidel.

Pour un nombre d'équations assez élevé, la deuxième méthode est plus recommandée que la première. D'après la référence [6], un nombre de panneaux compris entre 50 et 100 donne de bons résultats. Ainsi, on a opté pour les méthodes directes.

Trois méthodes ont été testées, la méthode de Gauss avec pivotation partielle, la méthode de Jordan sans pivotation et la méthode de Jordan avec pivotation totale. Les trois méthodes donnent de bons résultats mais la meilleure au sens du temps de calcul est sans conteste la méthode de Jordan sans pivotation puisque c'est celle qui demande le moins d'opérations.

La méthode de Jordan avec pivotation totale est la plus intéressante puisque le plus grand pivot est recherché au niveau des lignes et colonnes, afin de minimiser les erreurs d'arrondies mais c'est aussi la méthode qui consomme le plus de temps de calcul.

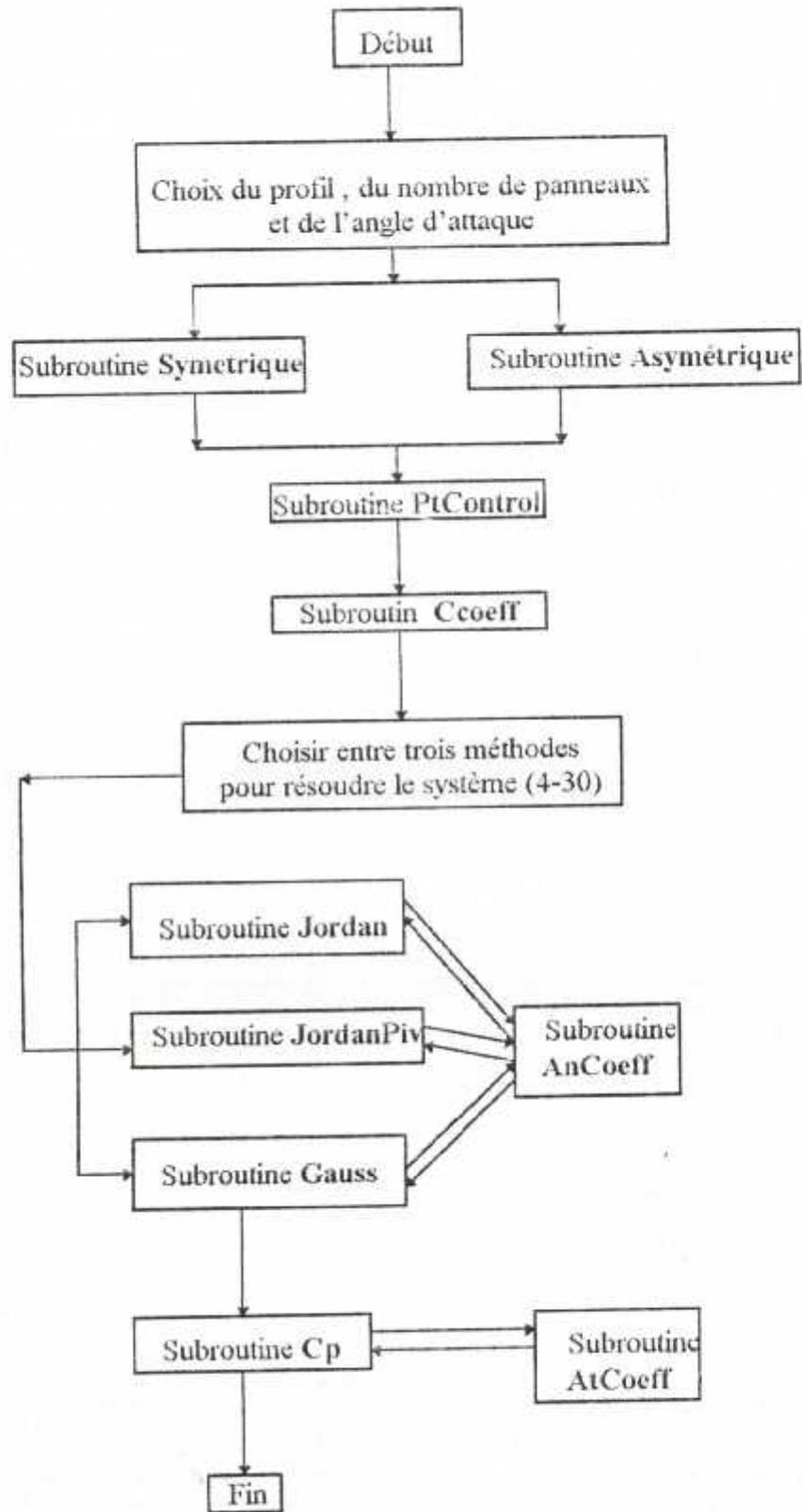
A notre avis, une pivotation partielle est suffisante, c'est pour cela que notre choix définitif a porté sur la méthode de Gauss avec pivotation partielle.

#### 4-4-Organigramme schématique :

Les étapes du programme de calcul (voir figure 4-5) se résument comme suit :

- 1) -Dans un premier temps, on choisit notre profil (symétrique ou asymétrique), le nombre de panneaux et l'angle d'incidence.

Figure (4-5) : Organigramme schématique du programme de calcul



- 2) -On calcule , par la suite , les coordonnées de notre profil grâce à la subroutine **ASYMETRIQUE** ( on choisit entre le NACA 4412 et le NACA 23012) ou la subroutine **SYMETRIQUE** ( on choisit entre neuf profils , du NACA 0006 au NACA 0024 ) .
- 3) -On fait appel à la subroutine **PtControl** afin de calculer les paramètres géométriques des points de contrôles ( coordonnées et longueurs des panneaux) .
- 4) -On calcule les différents coefficients  $C$  ( $C_t$  et  $C_n$ ) à partir de la subroutine **Ccoeff** .
- 5) -Pour résoudre le système d'équations (4-31) , on a le choix entre trois méthodes : la subroutine **JordanPiv** pour la méthode de Jordan avec pivotation totale , la subroutine **Jordan** pour la méthode de Jordan sans pivotation et la subroutine **Gauss** pour la méthode de Gauss avec pivotation partielle . Ces trois subroutines feront toutes appel à une même subroutine **AnCcoeff** . Cette dernière calculera les coefficients  $A_n$  .
- 6) -Enfin , on fait appel à la subroutine **Cp** qui calculera les vitesses tangentielles et par conséquent le coefficient de pression  $C_p$  .

#### 4-5-Résultats :

Le programme de calcul a été testé avec plusieurs nombres de panneaux . Le nombre 70 a été retenu vu les bons résultats obtenus .

Les figures (4-6) , (4-7) et (4-8) montrent la répartition du coefficient de pression autour des profils symétriques suivants : NACA 0012 , NACA 0015 et NACA 0018 , à un angle d'incidence nulle . On remarque que ces courbes sont parfaitement en accord avec les résultats expérimentaux de [4] .

Pour les figures (4-9) , (4-10) , (4-11) et (4-12) représentant le  $C_p$  autour des profils symétriques précédents , à différents angles d'attaque , on constate une bonne concordance entre les résultats de la méthode de Theodorsen et ceux de la présente méthode .

En ce qui concerne les profils asymétriques , le programme a été testé sur le NACA 4412 pour différents angles d'attaque (figures (4-13) , (4-14) , (4-15) et (4-16) ) ; on peut dire que les résultats obtenus approchent d'une façon très correcte ceux de la référence [14] obtenus à partir de la méthode des différences finies .

Figure (4-6) : Evolution du  $C_p$  autour du NACA 0012 à  $\alpha = 0$

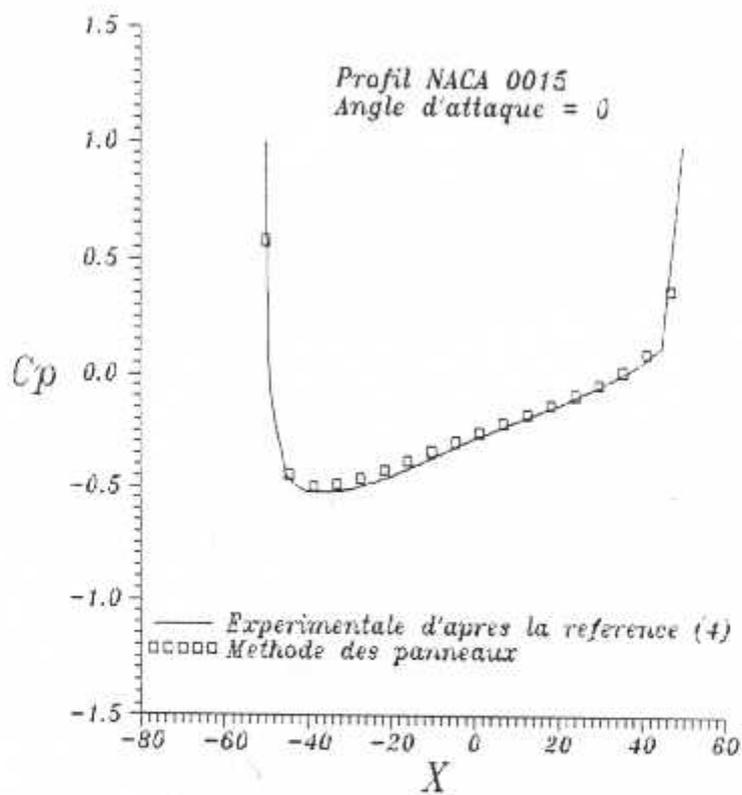
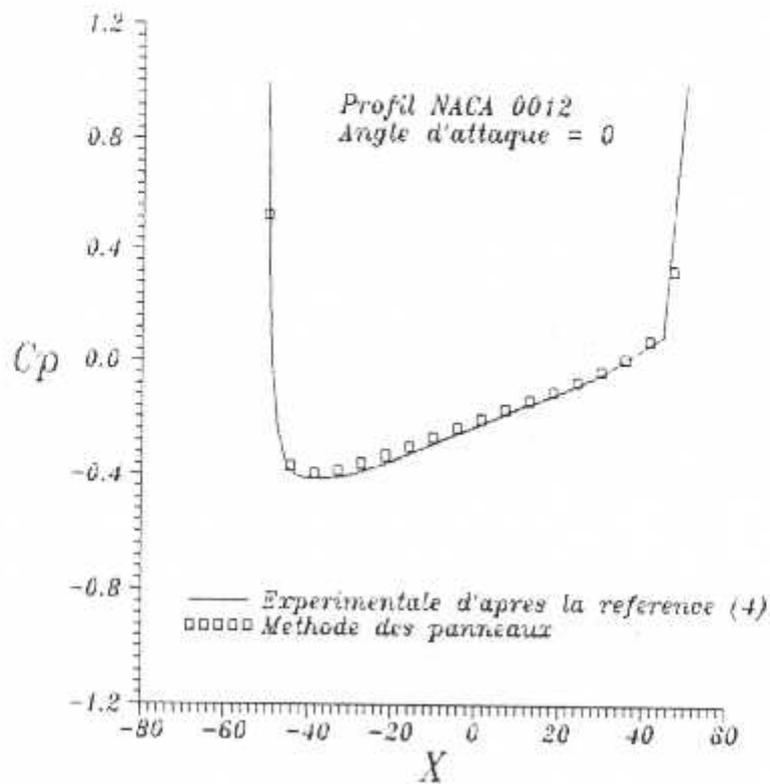


Figure (4-7) : Evolution du  $C_p$  autour du NACA 0015 à  $\alpha = 0$

Figure (4-10) : Evolution du  $C_p$  autour du NACA 0012 à  $\alpha = 9^\circ$

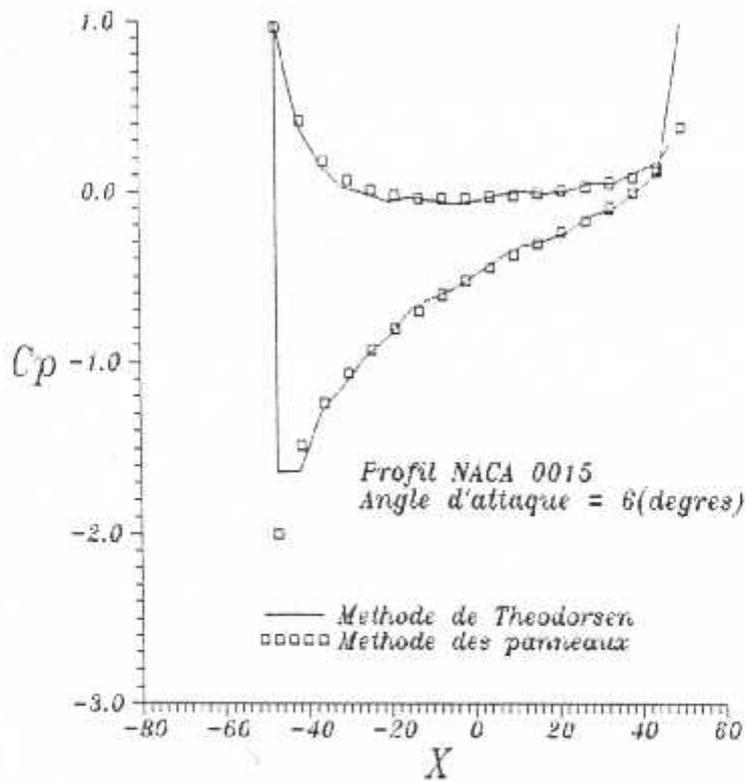
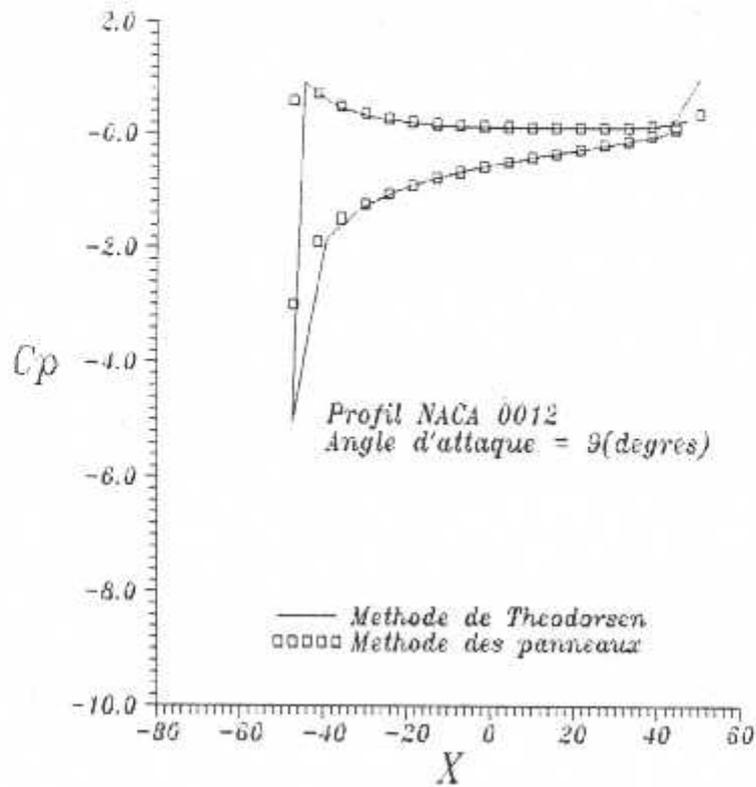


Figure (4-11) : Evolution du  $C_p$  autour du NACA 0015 à  $\alpha = 6^\circ$

Figure (4-12) : Evolution du  $C_p$  autour du NACA 0018 à  $\alpha = 5^\circ$

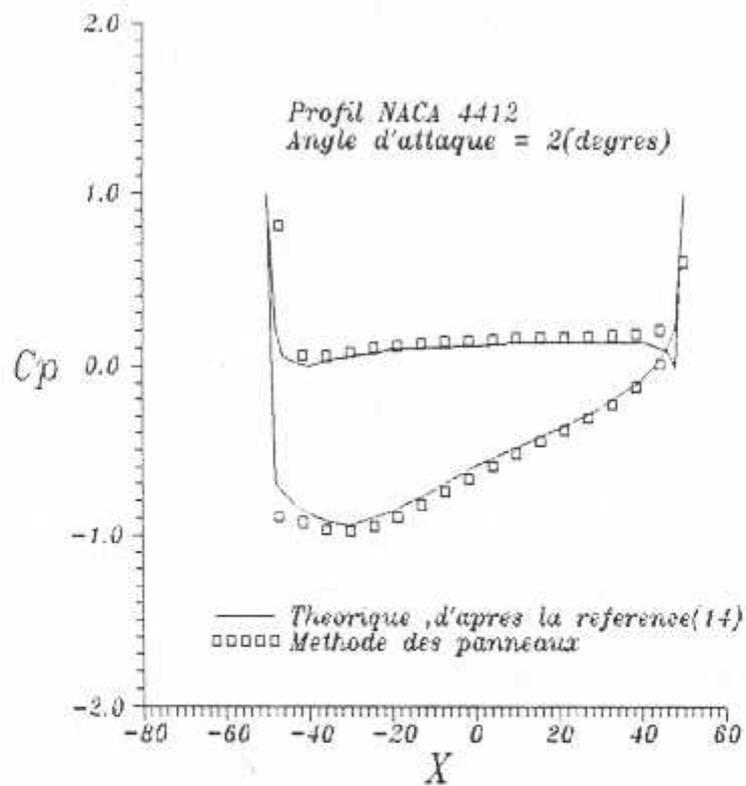
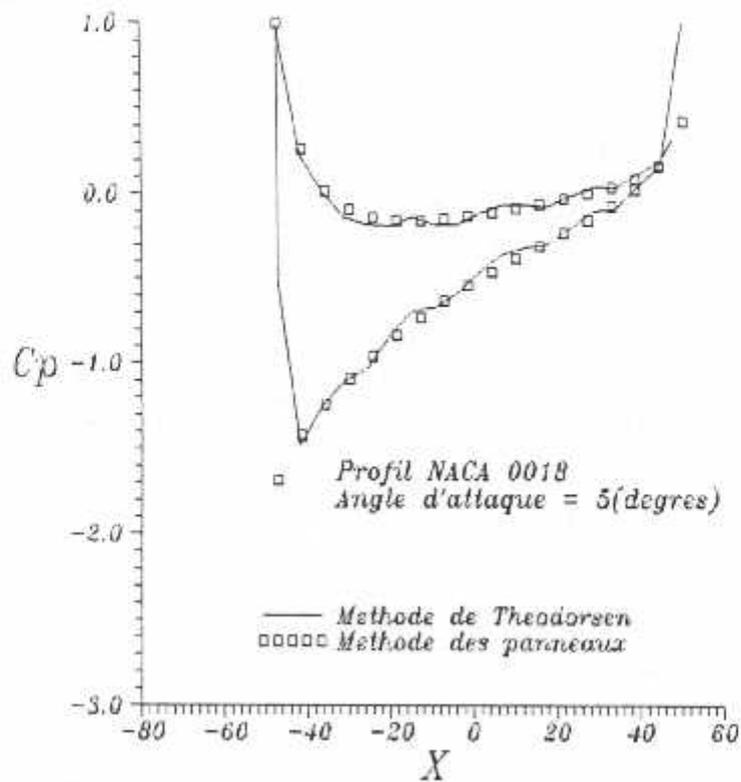


Figure (4-13) : Evolution du  $C_p$  autour du NACA 4412 à  $\alpha = 0$



Figure (4-14) : Evolution du  $C_p$  autour du NACA 4412 à  $\alpha = 5^\circ$

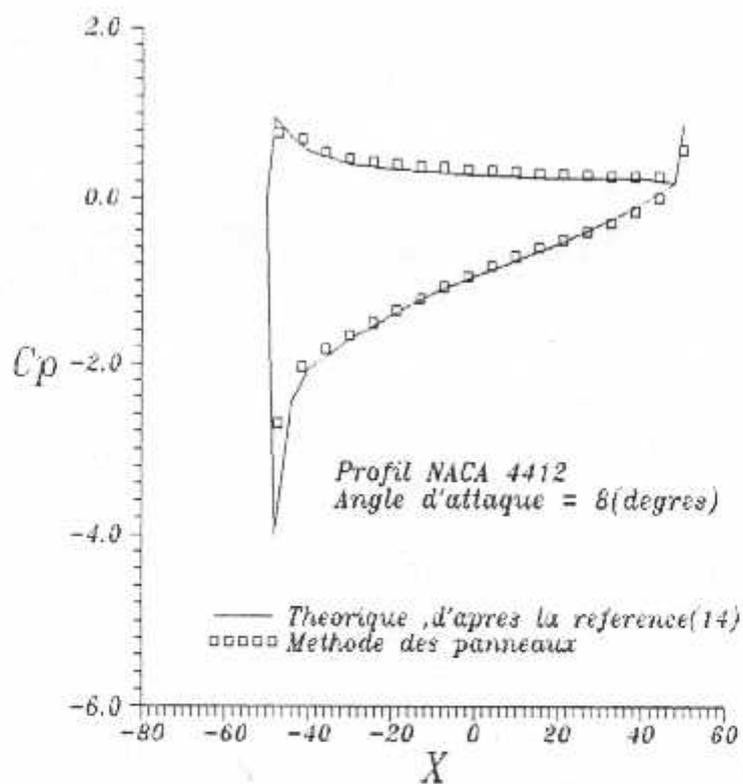
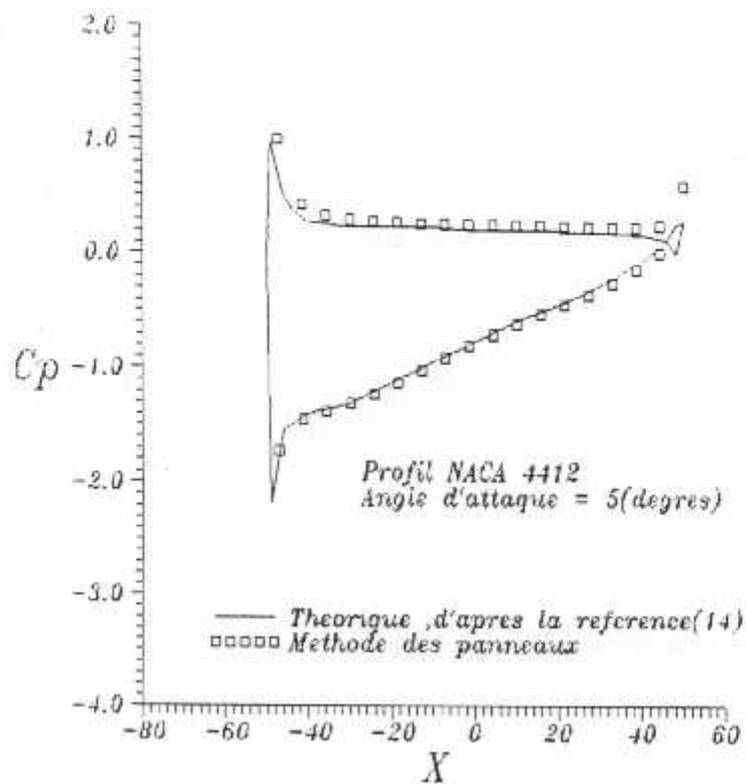
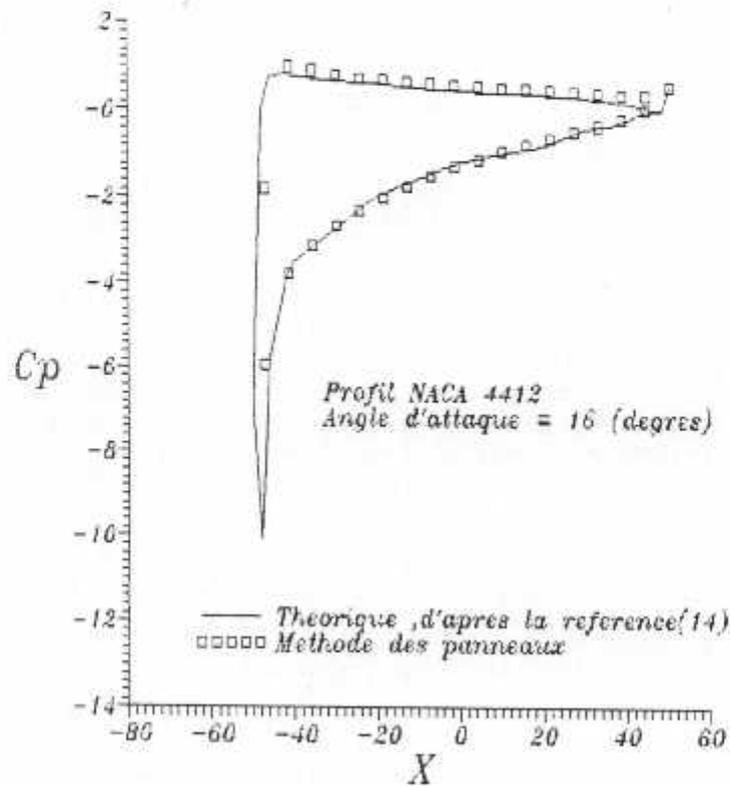


Figure (4-15) : Evolution du  $C_p$  autour du NACA 4412 à  $\alpha = 8^\circ$

Figure (4-16) : Evolution du  $C_p$  autour du NACA 4412 à  $\alpha = 16^\circ$



#### 4-6-Conclusion :

Comme nous avons pu le voir , la méthode des panneaux avec distribution de vortex donne de très bons résultats . Elle utilise beaucoup plus de place mémoire que la méthode de Théodorsen , mais reste néanmoins l'une des méthodes les plus utilisées dans l'industrie. Ceci est dû essentiellement à sa capacité à traiter les surfaces multiples ( profils avec volets , cascade d'aubes de turbomachine... ) , ainsi que les géométries tridimensionnelles . Avec certaines corrections , la méthode des panneaux vortex est aussi applicable aux écoulements à grand angle d'attaque et à certains écoulements compressibles .

## Chapitre 5

### Calcul de l'écoulement potentiel par la méthode des différences finies

#### 5-1-Introduction :

La méthode des différences finies est basée sur l'approximation des opérateurs différentiels par des développements de fonctions en série de Taylor. Dans un premier temps, on doit choisir un maillage couvrant le domaine d'étude, ensuite il faut discrétiser l'équation de Laplace qui régit l'écoulement, ainsi que les conditions aux limites et enfin résoudre le système d'équations obtenu.

La simulation numérique d'écoulement autour de géométrie complexe telle que le profil d'aile implique des frontières dans le plan numérique qui ne coïncident pas avec celles du plan physique.

Pour les différences finies, de telles frontières nécessitent des interpolations très compliquées qui entraînent souvent une perte de précision de la solution numérique.

De telles difficultés nous poussent à utiliser des transformations qui nous font passer du plan physique  $(x,y)$  au plan numérique rectangulaire avec coordonnées curvilignes  $(\xi, \eta)$ . Par exemple, pour calculer l'écoulement dans une conduite courbée, on a intérêt à coïncider les parois de la conduite avec des lignes  $\eta$  constantes (figure(5-1)). Le domaine des coordonnées curvilignes est construit d'une telle façon à ce que les frontières du plan physique coïncident avec des lignes de coordonnées  $(\xi, \eta)$  constantes.

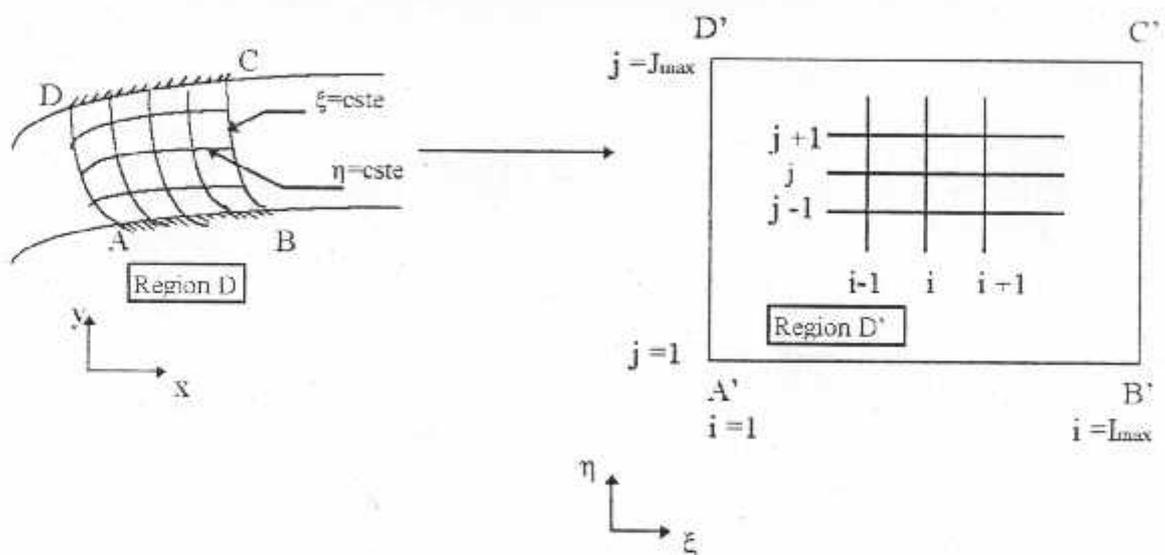


Figure (5-1) : Transformation d'une conduite bidimensionnelle courbée.

Ainsi, l'utilisation des coordonnées curvilignes nous permet de transformer une région courbée dans le plan physique en une région rectangulaire dans le plan numérique.

Avec un tel concept, d'autres avantages apparaissent tels que :

- \* Le maillage dans le plan de calcul peut correspondre à un maillage mobile dans le plan physique.
- \* La transformation entre le plan physique et le plan numérique permet aux lignes de maillage d'être concentrées dans les régions du domaine physique où des gradients importants sont prévus.

L'utilisation des coordonnées curvilignes introduit bien sur quelques difficultés telles que :

- \* Réécriture des équations régissant notre écoulement en fonction des nouvelles coordonnées. Les équations obtenues vont contenir des termes additionnels qui définissent la transformation entre le plan physique et le plan numérique. Ces termes (paramètres de transformation) de la forme de dérivées ont besoin d'être discrétisés, ce qui introduit de nouvelles sources d'erreurs.
- \* Construction du domaine physique (génération d'un maillage autour du profil).

### 5-2-Relations de transformation :

Dans ce paragraphe, nous allons établir les relations liant le plan physique (x,y) au plan numérique ( $\xi,\eta$ ). On suppose que pour chaque coordonnée du plan physique, correspond une seule valeur dans le plan de calcul.

Ainsi, on peut écrire,

$$\xi = \xi(x,y), \quad \eta = \eta(x,y) \quad (5-1)$$

Ces relations sont déterminées une fois que le maillage dans le plan physique est généré. Dès qu'on a ces relations de transformation, les équations qui gouvernent notre écoulement réécrites en fonction de  $\xi$  et  $\eta$ , et discrétisées, peuvent être résolues.

La dérivée première des composantes de la vitesse peut s'écrire comme suit :

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} & \frac{\partial u}{\partial y} \\ \frac{\partial v}{\partial x} & \frac{\partial v}{\partial y} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial u}{\partial \xi} & \frac{\partial u}{\partial \eta} \\ \frac{\partial v}{\partial \xi} & \frac{\partial v}{\partial \eta} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{\partial \xi}{\partial x} & \frac{\partial \xi}{\partial y} \\ \frac{\partial \eta}{\partial x} & \frac{\partial \eta}{\partial y} \end{bmatrix} \quad (5-2)$$

On appelle la matrice Jacobienne de la transformation :

$$J = \begin{bmatrix} \frac{\partial \xi}{\partial x} & \frac{\partial \xi}{\partial y} \\ \frac{\partial \eta}{\partial x} & \frac{\partial \eta}{\partial y} \end{bmatrix} \quad (5-3)$$

Il est préférable de travailler avec l'inverse de la matrice J,

$$J^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{\partial x}{\partial \xi} & \frac{\partial x}{\partial \eta} \\ \frac{\partial y}{\partial \xi} & \frac{\partial y}{\partial \eta} \end{bmatrix} \quad (5-4)$$

La matrice Jacobienne J peut s'écrire :

$$J = \frac{\text{Transposé des cofacteurs de } J^{-1}}{|J^{-1}|} \quad (5-5)$$

avec ,

$$|J^{-1}| = x_{\xi} y_{\eta} - x_{\eta} y_{\xi} \quad (5-6)$$

A partir de la formule (5-5) et de la matrice (5-3), les éléments de la matrice Jacobienne de la transformation peuvent s'écrire:

$$\begin{aligned} \xi_x &= \frac{1}{|J^{-1}|} y_{\eta} & , & \quad \xi_y = -\frac{1}{|J^{-1}|} x_{\eta} \\ \eta_x &= -\frac{1}{|J^{-1}|} y_{\xi} & , & \quad \eta_y = \frac{1}{|J^{-1}|} x_{\xi} \end{aligned} \quad (5-7)$$

Remarque :

Dans un souci d'allégement d'écriture, le déterminant de l'inverse de la matrice Jacobienne sera dorénavant noté simplement J.

### 5-3-Génération de maillage :

#### 5-3-1-Introduction :

Une multitude de méthodes existe pour générer un maillage autour de géométrie simple ou complexe . Elles sont classées essentiellement en trois catégories :

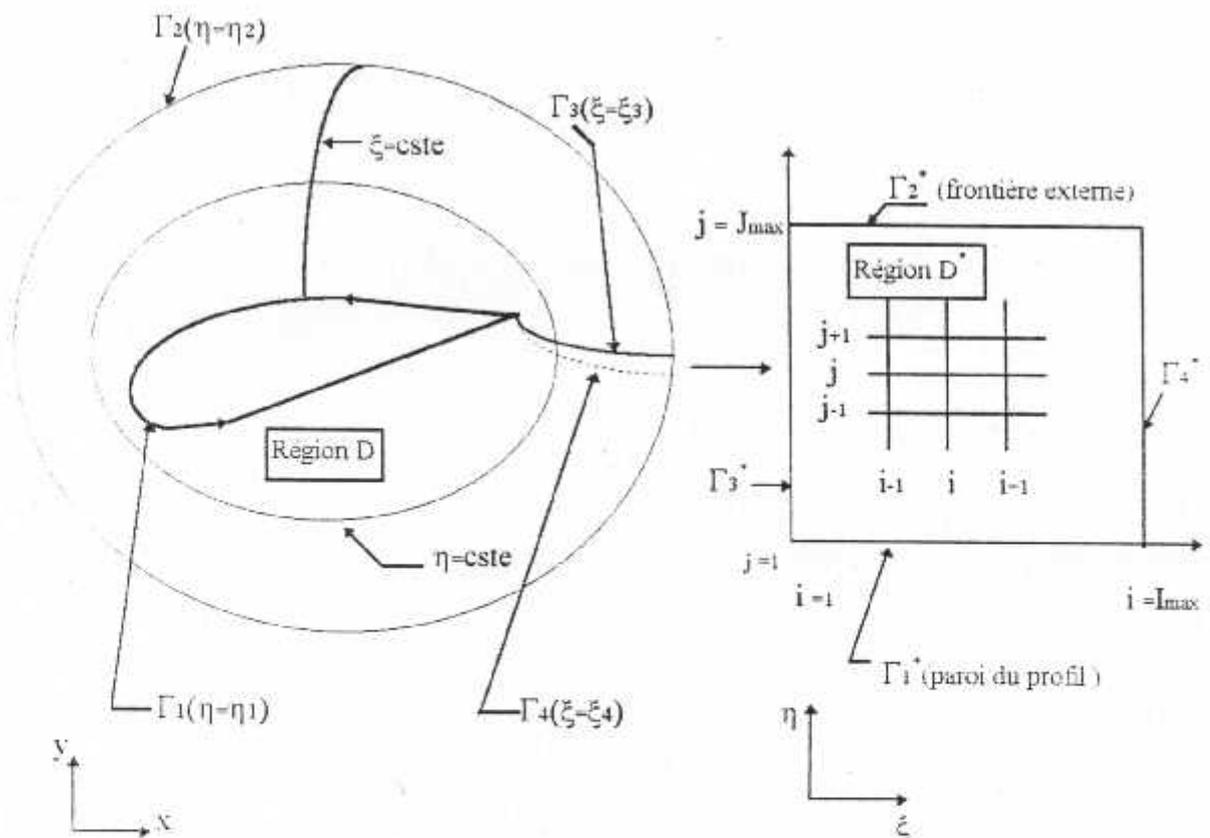
- \* Méthode de la variable complexe .
- \* Méthode algébrique .
- \* Méthode utilisant les équations aux dérivées partielles .

La plus usuelle est sans conteste celle qui consiste à résoudre un système d'équations aux dérivées partielles . Cette dernière , objet du paragraphe qui va suivre , a été choisie vu les bons résultats qu'elle génère et cela pour n'importe qu'elle géométrie comme on peut le voir dans les références [2-3] .

#### 5-3-2-Génération de maillage par les équations aux dérivées partielles :

Le maillage autour du profil est construit à partir de deux réseaux de lignes, l'un d'équation  $\xi(x,y) = \text{constante}$  , sensiblement normale à la paroi de l'obstacle et un second réseau de lignes d'équation  $\eta(x,y) = \text{constante}$  , longeant la forme de l'obstacle .

Le but de la génération de maillage est de calculer les coordonnées  $(x,y)$  de chaque point d'intersection de ces lignes .



Figure(5-2) : Transformation d'un profil d'aile et du champ qui l'entoure.

On considère la transformation de la région bidimensionnelle  $D$ , limitée par deux contours fermés  $\Gamma_1$  et  $\Gamma_2$ , en une région rectangulaire  $D^*$  (figure(5-2)).  $\Gamma_1$  est transformé en  $\Gamma_1^*$ ,  $\Gamma_2$  en  $\Gamma_2^*$ ,  $\Gamma_3$  en  $\Gamma_3^*$  et  $\Gamma_4$  en  $\Gamma_4^*$ . On notera que  $\Gamma_1^*$  et  $\Gamma_2^*$  sont des courbes à  $\eta$  constante ; cependant, la coupure entre ces deux courbes (c.a.d.  $\Gamma_3$  et  $\Gamma_4$ ) deviennent des lignes à  $\xi$  constante.

La région  $D$  est le plan physique,  $D^*$  le plan transformé,  $\Gamma_1$  le contour du profil et  $\Gamma_2$  la frontière externe. Cette dernière est choisie d'une façon assez arbitraire, d'après [3] un cercle de rayon de dix cordes est suffisant.

Le plus simple des systèmes d'équations aux dérivées partielles pour générer un maillage est celui de Laplace, de la forme :

$$\frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \xi}{\partial y^2} = 0 \quad (5-8)$$

$$\frac{\partial^2 \eta}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \eta}{\partial y^2} = 0$$

Avec les conditions aux limites de type Dirichlet,

$$\begin{bmatrix} \xi \\ \eta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \xi_1(x,y) \\ \eta_1 \end{bmatrix} \quad (x,y) \in \Gamma_1$$

$$\begin{bmatrix} \xi \\ \eta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \xi_2(x,y) \\ \eta_2 \end{bmatrix} \quad (x,y) \in \Gamma_2$$

(5-9)

Ainsi, Les coordonnées curvilignes  $(\xi, \eta)$  sont prises comme solution d'un problème aux limites avec l'une des coordonnées constantes aux frontières.

La résolution du système (5-8) avec les conditions aux limites (5-9) est pratiquement impossible vu la complexité de ces dernières. D'où la nécessité de passer au plan numérique rectangulaire où les conditions aux limites sont bien plus simples.

### 5-3-3-Résolution du système d'équations (5-8) :

Comme le calcul numérique se fait dans le plan transformé rectangulaire, les variables dépendantes et indépendantes doivent être interchangées dans le système (5-8) et les conditions aux limites (5-9).

En s'aidant avec les relations de transformation (5-7), le système (5-8) devient :

$$\alpha x_{\xi\xi} - 2\beta x_{\xi\eta} + \gamma x_{\eta\eta} = 0 \quad (5-10)$$

$$\alpha y_{\xi\xi} - 2\beta y_{\xi\eta} + \gamma y_{\eta\eta} = 0$$

avec

$$\begin{aligned} \alpha &= x_{\eta}^2 + y_{\eta}^2 \\ \beta &= x_{\xi} x_{\eta} + y_{\xi} y_{\eta} \\ \gamma &= x_{\xi}^2 + y_{\xi}^2 \end{aligned} \quad (5-11)$$

Les conditions aux limites (5-9) deviennent :

$$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} f_1(\xi, \eta_1) \\ f_2(\xi, \eta_1) \end{bmatrix} \quad (\xi, \eta_1) \in \Gamma_1^* \quad (5-12)$$

$$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} g_1(\xi, \eta_2) \\ g_2(\xi, \eta_2) \end{bmatrix} \quad (\xi, \eta_2) \in \Gamma_2^*$$

On remarque que le système d'équations aux dérivées partielles (5-10) est bien plus compliqué que le système (5-8) mais ses conditions aux limites sont plus simples.

$f_1$  et  $f_2$  sont les coordonnées de notre profil (qui correspondent à  $j=1$ ).

$g_1$  et  $g_2$  sont les coordonnées de notre frontière externe (qui correspondent à  $j = J_{\max}$ ).

Pour notre cas c'est à dire un maillage en O, on doit imposer une condition de continuité sur ces frontières, sous la forme suivante :

$$f(1, j) = f(I_{\max}, j)$$

$$f(2, j) = f(I_{\max} + 1, j) \quad (5-13)$$

Ainsi, le domaine de la grille de calcul numérique sera compris entre  $j = 2, 3, \dots, J_{\max} - 1$  et  $i = 2, 3, \dots, I_{\max}$ .

Après discrétisation du système (5-10), on aboutira à un système à  $2(I_{\max} - 1)(J_{\max} - 2)$  équations, qui sera résolu par la méthode itérative de Gauss-Seidel.

#### 5-3-4-Discrétisation du système(5-10):

La discrétisation des opérateurs différentielles des équations (5-10) se fera par des différences centrées du second ordre de la forme :

$$f_x(i, j) \approx 0,5 (f(i+1, j) - f(i-1, j))$$

$$f_y(i, j) \approx 0,5 (f(i, j+1) - f(i, j-1))$$

$$f_{yy}(i, j) \approx f(i, j+1) + f(i, j-1) - 2.f(i, j)$$

$$f_{xx}(i, j) \approx f(i+1, j) + f(i-1, j) - 2.f(i, j)$$

$$f_{xy}(i, j) \approx 0,25 (f(i+1, j+1) + f(i-1, j-1) - f(i+1, j-1) - f(i-1, j+1))$$

(5-14)

#### Remarque:

$\Delta\xi$  et  $\Delta\eta$  sont pris égal à un , ce qui explique leurs disparition des équations (5-14) et dans toutes les formules qui vont suivre .

Après discrétisation , le système (5-10) devient :

$$\begin{aligned} x^{k+1}(i, j) = & \frac{1}{2(\alpha(i, j) + \gamma(i, j))} [ \alpha(i, j) (x^k(i-1, j) + x^k(i+1, j)) \\ & + \gamma(i, j) (x^k(i, j+1) + x^k(i, j-1)) \\ & - 0,5 \beta(i, j) (x^k(i-1, j-1) + x^k(i-1, j+1) - x^k(i+1, j-1) - x^k(i+1, j+1)) ] \end{aligned}$$

(5-15)

$$\begin{aligned}
y^{k+1}(i, j) = & \frac{1}{2(\alpha(i, j) + \gamma(i, j))} \left[ \alpha(i, j) (y^k(i-1, j) + y^k(i+1, j)) \right. \\
& - \gamma(i, j) (y^k(i, j+1) + y^k(i, j-1)) \\
& \left. + 0,5 \beta(i, j) (y^k(i+1, j-1) + y^k(i-1, j+1) - y^k(i+1, j+1) - y^k(i-1, j-1)) \right]
\end{aligned}
\tag{5-16}$$

$$\begin{aligned}
\text{avec } i = & 2, 3, \dots, l_{\max} \\
j = & 2, 3, \dots, j_{\max} - 1
\end{aligned}$$

et l'indice k comptabilise le nombre d'itérations .

Pour accélérer la convergence de notre résolution , on utilisera la surrelaxation . En introduisant le paramètre w dans les expressions (5-15) et (5-16) , on obtient :

$$\begin{aligned}
x^{k+1}(i, j) = & x^k(i, j) + \frac{w}{2(\alpha(i, j) + \gamma(i, j))} \left[ \alpha(i, j) (x^k(i-1, j) + x^k(i+1, j)) \right. \\
& + \gamma(i, j) (x^k(i, j+1) + x^k(i, j-1)) \\
& - 0,5 \beta(i, j) (x^k(i+1, j-1) + x^k(i-1, j+1) - x^k(i+1, j+1) - x^k(i-1, j-1)) \\
& \left. - 2 (\alpha(i, j) + \gamma(i, j)) x^k(i, j) \right]
\end{aligned}
\tag{5-17}$$

$$\begin{aligned}
y^{k+1}(i, j) = & y^k(i, j) + \frac{w}{2(\alpha(i, j) + \gamma(i, j))} \left[ \alpha(i, j) (y^k(i-1, j) - y^k(i+1, j)) \right. \\
& - \gamma(i, j) (y^k(i, j+1) + y^k(i, j-1)) \\
& - 0,5 \beta(i, j) (y^k(i+1, j-1) + y^k(i-1, j+1) - y^k(i+1, j+1) - y^k(i-1, j-1)) \\
& \left. - 2 (\alpha(i, j) + \gamma(i, j)) \cdot y^k(i, j) \right]
\end{aligned}
\tag{5-18}$$

Toujours en s'aidant avec les formules (5-14) , la discrétisation de  $\alpha$  ,  $\beta$  et  $\gamma$  nous donne :

$$\begin{aligned}\alpha(i, j) &= 0,25 \left[ (x(i, j+1) - x(i, j-1))^2 + (y(i, j+1) - y(i, j-1))^2 \right] \\ \beta(i, j) &= 0,25 \left[ (x(i+1, j) - x(i-1, j))(x(i, j+1) - x(i, j-1)) \right. \\ &\quad \left. + (y(i+1, j) - y(i-1, j))(y(i, j+1) - y(i, j-1)) \right] \\ \gamma(i, j) &= 0,25 \left[ (x(i+1, j) - x(i-1, j))^2 + (y(i+1, j) - y(i-1, j))^2 \right]\end{aligned}\tag{5-19}$$

#### 5-3-5-Organigramme schématique :

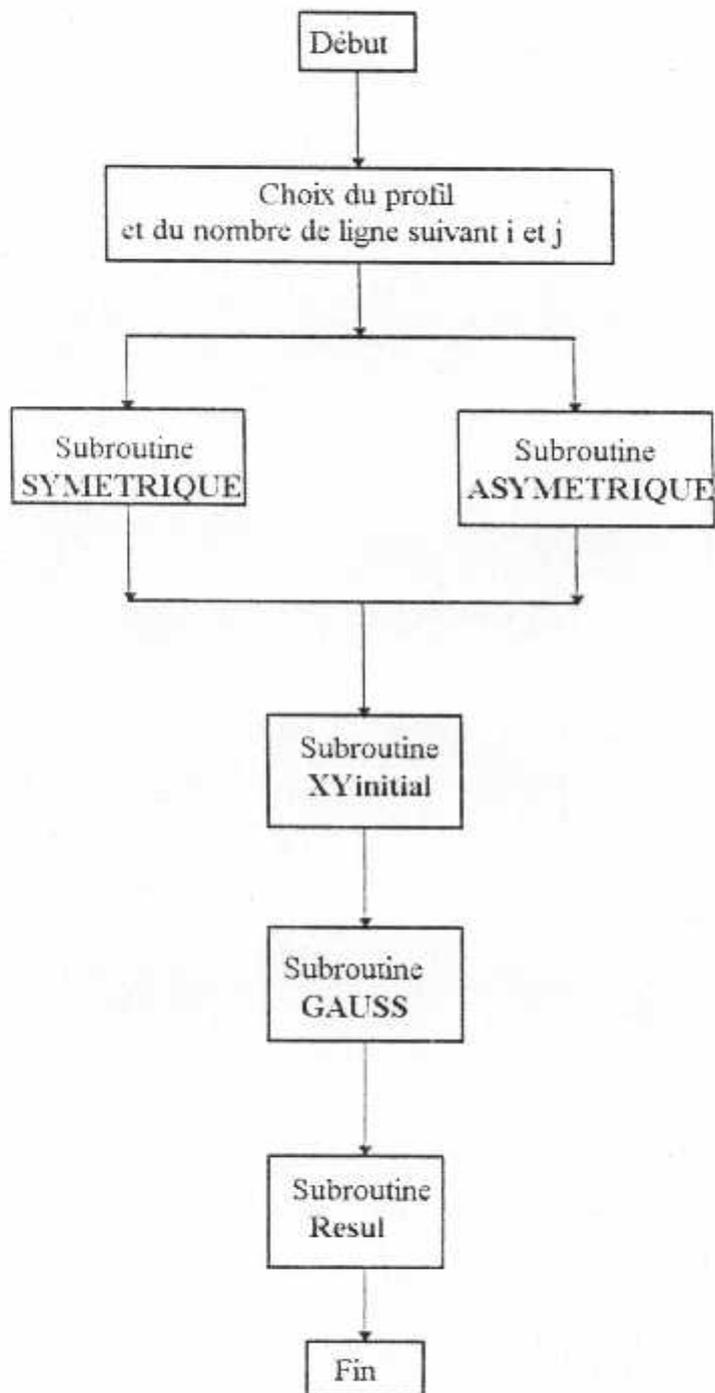
Les étapes du programme de calcul (figure (5-3)) se résument comme suit :

- 1) -Dans un premier temps , on choisit notre profil (symétrique ou asymétrique ) , ainsi que le nombre de ligne suivant i et j .
- 2) -On calcule par la suite les coordonnées de notre profil grâce à la subroutine SYMETRIQUE (on choisit entre neuf profils du NACA 0006 au NACA 0024 ) , ou la subroutine ASYMETRIQUE ( on choisit entre deux profils le NACA4412 et le NACA 23012 ) .
- 3)-On fait appel à la subroutine XYinitial afin de calculer les valeurs initiales de x et y .
- 4)-Grâce à la subroutine GAUSS , on itère jusqu'à obtention des x et y de notre maillage. Les itérations sont arrêtées dès que la différence maximale et absolue au niveau de tout le champ , entre deux itérations successives , est inférieure à une certaine valeur .
- 5)- Enfin , on fait appel à la subroutine Resul pour l'impression des résultats .  
Les valeurs des x et y pour chaque point du champ de calcul sont emmagasinées dans un fichier afin de les utiliser dans le calcul de l'écoulement potentiel .

#### 5-3-6-Résultats :

Pour pouvoir démarrer les calculs , la connaissance des x et y des noeuds internes est nécessaire . Plusieurs méthodes d'interpolation existent pour tirer ces valeurs initiales . Il faut noter que plus l'interpolation est bonne et plus le nombre des itérations diminuera .

Figure (5-3) : Organigramme schématique du programme de calcul .



Pour notre cas , la méthode d'interpolation de Lagrange semble la plus adéquate vu sa simplicité à mettre en oeuvre et les bons résultats qu'elle engendre .

Pour ce qui est du paramètre de surrelaxation , plusieurs tests ont été faits pour l'obtenir . Ainsi , un bon choix de  $w$  nous a permis de diminuer de près de cinq fois le nombre d'itérations . En moyenne , les calculs convergent après une centaine d'itérations .

Les figures (5-4) , (5-5) , (5-6) et (5-7) représentent respectivement le maillage en  $O$  autour des profils NACA 0012 , NACA 0018 , NACA 4412 et le NACA 23012 .

Le maillage généré autour de ces profils comporte 35 lignes suivant  $j$  et 30 lignes suivant  $i$  et s'étend sur une distance de dix cordes de part et d'autre du profil .

#### 5-3-7-Conclusion :

On notera l'espacement régulier des lignes longeant les profils au niveau des maillages générés précédemment ; cette distribution de points est insuffisante dans le cas de résolution des équations de couche limite ou celles de Navier-Stokes , mais reste convenable pour le calcul de l'écoulement potentiel .

Pour pouvoir resserrer ces lignes , il faudra rajouter des fonctions de contrôle dans les équations de Laplace (5-8) génératrice du maillage et d'après J.F.THOMPSON [3] , de telles fonctions sont difficiles à déterminer puisque souvent elles sont déterminées après plusieurs tests numériques .

Figure (5-4) : Maillage au voisinage du profil NACA 0012

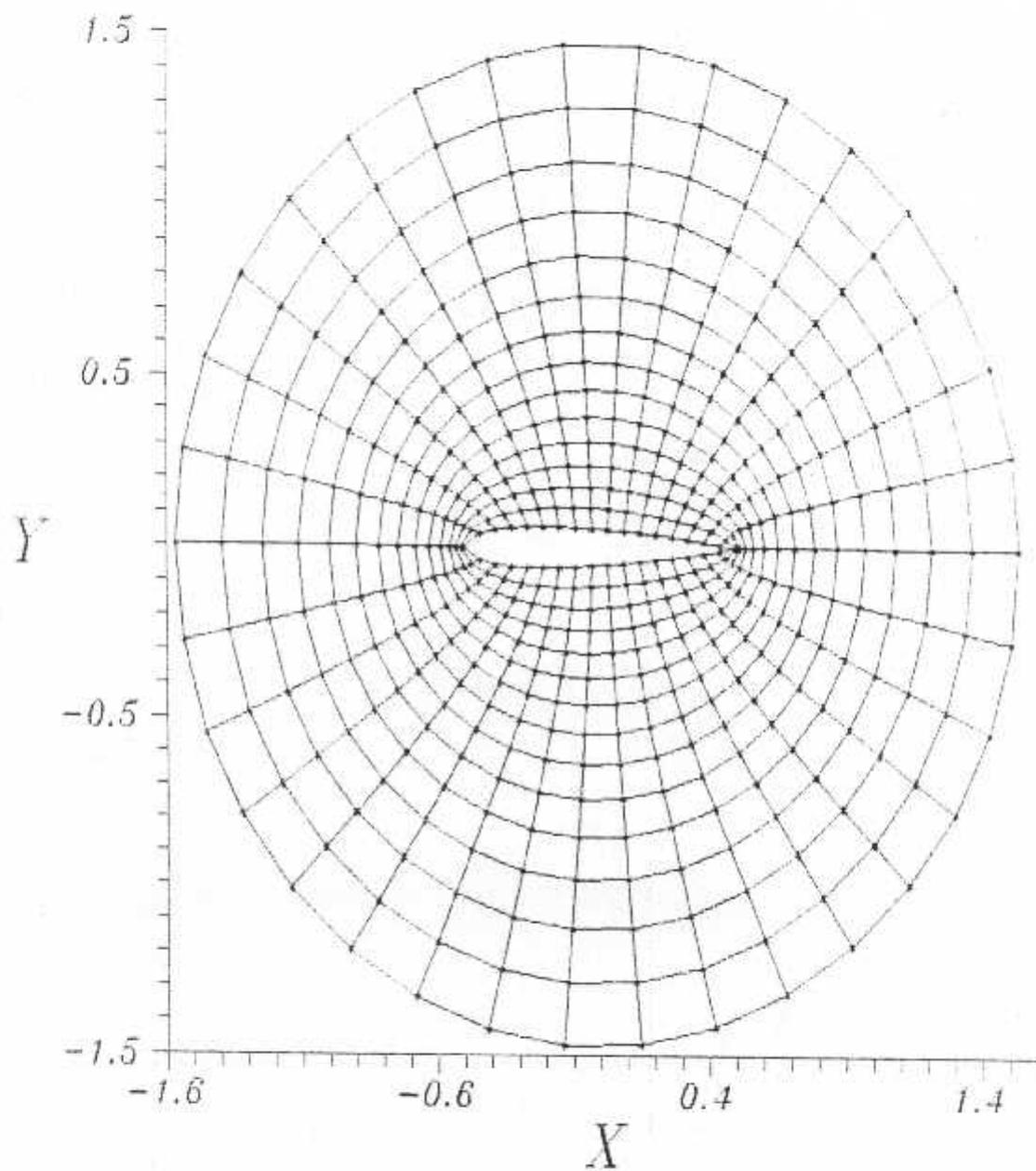


Figure (5-5): Maillage au voisinage du profil NACA 0018

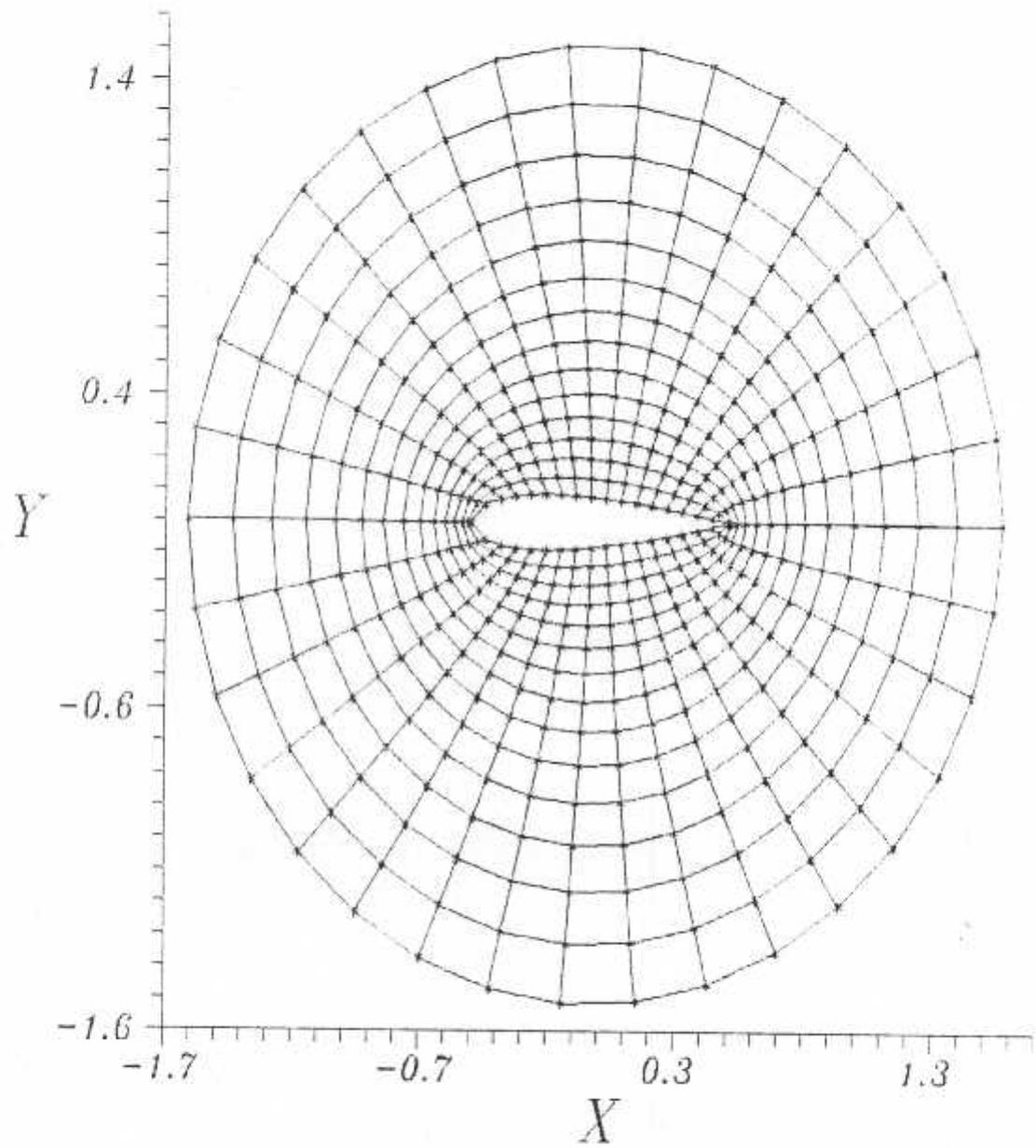


Figure (5-6) : Maillage au voisinage du profil NACA 4412

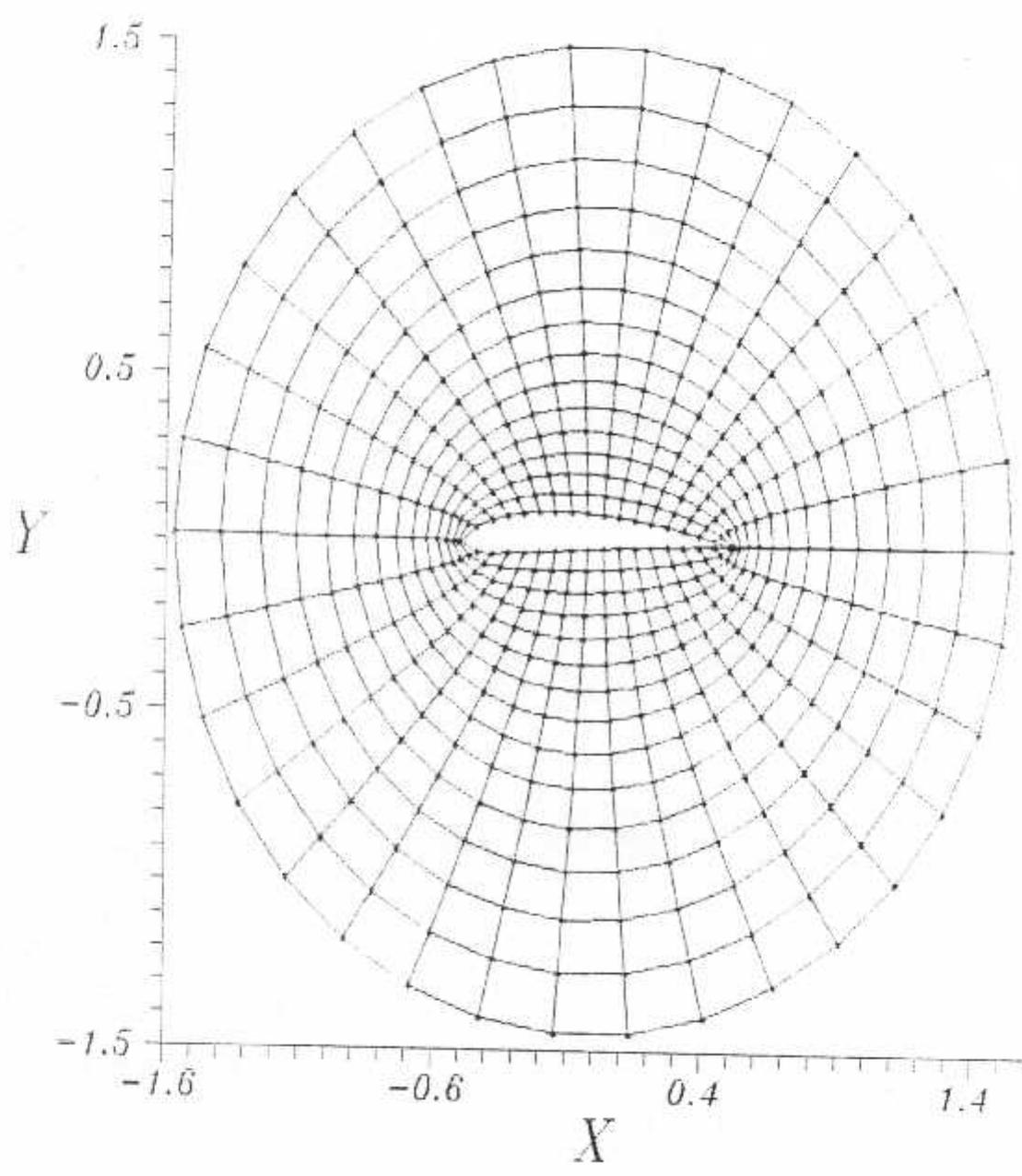
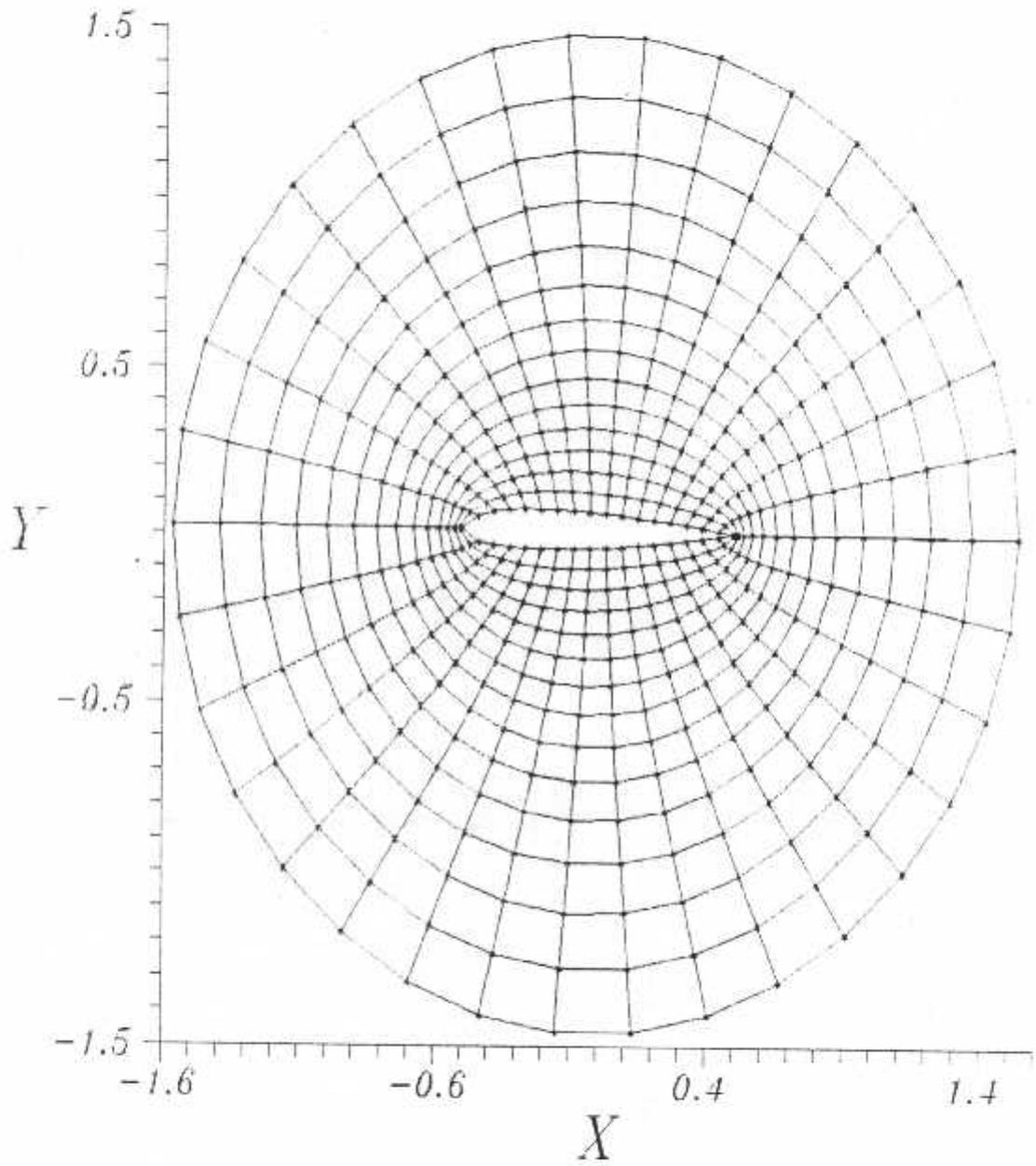


Figure (5-7): Maillage au voisinage du profil NACA 2312



#### 5-4-Calcul de l'écoulement potentiel :

##### 5-4-1-Formulation mathématique :

L'écoulement irrotationnel bidimensionnel est régi par l'équation de Laplace (avec fonction de courant ), suivante :

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} = 0 \quad (5-20)$$

avec les conditions aux limites ,

$$\begin{aligned} \text{sur la paroi du profil ,} & \quad \psi(x,y) = \text{cste} \\ \text{loin de la paroi du profil ,} & \quad \psi(x,y) = y \cos \alpha - x \sin \alpha \end{aligned} \quad (5-21)$$

Avec  $\alpha$  l'angle d'attaque que fait l'écoulement libre avec l'axe des  $x$  .

En s'aidant avec les relations (5-7) , on transforme l'équation (5-20) et les conditions aux limites (5-21) en fonction des coordonnées curvilignes  $(\xi, \eta)$  , on obtient :

$$\alpha \psi_{\xi\xi} - 2 \beta \psi_{\xi\eta} + \gamma \psi_{\eta\eta} = 0 \quad (5-22)$$

Avec  $\alpha$  ,  $\beta$  et  $\gamma$  donnés plus haut et les conditions aux limites transformées deviennent :

$$\text{à } \eta = \eta_1 \text{ ( } \eta_1 \text{ correspond à la frontière } \Gamma_1 \text{ , c'est à dire } j = 1 \text{)}$$

$$\psi(\xi, \eta) = \psi_0$$

$$\text{à } \eta = \eta_2 \text{ ( } \eta_2 \text{ correspond à la frontière } \Gamma_2 \text{ , c'est à dire } j = J_{\text{max}} \text{)}$$

$$\psi(\xi, \eta) = y(\xi, \eta_2) \cos \alpha - x(\xi, \eta_2) \sin \alpha$$

(5-23)

##### 5-4-2-Vitesses et coefficient de pression :

Les composantes du vecteur vitesse sont calculées à partir de ,

$$u = \frac{\partial \psi}{\partial y} \quad , \quad v = -\frac{\partial \psi}{\partial x} \quad (5-24)$$

Dans le plan transformé les vitesses (5-24) deviennent :

$$u = \frac{x_\xi \psi_\eta - x_\eta \psi_\xi}{J} \quad , \quad v = \frac{y_\xi \psi_\eta - y_\eta \psi_\xi}{J} \quad (5-25)$$

Les vitesses à l'intérieur du champ peuvent être obtenues à partir de ces relations .

Sur la surface du profil , on a  $\psi_\xi = 0$  , d'où simplification des composantes de la vitesse et devient :

$$u = \frac{1}{J} x_\xi \psi_\eta \quad \text{et} \quad v = \frac{1}{J} y_\xi \psi_\eta \quad (5-26)$$

Pour le calcul du coefficient de pression  $C_p$  , on a besoin de la vitesse tangentielle au niveau de la paroi de notre profil , d'où la nécessité de la connaissance du vecteur tangent unité sur cette même paroi . Ce vecteur est donné par [1] sous la forme :

$$\tau = \frac{\vec{i} x_\xi + \vec{j} y_\xi}{\sqrt{J}} \quad (5-27)$$

On multiplie la vitesse (5-26) par l'expression (5-27) , on obtient la composante de la vitesse tangentielle sur la surface de notre profil ,

$$Vt = \frac{1}{J} \sqrt{J} \psi_\eta \quad (5-28)$$

Enfin , le  $C_p$  s'écrit

$$C_p = 1 - Vt^2 = 1 - \frac{J}{J^2} \psi_\eta^2 \quad (5-29)$$

### 5-4-3-1) Discretisation et résolution de l'équation (5-22):

L'équation (5-22) est approximée par des différences centrées pour toutes les dérivées, et le système d'équations qui en résulte est résolu par la méthode itérative de Gauss-Seidel. En s'aidant des formules (5-14), la discretisation de l'équation (5-22) nous donne :

$$\begin{aligned}\psi^{k+1}(i, j) = & \frac{1}{2[\alpha(i, j) + \gamma(i, j)]} \left[ \alpha(i, j) (\psi^k(i-1, j) + \psi^k(i+1, j)) \right. \\ & - \gamma(i, j) (\psi^k(i, j+1) + \psi^k(i, j-1)) \\ & \left. - 0.5 \beta(i, j) (\psi^k(i+1, j-1) + \psi^k(i-1, j+1) - \psi^k(i-1, j-1) - \psi^k(i+1, j+1)) \right]\end{aligned}\quad (5-30)$$

$$\begin{aligned}\text{avec } i = & 2, 3, \dots, l_{\max} \\ j = & 2, 3, \dots, j_{\max} - 1\end{aligned}$$

et l'indice  $k$  comptabilise le nombre d'itération.

Pour accélérer la convergence de notre résolution, on utilisera la surrelaxation : en introduisant le paramètre  $w$  dans les équations (5-15) et (5-16), on obtient :

$$\begin{aligned}\psi^{k+1}(i, j) = & \psi^k(i, j) + \frac{w}{2[\alpha(i, j) + \gamma(i, j)]} \left[ \alpha(i, j) (\psi^k(i-1, j) + \psi^k(i+1, j)) \right. \\ & - \gamma(i, j) (\psi^k(i, j+1) + \psi^k(i, j-1)) \\ & - 0.5 \beta(i, j) (\psi^k(i+1, j-1) + \psi^k(i-1, j+1) - \psi^k(i-1, j-1) - \psi^k(i+1, j+1)) \\ & \left. - 2[\alpha(i, j) + \gamma(i, j)] \psi^k(i, j) \right]\end{aligned}\quad (5-31)$$

$$\text{avec } 1 \leq w < 2$$

Les paramètres de transformation  $\alpha$ ,  $\beta$  et  $\gamma$  contenus dans (5-31) seront discrétisés de la même façon que dans le paragraphe (5-3-4) ; ainsi, les relations (5-19) seront toujours valables.

Remarque:

La discrétisation des dérivées suivant  $\eta$  contenues dans  $V_t$  se fera par l'intermédiaire de la formule suivante :

$$f_{,\eta}(i,1) = 0,5 (4 f(i,2) - f(i,3) - 3 f(i,1)) \quad (5-32)$$

5-4-4-Condition de Kutta-Joukowski :

La valeur de  $\psi$  au niveau de la paroi de notre profil est déterminée en imposant la condition de Kutta-Joukowski.

Pour un profil pointu (droit ou courbé) au niveau du bord de fuite, la vitesse de l'intrados et de l'extrados quittant ce même bord de fuite doit tendre vers une valeur identique.

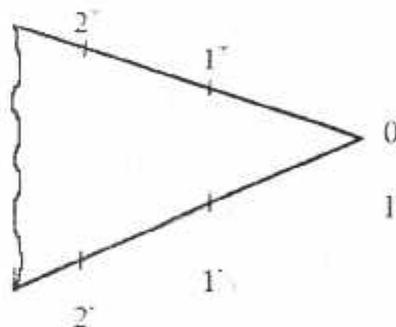
Pour un profil ayant un bord de fuite avec un certain angle, ce bord de fuite doit être impérativement un point d'arrêt.

D'après [1], cette condition sera vérifiée dès que la vitesse tangentielle au niveau du bord de fuite extrapolée à partir des points voisins sur l'extrados, soit égale à celle extrapolée à partir des points voisins sur l'intrados, et cela pour les deux genres de bord de fuite.

Pour nos calculs, cette application se résume comme suit :

$$2 V_t^{(1+)} - V_t^{(2+)} = V_t^{(0)} = 2 V_t^{(1-)} - V_t^{(2-)} \quad (5-33)$$

où l'exposant (0) correspond au bord de fuite, et les autres exposants correspondent successivement aux points voisins comme indiqué sur la figure ci-dessous :



Figure(5-8): Points d'extrapolation pour l'application de la condition de Kutta-Joukowski

#### 5-4-5-Organigramme schématique :

Les étapes du programme de calcul de l'écoulement potentiel (figure(5-9)) se résument de la façon suivante :

- 1) -Dans un premier temps , on choisit l'angle d'incidence .
- 2) -On lit les  $x$  et  $y$  du maillage à partir d'un fichier résultat .
- 3) -Appel de la subroutine ParaTrans afin d'évaluer les paramètres de transformation ( $\alpha$  ,  $\beta$  ,  $\gamma$  et  $j$ ) .
- 4) -Appel de la subroutine CiCl pour évaluer les valeurs initiales de  $\psi$  ainsi que les conditions aux limites .
- 5) -Grâce à la subroutine GAUSS , on itere jusqu'à obtention des différents  $\psi$  de notre grille de calcul .
- 6) -Par l'intermédiaire de la subroutine Kutta , on vérifie la condition de Kutta-Joukowski. Si cette dernière n'est pas vérifiée , on revient à l'étape 5 avec une nouvelle valeur de  $\psi_0$  ; pour le cas contraire , on passe au calcul du  $C_p$  et de l'impression des résultats à partir de la subroutine Resul .

#### Remarque :

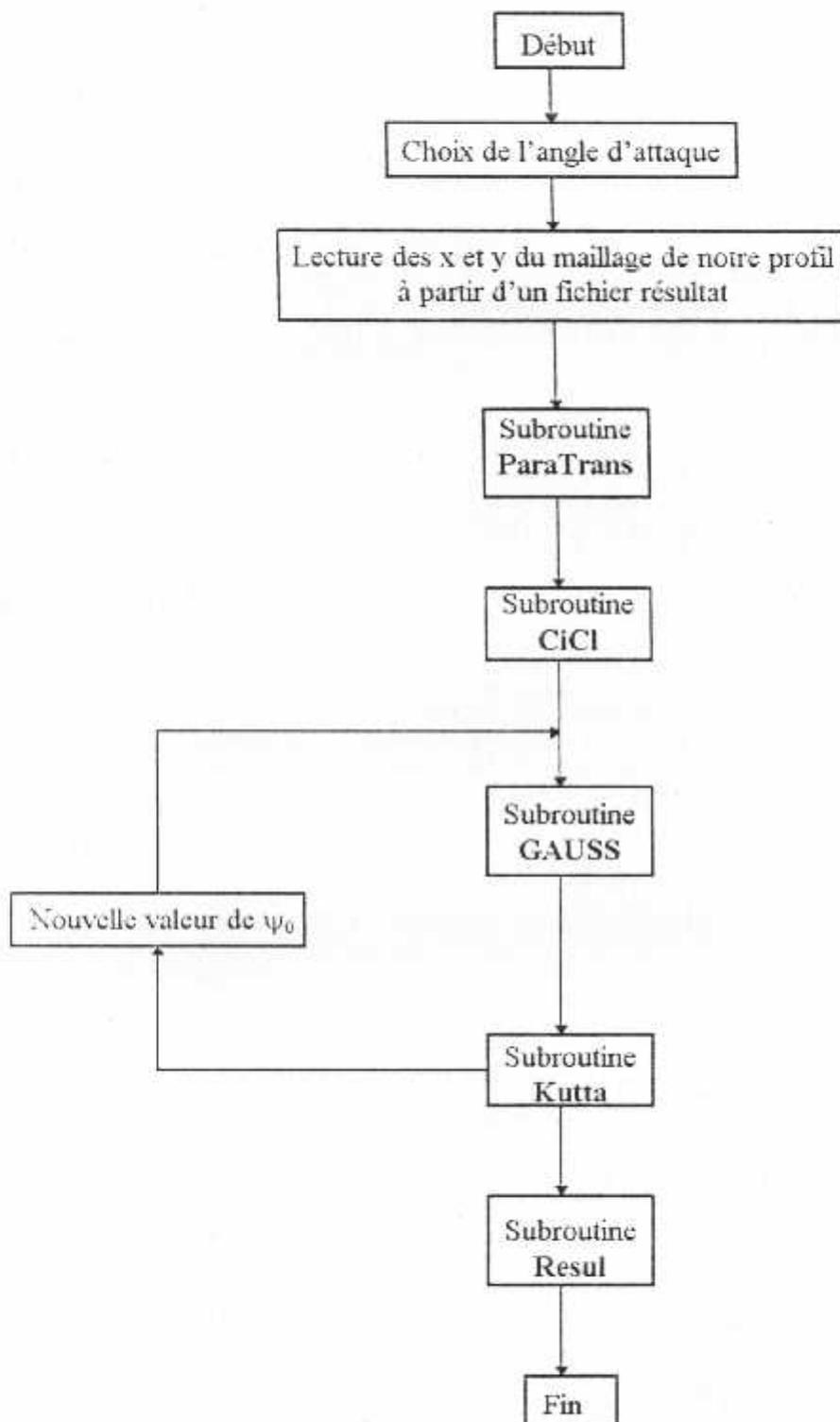
Le calcul de la génération de maillage est totalement indépendant du calcul de l'écoulement potentiel . Ceci est un avantage assez considérable , puisque il nous a permis de séparer les deux programmes de calcul et ainsi un ordinateur avec des performances moyennes a pu être utilisé .

#### 5-4-6-Resultats :

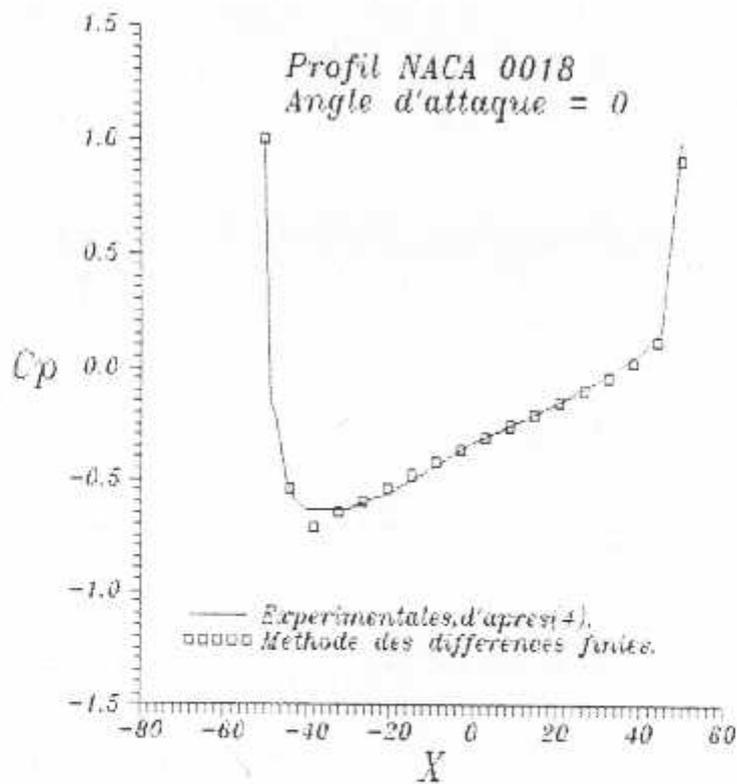
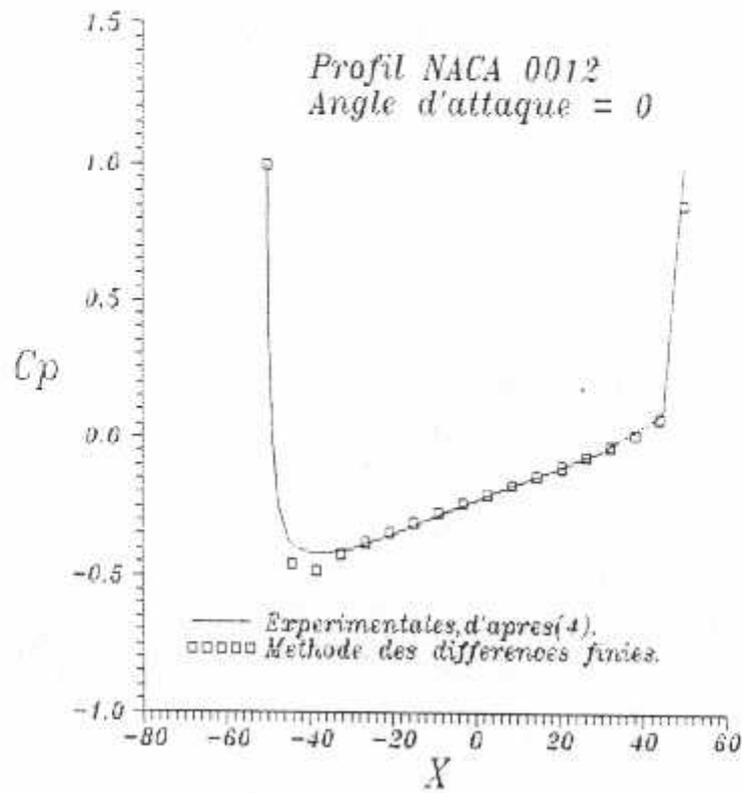
Les résultats des figures (5-10) à (5-19) montrent la variation du  $C_p$  en fonction de la coordonnée adimensionnelle  $X(x/c)$  pour quatre différents profils . ( qui sont le NACA 0012 , le NACA 0018 , le NACA 4412 et le NACA 23012) pour différents angles d'attaque .

On remarque que les résultats générés sont assez satisfaisants comparés à d'autres méthodes (expérience , méthode de Theodorsen , méthode des panneaux ) .

Figure (5-9) : Organigramme schématique du programme de calcul évaluant le  $C_p$ .

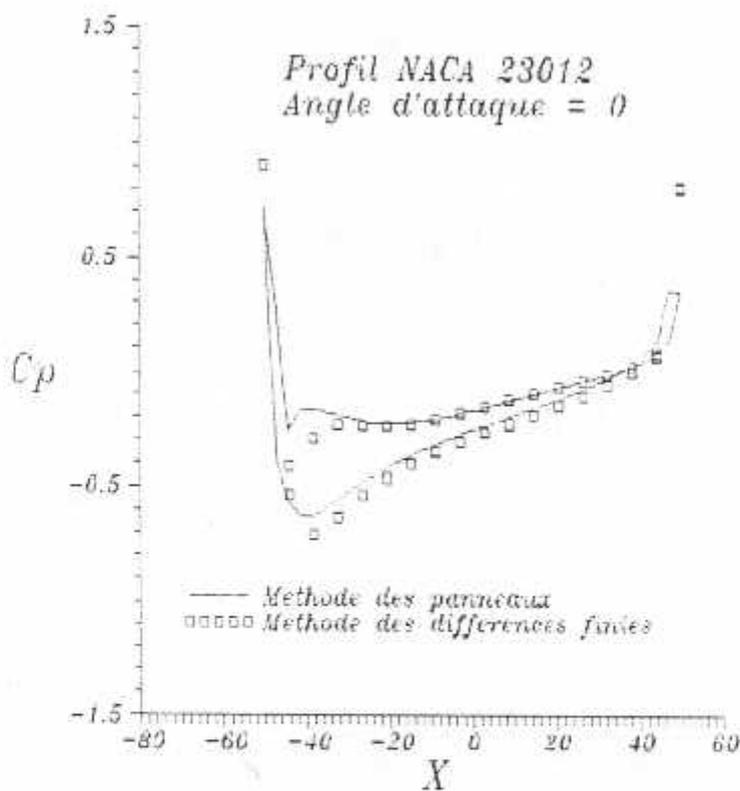
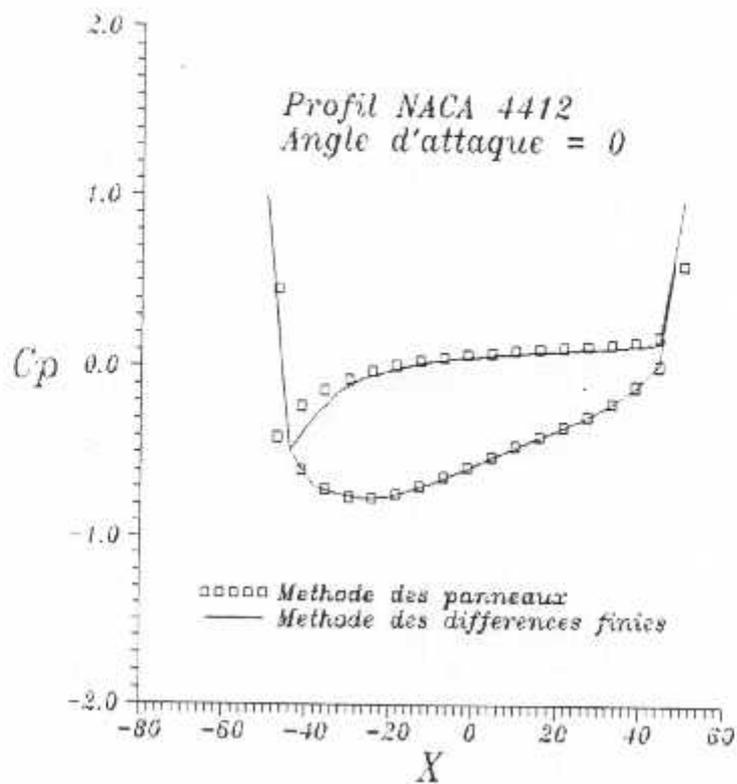


Figure(5-10) : Evolution du Cp autour du NACA 0012 à  $\alpha = 0$



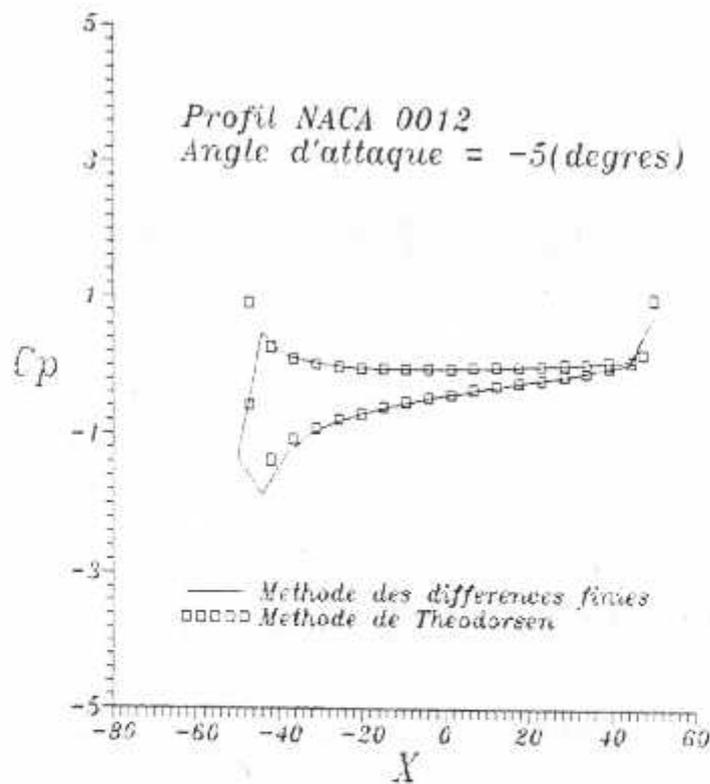
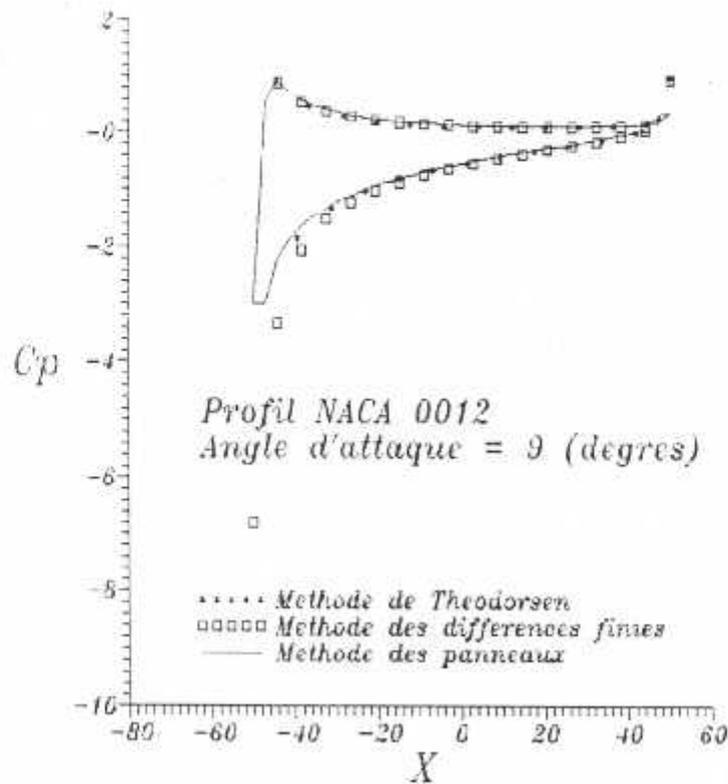
Figure(5-11) : Evolution du Cp autour du NACA 0018 à  $\alpha = 0$

Figure(5-12) : Evolution du  $C_p$  autour du NACA 4412 à  $\alpha = 0$



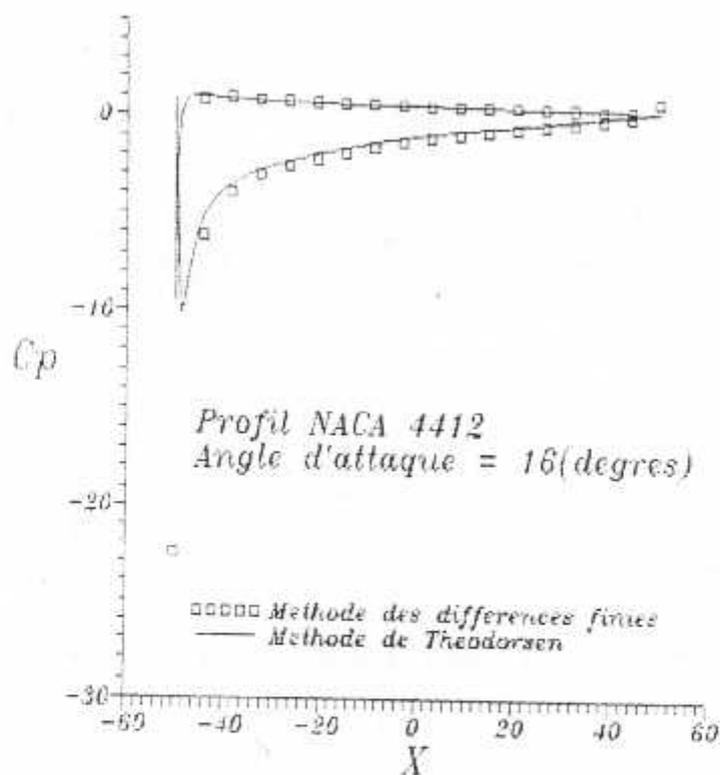
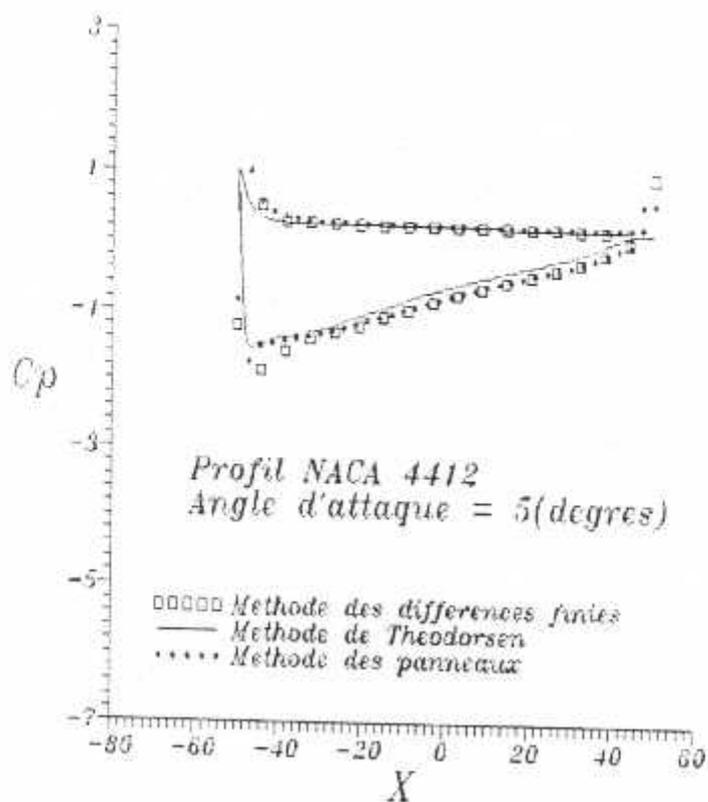
Figure(5-13) : Evolution du  $C_p$  autour du NACA 23012 à  $\alpha = 0$

Figure(5-14) : Evolution du  $C_p$  autour du NACA 0012 à  $\alpha = 9^\circ$



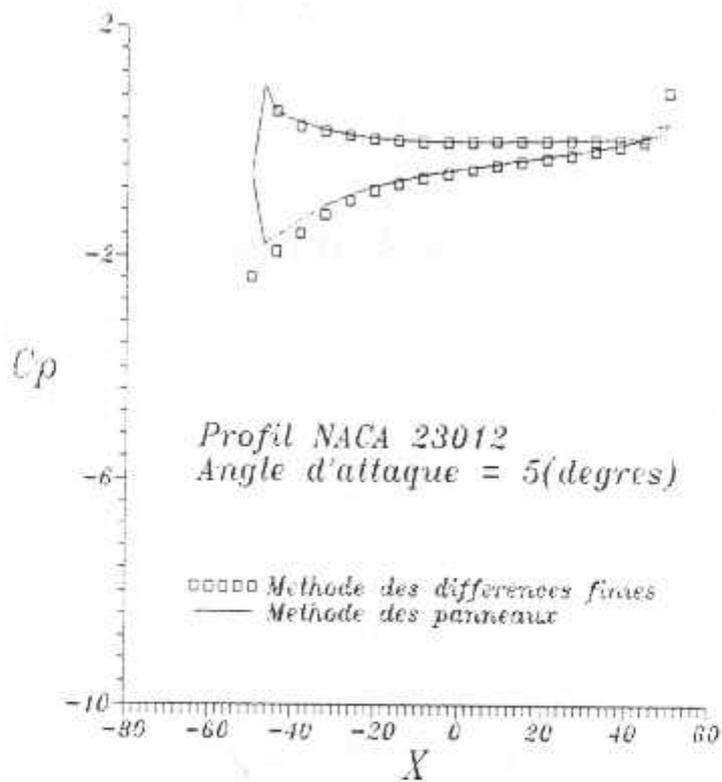
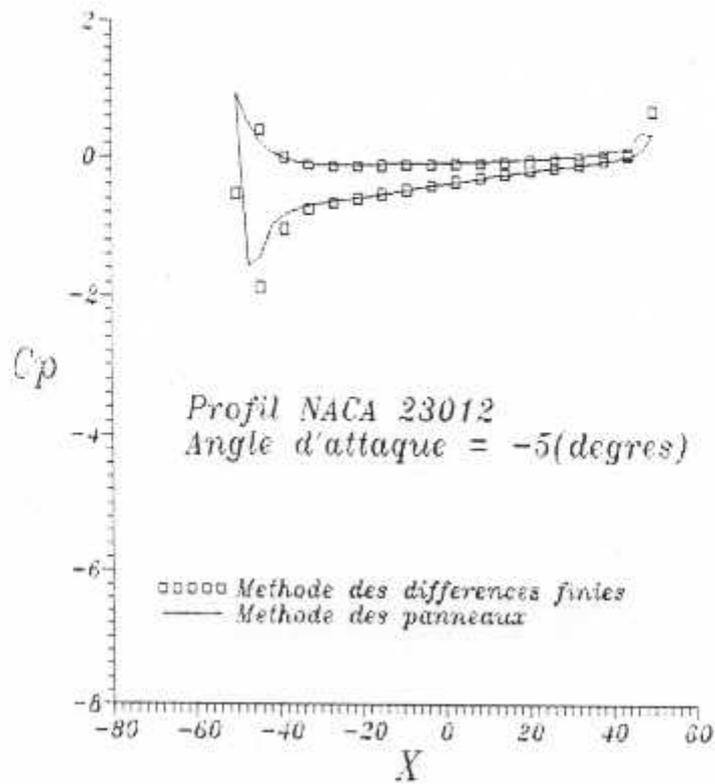
Figure(5-15) : Evolution du  $C_p$  autour du NACA 0012 à  $\alpha = -5^\circ$

Figure(5-16): Evolution du Cp autour du NACA 4412 à  $\alpha = 5^\circ$



Figure(5-17): Evolution du Cp autour du NACA 4412 à  $\alpha = 16^\circ$

Figure(5-18) : Evolution du Cp autour du NACA 23012 à  $\alpha = -5^\circ$



Figure(5-19) : Evolution du Cp autour du NACA 23012 à  $\alpha = 5^\circ$

#### 5-4-7-Conclusion :

L'utilisation de la génération de maillage a permis aux différences finies d'être une méthode très efficace dans le domaine de la simulation numérique d'écoulement autour de géométries complexes . Ceci est réalisé grâce au fait que les frontières du corps à étudier coïncident avec des lignes de coordonnées curvilignes constantes , ce qui évite de "lourdes" interpolations pour prendre en compte les conditions aux limites .

Les différences finies avec génération de maillage est une méthode très puissante , puisqu'elle permet le traitement de n'importe quelle géométrie et plus d'un corps à la fois, ainsi que la prise en charge du cas tridimensionnel .Le seul handicap pour une telle méthode est l'importance de son coût vu la grande place mémoire qu'il faudra réserver . Ceci est dû essentiellement au fait que la méthode des différences finies considère la surface du profil et le champ qui l'entoure ; par contre les autres méthodes vues précédemment considèrent seulement la surface .

**Conclusion sur la première partie du travail  
(calcul de l'écoulement potentiel )**

## Conclusion sur la première partie du travail

Nous venons de voir dans les chapitres précédents les trois méthodes les plus représentatives du calcul de l'écoulement potentiel .

La méthode de Theodorsen est d'un grand avantage pratique vu les bons résultats qu'elle génère avec une mise en oeuvre assez simple . Malheureusement , cette méthode est limitée puisque elle est restreinte seulement au cas bidimensionnel .

Pour ce qui est des différences finies , la grande puissance de cette méthode n'a d'égale que l'importance de son coût et la complexité de sa mise en oeuvre . Cependant , on notera que si l'écoulement visqueux est abordé en résolvant les équations locales de la couche limite par différences finies , il est préférable que le calcul de l'écoulement potentiel soit fait avec cette même méthode . En effet , le maillage généré pour le calcul visqueux est aussi valable pour le calcul de l'écoulement potentiel , ce qui est un gain assez considérable .

La méthode des panneaux est presque aussi simple à mettre en application que la méthode des transformations conformes , sans pour autant en posséder ses faiblesses . En effet , elle s'adapte très bien au cas tridimensionnel avec plusieurs corps de géométrie arbitraire dans le même champs d'écoulement [8] .

Dans les chapitres qui vont suivre , on présentera un calcul de couche limite basé sur les méthodes intégrales . La donnée concernant la vitesse extérieure sera fournie par la méthode des panneaux qui est à notre avis la mieux adaptée à ce genre de calcul .

## **2<sup>eme</sup> partie**

### **Calcul de l'écoulement visqueux**

## **Chapitre 6 :**

**Calcul de la couche limite laminaire**

## Chapitre 6

### Calcul de la couche limite laminaire

#### 6-1-Introduction :

Dans les chapitres précédents , nous avons pu évaluer la force de portance en s'intéressant uniquement à la partie de l'espace éloignée du profil de l'aile . L'étude de l'écoulement dans cette région s'est trouvé simplifiée grâce à l'approximation dite du fluide non visqueux .

Pour ce qui est de la force de traînée , son évaluation ne peut se faire qu'en considérant les effets visqueux du fluide . Ainsi , les approximations de fluide parfait tombent en défauts et les équations qui régissent notre écoulement se compliquent énormément .

Mais comme les effets de la viscosité sont confinés dans une région de très faible épaisseur près de la paroi , les équations de Navier-Stokes se simplifient et deviennent les équations de la couche limite .

Ce chapitre est consacré au calcul de la couche limite laminaire qui sera évalué par les méthodes intégrales . Le choix de ces dernières nous a été dicté par leur simplicité de mise en oeuvre , ainsi que leur très bas coût , comparées aux techniques de résolutions numériques des équations locales .

#### 6-2-Calcul de la couche limite laminaire par les méthodes intégrales :

Le principe repose sur l'idée qu'il n'est pas nécessaire de connaître en détail le comportement des profils de vitesse pour obtenir des résultats pratiques tels que l'évolution du coefficient de frottement pariétal , épaisseur de déplacement et épaisseur de quantité de mouvement .

##### 6-2-1-Equation intégrale de Von-Karman :

L'équation de base des méthodes intégrales est celle de la quantité de mouvement intégrée sur une certaine distance .

On a ,

$$u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{1}{\rho} \frac{dp}{dx} + \nu \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \quad (6-1)$$

L'intégration de l'équation (6-1) entre  $y = 0$  et  $y = \delta(x)$ , avec  $\delta(x)$  limite supérieure de la couche limite, aboutit à une équation différentielle ordinaire dans la direction des  $x$  pour la variable  $\delta_2$  (épaisseur de la quantité de mouvement).

L'équation de Von-Karman s'écrit ,

$$\frac{d}{dx} (u_e^2 \delta_2) + u_e \frac{du_e}{dx} \delta_1 = \frac{\tau_p}{\rho} \quad (6-2)$$

$$\text{avec } \delta_1 = \int_0^{\delta(x)} \left(1 - \frac{u}{u_e}\right) dy \quad (6-3)$$

et

$$\delta_2 = \int_0^{\delta(x)} \frac{u}{u_e} \left(1 - \frac{u}{u_e}\right) dy \quad (6-4)$$

En divisant par  $u_e^2$  et en développant le premier terme, on aboutit à la forme standard de l'équation de Von-Karman .

$$\frac{d\delta_2}{dx} = \frac{\tau_p}{\rho u_e^2} - \frac{1}{u_e} \frac{du_e}{dx} (2\delta_2 + 2\delta_1) = \frac{Cf}{2} - \frac{\delta_2}{u_e} (H-2) \frac{du_e}{dx} \quad (6-5)$$

$$\text{avec } H = \delta_1 / \delta_2 \quad \text{paramètre de forme .} \quad (6-6)$$

### 6-2-2-Méthode de Von Karman-Pohlhausen :

L'équation (6-5) permet de déterminer le développement de la couche limite pourvu qu'une fonction soit trouvée pour la forme du profil de vitesse dans la couche limite. Le profil choisi doit tenir compte des conditions aux limites suivantes :

$$\text{à } y = 0, \quad u = v = 0 \quad (6-7)$$

$$\text{à } y = \delta, \quad u = u_e(x), \quad \frac{\partial u}{\partial y} = \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0 \quad (6-8)$$

De plus à la limite  $y = 0$ , l'équation (6-1) donne :

$$v \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = \frac{1}{\rho} \frac{dp}{dx} = -u_e \frac{du_e}{dx} \quad (6-9)$$

K.Pohlhausen a proposé un polynôme du 4<sup>ème</sup> degré de la forme :

$$\frac{u}{u_e} = a S + b S^2 + c S^3 + d S^4 \quad (6-10)$$

pour  $0 \leq S \leq 1$

avec

$$S = y / \delta(x) \quad (6-11)$$

et

$$\frac{u}{u_e} = 1 \quad \text{pour } S > 1 \quad (6-12)$$

On suppose ainsi que la jonction entre couche limite et écoulement potentiel se fait à une distance finie de la paroi à  $y = \delta(x)$ .

Les coefficients  $a$ ,  $b$ ,  $c$  et  $d$  sont déterminés à l'aide des conditions aux limites (6-7), (6-8) et (6-9).

On introduit la quantité adimensionnelle suivante :

$$\lambda = \frac{\delta^2}{\nu} \frac{du_\epsilon}{dx} \quad (6-13)$$

Le profil de vitesse devient :

$$\frac{u}{u_\epsilon} = (2.S - 2.S^3 + S^4) + \frac{\lambda}{6} S(1-S)^3 \quad (6-14)$$

En remplaçant le profil (6-14) dans les expressions (6-3), (6-4), on obtient :

$$\frac{\delta_1}{\delta} = \frac{3}{10} - \frac{\lambda}{120} \quad (6-15)$$

$$\frac{\delta_2}{\delta} = \frac{37}{315} - \frac{\lambda}{945} - \frac{\lambda^2}{9072} \quad (6-16)$$

Toujours avec le profil (6-14) et à partir de la définition du frottement pariétale, on a :

$$\tau_p = \mu \frac{u_\epsilon}{\delta} \left( 2 + \frac{\lambda}{6} \right) \quad (6-17)$$

La substitution des relations (6-15), (6-16) et (6-17) dans l'équation (6-5) conduit à une équation différentielle en  $\lambda$  :

$$\frac{d\lambda}{dx} = G(\lambda) \frac{u_\epsilon'}{u_\epsilon} + (\lambda + \lambda^2 K(\lambda)) \frac{u_\epsilon''}{u_\epsilon'} \quad (6-18)$$

ou G et K sont des fonctions qui dépendent uniquement de  $\lambda$ .

L'équation différentielle (6-18) peut être intégrée pas à pas, pourvu qu'une valeur initiale de  $\lambda$ , soit donnée ( $u_\epsilon'$  et  $u_\epsilon''$  sont calculés à partir de la solution de l'écoulement potentiel).

### 6-2-3-Méthode de Holstein et Bohlen :

Avec la méthode de Pohlhausen, il est nécessaire de connaître la valeur de  $u_c''$ . Mais le calcul de  $u_c''$  est souvent entaché d'une imprécision considérable.

Afin de contourner cette difficulté, Holstein et Bohlen introduisent un deuxième paramètre de forme  $k$ ,

$$k = \frac{\delta_2^2}{\nu} \frac{du_c}{dx} \quad (6-19)$$

On remplace les formules (6-13) et (6-16) dans le paramètre (6-19), on obtient :

$$k = \lambda \left( \frac{37}{315} - \frac{\lambda}{945} - \frac{\lambda^2}{9072} \right)^2 \quad (6-20)$$

Ainsi,  $k$  est seulement fonction de  $\lambda$ .

L'équation (6-5) peut s'écrire sous la forme,

$$u_c \frac{d}{dx} \left( \frac{\delta_1^3}{\nu} \right) = 2 \left[ \frac{\tau_p \delta_2}{\mu u_c} - k \left( 2 + \frac{\delta_1}{\delta_2} \right) \right] \quad (6-21)$$

Le membre droit de cette équation peut s'écrire comme une fonction de  $k$  et par conséquent une fonction de  $\lambda$ .

On a,

$$\frac{\delta_1}{\delta_2} = \frac{\delta_1}{\delta} \frac{\delta}{\delta_2} = f_1(\delta(k)) = \frac{\frac{3}{10} - \frac{\lambda}{120}}{\frac{37}{315} - \frac{\lambda}{945} - \frac{\lambda^2}{9072}} \quad (6-22)$$

et

$$\begin{aligned} \frac{\tau_p \delta_2}{\mu u_c} &= \frac{\tau_p \delta}{\mu u_c} \frac{\delta_2}{\delta} = f_2(\lambda(k)) \\ &= \left( 2 + \frac{\lambda}{6} \right) \left( \frac{37}{315} - \frac{\lambda}{945} - \frac{\lambda^2}{9072} \right) \end{aligned} \quad (6-23)$$

On remplace les expressions (6-22) et (6-23) dans l'équation (6-21), on obtient :

$$u_c \frac{d}{dx} \left( \frac{\delta_2^2}{v} \right) = 2 \left[ f_2(k) - k(2 + f_1(k)) \right] = F(k) \quad (6-24)$$

L'équation (6-24) est une équation différentielle non linéaire du 1<sup>er</sup> ordre de  $\delta_2^2/v$  en fonction de  $x$ .

$F(k)$  est une fonction universelle ( elle est indépendante de la forme du corps ) ainsi , elle est calculée une fois pour toutes (  $\lambda$  ,  $k$  ,  $F(k)$  ,  $f_1(k)$  et  $f_2(k)$  sont la plupart du temps tabulés ) .

Comme nous allons le voir dans le paragraphe suivant , grâce à Walz et Thwaites la présente méthode va se simplifier encore plus .

#### 6-2-4-Méthode de Walz-Thwaites :

Walz et Thwaites proposèrent de réduire l'équation (6-24) à une simple intégrale par l'introduction d'une approximation sans toutefois qu'il y'ait une perte appréciable de la précision . Ils approximerent la fonction  $F(k)$  par la droite ,

$$F(k) = a - b k \quad (6-25)$$

avec

$$a = 0,47 \quad \text{et} \quad b = 6$$

Cette approximation nous permet d'intégrer analytiquement l'équation (6-24), on obtient :

$$\frac{d}{dx} \left( \frac{\delta_2^2}{v} \right) = \frac{a}{u_c} - \frac{b k}{u_c} \quad (6-26)$$

On remplace le parametre (6-19) dans l'équation (6-26) , et après arrangement , on obtient :

$$u_c^b \frac{\delta_2^2}{v} = \int_0^x a u_c^{b-1} dx + \text{cste} \quad (6-27)$$

Comme à  $x = 0$  , on suppose qu'on a un point d'arrêt , donc  $\text{cste} = 0$ .

Enfin, on a :

$$\frac{\delta_1^2}{c} = \frac{0,45}{U_\infty^6 Re_\infty} \int_0^x U_\infty^5 dx \quad (6-28)$$

avec

$$Re_\infty = \frac{U_\infty c}{\nu}$$

$$\text{et } U_\infty = \frac{u_\infty}{U_\infty}$$

Remarque (1) :

Le procédé utilisé pour obtenir une solution de la couche limite à partir de l'équation (6-28) est beaucoup plus simple que celui consistant à intégrer l'équation (6-24).

Il est à noter aussi que la précision avec laquelle la méthode de Holstein et Bohlen prédit le point de séparation n'est pas très satisfaisante. Pour améliorer cette situation Thwaites fournit des valeurs recommandées de  $H$  et  $F_2 = \tau_p \delta_2 / \mu u_\infty$  (voir tableau (6-1))

Remarque (2) :

Dans toutes les formules vues précédemment, la coordonnée  $x$  représente la longueur de l'arc qui sera représentée dorénavant par  $\sigma$ ,

$$\sigma = \int_0^x \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2} dx \quad (6-29)$$

Tableau (6-1) : Valeurs de H et  $f_2$  recommandées par Thwaites .

| $k = \frac{\delta_2^2}{\nu} \frac{du_x}{dx}$ | $H = \delta_1 / \delta_2$ | $f_2 = \tau_p \delta_2 / \mu u_c$ |
|--|---------------------------|-----------------------------------|
| 0,250  | 2,00                      | 0,500                             |
| 0,200  | 2,07                      | 0,463                             |
| 0,140  | 2,18                      | 0,404                             |
| 0,120  | 2,23                      | 0,382                             |
| 0,100  | 2,28                      | 0,359                             |
| 0,080  | 2,34                      | 0,333                             |
| 0,064  | 2,39                      | 0,313                             |
| 0,048  | 2,44                      | 0,291                             |
| 0,032  | 2,49                      | 0,268                             |
| 0,016  | 2,55                      | 0,244                             |
| 0,000  | 2,61                      | 0,220                             |
| -0,016                                       | 2,67                      | 0,195                             |
| -0,032                                       | 2,75                      | 0,168                             |
| -0,040                                       | 2,81                      | 0,153                             |
| -0,048                                       | 2,87                      | 0,138                             |
| -0,056                                       | 2,94                      | 0,122                             |
| -0,060                                       | 2,99                      | 0,113                             |
| -0,064                                       | 3,04                      | 0,104                             |
| -0,068                                       | 3,09                      | 0,095                             |
| -0,072                                       | 3,15                      | 0,085                             |
| -0,076                                       | 3,22                      | 0,072                             |
| -0,080                                       | 3,30                      | 0,056                             |
| -0,084                                       | 3,39                      | 0,038                             |
| -0,086                                       | 3,44                      | 0,027                             |
| -0,088                                       | 3,49                      | 0,015                             |
| -0,090                                       | 3,55                      | 0,000                             |

### 6-2-5-Algorithmes de calcul :

L'algorithme de calcul se présente comme suit :

- 1-  $x$  et  $y$  et  $U_\infty$  sont des données .
- 2- Calcul de l'abscisse  $\sigma$  à partir de l'intégrale (6-29) .
- 3- Calcul de la dérivée de  $U_\infty$  par rapport à  $\sigma$  .
- 4- Calcul de  $\delta_2$  à partir de l'intégrale (6-28) .
- 5- Calcul du facteur de forme  $k$  (formule (6-19)).
- 6- Calcul de  $H$  ,  $f_2$  et  $Cf$  pour chaque station , en interpolant à partir de la table (6-1) .
- 7- Arrêt des calculs dès que la valeur de  $k$  est égale à  $-0,09$  qui correspond au point de décollement .

### 6-3-Résultats :

La méthode de Thwaites a été mise sous la forme d'un programme de calcul afin d'évaluer la couche limite laminaire . Comme première application , le programme a été testé sur le profil de Joukowski avec le paramètre  $2.h / c$  égale à  $0,12$  (  $h$  = épaisseur et  $c$  = corde du profil ) .

Bien sur , avant de commencer les calculs de la couche limite , l'évaluation de la vitesse extérieure est nécessaire .

La courbe de la figure (6-1) nous donne l'évolution de la vitesse extérieure sur l'extrados du profil de Joukowski à angle d'incidence nul . Nous avons porté en abscisse la vitesse adimensionnelle (  $U_\infty = u_\infty / U_\infty$  ) , et en ordonnée la position longitudinale à l'écoulement (  $\sigma / c$  ) . Ce profil a été obtenu à partir de la méthode des transformations conformes .

On constate que la vitesse est nulle au bord d'attaque , et que par la suite , elle augmente d'une façon très rapide pour atteindre la valeur de  $1,2$  fois celle de l'écoulement extérieure . Cette vitesse va s'amortir très lentement pour atteindre la valeur  $U_\infty$  vers le bord de fuite .

Figure (6-1) : Evolution de la vitesse extérieure autour du profil de Joukowski à angle d'attaque nulle .

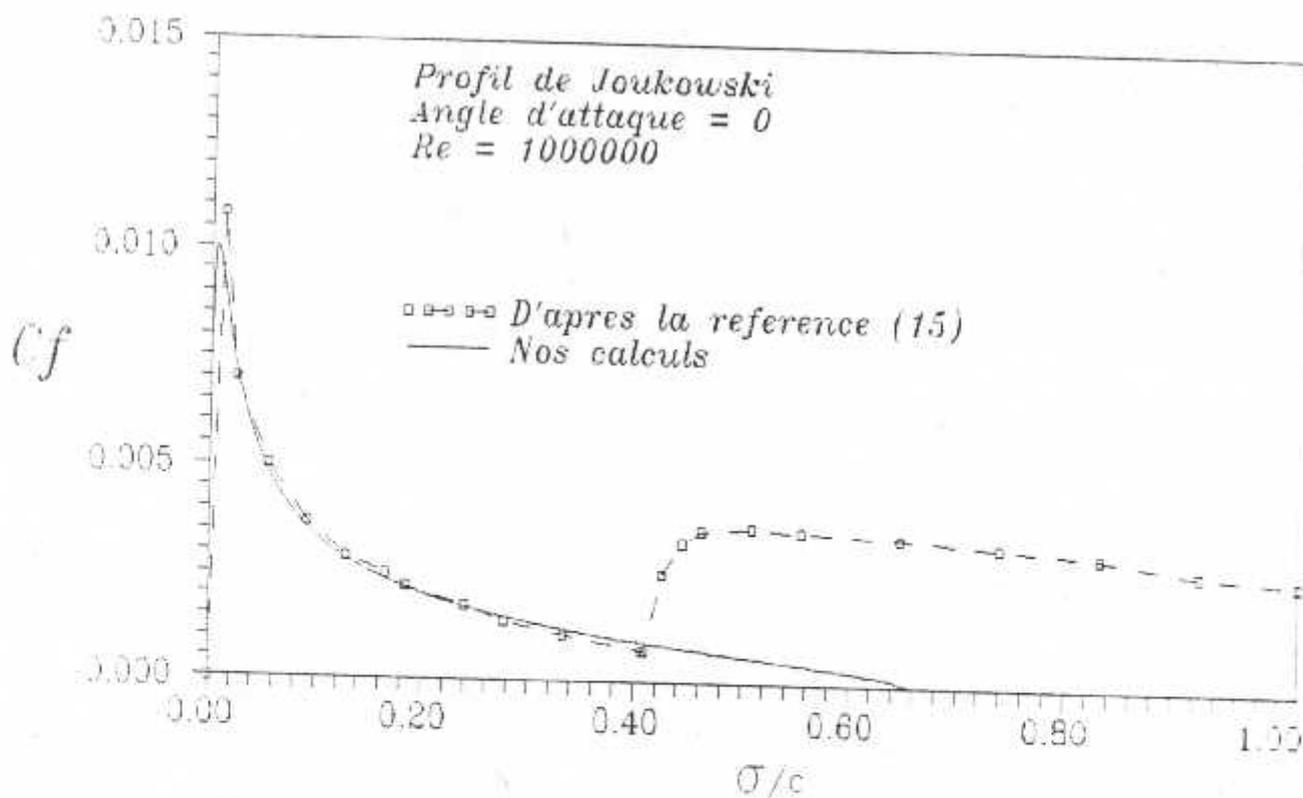
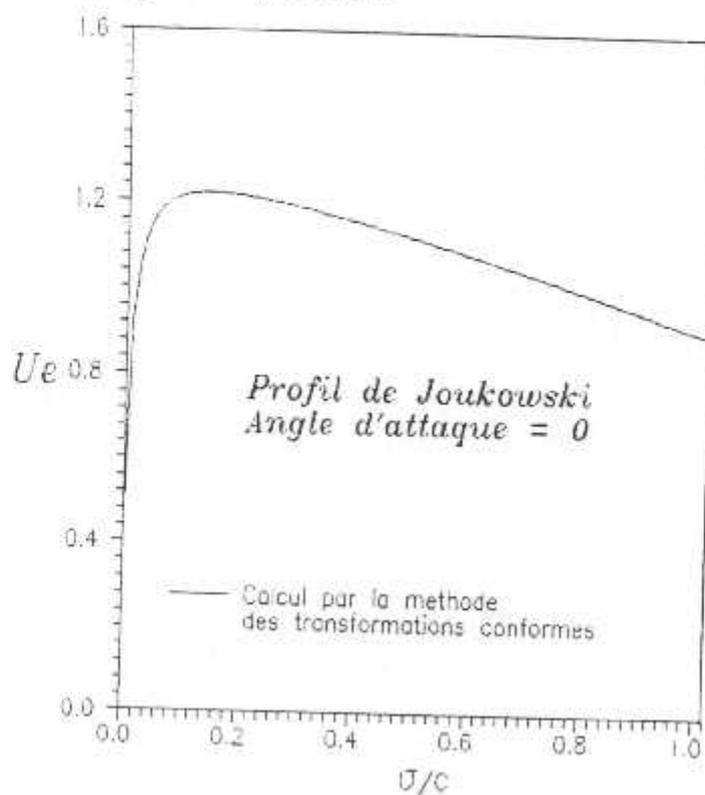


Figure (6-2) : Evolution du coefficient de frottement pariétale autour du profil de Joukowski à angle d'attaque nul et à nombre de Reynolds égale  $10^6$ .

Les courbes de la figure (6-2) , donnent l'évolution du coefficient de frottement pariétale ( $C_f$ ) , porté en ordonnée , en fonction de la coordonnée longitudinale ( $\sigma / c$ ) portée sur l'axe des abscisses.

On remarque une assez bonne concordance entre la courbe évaluée par nos calculs et celle de la référence [15] jusqu'à un certain point . A partir de ce point ( $\sigma / c \approx 0,42$ ) , on note une très grande divergence entre les deux profils .

Cette divergence est expliquée aisément par la non prise en compte du passage de la couche limite laminaire au régime turbulent . Ainsi , le point  $\sigma / c \approx 0,42$  n'est autre que le point de transition .

Si on avait un moyen d'éviter la transition laminaire-turbulent , les frottements pariétales seront bien moindres ; mais le plus grand problème d'une couche limite laminaire est qu'elle a tendance à se décoller de la paroi bien plus facilement que la couche limite turbulente . Comme on peut le voir sur la figure (6-2) , la séparation de la couche limite laminaire est prévue à  $\sigma / c \approx 0,65$  , par contre la couche limite turbulente reste collée à la paroi jusqu'au bord de fuite .

Si nous avons à faire à une aile d'avion , le décollement peut aboutir à une perte de portance assez importante pour constituer un danger pour l'appareil . Ainsi , vu les conséquences très néfastes que peut engendrer ce phénomène , il est donc à éviter à tout prix .

#### 6-4-Conclusion :

Considérer que la couche limite est laminaire sur la totalité du profil est donc faux , ou du moins jusqu'à un certain point comme nous avons pu le voir plus haut .

Ainsi , dans un souci d'améliorer notre modélisation , on est dans l'obligation d'évaluer la couche limite turbulente . Cette dernière fera l'objet d'une investigation plus approfondie dans le chapitre qui va suivre .

## **Chapitre 7 :**

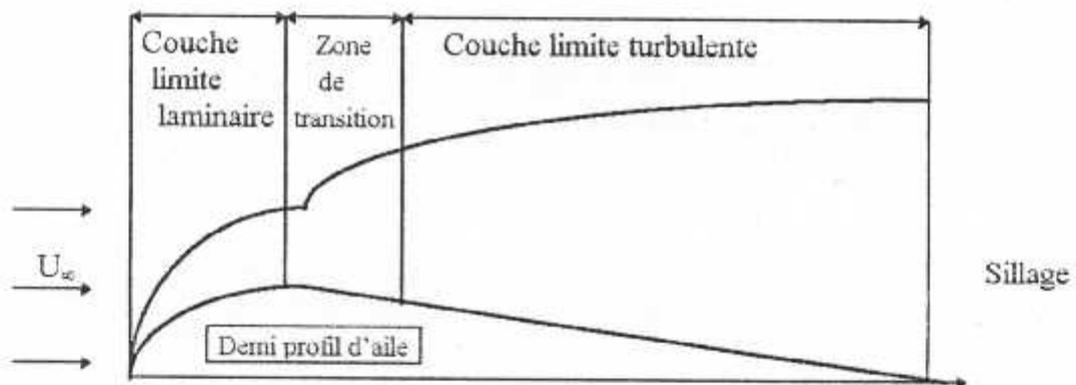
### **Calcul de la couche limite turbulente**

## Chapitre 7

### Calcul de la couche limite turbulente

#### 7-1-Introduction :

En pratique , l'écoulement laminaire existe assez rarement . Par exemple sur les avions , il se rencontre au voisinage du bord d'attaque de l'aile dans une région de dimension assez réduite . Ainsi , pour que notre calcul de couche limite soit le plus réaliste possible , on a intérêt à considérer la configuration d'écoulement autour de notre profil la plus courante , c'est à dire , écoulement laminaire à partir du bord d'attaque , ensuite une zone de transition et tout juste après l'écoulement turbulent et enfin le sillage .



Figure(7-1) : Schématisation de l'écoulement autour d'un demi profil d'aile .

Le calcul de la région de transition et en particulier de sa position est un élément important de la détermination des caractéristiques de la couche limite turbulente qui se développe en aval , car il fixe les conditions initiales de son calcul . Il permet également de connaître le domaine sur lequel la couche limite reste laminaire .

Dans un souci de simplification , la zone de transition sera confondue en un seul point . La détermination de ce point , se fera grâce à des critères basés sur des résultats expérimentaux . Dans ce qui va suivre , on présentera les deux principaux critères qui sont : le critère de Michel et le critère de Cebici .

Pour ce qui est de la couche limite turbulente, son évaluation se fera par une méthode intégrale qui est en l'occurrence celle de HEAD.

## 7-2-Critères généraux de transition :

### 7-2-1-Critère de Michel :

Le critère proposé par Michel résulte d'un regroupement de résultats expérimentaux. Le point de début de transition est défini par une valeur du nombre de Reynolds  $R_{\delta_2}$  formé avec l'épaisseur de quantité de mouvement. Le critère relie la valeur de  $R_{\delta_2}$  à celle du nombre de Reynolds  $R_{\sigma}$  formé avec la longueur  $\sigma$  de développement de la couche limite depuis son origine ; une formule de  $R_{\delta_2}$  est donnée :

$$R_{\delta_2} = 1,535 \cdot R_{\sigma}^{0,444} \quad (7-1)$$

Pour chaque valeur de  $\sigma$  et donc de  $R_{\sigma}$ , le calcul de couche limite laminaire fournit une valeur de  $R_{\delta_2}$ . Le point de transition est atteint lorsque la courbe  $R_{\delta_2}$  calculée en laminaire, coupe la courbe  $R_{\delta_2}$  donné par la relation (7-1).

$R_{\delta_2}$  et  $R_{\sigma}$  sont donnés par les formules suivantes :

$$R_{\delta_2} = R_{\epsilon_w} U_{\epsilon} \frac{\delta_2}{c} \quad (7-2)$$

et

$$R_{\sigma} = R_{\epsilon_w} U_{\epsilon} \frac{\sigma}{c} \quad (7-3)$$

### 6-2-2-Critère de Cebeci et Smith :

La corrélation proposée par Cebeci et Smith n'est qu'une extension du critère de Michel. Ils donnent une relation entre  $R_{\delta_2}$  et  $R_{\sigma}$  au point de transition selon :

$$R_{\delta_2} = 1,174 \left( 1 + \frac{22400}{R_{\sigma}} \right) R_{\sigma}^{0,46} \quad (7-4)$$

### 7-3-Calcul de la couche limite turbulente par les méthodes intégrales :

La plupart des méthodes intégrales de calcul des couches limites turbulentes reposent sur la résolution de l'équation globale de quantité de mouvement ou équation de Von-Karman . Cette équation est aussi valable en laminaire qu'en turbulent , sauf que cette dernière décrit l'écoulement moyen .

Une méthode très simple consiste à supposer que les propriétés de la couche limite de la plaque plane reste approximativement valable ( méthode de Truckenbrodt ) . Il est évident qu'avec une telle méthode , on ne peut espérer en tirer que des estimations , ou des tendances . En particulier , l'approche du décollement n'est pas envisageable .

Des résultats plus précis sont obtenus à l'aide de méthodes faisant appel à un calcul du facteur de forme H . Ces méthodes donnent accès aussi à l'évolution du coefficient de frottement . Pour ce qui est du critère de décollement , il est lié à une valeur du facteur de forme qui correspond à l'annulation du coefficient de frottement .

L'une de ces méthodes est celle développée par Head . C'est une méthode d'une grande précision qui nous permet d'analyser les couches limites turbulentes bidimensionnelles soumises à un gradient de pression .

#### 7-3-1-Méthode de Head :

On considère l'équation de continuité de l'écoulement moyen ,

$$\frac{\partial \bar{u}}{\partial x} + \frac{\partial \bar{v}}{\partial y} = 0 \quad (7-5)$$

On intègre cette équation dans la direction y de couche limite , on obtient :

$$\frac{d}{dx} [u_e (\delta - \delta_1)] = u_e F \quad (7-6)$$

avec

$$F = \frac{1}{u_e} \left( u_e \frac{d\delta}{dx} - \bar{v}_\delta \right) \quad (7-7)$$

L'équation de Von-Karman reste toujours valable , sauf que le Cf représente le coefficient de frottement turbulent .

$$\frac{d\delta_2}{dx} = \frac{Cf_{tur}}{2} - \frac{\delta_2}{u_e} (H+2) \frac{du_e}{dx} \quad (7-8)$$

Les deux équations (7-6) et (7-8) constituent le système d'équation de base de la méthode de Head .

Afin de pouvoir intégrer , Head a avancé l'hypothèse que la fonction F dépend uniquement de  $(\delta - \delta_1) / \delta_2$  et que cette combinaison est à son tour une fonction du paramètre H .

On pose ,

$$H1 = \frac{\delta - \delta_1}{\delta_2} \quad (7-9)$$

On remplace le parametre (7-9) dans l'équation (7-6) , on obtient :

$$\frac{d}{dx} (u_e H1 \delta_2) = u_e F(H1) \quad (7-10)$$

En ce qui concerne F et H1 , Cebeci et Bradshaw proposèrent des relations basées sur l'expérience de la forme ,

$$F = 0,0306 (H1 - 3)^{-0,6169} \quad (7-11)$$

$$\left. \begin{aligned} H1 &= 0,8234 (H - 1,1)^{-1,287} + 3,3 & , H < 1,6 \\ H1 &= 1,5501 (H - 0,6778)^{-1,064} + 3,3 & , H > 1,6 \end{aligned} \right\} \quad (7-12)$$

Enfin , pour fermer notre système , une équation est requise pour le coefficient de frottement turbulent . Ludwig et Tillman recommandent la relation suivante :

$$Cf_{tur} = 0,246 \left( \frac{u_e \delta_2}{\nu} \right)^{-0,268} 10^{-0,678.H} \quad (7-13)$$

Ainsi , les équations (7-8) et (7-10) complétées par les relations (7-11) , (7-12) et (7-13) représentent un système d'équations différentielles de variables H et  $\delta_2$  . Ce système peut être résolu numériquement par la méthode de Runge-Kutta , pour cela il suffit de connaître les conditions initiales ; c'est à dire , tous les paramètres se rapportant au point de transition .

#### 7-4-Calcul du coefficient de traînée ( Cx):

Comme nous avons pu le voir dans les paragraphes précédents , la théorie de la couche limite nous permet de calculer le coefficient de frottement pariétale . Cependant , pour pouvoir calculer le coefficient de traînée , l'investigation du sillage en aval du profil est nécessaire .

En effet , les couches limites qui se développent à l'intrados et à l'extrados d'un profil se fondent en aval pour former le sillage dans lequel il importe de prendre en compte les effets visqueux .

Analyser le sillage en aval d'un profil est une tâche assez ardue mais grâce à H.B.Squire et A.D.Young une méthode assez simple a été établie pour le calcul du Cx .

Comme nous sommes en présence d'un écoulement autour de profil ou la pression au bord de fuite n'est pas égale à la pression de l'écoulement libre , ceci nous amène à chercher l'épaisseur de quantité de mouvement dans le sillage loin du bord de fuite où la pression retourne à la valeur de l'écoulement libre .

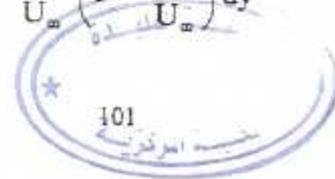
La force de traînée totale sur un corps est :

$$T = b \rho \int_{y=-\infty}^{y=+\infty} u (U_\infty - u) dy \quad (7-14)$$

où u est la distribution de vitesse dans le sillage (loin derrière le corps).

On a l'épaisseur de quantité de mouvement loin dans le sillage  $\delta_{2\infty}$  ,

$$\delta_{2\infty} = \int_{y=-\infty}^{y=+\infty} \frac{u}{U_\infty} \left( 1 - \frac{u}{U_\infty} \right) dy \quad (7-15)$$



et la force de traînée en fonction du  $C_x$ , s'écrit sous la forme :

$$T = \frac{1}{2} \rho b c U_{\infty}^2 C_x \quad (7-16)$$

A partir des relations (7-14), (7-15) et (7-16), on tire :

$$C_x = 2 \frac{\delta_{2\infty}}{c} \quad (7-17)$$

L'essentiel de la méthode de Squire consiste à relier les deux quantités  $\delta_{2\infty}$  et  $\delta_{2BF}$  (épaisseur de quantité de mouvement au bord de fuite) ; comme la théorie de la couche limite nous permet d'évaluer  $\delta_{2BF}$ , ainsi on peut calculer la traînée à partir de la formule (7-17).

L'équation de Von-Karman est toujours valide dans le sillage sauf que la contrainte  $\tau_p$  doit être nulle. Ainsi, on a :

$$\frac{d\delta_1}{dx} + \frac{\delta_1}{U} (H+2) \frac{dU}{dx} = 0 \quad (7-18)$$

avec

$$U = u / U_{\infty}$$

$x$  représente maintenant la distance mesurée à partir du bord de fuite sur la ligne médiane du sillage.

L'équation (7-18) peut s'écrire aussi,

$$\frac{d}{dx}(\log \delta_1) = - (H+2) \frac{d}{dx}(\log U) \quad (7-19)$$

On intègre cette équation sur  $x$ , du bord de fuite jusqu'à un point assez loin dans le sillage, afin d'avoir  $u = U_{\infty}$  et  $P = P_{\infty}$ , on obtient :

$$\log \delta_2 \Big|_{\infty}^{BF} = -[(H+2) \log U]_{\infty}^{BF} + \int_{\infty}^{BF} \log U \frac{dH}{dx} dx \quad (7-20)$$

A une grande distance derrière le profil, on a  $H=1$  et par conséquent l'expression (7-20) devient,

$$\log \frac{\delta_{2BF}}{\delta_{2\infty}} + (H_{BF} + 2) \log U_{BF} = \int_1^{H_{BF}} \log U dH \quad (7-21)$$

Cette équation nous donne la relation entre  $\delta_{2BF}$  et  $\delta_{2\infty}$ , évidemment la valeur de l'intégrale du membre droit doit être connue.

De la relation (7-21) on tire  $\delta_{2\infty}$ ,

$$\delta_{2\infty} = \delta_{2BF} (U_{BF}^{H+2})_{BF} \text{EXP} \left[ \int_1^{H_{BF}} \log \frac{1}{U} dH \right] \quad (7-22)$$

A partir de l'expérience, Squire a pu établir une relation empirique reliant  $\log U$  et  $H$ ,

$$\frac{\log \frac{1}{U}}{H-1} = \frac{\log \frac{1}{U_{BF}}}{H_{BF}-1} = \text{Cst} \quad (7-23)$$

d'où, l'intégrale contenue dans la relation (7-22) qui devient :

$$\int_1^{H_{BF}} \log \frac{1}{U} dH = \frac{H_{BF}-1}{2} \log \frac{1}{U_{BF}} \quad (7-24)$$

On remplace l'intégrale (7-24) dans l'équation (7-22), on obtient :

$$\delta_{2\infty} = \delta_{2BF} \left( U_{BF} \right)^{\frac{H_{BF}+5}{2}} \quad (7-25)$$

Enfin, on substitue la relation (7-25) dans l'équation (7-17) et on obtient le coefficient de traînée totale,

$$C_x = 2 \frac{\delta_{2BF}}{c} U_{BF}^{\frac{H_{BF}+5}{2}} \quad (7-26)$$

#### 7-5-Résolution du système d'équations (7-8) et (7-10) :

La résolution du système d'équations (7-8) et (7-10) complétée par les équations (7-11), (7-12) et (7-13) se fera par la méthode de Runge-Kutta d'ordre quatre. L'intégration débutera au point de transition où les conditions initiales sont déterminées grâce au calcul de la couche limite laminaire. On avancera pas à pas jusqu'au bord de fuite. A chaque station, dès que le critère de décollement de la couche limite est vérifié, on arrête les calculs.

#### 7-6-Organigramme schématique :

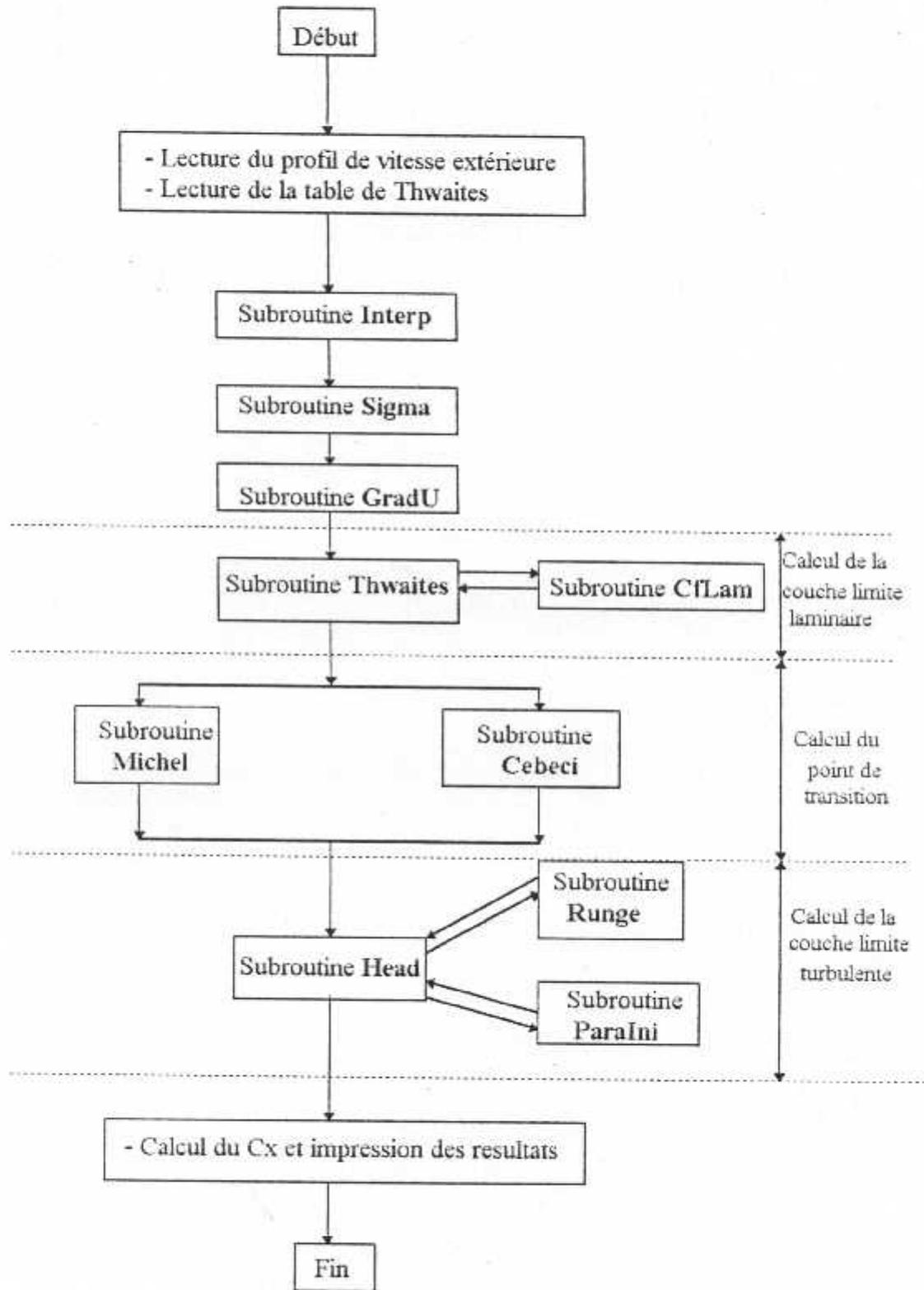
Comme on peut le voir sur l'organigramme schématique (figure(7-2)), les étapes de de notre programme de calcul de l'écoulement visqueux se résument comme suit :

- 1) -On introduit la vitesse extérieure et le profil sous la forme de deux fichiers résultats l'un pour l'intrados et l'autre pour l'extrados .

La table de Thwaites (tableau(6-1)) est aussi introduite dans le programme sous la forme d'un fichier résultats .

- 2) -La seconde étape est l'interpolation des vitesses extérieures et des coordonnées de notre profil. Grâce à la sousroutine `Interp`, on augmente le nombre de points autour de notre profil .

Figure (7-2) : Organigramme schématique du programme de calcul de la couche limite laminaire et turbulente .



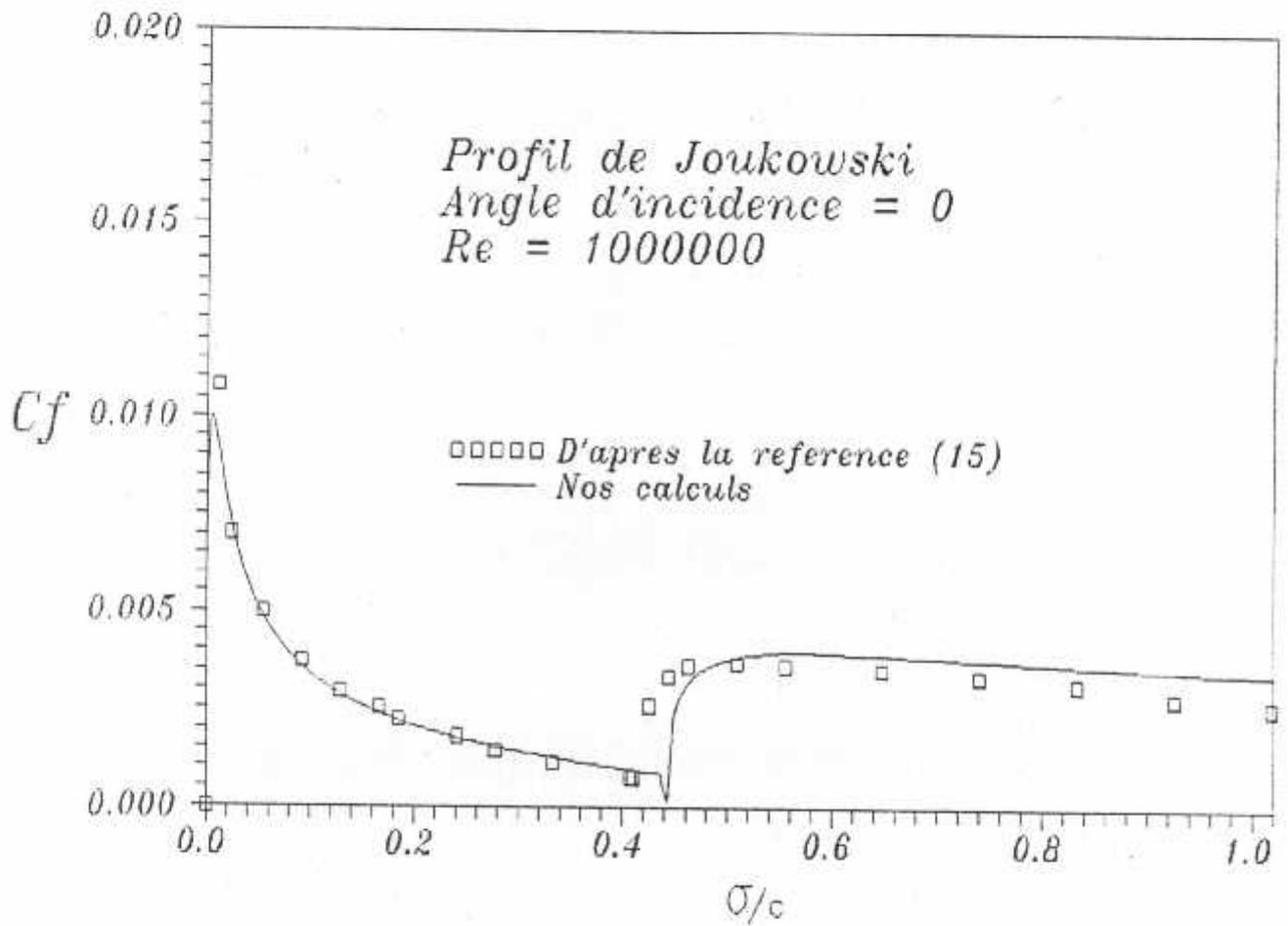
- 3) -Les sous-routines **Sigma** et **GradU** nous permettent respectivement le calcul de la longueur de l'arc pour chaque station et le gradient de la vitesse extérieure par rapport à  $\sigma$ .
- 4) -L'évaluation de la couche limite laminaire est réalisée grâce aux deux sous-routines **Thwaites** et **CfLam**.
- 5) -On passe maintenant à la détermination du point de transition. Pour cela, nous avons le choix entre deux critères ; la sous-routine de **Michel** pour le critère de Michel et la sous-routine **Cebeci** pour le critère de Cebeci et Smith.
- 6) -Le point de transition étant calculé, on peut commencer le calcul de la couche limite turbulente, par l'intermédiaire de la sous-routine **Head**. On fait d'abord appel à la sous-routine **ParaIni** où les paramètres initiaux sont calculés. Ensuite, la sous-routine **Runge** nous permet de résoudre le système d'équations. Enfin, on calcule le  $C_x$  et on imprime les résultats.

#### 7-7-Resultats :

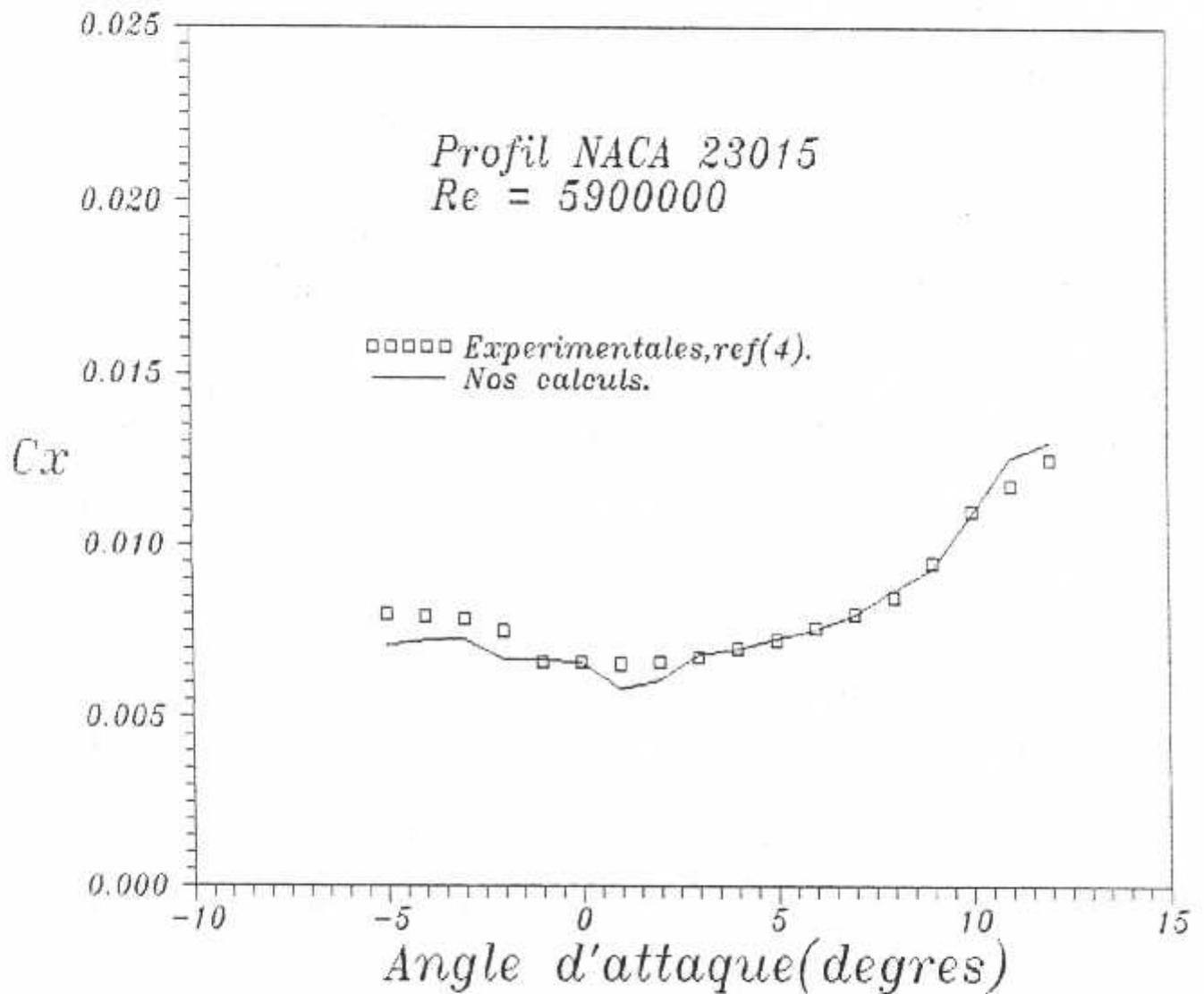
Les courbes de la figure (7-3) nous donnent l'évolution du coefficient de frottement pariétale sur l'extrados du profil de Joukowski à angle d'incidence nul et à  $R_e=10^6$ . Le  $C_f$  a été porté sur l'axe des ordonnées et la coordonnée longitudinale ( $\sigma / c$ ) portée sur l'axe des abscisses. On notera la très bonne concordance entre nos résultats et ceux de la référence [15].

Pour ce qui est de la traînée totale, le programme a été testé sur le profil NACA 23015 à  $R_e = 5,9.10^5$ . Sur la figure (7-4), on a reporté le coefficient  $C_x$  pour différents angles d'incidence. On notera une assez bonne concordance avec les résultats expérimentaux de la référence [4].

**Figure (7-3) :** Evolution du coefficient de frottement pariétale autour du profil de Joukowski à angle d'incidence nul .



**Figure (7-4) :** Evolution du coefficient de traînée autour du NACA 23015 à différents angles d'incidence .



### 7-8-Conclusion :

Les résultats que nous venons de présenter , ne font que confirmer la conclusion déjà dégagée dans le chapitre précédent , à savoir que considérer seulement l'écoulement laminaire est une approche assez éloignée de la réalité (sauf dans certains cas , tels que les ailes de planeurs ou la couche limite reste laminaire sur une grande distance de la corde ).

Ainsi , dans un souci d'une modélisation assez correcte nous avons intérêt à considérer l'écoulement sous sa forme la plus répandue ; c'est à dire , à partir du bord d'attaque , on a le développement d'une couche limite laminaire , cette dernière va se transformer très rapidement (surtout aux grands angles d'attaque) en une couche limite turbulente qui va se maintenir (pour la majorité des cas) jusqu'au bord de fuite .

## **Conclusion générale**

## Conclusion générale

Le présent travail a permis de modéliser les écoulements visqueux incompressibles autour de différents profils d'ailes . Cette modélisation consiste essentiellement à évaluer la portance et la traînée .

Comme nous travaillons à des nombres de Reynolds élevés , l'approximation de fluide parfait est justifiée à l'ensemble de l'écoulement sauf au voisinage des parois où la notion de couche limite s'applique .

Ainsi, notre étude s'est faite en deux parties : on a calculé d'abord l'écoulement potentiel; connaissant la répartition des vitesses tangentielles au profil , on a évalué ensuite les couches limites .

Pour ce qui est du calcul de l'écoulement potentiel , pas moins de trois méthodes ont été testées avec succès ; en l'occurrence : la méthode des transformations conformes , la méthode des panneaux et la méthode des différences finies .

La méthode des transformations conformes donne de très bons résultats mais reste néanmoins assez limitée pour une éventuelle extension au cas tridimensionnel .

Ceci n'est pas le cas pour la méthode des différences finies qui peut traiter n'importe quelles géométries , mais on conçoit que c'est une technique lourde et chère , vu qu'elle s'intéresse à l'ensemble de l'espace qui entoure le profil et non pas seulement à sa surface.

La méthode des panneaux est à notre avis la mieux adaptée au calcul de l'écoulement potentiel puisqu'elle englobe les avantages des deux méthodes précédentes , à savoir , simplicité dans la mise en oeuvre et efficacité , sans toutefois posséder leurs inconvénients.

La seconde partie de notre travail est consacrée à l'étude de l'écoulement visqueux . Toujours avec un souci de simplicité , sans toutefois trop altérer la justesse des résultats, les méthodes intégrales ont été choisies pour le calcul de la couche limite au profit des méthodes de résolution numérique des équations locales .

Grâce à la méthode de Thwaites , un premier calcul est effectué en considérant la couche limite totalement laminaire . Une comparaison avec les résultats de la bibliographie a permis de conclure qu'une telle supposition est juste jusqu'à un certain point de notre profil , où la couche limite change radicalement de régime et devient turbulente .

Ainsi , la formulation qui correspond le mieux à des situations souvent rencontrées dans la réalité est celle d'une couche limite laminaire à partir du bord d'attaque jusqu'au point de transition et ensuite couche limite turbulente jusqu'au bord de fuite .

Arrivé au point de transition qui est évalué par le critère de Michel , la méthode de Thwaites n'est plus valide et c'est la méthode de Head qui prend le relais .

Enfin , comme la traînée totale ne peut se calculer qu'après avoir investi le sillage : Squire et Young nous ont évité cette tâche assez délicate , en reliant d'une façon assez simple l'épaisseur de quantité de mouvement du bord de fuite à celle du sillage loin derrière le profil .

On ne le répètera jamais assez que la solution rigoureuse du problème du calcul de l'écoulement autour d'un profil est obtenue en résolvant les équations complètes de Navier-Stokes . Ceci dit , la présente approche peut être considérablement améliorée , en considérant le couplage entre couche limite et fluide parfait .

En effet , la couche limite induit , par son effet de déplacement , une perturbation du fluide parfait . Ainsi , après un premier calcul , le profil réel est remplacé par une forme fictive obtenue en engraisant le profil de l'épaisseur de déplacement .

La correction ainsi définie est le début d'un processus itératif , dans lequel s'enchaînent les calculs de fluide parfait et de couche limite jusqu'à convergence des résultats .

## Bibliographie

- [1] - J.F. THOMPSON , C.W. MASTIN , F.C. THAMES and R.L. WALKER "Numerical solution for viscous and potential flow about arbitrary two dimensional bodies using body-fitted coordinate systems " , Journal of Computational Physics Volume 24 (1977).
- [2] - J.F. THOMPSON , Z.U.A. WARSI and C.W. MASTIN " Boundary-fitted coordinate systems of numerical solution of partial differential equations - A review -" Journal of Computational Physics Vol. 47 , (1982).
- [3] - J.F. THOMPSON , F.C. THAMES and C.W. MASTIN " TOMCAT- A code for numerical generation of boundary fitted curvilinear coordinate systems on field containing any number of arbitrary two dimensional bodies " Journal of Computational Physics Vol. 24 , (1977).
- [4] - I.H. ABBOTT and A.E. VON DOENHOFF , " Theory of wing sections " , Dover publications , Inc. New York (1958).
- [5] - D.C. IVES , " A modern look at conformal mapping , including doubly connected regions " A.I.A.A. Journal 14 (1974) .
- [6] - J.L. HESS and H. M. O. SMITH , " Calculation of potential flow about arbitrary bodies " , Douglas Aircraft , California .
- [7] - F.T. JOHNSON , " A general pannel method for the analysis and design of arbitrary configurations in incompressible flows " , N.A.S.A. Scientific and technical information office (1980).
- [8] - Dean R. CHAPMAN , " Computational aerodynamics development and outlook 17<sup>th</sup> aerospace sciences meeting " , Dryden Lecture Schip in Research , New Orleans (1979).
- [9] - S.V. PATANKAR , " Numerical heat transfer and fluid flow " , Mc Graw-Hill Book Company .
- [10]- B. SPALDING , " GENMIX - A general computer program for two dimensional parabolic phenomena " , Pergamon Press .
- [11]- H. SCHLICHTING , " Boundary Layer " , Mc Graw-Hill Book Company .
- [12]- J. COUSTEIX , " Couche limite laminaire " , Cepadues Editions .
- [13] - J. COUSTEIX , " Couche limite turbulente " , Cepadues Editions .

- [14]- A. HAMADOUCHE , " Simulation numérique de l'écoulement d'un fluide parfait autour d'un profil d'aile fixe à incidence variable " , Thèse de Magister , U.S.T.H.B. (1994).
- [15]- I. L. RYHMING , " Dynamique des fluides " , Presse Polytechnique Romandes (1985).
- [16]- C. A. J. FLETCHER , " Computational techniques for fluid dynamics " , Volume 1 et 2 , Springer-Verlag .
- [17]- L. M. Milne THOMSON , " Theoretical Aerodynamics " , Dover publications , Inc. New York (1966).
- [18]- J. D. ANDERSON , Jr. " Fundamentals of Aerodynamics " , Mc Graw-Hill Book Company.
- [19]- H. BENTRAD , " Développement d'un logiciel de calcul des caractéristiques aérodynamiques de profils et ailes d'avion " , Mémoire d'ingénieur U.S.T.B. (1991).
- [20]- M. DAMOU , " Mécanique des fluides " , O.P.U. , Alger (1994).

# ANNEXE

## Programmes de calcul

- 1<sup>er</sup> programme : calcul de l'écoulement potentiel par la méthode des transformations conformes.
- 2<sup>ème</sup> programme : calcul de l'écoulement potentiel par la méthode des panneaux.
- 3<sup>ème</sup> programme : génération de maillage.
- 4<sup>ème</sup> programme : calcul de l'écoulement potentiel par la méthode des différences finies.
- 5<sup>ème</sup> programme : calcul de la couche limite laminaire et turbulente.

```

c .....
c .....
c CALCUL DES ECOULEMENTS POTENTIEL PAR LA METHODE DES TRANSFORMATIONS
c ..... CONFORMES (METHODE DE THEODORSEN) .....
c .....
c .....

```

```

COMMON /B1/ X(200),Y(200),TETAR(200),TETAD(200),PSI(200)
COMMON /B2/ PSIR(300),A(300),B(300),EPSI(200)
COMMON /B3/ profil,N,N1,N2,N3,NR,NR1,NR3,ALPHA,EPSIT,pszero
COMMON /B4/ Cp(200),phi(200),dpsi(200),depsi(200)

```

```

OPEN(unit=1,file='Resul.dat')

```

```

WRITE(*,*) 'Donner le nombre de point de coordonnees'
WRITE(*,*) 'Nombre impair(de preference 75)'
READ(*,*) Imax
WRITE(*,*) 'Donner le nombre de terme de la serie '
WRITE(*,*) '(de preference 70)'
READ(*,*) NR
WRITE(*,*) 'Choisir le profil '
WRITE(*,*) '1-pour profil symétrique '
WRITE(*,*) '2-pour profil asymétrique '
READ(*,*) Profil

```

```

N2=Imax

```

```

N1=(N2+1)/2

```

```

IF(profil.eq.2) GOTO 10

```

```

call symetrique(Imax)

```

```

GOTO 20

```

```

10 CALL Asymetrique(Imax)

```

```

20 DO 30 i=1,Imax

```

```

x(i)=(x(i)*100.)-50.

```

```

y(i)=y(i)*100.

```

```

30 CONTINUE

```

```

WRITE(*,*) 'Donner l angle d attaque(en degres)'

```

```

READ(*,*) alpha

```

```

ALPHA=ALPHA*3.1415/180.

```

```

CALL PsiTeta

```

```

CALL PsiZero

```

```

CALL abCoeff

```

```

CALL CpCoeff

```

```

CL=6.2830*EXP(PSZERO)*SIN(ALPHA+EPSIT)

```

```

ALPHA=ALPHA*180./3.1415

```

```

WRITE(*,100) ALPHA,CL

```

```

100 FORMAT(/,15X,'ALPHA=',E12.5,5X,'COEF DE PORTANCE',E12.5)

```

```

STOP

```

```

END

```

```

SUBROUTINE Symetrique(Imax)

```

```

COMMON /B1/ X(200),Y(200),TETAR(200),TETAD(200),PSI(200)

```

```

WRITE(*,*) 'Choisir un des profils symetrique suivant(donner rt)'

```

```

WRITE(*,*) '1-NACA 0006 (rt=0.004)'

```

```

WRITE(*,*) '2-NACA 0008 (rt=0.007)'

```

```

WRITE(*,*) '3-NACA 0009 (rt=0.0089)'

```

```

WRITE(*,*) '4-NACA 0010 (rt=0.011)'

```

```

WRITE(*,*) '5-NACA 0012 (rt=0.0158)'

```

```

WRITE(*,*) '6-NACA 0015 (rt=0.0248)'

```

```

WRITE(*,*) '7-NACA 0018 (rt=0.0356)'

```

```

WRITE(*,*) '8-NACA 0021 (rt=0.0485)'

```

```

WRITE(*,*) '9-NACA 0024 (rt=0.0633)'
READ(*,*) rt
Imax1=(Imax+1)/2
DO 1 i=1,Imax1
x(i)=0.
y(i)=0.
x(i)=(1.-(i-1)*(1.)/(Imax1-1.))
1 CONTINUE
K=Imax1-1
L=Imax1+1
Imax2=2*Imax1-1
DO 2 i=1,Imax1-1
y(i)=(sqrt(rt/1.1019))*(0.29690*(sqrt(x(i)))-0.12600*x(i)
S-0.35160*x(i)**2
S+0.28430*x(i)**3
S-0.10150*x(i)**4)/0.20
2 CONTINUE
y(Imax1)=0.000000001
DO 3 i=Imax1+1,Imax2
x(L)=x(K)
y(L)=-y(K)
L=L+1
K=K-1
3 CONTINUE
RETURN
END

```

```

SUBROUTINE Asymetrique(Imax)
COMMON /B1/ X(200),Y(200),TETAR(200),TETAD(200),PSI(200)
DOUBLE PRECISION phi(8)
Imax1=(Imax+1)/2
DO 1 i=1,imax1
x(i)=0.
y(i)=0.
x(i)=(1-(i-1.)/(Imax1-1.))
1 CONTINUE
K=Imax1-1
L=Imax1+1
Imax2=2*Imax1-1
DO 2 i=Imax1+1,Imax2
x(L)=x(K)
L=L+1
K=K-1
2 CONTINUE
WRITE(*,*) 'Choisir entre les deux profils asymetrique suivant: '
WRITE(*,*) '1-NACA23012'
WRITE(*,*) '2-NACA4412'
READ(*,*) Asy
IF(asy.eq.2) GOTO 10
phi(1)= 0.016955109284027
phi(2)= -0.077365460194414
phi(3)= 2.199568749405440
phi(4)= -7.824367756024000
phi(5)= 13.379377109929900
phi(6)= -12.854000883176900
phi(7)= 6.545965610072020
phi(8)= -1.384813630953430
DO 3 i=1,Imax1
y(i)=phi(1)+phi(2)*x(i)+phi(3)*x(i)**2
S+phi(4)*x(i)**3+phi(5)*x(i)**4+phi(6)*x(i)**5

```

```

$+phi(7)*x(i)**6+phi(8)*x(i)**7
3 CONTINUE
  phi(1)= 0.354145568159936D-004
  phi(2)= -0.131151300867714
  phi(3)= 0.133237437068601
  phi(4)= 0.597101568244398
  phi(5)= -4.067424035631120
  phi(6)= 8.522782626561820
  phi(7)= -7.373001024825500
  phi(8)= 2.317247563216370
DO 4 i=Imax1+1,Imax2-1
  y(i)=phi(1)+phi(2)*x(i)+phi(3)*x(i)**2
  $+phi(4)*x(i)**3+phi(5)*x(i)**4+phi(6)*x(i)**5
  $+phi(7)*x(i)**6+phi(8)*x(i)**7
4 CONTINUE
  y(Imax2)=y(1)
  GOTO 20
10  phi(1)= 0.001451487876693
  phi(2)= 0.205581063288264
  phi(3)= 0.011021066689864
  phi(4)= -0.290816199965775
  phi(5)= 2.083885192871090
  phi(6)= -5.882311638444660
  phi(7)= 5.987669821828600
  phi(8)= -2.116379898507150
DO 5 i=1,Imax1
  y(i)=phi(1)+phi(2)*x(i)+phi(3)*x(i)**2
  $+phi(4)*x(i)**3+phi(5)*x(i)**4+phi(6)*x(i)**5
  $+phi(7)*x(i)**6+phi(8)*x(i)**7
5 CONTINUE
  phi(1)= -0.834229539670162D-005
  phi(2)= -0.111238262456254
  phi(3)= -0.393018653372565
  phi(4)= 2.831192172394370
  phi(5)= -6.221109763835560
  phi(6)= 7.124165682005700
  phi(7)= -4.318045345367860
  phi(8)= 1.087808740616310
DO 6 i=Imax1+1,Imax2-1
  y(i)=phi(1)+phi(2)*x(i)+phi(3)*x(i)**2
  $+phi(4)*x(i)**3+phi(5)*x(i)**4+phi(6)*x(i)**5
  $+phi(7)*x(i)**6+phi(8)*x(i)**7
6 CONTINUE
  y(Imax2)=y(1)
20 DO 7 i=1,Imax2
  x(i)=x(i)**2
7 CONTINUE
  RETURN
  END

```

SUBROUTINE PsiTeta

```

COMMON /B1/ X(200),Y(200),TETAR(200),TETAD(200),PSI(200)
COMMON /B2/ PSIR(300),A(300),B(300),EPSI(200)
COMMON /B3/ profil,N,N1,N2,N3,NR,NR1,NR3,ALPHA,EPSIT,pszero
DO i I=1,N2
  X(I)=X(I)/25.
  Y(I)=Y(I)/25.
  PI=1.-(X(I)*0.5)**2-(Y(I)*0.5)**2
  PI1=(PI+SQRT(PI**2+Y(I)**2))*0.5
  PI2=SQRT(PI1)

```

```

TETAR(I)=ASIN(PI2)
IF ( X(I).LT.0..AND.Y(I).GT.0.) TETAR(I)=3.1415-TETAR(I)
IF ( X(I).LT.0..AND.Y(I).LT.0.) TETAR(I)=3.1415+TETAR(I)
IF ( X(I).GE.0..AND.Y(I).LT.0.) TETAR(I)=6.2830-TETAR(I)
TETAD(I)=TETAR(I)*180./3.1415
PSI(I)=LOG(Y(I)*0.5/SIN(TETAR(I))+SQRT(1.+(Y(I)*0.5/
&SIN(TETAR(I)))**2))
X(I)=X(I)*25.
Y(I)=Y(I)*25.
1 CONTINUE
RETURN
END

```

```

SUBROUTINE Psirr
COMMON /B1/ X(200),Y(200),TETAR(200),TETAD(200),PSI(200)
COMMON /B2/ PSIR(300),A(300),B(300),EPSI(200)
COMMON /B3/ profil,N,N1,N2,N3,NR,NR1,NR3,ALPHA,EPSIT,pszero
NR1=NR-1
NR2=2*NR-1
NR3=2*NR
ANGLE=0.0
DO 1 L=1,NR3
CALL INTERP(I,L,ANGLE)
ANGLE=ANGLE+3.1415/FLOAT(NR)
1 CONTINUE
RETURN
END

```

```

SUBROUTINE PSIzero
COMMON /B1/ X(200),Y(200),TETAR(200),TETAD(200),PSI(200)
COMMON /B3/ profil,N,N1,N2,N3,NR,NR1,NR3,ALPHA,EPSIT,pszero
pszero=0
N3=N2-1
DO 1 I=1,N3
IF (Y(I).EQ.0.0) GO TO 1
PSZERO=PSZERO+0.5*(PSI(I+1)+PSI(I))*(TETAR(I+1)-TETAR(I))
1 CONTINUE
PSZERO=PSZERO/(TETAR(N3)-TETAR(1))
RETURN
END

```

```

SUBROUTINE interp(i,l,angle)
COMMON /B1/ X(200),Y(200),TETAR(200),TETAD(200),PSI(200)
COMMON /B2/ PSIR(300),A(300),B(300),EPSI(200)
COMMON /B3/ profil,N,N1,N2,N3,NR,NR1,NR3,ALPHA,EPSIT,pszero
I=1
TETAR(1)=0.
TETAR(N2)=6.2830
1 IF((TETAR(I)-ANGLE)*(TETAR(I+1)-ANGLE)) 2,2,3
3 I=I+1
GO TO 1
2 PSIR(L)=PSI(I)+(PSI(I+1)-PSI(I))*(ANGLE-TETAR(I))/
S(TETAR(I+1)-TETAR(I))
RETURN
END

```

```

SUBROUTINE abCoeff
COMMON /B1/ X(200),Y(200),TETAR(200),TETAD(200),PSI(200)
COMMON /B2/ PSIR(300),A(300),B(300),EPSI(200)

```

```

COMMON /B3/ profil,N,N1,N2,N3,NR,NR1,NR3,ALPHA,EPSIT,pszero
CALL PSirr
DO 1 I=1,NR1
A(I)=0.0
B(I)=0.0
DO 2 J=1,NR3
HIJ=FLOAT(I*J)*3.1415/FLOAT(NR)
A(I)=A(I)+PSIR(J)*COS(HIJ)
B(I)=B(I)+PSIR(J)*SIN(HIJ)
2 CONTINUE
A(I)=A(I)/FLOAT(NR)
B(I)=B(I)/FLOAT(NR)
1 CONTINUE
A(NR)=0.0
SIGN=1.0
DO 3 J=1,NR3
A(NR)=A(NR)+SIGN*PSIR(J)
SIGN=-SIGN
3 CONTINUE
A(NR)=A(NR)/FLOAT(NR3)
RETURN
END

```

```

SUBROUTINE Epsilon
COMMON /B1/ X(200),Y(200),TETAR(200),TETAD(200),PSI(200)
COMMON /B2/ PSIR(300),A(300),B(300),EPSI(200)
COMMON /B3/ profil,N,N1,N2,N3,NR,NR1,NR3,ALPHA,EPSIT,pszero
COMMON /B4/ Cp(200),phi(200),dpsi(200),depsi(200)
IF (ALPHA.NE.0.0.AND.profil.EQ.1) N1=N3
IF (PROFIL.EQ.2) N1=N3
DO 1 I=1,N1
EPSI(I)=0.0
1 CONTINUE
DO 2 L=1,10
DO 3 I=1,N1
H1=TETAR(I)+EPSI(I)
H2=PSI(I)
H3=0.0
H4=0.0
H5=0.0
DO 4 J=1,NR1
HJ=FLOAT(J)
HJ1=HJ*H1
H3=H3+A(J)*SIN(HJ1)-B(J)*COS(HJ1)
H4=H4+HJ*B(J)*COS(HJ1)-HJ*A(J)*SIN(HJ1)
H5=H5+HJ*B(J)*SIN(HJ1)+HJ*A(J)*COS(HJ1)
+ CONTINUE
HJ=FLOAT(NR)
HJ1=HJ*H1
H3=H3+A(NR)*SIN(HJ1)
IF (I.EQ.1) EPSIT=H3
H4=H4-HJ*A(NR)*SIN(HJ1)
H5=H5+HJ*A(NR)*COS(HJ1)
phi(i)=H1
psi(i)=H2
EPSI(I)=H3
dpsi(i)=H4
depsi(i)=H5
3 CONTINUE
2 CONTINUE

```

RETURN  
END

```
SUBROUTINE CpCoeff
COMMON /B1/ X(200),Y(200),TETAR(200),TETAD(200),PSI(200)
COMMON /B2/ PSIR(300),A(300),B(300),EPSI(200)
COMMON /B3/ profil,N,N1,N2,N3,NR,NR1,NR3,ALPHA,EPSIT,pszero
COMMON /B4/ Cp(200),phi(200),dpsi(200),depsi(200)
CALL Epsilon
IF (ALPHA.NE.0.0.AND.PROFIL.EQ.1) N1=N3
IF (PROFIL.EQ.2) N1=N3
DO 1 I=1,N1
H6=(1.+depsi(i))*EXP(PSZERO)
H7=(SINH(psi(i))*SINH(psi(i))+SIN(phi(i))*SIN(phi(i)))
S*(1.+dpsi(i)*dpsi(i))
F=H6/SQRT(H7)
VELR=F*ABS(SIN(ALPHA-EPSIT)-SIN(ALPHA-phi(i)-epsi(i)))
S=VELR*VELR
CP(i)=1-S
1 CONTINUE
DO 2 I=1,n1,2
WRITE(1,200) X(I),Y(I),CP(i)
200 FORMAT(9X,5E14.5)
2 CONTINUE
WRITE(1,200) X(n1),Y(n1),CP(n1)
RETURN
END
```

PROGRAMME DE CALCUL DES ECOULEMENTS POTENTIEL  
 AUTOUR DE PROFIL D AILE PAR LA METHODE  
 DES PANNEAUX (avec distribution de vortex)

```

    IMPLICIT DOUBLE PRECISION(x,y,s,t,a,g,v,c)
    COMMON /zone1/ x(74),y(74),xc(74),yc(74),S(74),TETA(74)
    COMMON /zone2/ Cn1(74,74),Cn2(74,74)
    COMMON /zone3/ Ct1(74,74),Ct2(74,74)
    COMMON /zone4/ An(74,74),At(74,74),Gama(74),Vt(74)
    COMMON /zone5/ b(74)
    
```

```

    OPEN(unit=1,file='RESUL2.dat')
    
```

```

    WRITE(*,*) 'Choisir le profil '
    WRITE(*,*) '1-pour profil symétrique '
    WRITE(*,*) '2-pour profil asymétrique '
    READ(*,*) Pro
    WRITE(*,*) 'Donner le nombre de panneaux (de preference 68) '
    READ(*,*) m
    N1=1+m/2
    WRITE(*,*) 'Donner l angle d attaque(en degres)'
    READ(*,*) pha
    pha=pha*3.1415/180.
    IF(pro.eq.2) GOTO 1
    CALL symetrique(m,N1)
    GOTO 2
    
```

```

1 CALL Asymetrique(m,N1)
2 WRITE(*,*) 'Patienter,SVP'
    
```

Appel de la subroutine calculant les caracteristiques  
 des points de control

```

    CALL PtControl(m,pha)
    
```

Appel de la subroutine calculant les coefficients C

```

    CALL Ccoeff(m)
    
```

Appel de la subroutine calculant les densites de circulation

```

    WRITE(*,*) 'Choisir la methode de resolution du systeme '
    WRITE(*,*) '1-pour la methode de Jordan sans pivotation '
    WRITE(*,*) '2-pour la methode de Jordan avec pivotation totale'
    WRITE(*,*) '3-pour la methode de Gauss avec pivotation partielle'
    READ(*,*) Methode
    WRITE(*,*) 'Patienter,SVP'
    IF(methode.eq.1) GOTO 3
    IF(methode.eq.2) GOTO 4
    CALL Gauss(m)
    GOTO 5
    
```

```

    WRITE(*,*) 'Patienter,SVP'
    
```

```

    IF(methode.eq.1) GOTO 3
    IF(methode.eq.2) GOTO 4
    
```

```

    CALL Gauss(m)
    GOTO 5
    
```

```

3 CALL Jordan(m)
    GOTO 5
    
```

```

4 CALL JordanPiv(m)
    
```

Appel de la subroutine calculant Cp

```

5 CALL Cp(m,pha,pro)
    
```

```

    STOP
    END
    
```

```

SUBROUTINE symetrique(m,N1)
    
```

```

    IMPLICIT DOUBLE PRECISION(x,y,s,t,a,g,v,c)
    COMMON /zone1/ x(74),y(74),xc(74),yc(74),S(74),TETA(74)
    
```

```

    WRITE(*,*) 'Choisir un des profils symetrique suivant(donner rt)'
    WRITE(*,*) '1-NACA 0006 (rt=0.004)'
    WRITE(*,*) '2-NACA 0008 (rt=0.007)'
    WRITE(*,*) '3-NACA 0009 (rt=0.0089)'
    
```

00000000

PROGRAMME DE CALCUL DES ECOULEMENTS POTENTIEL  
AUTOUR DE PROFIL D AILE PAR LA METHODE  
DES PANNEAUX (avec distribution de vortex)

```
IMPLICIT DOUBLE PRECISION(x,y,s,t,a,g,v,c)  
COMMON /zone1/ x(74),y(74),xc(74),yc(74),S(74),TETA(74)  
COMMON /zone2/ Cn1(74,74),Cn2(74,74)  
COMMON /zone3/ Ct1(74,74),Ct2(74,74)  
COMMON /zone4/ An(74,74),At(74,74),Gama(74),Vt(74)  
COMMON /zone5/ b(74)
```

```
OPEN(unit=1,file='RESUL2.dat')
```

```
WRITE(*,*) 'Choisir le profil '  
WRITE(*,*) '1-pour profil symétrique '  
WRITE(*,*) '2-pour profil asymétrique '  
READ(*,*) Pro  
WRITE(*,*) 'Donner le nombre de panneaux (de preference 68) '  
READ(*,*) m  
N1=1+m/2  
WRITE(*,*) 'Donner l angle d attaque(en degres)'  
READ(*,*) pha  
pha=pha*3.1415/180.  
IF(pro.eq.2) GOTO 1  
CALL symetrique(m,N1)  
GOTO 2
```

```
1 CALL Asymetrique(m,N1)  
2 WRITE(*,*) 'Patienter,SVP'
```

..... Appel de la subroutine calculant les caracteristiques  
..... des points de control

```
CALL PtControl(m,pha)
```

..... Appel de la subroutine calculant les coefficients C

```
CALL Ccoeff(m)
```

..... Appel de la subroutine calculant les densites de circulation

```
WRITE(*,*) 'Choisir la methode de resolution du systeme '  
WRITE(*,*) '1-pour la methode de Jordan sans pivotation '  
WRITE(*,*) '2-pour la methode de Jordan avec pivotation totale '  
WRITE(*,*) '3-pour la methode de Gauss avec pivotation partielle '  
READ(*,*) Methode
```

```
WRITE(*,*) 'Patienter,SVP'  
IF(methode.eq.1) GOTO 3  
IF(methode.eq.2) GOTO 4  
CALL Gauss(m)  
GOTO 5
```

```
3 CALL Jordan(m)  
GOTO 5  
4 CALL JordanPiv(m)
```

..... Appel de la subroutine calculant Cp

```
5 CALL Cp(m,pha,pro)  
STOP
```

```
END
```

```
SUBROUTINE symetrique(m,N1)  
IMPLICIT DOUBLE PRECISION(x,y,s,t,a,g,v,c)  
COMMON /zone1/ x(74),y(74),xc(74),yc(74),S(74),TETA(74)  
WRITE(*,*) 'Choisir un des profils symetrique suivant(donner rt) '  
WRITE(*,*) '1-NACA 0006 (rt=0.004) '  
WRITE(*,*) '2-NACA 0008 (rt=0.007) '  
WRITE(*,*) '3-NACA 0009 (rt=0.0089) '
```

```

WRITE(*,*) '4-NACA 0010 (rt=0.011)'
WRITE(*,*) '5-NACA 0012 (rt=0.0158)'
WRITE(*,*) '6-NACA 0015 (rt=0.0248)'
WRITE(*,*) '7-NACA 0018 (rt=0.0356)'
WRITE(*,*) '8-NACA 0021 (rt=0.0485)'
WRITE(*,*) '9-NACA 0024 (rt=0.0633)'
READ(*,*) rt
DO 1 i=1,N1
x(i)=0.0
y(i)=0.0
x(i)=(1.-(i-1.)/(N1-1.))
1 CONTINUE
K=N1-1
L=N1+1
N2=2*N1-1
DO 2 i=N1+1,N2
x(L)=x(K)
L=L+1
K=K-1
2 CONTINUE
DO 3 i=1,N1
y(i)=-{sqrt(rt/1.1019))*(0.29690*(sqrt(x(i)))-0.12600*x(i)
S-0.35160*x(i)**2
S+0.28430*x(i)**3
S-0.10150*x(i)**4)/0.20
3 CONTINUE
DO 4 i=N1+1,N2
y(i)=(sqrt(rt/1.1019))*(0.29690*(sqrt(x(i)))-0.12600*x(i)
S-0.35160*x(i)**2
S+0.28430*x(i)**3
S-0.10150*x(i)**4)/0.20
4 CONTINUE
RETURN
END

```

```

SUBROUTINE Asymetrique(m,N1)
IMPLICIT DOUBLE PRECISION(x,y,s,t,a,g,v,c)
COMMON /zone1/ x(74),y(74),xc(74),yc(74),S(74),TETA(74)
DOUBLE PRECISION phi(8)
DO 1 i=1,N1
x(i)=0.
y(i)=0.
x(i)=(1.-(i-1.)/(N1-1.))
x(i)=dsqrt(x(i))
1 CONTINUE
K=N1-1
L=N1+1
N2=2*N1-1
DO 2 i=N1+1,N2
x(L)=x(K)
L=L+1
K=K-1
2 CONTINUE
WRITE(*,*) 'Choisir entre les deux profils asymetrique suivant:'
WRITE(*,*) '1-NACA23012'
WRITE(*,*) '2-NACA4412'
READ(*,*) Asy
IF(asy.eq.2) GOTO 3
phi(1)= 0.354145568159936D-004
phi(2)= -0.131151300867714

```

```

phi(3)= 0.133237437068601
phi(4)= 0.597101568244398
phi(5)= -4.067424035631120
phi(6)= 8.522782626561820
phi(7)= -7.373001024825500
phi(8)= 2.317247563216370
DO 4 i=1,N1
y(i)=phi(1)+phi(2)*x(i)+phi(3)*x(i)**2
S+phi(4)*x(i)**3+phi(5)*x(i)**4+phi(6)*x(i)**5+phi(7)*x(i)**6
S-phi(8)*x(i)**7
4 CONTINUE
phi(1)= 0.016955109284027
phi(2)= -0.077365460194414
phi(3)= 2.199568749405440
phi(4)= -7.824367756024000
phi(5)= 13.379377109929900
phi(6)= -12.854000883176900
phi(7)= 6.545965610072020
phi(8)= -1.384813630953430
DO 5 i=N1+1,N2
y(i)=phi(1)+phi(2)*x(i)+phi(3)*x(i)**2
S+phi(4)*x(i)**3+phi(5)*x(i)**4+phi(6)*x(i)**5+phi(7)*x(i)**6
S+phi(8)*x(i)**7
5 CONTINUE
GOTO 6
6 phi(1)= -0.834229539670162D-005
phi(2)= -0.111238262456254
phi(3)= -0.393018653372565
phi(4)= 2.831192172394370
phi(5)= -6.221109763835560
phi(6)= 7.124165682005700
phi(7)= -4.318045345367860
phi(8)= 1.087808740616310
DO 7 i=1,N1
y(i)=phi(1)+phi(2)*x(i)+phi(3)*x(i)**2
S+phi(4)*x(i)**3+phi(5)*x(i)**4+phi(6)*x(i)**5+phi(7)*x(i)**6
S+phi(8)*x(i)**7
7 CONTINUE
phi(1)= 0.001451487876693
phi(2)= 0.295581063288264
phi(3)= 0.011021066689864
phi(4)= -0.290816199965775
phi(5)= 2.083885192871090
phi(6)= -5.882311638444660
phi(7)= 5.987669821828600
phi(8)= -2.116379898507150
DO 8 i=N1+1,N2
y(i)=phi(1)+phi(2)*x(i)+phi(3)*x(i)**2
S+phi(4)*x(i)**3+phi(5)*x(i)**4+phi(6)*x(i)**5+phi(7)*x(i)**6
S+phi(8)*x(i)**7
8 CONTINUE
9 DO 9 i=1,N2
x(i)=x(i)**2
9 CONTINUE
RETURN
END

```

```

SUBROUTINE PtControl(m,pha)
IMPLICIT DOUBLE PRECISION(x,y,s,t,a,g,v,c)
COMMON /zone1/ x(74),y(74),xc(74),yc(74),S(74),TETA(74)

```

```

COMMON /zone5/ b(74)
DO 1 i=1,m
  xc(i)=0.5*(x(i)+x(i+1))
  yc(i)=0.5*(y(i)+y(i+1))
  S(i)=SQRT((x(i+1)-x(i))**2+(y(i+1)-y(i))**2)
  Teta(i)=Atan((y(i+1)-y(i))/(x(i+1)-x(i)))
  b(i)=Sin(Teta(i)-pha)
1 CONTINUE
  RETURN
  END

SUBROUTINE Ccoeff(m)
IMPLICIT DOUBLE PRECISION(x,y,s,t,a,g,v,c)
COMMON /zone1/ x(74),y(74),xc(74),yc(74),S(74),TETA(74)
COMMON /zone2/ Cn1(74,74),Cn2(74,74)
COMMON /zone3/ Ct1(74,74),Ct2(74,74)
COMMON /zone5/ b(74)
DO 1 i=1,m
DO 2 j=1,m
  IF(1.Eq.j) GOTO 3
  A4=(x(j)-xc(i))*(Cos(teta(j)))+(y(j)-yc(i))*(Sin(teta(j)))
  A3=(xc(i)-x(j))**2+(yc(i)-y(j))**2
  B1=Sin(Teta(i)-Teta(j))
  A2=Cos(Teta(i)-Teta(j))
  B2=(xc(i)-x(j))*(Sin(teta(j)))-(yc(i)-y(j))*(Cos(teta(j)))
  B3=dlog((1.+S(j)*(S(j)+2.*A4)/A3))
  B4=atan2(B2*S(j),A3+A4*S(j))
  B5=(xc(i)-x(j))*(Cos(teta(i)-2.*Teta(j)))
  S=(yc(i)-y(j))*(Sin(teta(i)-2.*teta(j)))
  D1=(xc(i)-x(j))*(Sin(teta(i)-2.*Teta(j)))
  S+(yc(i)-y(j))*(Cos(teta(i)-2.*teta(j)))
  Cn2(i,j)=A2+(0.5*B5*B3/S(j))-B4*(B2*A2+A4*B1)/S(j)
  Cn1(i,j)=0.5*A2*B3+B1*B4-Cn2(i,j)
  Ct2(i,j)=B1+(0.5*D1*B3/S(j))+B4*(A4*A2-B1*B2)/S(j)
  Ct1(i,j)=0.5*B1*B3-A2*B4-Ct2(i,j)
  GOTO 2
3 Cn1(i,j)=-1.
  Cn2(i,j)=1.
  Ct1(i,j)=0.5*3.1415
  Ct2(i,j)=0.5*3.1415
2 CONTINUE
1 CONTINUE
  RETURN
  END

SUBROUTINE AnCcoeff(m)
IMPLICIT DOUBLE PRECISION(x,y,s,t,a,g,v,c)
COMMON /zone2/ Cn1(74,74),Cn2(74,74)
COMMON /zone4/ An(74,74),At(74,74),Gama(74),Vt(74)
COMMON /zone5/ b(74)
DO 1 i=1,m
  An(i,1)=Cn1(i,1)
  An(i,m+1)=Cn2(i,m)
DO 2 j=2,m
  An(i,j)=Cn1(i,j)+Cn2(i,j-1)
2 CONTINUE
1 CONTINUE
DO 3 j=2,m
  An(m+1,j)=0.0
3 CONTINUE

```

```

COMMON /zone5/ b(74)
DO 1 i=1,m
  xc(i)=0.5*(x(i)+x(i+1))
  yc(i)=0.5*(y(i)+y(i+1))
  S(i)=SQRT((x(i+1)-x(i))**2+(y(i+1)-y(i))**2)
  Teta(i)=Atan((y(i+1)-y(i)),(x(i+1)-x(i)))
  b(i)=Sin(Teta(i)-pha)
1 CONTINUE
  RETURN
  END

SUBROUTINE Ccoeff(m)
IMPLICIT DOUBLE PRECISION(x,y,s,t,a,g,v,c)
COMMON /zone1/ x(74),y(74),xc(74),yc(74),S(74),TETA(74)
COMMON /zone2/ Cn1(74,74),Cn2(74,74)
COMMON /zone3/ Ct1(74,74),Ct2(74,74)
COMMON /zone5/ b(74)
DO 1 i=1,m
DO 2 j=1,m
  If(1.Eq.j) GOTO 3
  A4=(x(j)-xc(i))*(Cos(teta(j)))+(y(j)-yc(i))*(Sin(teta(j)))
  A3=(xc(i)-x(j))**2+(yc(i)-y(j))**2
  B1=Sin(Teta(i)-Teta(j))
  A2=Cos(Teta(i)-Teta(j))
  B2=(xc(i)-x(j))*(Sin(teta(j)))-(yc(i)-y(j))*(Cos(teta(j)))
  B3=dlog((1.+S(j))*(S(j)+2.*A4)/A3))
  B4=atan2(B2*S(j),A3+A4*S(j))
  B5=(xc(i)-x(j))*(Cos(teta(i)-2.*Teta(j)))
  S=(yc(i)-y(j))*(Sin(teta(i)-2.*teta(j)))
  D1=(xc(i)-x(j))*(Sin(teta(i)-2.*Teta(j)))
  S+(yc(i)-y(j))*(Cos(teta(i)-2.*teta(j)))
  Cn2(i,j)=A2+(0.5*B5*B3/S(j))-B4*(B2*A2+A4*B1)/S(j)
  Cn1(i,j)=0.5*A2*B3+B1*B4-Cn2(i,j)
  Ct2(i,j)=B1+(0.5*D1*B3/S(j))+B4*(A4*A2-B1*B2)/S(j)
  Ct1(i,j)=0.5*B1*B3-A2*B4-Ct2(i,j)
  GOTO 2
3 Cn1(i,j)=-1.
  Cn2(i,j)=1.
  Ct1(i,j)=0.5*3.1415
  Ct2(i,j)=0.5*3.1415
2 CONTINUE
1 CONTINUE
  RETURN
  END

SUBROUTINE AnCcoeff(m)
IMPLICIT DOUBLE PRECISION(x,y,s,t,a,g,v,c)
COMMON /zone2/ Cn1(74,74),Cn2(74,74)
COMMON /zone4/ An(74,74),At(74,74),Gama(74),Vt(74)
COMMON /zone5/ b(74)
DO 1 i=1,m
  An(i,1)=Cn1(i,1)
  An(i,m+1)=Cn2(i,m)
DO 2 j=2,m
  An(i,j)=Cn1(i,j)+Cn2(i,j-1)
2 CONTINUE
1 CONTINUE
DO 3 j=2,m
  An(m+1,j)=0.0
3 CONTINUE

```

```

An(m+1,1)=1.
An(m+1,m+1)=1.
b(m+1)=0.0
RETURN
END

```

```

SUBROUTINE AtCoeff(m)
IMPLICIT DOUBLE PRECISION(x,y,s,t,a,g,v,c)
COMMON /zone3/ Ct1(74,74),Ct2(74,74)
COMMON /zone4/ An(74,74),At(74,74),Gama(74),Vt(74)
DO 1 i=1,m
At(i,1)=Ct1(i,1)
At(i,m+1)=Ct2(i,m)
DO 2 j=2,m
At(i,j)=Ct1(i,j)+Ct2(i,j-1)
2 CONTINUE
1 CONTINUE
RETURN
END

```

```

SUBROUTINE Jordan(m)
IMPLICIT DOUBLE PRECISION(x,y,s,t,a,g,v,c)
COMMON /zone4/ An(74,74),At(74,74),Gama(74),Vt(74)
COMMON /zone5/ b(74)
CALL AnCoeff(m)
c..... Augmentation de la matrice A
DO 1 i=1,m+1
An(i,m+2)=b(i)
1 CONTINUE
DO 2 k=1,m+1
pivot=an(k,k)
c..... Normalisation
DO 3 j=k,m+2
An(k,j)=An(k,j)/pivot
3 CONTINUE
c..... Reduction
DO 4 i=1,m+1
pivot=an(i,k)
IF(k.eq.i) GOTO 4
DO 5 j=k,m+2
An(i,j)=An(i,j)-An(k,j)*pivot
5 CONTINUE
4 CONTINUE
2 CONTINUE
c..... Calcul du vecteur solution
DO 6 i=1,m+1
Gama(i)=An(i,m+2)
6 CONTINUE
RETURN
END

```

```

SUBROUTINE jordanPiv(m)
IMPLICIT DOUBLE PRECISION(x,y,s,t,a,g,v,c)
DOUBLE PRECISION P(74),w
INTEGER l(74),c(74)
COMMON /zone4/ An(74,74),At(74,74),Gama(74),Vt(74)
COMMON /zone5/ b(74)
epsilon=1e-3
CALL AnCoeff(m)
c..... Augmentation de la matrice A

```

```

DO 1 i=1,m+1
An(i,m+2)=b(i)
1 CONTINUE
DO 2 k=1,m+1
*..... Recherche du pivot P(k)
P(k)=0.
DO 3 i=1,m+1
DO 4 j=1,m+1
IF(k.gt.1)then
DO 5 n=1,k-1
IF(i.eq.1(n)) GOTO 3
IF(j.eq.c(n)) GOTO 4
5 CONTINUE
END IF
IF(abs(an(i,j)).gt.abs(p(k)))then
p(k)=an(i,j)
l(k)=i
c(k)=j
ENDIF
4 CONTINUE
3 CONTINUE
IF(abs(p(k)).lt.epsilon)then
WRITE(*,*) 'Pivot=',P(k),' Inferieur à epsilon'
stop 'probleme pivot'
ENDIF
*..... Normalisation
DO 6 j=1,m+2
An(l(k),j)=An(l(k),j)/P(k)
6 CONTINUE
*..... Reduction
DO 7 i=1,m+1
IF(i.ne.l(k))then
w=an(i,c(k))
DO 8 j=1,m+2
an(i,j)=an(i,j)-w*an(l(k),j)
8 CONTINUE
ENDIF
7 CONTINUE
2 CONTINUE
+..... Rearrangement du vecteur solution
DO 9 k=1,m+1
gama(c(k))=an(l(k),m+2)
9 CONTINUE
RETURN
END

SUBROUTINE gauss(m)
IMPLICIT DOUBLE PRECISION(x,y,s,t,a,g,v,c)
DOUBLE PRECISION P(74),w
INTEGER l(74)
COMMON /zone4/ An(74,74),At(74,74),Gama(74),Vt(74)
COMMON /zone5/ b(74)
epsilon=1e-3
CALL AnCoeff(m)
*..... Augmentation de la matrice A
DO 1 i=1,m+1
An(i,m+2)=b(i)
1 CONTINUE
DO 2 k=1,m
*..... Recherche du k-ième pivot P(k)

```

```

P(k)=0.
DO 3 i=1,m+1
IF(k.gt.1)then
DO 4 j=1,k-1
IF(i.eq.1(j))go to 3
4 CONTINUE
END IF
IF(abs(p(k)).lt.abs(an(i,k)))then
p(k)=an(i,k)
i(k)=i
ENDIF
3 CONTINUE
IF(abs(p(k)).lt.epsilon)then
WRITE(*,*) 'Pivot=',P(k),' Inferieur à epsilon'
stop 'probleme pivot'
ENDIF

```

```

*..... Triangularisation

```

```

DO 5 i=1,m+1
DO 6 j=1,k
IF(i.eq.1(j)) GOTO 5
6 CONTINUE
l(m+1)=i
w=an(i,k)/p(k)
DO 7 n=k,m+2
An(i,n)=An(i,n)-w*an(l(k),n)
7 CONTINUE
5 CONTINUE
2 CONTINUE

```

```

*..... Resolution du systeme a matrice

```

```

*..... triangulaire superieure

```

```

P(m+1)=an(l(m+1),m+1)
gama(m+1)=an(l(m+1),m+2)/p(m+1)
DO 8 i=m,1,-1
gama(i)=an(l(i),m+2)
DO 9 j=i+1,m+1
gama(i)=gama(i)-an(l(i),j)*gama(j)
9 CONTINUE
gama(i)=gama(i)/p(i)
8 CONTINUE
RETURN
END

```

```

SUBROUTINE Cp(m,pha,pro)

```

```

IMPLICIT DOUBLE PRECISION(x,y,s,t,a,g,v,c)

```

```

COMMON /zone1/ x(74),y(74),xc(74),yc(74),S(74),TETA(74)

```

```

COMMON /zone4/ An(74,74),At(74,74),Gama(74),Vt(74)

```

```

CALL AtCoeff(m)

```

```

DO 1 i=1,m

```

```

Vt(i)=Cos(Teta(i)-pha)

```

```

DO 2 j=1,m+1

```

```

Vt(i)=Vt(i)+At(i,j)*Gama(j)

```

```

2 CONTINUE

```

```

1 CONTINUE

```

```

Vt(m+1)=Vt(1)

```

```

IF((pha.eq.0.).and.(pro.eq.1)) GOTO 3

```

```

DO 4 i=1,m+1

```

```

WRITE(1,*) x(i),1-Vt(i)**2

```

```

4 CONTINUE

```

```

GOTO 5

```

```

3 DO 6 i=(m+2)/2,m

```

```
WRITE(1,*) x(i),1-Vt(i)**2  
6 CONTINUE  
5 RETURN  
END
```

```

.....
..... GENERATION DE MAILLAGE SANS FONCTIONS .....
..... DE CONTROLES .....
..... (Résolution d'un systeme d'équations de Laplace.....
..... par la méthode de Gauss-Seidel)....
.....

```

```

COMMON /ZONE1/ x(100,30),y(100,30)
COMMON /ZONE2/ alpha(100,30),beta(100,30),gamma(100,30)
REAL teta,r,r1,r2,Epsi

```

```

Open(unit=1,file='XY12A1.dat')
Open(unit=2,file='XY12A2.dat')

```

```

WRITE(*,*) 'Choisir le nombre de ligne suivant i
S(de préférence 35)'
READ(*,*) Imax

```

```

WRITE(*,*) 'Choisir le nombre de ligne suivant j
S(de préférence 30)'
READ(*,*) Jmax

```

```

WRITE(*,*) 'Choisir le profil '
WRITE(*,*) '1-pour profil symétrique '
WRITE(*,*) '2-pour profil asymétrique '
READ(*,*) Pro

```

```

If(pro.eq.2) GOTO 1
CALL symetrique(Imax)
GOTO 2

```

```

1 CALL Asymetrique(Imax)
2 WRITE(*,*) 'Patienter,SVP'
c..... Calcul des conditions aux limites et valeurs initiales .....
CALL XYinitial(Imax,Jmax)
c..... Calcul des differents x et y .....
CALL GAUSS(Imax,Jmax)
c..... Impression des resultats .....
Call Resul(Imax,Jmax)
STOP
END

```

```

SUBROUTINE symetrique(Imax)
COMMON /ZONE1/ x(100,30),y(100,30)
WRITE(*,*) 'Choisir un des profils symetrique suivant(donner rt)'
WRITE(*,*) '1-NACA 0006 (rt=0.004)'
WRITE(*,*) '2-NACA 0008 (rt=0.007)'
WRITE(*,*) '3-NACA 0009 (rt=0.0089)'
WRITE(*,*) '4-NACA 0010 (rt=0.011)'
WRITE(*,*) '5-NACA 0012 (rt=0.0158)'
WRITE(*,*) '6-NACA 0015 (rt=0.0248)'
WRITE(*,*) '7-NACA 0018 (rt=0.0356)'
WRITE(*,*) '8-NACA 0021 (rt=0.0485)'
WRITE(*,*) '9-NACA 0024 (rt=0.0633)'
READ(*,*) rt
Imax1=(Imax+1)/2
DO 1 i=1,imax
x(i,1)=0.
y(i,1)=0.
x(i,1)=(1.-(i-1.)/(Imax1-1.))

```

```

1 CONTINUE
  K=Imax1-1
  L=Imax1+1
  Imax2=2*Imax1-1
  DO 2 i=Imax1+1,Imax2
    x(L,1)=x(K,1)
    L=L+1
    K=K-1
2 CONTINUE
  DO 3 i=1,Imax1
    y(i,1)=(sqrt(rt/1.1019))*(0.29690*(sqrt(x(i,1)))-0.12600*x(i,1)
    S-0.35160*x(i,1)**2
    S+0.28430*x(i,1)**3
    S-0.10150*x(i,1)**4)/0.20
3 CONTINUE
  DO 4 i=Imax1+1,Imax2-1
    y(i,1)=-(sqrt(rt/1.1019))*(0.29690*(sqrt(x(i,1)))-0.12600*x(i,1)
    S-0.35160*x(i,1)**2
    S+0.28430*x(i,1)**3
    S-0.10150*x(i,1)**4)/0.20
4 CONTINUE
  y(Imax2,1)=y(1,1)
  RETURN
  END

```

```

SUBROUTINE Asymetrique(Imax)
COMMON /ZONE1/ x(100,30),y(100,30)
double precision phi(8)
Imax1=(Imax+1)/2
DO 1 i=1,Imax1
  x(i,1)=0.
  y(i,1)=0.
  x(i,1)=(1.-(i-1.)/(Imax1-1.))
  x(i,1)=sqrt(x(i,1))
1 CONTINUE
  K=Imax1-1
  L=Imax1+1
  Imax2=2*Imax1-1
  DO 2 i=Imax1+1,Imax2
    x(L,1)=x(K,1)
    L=L+1
    K=K-1
2 CONTINUE
  WRITE(*,*) 'Choisir entre les deux profils asymetrique suivant: '
  WRITE(*,*) '1-NACA23012'
  WRITE(*,*) '2-NACA4412'
  READ(*,*) Asy
  IF(asy.eq.2) GOTO 3
  phi(1)= 0.016955109284027
  phi(2)= -0.077365460194414
  phi(3)= 2.199568749405440
  phi(4)= -7.824367756024000
  phi(5)= 13.379377109929900
  phi(6)= -12.854000883176900
  phi(7)= 6.545965610072020
  phi(8)= -1.384813630953430
  DO 4 i=1,Imax1
    y(i,1)=phi(1)+phi(2)*x(i,1)+phi(3)*x(i,1)**2
    S+phi(4)*x(i,1)**3+phi(5)*x(i,1)**4+phi(6)*x(i,1)**5
    S+phi(7)*x(i,1)**6+phi(8)*x(i,1)**7

```

```

4 CONTINUE
phi(1)= 0.354145568159936D-004
phi(2)= -0.131151300867714
phi(3)= 0.133237437068601
phi(4)= 0.597101568244398
phi(5)= -4.067424035631120
phi(6)= 8.522782626561820
phi(7)= -7.373001024825500
phi(8)= 2.317247563216370
DO 5 i=Imax1+1,Imax2-1
y(i,1)=phi(1)+phi(2)*x(i,1)+phi(3)*x(i,1)**2
S+phi(4)*x(i,1)**3+phi(5)*x(i,1)**4+phi(6)*x(i,1)**5
S+phi(7)*x(i,1)**6+phi(8)*x(i,1)**7

```

```

5 CONTINUE
y(Imax2,1)=y(1,1)
GOTO 6

```

```

3 phi(1)= 0.001451487876693
phi(2)= 0.205581063288264
phi(3)= 0.011021066689864
phi(4)= -0.290816199965775
phi(5)= 2.083885192871090
phi(6)= -5.882311638444660
phi(7)= 5.987669821828600
phi(8)= -2.116379898507150
DO 7 i=1,Imax1
y(i,1)=phi(1)+phi(2)*x(i,1)+phi(3)*x(i,1)**2
S+phi(4)*x(i,1)**3+phi(5)*x(i,1)**4+phi(6)*x(i,1)**5
S+phi(7)*x(i,1)**6+phi(8)*x(i,1)**7

```

```

7 CONTINUE
phi(1)= -0.834229539670162D-005
phi(2)= -0.111238262456254
phi(3)= -0.393018653372565
phi(4)= 2.831192172394370
phi(5)= -6.221109763835560
phi(6)= 7.124165682005700
phi(7)= -4.318045345367860
phi(8)= 1.087808740616310
DO 8 i=Imax1+1,Imax2-1
y(i,1)=phi(1)+phi(2)*x(i,1)+phi(3)*x(i,1)**2
S+phi(4)*x(i,1)**3+phi(5)*x(i,1)**4+phi(6)*x(i,1)**5
S+phi(7)*x(i,1)**6+phi(8)*x(i,1)**7

```

```

8 CONTINUE
y(Imax2,1)=y(1,1)

```

```

6 DO 9 i=1,Imax2
x(i,1)=x(i,1)**2

```

```

9 CONTINUE
RETURN
END

```

```

SUBROUTINE XYinitial(Imax,Jmax)
COMMON /ZONE1/ x(100,30),y(100,30)

```

```

..... Au niveau du profil .....

```

```

DO 1 i=1,Imax
x(i,1)=x(i,1)-0.5
y(i,1)=y(i,1)

```

```

1 CONTINUE

```

```

..... Frontiere externe .....

```

```

DO 2 i=1,Imax
Teta=2*3.14*(i-1)/(Imax-1)
R=10

```

```

x(i,Jmax)=r*cos(teta)
y(i,Jmax)=r*sin(teta)
2 CONTINUE
c ** Interpolation des valeurs internes (interpolation de Lagrange)**
DO 3 i=1,Imax
DO 4 j=2,jmax-1
R1=Float(Jmax-j)/Float(Jmax-1)
R2=Float(j-1)/Float(Jmax-1)
x(i,j)=r1*x(i,1)+r2*x(i,jmax)
y(i,j)=r1*y(i,1)+r2*y(i,jmax)
4 CONTINUE
3 CONTINUE
RETURN
END

```

```

SUBROUTINE GAUSS(Imax,Jmax)
COMMON /ZONE1/ x(100,30),y(100,30)
COMMON /ZONE2/ alpha(100,30),beta(100,30),gamma(100,30)
REAL W
Itermax=700
WRITE(*,*) 'Donner W (facteur de surrelaxation)'
READ(*,*) W
epsi=0.0001
DO 1 iter=1,itermax
WRITE(*,*) 'Iteration N=',iter
c ..... Continuïte du maillage .....
DO 2 j=1,Jmax
x(1,j)=x(imax,j)
y(1,j)=y(imax,j)
x(imax+1,j)=x(2,j)
y(imax+1,j)=y(2,j)
2 CONTINUE
ErreurX=0.
ErreurY=0.
DO 3 j=2,Jmax-1
DO 4 i=2,Imax
c ..... calcul de alpha,beta et gamma .....
alpha(i,j)=((x(i,j+1)-x(i,j-1))**2+(y(i,j+1)-y(i,j-1))**2)/4
beta(i,j)=((x(i+1,j)-x(i-1,j))*(x(i,j+1)-x(i,j-1))
$+(y(i+1,j)-y(i-1,j))*(y(i,j+1)-y(i,j-1)))/4
gamma(i,j)=((x(i+1,j)-x(i-1,j))**2+(y(i+1,j)-y(i-1,j))**2)/4
c ..... calcul de x .....
Xk=x(i,j)+(w/(2*(alpha(i,j)+gamma(i,j))))*(alpha(i,j)
$*(x(i-1,j)+x(i+1,j))+gamma(i,j)*(x(i,j+1)+x(i,j-1))
$+(beta(i,j)/2.)*(x(i+1,j-1)+x(i-1,j+1))
$-x(i+1,j+1)-x(i-1,j-1))-2*(alpha(i,j)+gamma(i,j))*x(i,j))
c ..... calcul de y .....
Yk=y(i,j)+(w/(2*(alpha(i,j)+gamma(i,j))))*(alpha(i,j)
$*(y(i-1,j)+y(i+1,j))+gamma(i,j)*(y(i,j+1)+y(i,j-1))
$+(beta(i,j)/2.)*(y(i+1,j-1)+y(i-1,j+1))
$-y(i+1,j+1)-y(i-1,j-1))-2*(alpha(i,j)+gamma(i,j))*y(i,j))
c .....
DiffX=Abs(Xk-X(i,j))
DiffY=Abs(Yk-Y(i,j))
ErreurX=Amax1(ErreurX,DiffX)
ErreurY=Amax1(ErreurY,DiffY)
X(i,j)=Xk
Y(i,j)=Yk
+ CONTINUE

```

```
3 CONTINUE
  IF((ErreurX.lt.epsi).and.(ErreurY.lt.epsi)) GOTO 5
1 CONTINUE
5 RETURN
  END

  SUBROUTINE Resul(Imax,Jmax)
  COMMON /ZONE1/ x(100,30),y(100,30)
  DO 1 j=1,Jmax
  DO 2 i=1,Imax
  WRITE(1,100) x(i,j),y(i,j)
100 FORMAT(5x,2e14.6)
2 CONTINUE
1 CONTINUE
  DO 3 j=1,15
  DO 4 i=1,Imax
  WRITE(2,*) x(i,j),y(i,j)
4 CONTINUE
3 CONTINUE
  DO 5 i=1,Imax
  DO 6 j=1,15
  WRITE(2,*) x(i,j),y(i,j)
6 CONTINUE
  DO 7 k=15,1,-1
  WRITE(2,*) x(i,k),y(i,k)
7 CONTINUE
5 CONTINUE
  RETURN
  END
```

c .....  
c ..... CALCUL DE L'ECOULEMENT POTENTIEL PAR .....  
c ..... LES DIFFERENCES FINIES .....  
c .....

```
COMMON /ZONE1/ x(100,30),y(100,30),psi(100,30),cp(100)  
COMMON /ZONE2/ alpha(100,30),beta(100,30),gamma(100,30)  
$,yacob(100,30)  
Real pha
```

```
Open(unit=1,file='XY12A1.dat')  
Open(unit=2,file='Cp12a5.dat')
```

```
WRITE(*,*) 'Choisir le nombre de lignes suivant i '  
WRITE(*,*) '(Ce nombre doit etre égale à celui choisi lors)'  
WRITE(*,*) '(de la génération de maillage)'  
READ(*,*) Imax  
WRITE(*,*) 'Choisir le nombre de lignes suivant j '  
WRITE(*,*) '(Ce nombre doit etre égale à celui choisi lors)'  
WRITE(*,*) '(de la génération de maillage)'  
READ(*,*) Jmax  
WRITE(*,*) 'Donner l angle d attaque'  
READ(*,*) pha  
pha=pha*3.1415/180.
```

c..... Lecture des différents x et y à partir d'un fichier résultat....  
DO 1 j=1,Jmax  
DO 2 i=1,Imax  
READ(1,\*) x(i,j),y(i,j)  
2 CONTINUE  
1 CONTINUE

c..... Continuité du maillage.....  
DO 3 j=1,Jmax  
x(Imax+1,j)=x(2,j)  
x(Imax+2,j)=x(3,j)  
y(Imax+1,j)=y(2,j)  
y(Imax+2,j)=y(3,j)  
3 CONTINUE

c ..... Calcul des alpha,beta,gamma et jacob .....  
CALL ParaTrans(Imax,Jmax)

c..... Conditions aux limites et valeurs initiales .....  
4 CALL CiCl(Imax,Jmax,pha)

c ..... Calcul des differents psi.....  
CALL Gauss(Imax,Jmax)

c..... Vérification de la Condition de KUTTA-JOUKOWSKI.....  
CALL Kutta(Imax,Jmax,reponse)  
IF(reponse.eq.1) goto 4

c..... Calcul du CP.....  
CALL Resul(Imax)  
STOP  
END

```
SUBROUTINE ParaTrans(Imax,Jmax)  
COMMON /ZONE1/ x(100,30),y(100,30),psi(100,30),cp(100)  
COMMON /ZONE2/ alpha(100,30),beta(100,30),gamma(100,30)  
$,yacob(100,30)  
Real dxdxi,dxdeta,dydxi,dydeta  
DO 1 i=2,Imax  
j=1  
dxdxi=0.5*(x(i+1,j)-x(i-1,j))
```

```

dydxi=0.5*(y(i+1,j)-y(i-1,j))
dxdeta=0.5*(4*x(i,j+1)-x(i,j+2)-3*x(i,j))
dydeta=0.5*(4*y(i,j+1)-y(i,j+2)-3*y(i,j))
yacob(i,j)=dxdxi*dydeta-dxdeta*dydxi
alpha(i,j)=dxdeta**2+dydeta**2
beta(i,j)=dxdxi*dxdeta+dydxi*dydeta
gamma(i,j)=dxdxi**2+dydxi**2
1 CONTINUE
DO 2 i=2,Imax
j=Jmax
dxdxi=0.5*(x(i+1,j)-x(i-1,j))
dydxi=0.5*(y(i+1,j)-y(i-1,j))
dxdeta=0.5*(-4*x(i,j-1)+x(i,j-2)+3*x(i,j))
dydeta=0.5*(-4*y(i,j-1)+y(i,j-2)+3*y(i,j))
yacob(i,j)=dxdxi*dydeta-dxdeta*dydxi
alpha(i,j)=dxdeta**2+dydeta**2
beta(i,j)=dxdxi*dxdeta+dydxi*dydeta
gamma(i,j)=dxdxi**2+dydxi**2
2 CONTINUE

i=1
j=1
dxdxi=0.5*(x(i+1,j)-x(Imax-1,j))
dydxi=0.5*(y(i+1,j)-y(Imax-1,j))
dxdeta=0.5*(4*x(i,j+1)-x(i,j+2)-3*x(i,j))
dydeta=0.5*(4*y(i,j+1)-y(i,j+2)-3*y(i,j))
yacob(i,j)=dxdxi*dydeta-dxdeta*dydxi
alpha(i,j)=dxdeta**2+dydeta**2
beta(i,j)=dxdxi*dxdeta+dydxi*dydeta
gamma(i,j)=dxdxi**2+dydxi**2

i=1
j=Jmax
dxdxi=0.5*(x(i+1,j)-x(Imax-1,j))
dydxi=0.5*(y(i+1,j)-y(Imax-1,j))
dxdeta=0.5*(-4*x(i,j-1)+x(i,j-2)+3*x(i,j))
dydeta=0.5*(-4*y(i,j-1)+y(i,j-2)+3*y(i,j))
yacob(i,j)=dxdxi*dydeta-dxdeta*dydxi
alpha(i,j)=dxdeta**2+dydeta**2
beta(i,j)=dxdxi*dxdeta+dydxi*dydeta
gamma(i,j)=dxdxi**2+dydxi**2

DO 3 i=2,Imax
DO 4 j=2,Jmax-1
dxdxi=0.5*(x(i+1,j)-x(i-1,j))
dydxi=0.5*(y(i+1,j)-y(i-1,j))
dxdeta=0.5*(x(i,j+1)-x(i,j-1))
dydeta=0.5*(y(i,j+1)-y(i,j-1))
yacob(i,j)=dxdxi*dydeta-dxdeta*dydxi
alpha(i,j)=dxdeta**2+dydeta**2
beta(i,j)=dxdxi*dxdeta+dydxi*dydeta
gamma(i,j)=dxdxi**2+dydxi**2
4 CONTINUE
3 CONTINUE
DO 5 j=2,Jmax-1
i=1
dxdxi=0.5*(x(i+1,j)-x(Imax-1,j))
dydxi=0.5*(y(i+1,j)-y(Imax-1,j))
dxdeta=0.5*(x(i,j+1)-x(i,j-1))
dydeta=0.5*(y(i,j+1)-y(i,j-1))

```

```

yacob(i,j)=dxdxi*dydeta-dxdeta*dydxi
alpha(i,j)=dxdeta**2+dydeta**2
beta(i,j)=dxdxi*dxdeta+dydxi*dydeta
gamma(i,j)=dxdxi**2+dydxi**2
5 CONTINUE
RETURN
END

```

```

SUBROUTINE CiC1(Imax,Jmax,pha)
COMMON /ZONE1/ x(100,30),y(100,30),psi(100,30),cp(100)
COMMON /ZONE2/ alpha(100,30),beta(100,30),gamma(100,30)
S,yacob(100,30)

```

```
Real r1,r2
```

```
..... Au niveau du profil .....
```

```
WRITE(*,*) 'Donner la valeur de psi0'
```

```
READ(*,*) psi0
```

```
DO 1 i=1,Imax
```

```
psi(i,1)=psi0
```

```
1 CONTINUE
```

```
..... Frontiere externe .....
```

```
DO 2 i=1,Imax
```

```
psi(i,Jmax)=y(i,Jmax)*cos(pha)-x(i,Jmax)*sin(pha)
```

```
2 CONTINUE
```

```
** Interpolation des valeurs internes (interpolation de Lagrange)**
```

```
DO 3 i=1,Imax
```

```
DO 4 j=2,jmax-1
```

```
R1=Float(Jmax-j)/Float(Jmax-1)
```

```
R2=Float(j-1)/Float(Jmax-1)
```

```
psi(i,j)=r1*psi(i,1)+r2*psi(i,jmax)
```

```
4 CONTINUE
```

```
3 CONTINUE
```

```
RETURN
```

```
END
```

```
SUBROUTINE Gauss(Imax,Jmax)
```

```
COMMON /ZONE1/ x(100,30),y(100,30),psi(100,30),cp(100)
```

```
COMMON /ZONE2/ alpha(100,30),beta(100,30),gamma(100,30)
```

```
S,yacob(100,30)
```

```
Real psik,pha,teta,r,Epsi,W,diff,A,B,C,D,E,P,Q
```

```
S,DiffPsi,EreurPsi
```

```
Itermax=400
```

```
WRITE(*,*) 'Donner la valeur de w (facteur de surrelaxation)'
```

```
READ(*,*) w
```

```
epsi=0.0001
```

```
DO 1 iter=1,itermax
```

```
WRITE(*,*) 'Itération N=',iter
```

```
..... Continuite du maillage .....
```

```
DO 2 j=1,Jmax
```

```
psi(1,j)=psi(imax,j)
```

```
psi(imax+1,j)=psi(2,j)
```

```
2 CONTINUE
```

```
P=0.0
```

```
Q=0.0
```

```
EreurPsi=0.
```

```
DO 3 j=2,Jmax-1
```

```
DO 4 i=2,Imax
```

```
A=(alpha(i,j)-0.5*P*yacob(i,j)**2)*psi(i-1,j)
```

```
B=(alpha(i,j)+0.5*P*yacob(i,j)**2)*psi(i+1,j)
```

```
C=(gamma(i,j)+0.5*Q*yacob(i,j)**2)*psi(i,j+1)
```

```
D=(gamma(i,j)-0.5*Q*yacob(i,j)**2)*psi(i,j-1)
```

```

E=0.5*beta(i,j)*(psi(i+1,j+1)+psi(i-1,j-1)
S-psi(i+1,j-1)-psi(i-1,j+1))
psik=psi(i,j)+w*((1./(2.*(alpha(i,j)+gamma(i,j))))*(A+B+C+D-E)
S-psi(i,j))
DiffPsi=Abs(Psik-Psi(i,j))
EreurPsi=Amax1(ereurPsi,DiffPsi)
Psi(i,j)=psik
4 CONTINUE
3 CONTINUE
If(EreurPsi.lt.epsi) GOTO 5
1 CONTINUE
5 RETURN
END

```

```

SUBROUTINE Kutta(Imax,Jmax,reponse)
COMMON /ZONE1/ x(100,30),y(100,30),psi(100,30),cp(100)
COMMON /ZONE2/ alpha(100,30),beta(100,30),gamma(100,30)
S,yacob(100,30)
WRITE(*,*) 'V1=',2*sqrt((gamma(2,1)/yacob(2,1)**2)*
S(0.5(4*psi(2,2)-psi(2,3)-3*psi(2,1)))**2)-
Ssqrt((gamma(3,1)/yacob(3,1)**2)*
S(0.5(4*psi(3,2)-psi(3,3)-3*psi(3,1)))**2)
WRITE(*,*) 'V2=',2*sqrt((gamma(Imax-1,1)/yacob(Imax-1,1)**2)*
S(0.5(4*psi(Imax-1,2)-psi(Imax-1,3)-3*psi(Imax-1,1)))**2)-
Ssqrt((gamma(Imax-2,1)/yacob(Imax-2,1)**2)*
S(0.5(4*psi(Imax-2,2)-psi(Imax-2,3)-3*psi(Imax-2,1)))**2)
WRITE(*,*) 'Voulez-vous continuer ?'
WRITE(*,*) '1-oui'
WRITE(*,*) '2-non'
READ(*,*) Reponse
RETURN
END

```

```

SUBROUTINE Resul(Imax)
COMMON /ZONE1/ x(100,30),y(100,30),psi(100,30),cp(100)
COMMON /ZONE2/ alpha(100,30),beta(100,30),gamma(100,30)
S,yacob(100,30)
DO 1 i=1,Imax
Cp(i)=1.-((gamma(i,1)/yacob(i,1)**2)*
S(0.5*(4*psi(i,2)-psi(i,3)-3*psi(i,1)))**2)
1 CONTINUE
DO 2 i=1,imax
WRITE(2,*) x(i,1)+0.5,Cp(i)
2 CONTINUE
RETURN
END

```

```

c.....
c..... Programme de calcul de la couche limite laminaire.....
c..... et turbulente.....
c.....
common/b1/ sigma(1200),F2(1200),F2tab(1200),Delta2(1200)
common/b2/ Realk(1200),Realktab(1200),Cflam(1200),Ue(1200)
Common/b3/ i, j, imax, itab, corde, Reinf, Itr, Htr
$, Dsigma, ReDelta2(1200), IsepLam
common/b4/ H(1200)
common/b5/ Htab(1200)
Common/b6/ A1, A2, A3, A4, B1, B2, B3, B4, H1(1200), FH1(1200)
$, H2(1200), GraUe(1200), CfTur(1200)
Common/b7/ x(1200), y(1200)
Common/b8/ Xavant(1200), Yavant(1200), UeAvant(1200)
Common/b9/ Dx, DYDX(1200), dxi, Rex, epsi, R0, a, som, c, d
Common/b10/ ReDel2Tr(1200), C1, C2, C3, C4, SigmaTr, Cx

*..... Ouverture des fichiers donnees
open(unit=1, file='U2315i8.dat')
Open(unit=2, file='Table.dat')

*..... Parametres
Itab=26
Reinf=5900000.
corde=100.

Write(*,*) 'Choisir'
Write(*,*) '1-Extrados'
Write(*,*) '2-Intrados'
Read(*,*) Choix

*..... Lecture et interpolation de X,Y,Ue.....
*..... (de 38 valeurs a 297).....
Call Interp(choix, Imax, N, N1)

*..... Calcul de l'abscisse curviligne.....
Call Sigmas(Imax)

*..... Calcul du gradient de vitesse par rapport.....
*..... a sigma.....
Call GradU(Imax)

*..... Calcul de la couche limite laminaire.....
*..... par la methode de Thwaites.....
Call Thwaites

*..... Calcul du point de transition.....
Write(*,*) 'Choisir le critere de transition'
Write(*,*) '1-pour le critere de Michel'
Write(*,*) '2-pour le critere de Cebeci et Smith'
Read(*,*) Choix
If(choix.eq.2) goto 100
*..... Critere de Michel .....
Call Michel(Choix)
goto 200
*..... Critere de Cebeci et Smith.....
100 Call Cebeci(Choix)

*..... Calcul de la couche limite turbulente .....
*..... par la methode de HEAD .....

```

```

*..... Calcul du Cx.....
Delta2(Imax)=(Delta2(Imax)+Delta2(Imax-2)+Delta2(Imax-1))/3.
H(Imax)=(2.*H(Imax-1)-H(Imax-2))
Cx=2.*Delta2(Imax)*(Ue(Imax)**(0.5*( H(Imax)+5.)))/corde
write(*,*)'Le coefficient de trainée totale est égale à Cx=',Cx

End

*.....
*..... FIN du PROGRAMME .....
*.....
*.....
Subroutine Interp(choix,Imax,N,N1)
*.....
common/b2/ Realk(1200),Realktab(1200),Cflam(1200),Ue(1200)
Common/b7/ x(1200),y(1200)
Common/b8/ Xavant(1200),Yavant(1200),UeAvant(1200)
N=38
if(choix.eq.1) goto 999
N=37
Imax=1153
DO 2 I=1,N
read(1,*) X(i),Y(i),Ue(i)
2 CONTINUE
goto 888
999 N=38
Imax=1185
DO 99 I=N,1,-1
read(1,*) X(i),Y(i),Ue(i)
99 CONTINUE
888 DO 3 I=1,N
Xavant(i)=X(i)
Yavant(i)=Y(i)
UeAvant(i)=Ue(i)
3 CONTINUE
N1=N
Do 4 j=1,5
N1=2*N1-1
Do 5 i=1,N1,2
l=(i+1)/2
X(i)=Xavant(l)
Y(i)=Yavant(l)
Ue(i)=UeAvant(l)
5 Continue
DO 6 I=1,N1-2,2
X(I+1)=(X(I)+X(I+2))*0.5
Y(I+1)=Y(I)+(Y(I+2)-Y(I))*(X(I+1)-X(i))/(X(I+2)-X(I))
Ue(I+1)=Ue(I)+(Ue(I+2)-Ue(I))
S*(X(I+1)-X(i))/(X(I+2)-X(I))
6 CONTINUE
DO 7 I=1,N1
Xavant(i)=X(i)
Yavant(i)=Y(i)
UeAvant(i)=Ue(i)
7 CONTINUE
4 CONTINUE
Return
End

```

```

*.....
Subroutine Sigmas(Imax)
*.....
common/b1/ sigma(1200),F2(1200),F2tab(1200),Delta2(1200)
Common/b7/ x(1200),y(1200)
Common/b8/ Xavant(1200),Yavant(1200),UeAvant(1200)
Common/b9/ Dx,DYDX(1200),dxi,Rex,epsi,R0,a,som,c,d

*.....Calcul du gradient de y par rapport a x.....
Dx=0.5*(x(3)-x(1))
DyDx(1)=(4.*y(2)-3.*y(1)-y(3))/(2.*Dx)
Do 9 i=2,Imax-1
dx=0.5*(x(i+1)-x(i-1))
DyDx(i)=(y(i+1)-y(i-1))/(2.*Dx)
9 CONTINUE
Dx=0.5*(x(Imax)-x(Imax-2))
DyDx(Imax)=(3.*y(Imax)+y(Imax-2)-4.*y(Imax-1))/(2.*Dx)
sigma(1)=0.
som=0.
Do 30 i=2,Imax-1
dx=0.5*(x(i+1)-x(i-1))
som=Dx*sqrt(1.+DyDx(i)**2)+som
sigma(i)=sigma(1)+som
30 CONTINUE
Dx=0.5*(x(Imax)-x(Imax-2))
sigma(Imax)=sigma(Imax-1)+0.5*Dx*sqrt(1.+DyDx(Imax)**2)
Return
End

*.....
Subroutine GradU(Imax)
*.....
common/b1/ sigma(1200),F2(1200),F2tab(1200),Delta2(1200)
common/b2/ Realk(1200),Realktab(1200),Cflam(1200),Ue(1200)
Common/b6/ A1,A2,A3,A4,B1,B2,B3,B4,H1(1200),FH1(1200)
S,H2(1200),GraUe(1200),CfTur(1200)

Dsigma=0.5*(sigma(3)-sigma(1))
GraUe(1)=(4.*Ue(2)-3.*Ue(1)-Ue(3))/(2.*Dsigma)
Do 70 i=2,Imax-1
Dsigma=0.5*(sigma(i+1)-sigma(i-1))
GraUe(i)=(Ue(i+1)-Ue(i-1))/(2.*Dsigma)
70 CONTINUE
Dsigma=0.5*(sigma(Imax)-sigma(Imax-2))
GraUe(Imax)=(3.*Ue(Imax)+Ue(Imax-2)-4.*Ue(Imax-1))
S/(2.*Dsigma)
Return
End

*.....
Subroutine Thwaites
*.....
common/b1/ sigma(1200),F2(1200),F2tab(1200),Delta2(1200)
common/b2/ Realk(1200),Realktab(1200),Cflam(1200),Ue(1200)
Common/b3/ i,j,Imax,itab,corde,Reinf,Itr,Htr
S,Dsigma,ReDelta2(1200),IsepLam
common/b5/ Htab(1200)
Common/b6/ A1,A2,A3,A4,B1,B2,B3,B4,H1(1200),FH1(1200)
S,H2(1200),GraUe(1200),CfTur(1200)

```

Common/b9/ Dx,DYDX(1200),dxi,Rex,epsi,R0,a,som,c,d

Dsigma=0.5\*(sigma(3)-sigma(1))

Delta2(1)=0.5\*Dsigma\*Ue(1)\*\*5

Som=0.

Do 80 i=2,Imax-1

Dsigma=(sigma(i+1)-sigma(i-1))\*0.5

Som=Dsigma\*Ue(i)\*\*5+Som

Delta2(i)=Delta2(1)+som

80 CONTINUE

Dsigma=0.5\*(sigma(Imax)-sigma(Imax-2))

Delta2(Imax)=Delta2(Imax-1)+0.5\*Dsigma\*Ue(Imax)\*\*5

Do 81 i=1,Imax

d=0.45\*corde/(ReInf\*Ue(i)\*\*6)

Delta2(i)=d\*Delta2(i)

Delta2(i)=sqrt(Delta2(i))

81 CONTINUE

\*..... Calcul des différents k .....

Do 90 i=1,Imax

Realk(i)=(GraUe(i)\*ReInf\*(Delta2(i)\*\*2))/corde

if(realk(i).lt.-0.09) goto 91

90 CONTINUE

Write(\*,\*)'la couche limite laminaire ne décolle pas de la paroi'

IsepLam=Imax

Goto 101

91 IsepLam=i-1

Write(\*,\*)'la couche limite laminaire se décolle de la paroi'

Write(\*,\*)'à la station i=',i-1

Write(\*,\*)'et à Sigma/corde=',sigma(i-1)/corde

\*.....Calcul des différents F2 et Cflma .....

101 Do 100 j=1,Itab

Read(2,\*) Realktab(j),F2tab(j),Htab(j)

100 CONTINUE

Call Cflami

Return

End

\*.....  
Subroutine Cflami

\*.....  
Common/b1/ sigma(1200),F2(1200),F2tab(1200),Delta2(1200)

Common/b2/ Realk(1200),Realktab(1200),Cflam(1200),Ue(1200)

Common/b3/ i,j,Imax,itab,corde,Reinf,Itr,Htr

S,Dsigma,ReDelta2(1200),IsepLam

Common/b4/ H(1200)

Common/b5/ Htab(1200)

Do 101 i=1,IsepLam

Do 102 j=1,Itab

If(Realk(i).Gt.Realktab(Itab)) goto 101

If(Realk(i).Eq.Realktab(j)) goto 103

If((Realk(i).Gt.Realktab(j))

S.and.(Realk(i).Lt.Realktab(j+1))) GoTo 104

102 CONTINUE

103 F2(i)=F2tab(j)

H(i)=Htab(j)

goto 105

104 F2(i)=F2tab(j)+(F2tab(j+1)-F2tab(j))\*(Realk(i)-Realktab(j))

```

S/(Realktab(j+1)-Realktab(j))
  H(i)=Htab(j)+(Htab(j+1)-Htab(j))*(Realk(i)-Realktab(j))
S/(Realktab(j+1)-Realktab(j))
105 Cflam(i)=(2.*Ue(i)*corde*F2(i))/(Reinf*Delta2(i))
101 CONTINUE
106 Return
End

```

```

*.....
Subroutine Michel(choix)

```

```

*.....
Common/b1/ sigma(1200),F2(1200),F2tab(1200),Delta2(1200)
common/b2/ Realk(1200),Realktab(1200),Cflam(1200),Ue(1200)
Common/b3/ i,j,Imax,itab,corde,Reinf,Itr,Htr
S,Dsigma,ReDelta2(1200),Iseplam
Common/b9/ Dx,DYDX(1200),dxi,Rex,epsi,R0,a,som,c,d
Common/b10/ ReDel2Tr(1200),C1,C2,C3,C4,SigmaTr,Cx

```

```

102 Do 109 i=2,Imax
  Rex=Reinf*Ue(i)*sigma(i)/corde
  ReDelta2(i)=Reinf*Ue(i)*Delta2(i)/corde
  ReDel2Tr(i)=1.174*(1.+21200./Rex)*Rex**0.46
109 CONTINUE

```

```

Do 95 i=2,Imax
  If(ReDelta2(i).Eq.ReDel2Tr(i)) goto 96
  If(((ReDelta2(i).Gt.ReDel2Tr(i)).and.
  S(ReDelta2(i+1).Lt.ReDel2Tr(i+1)))
  S.Or.((ReDelta2(i).Lt.ReDel2Tr(i)).and.
  S(ReDelta2(i+1).Gt.ReDel2Tr(i+1)))) goto 97
95 CONTINUE

```

```

96 SigmaTr=sigma(i)
  Goto 98

```

```

97 C1=(ReDelta2(i+1)-ReDelta2(i))/(sigma(i+1)-sigma(i))
  C2=(ReDelta2(i)*sigma(i+1)-ReDelta2(i+1)*sigma(i))/
  S(sigma(i+1)-sigma(i))
  C3=(ReDel2Tr(i+1)-ReDel2Tr(i))/(sigma(i+1)-sigma(i))
  C4=(ReDel2Tr(i)*sigma(i+1)-ReDel2Tr(i+1)*sigma(i))/
  S(sigma(i+1)-sigma(i))
  SigmaTr=(C4-C2)/(C1-C3)

```

```

98 Itr=i

```

```

Write(*,*) '====ECOULEMENT AVEC POINT DE TRANSITION===='
Write(*,*) 'D apres le critere de Michel '
Write(*,*) 'La transition se fait a sigma/corde=',sigma(Itr)/corde
if(Itr.gt.Iseplam) then
  Itr=Iseplam-1
Else
  Goto 777
End if
777 Return
End

```

```

*..... Critere de Cebici et Smith.....

```

```

*.....
Subroutine Cebeci(Choix)

```

```

*.....
Common/b1/ sigma(1200),F2(1200),F2tab(1200),Delta2(1200)
common/b2/ Realk(1200),Realktab(1200),Cflam(1200),Ue(1200)
Common/b3/ i,j,Imax,itab,corde,Reinf,Itr,Htr
S,Dsigma,ReDelta2(1200),Iseplam

```

Common/b9/ Dx,DYDX(1200),dxi,Rex,epsi,R0,a,som,c,d  
Common/b10/ ReDel2Tr(1200),C1,C2,C3,C4,SigmaTr,Cx

```
Do 110 i=2,Imax
Rex=Reinf*Ue(i)*sigma(i)/corde
ReDelta2(i)=Reinf*Ue(i)*Delta2(i)/corde
ReDel2Tr(i)=1.535*Rex**0.444
110 CONTINUE
Do 111 i=2,Imax
If(ReDelta2(i).Eq.ReDel2Tr(i))goto112
If(((ReDelta2(i).Gt.ReDel2Tr(i)).and.
S(ReDelta2(i+1).Lt.ReDel2Tr(i+1)))
S.Or.((ReDelta2(i).Lt.ReDel2Tr(i)).and.
S(ReDelta2(i+1).Gt.ReDel2Tr(i+1)))) goto113
111 CONTINUE
112 SigmaTr=sigma(i)
Goto 114
113 C1=(ReDelta2(i+1)-ReDelta2(i))/(sigma(i+1)-sigma(i))
C2=(ReDelta2(i)*sigma(i+1)-ReDelta2(i+1)*sigma(i))/
S(sigma(i+1)-sigma(i))
C3=(ReDel2Tr(i+1)-ReDel2Tr(i))/(sigma(i+1)-sigma(i))
C4=(ReDel2Tr(i)*sigma(i+1)-ReDel2Tr(i+1)*sigma(i))/
S(sigma(i+1)-sigma(i))
SigmaTr=(C4-C2)/(C1-C3)
114 Itr=i

Write(*,*) '=====  
Write(*,*) 'D', ' ', apres le critere de Cebeci et Smith '  
Write(*,*) 'La transition se fait a sigma/corde=',sigma(Itr)/corde  
If(itr.gt.iseplam) then  
Itr=iseplam-1  
Else  
Goto 777  
End if
777 Return  
End
```

```
*.....  
Subroutine Head(Isep,c)  
*.....  
Common/b1/ sigma(1200),F2(1200),F2tab(1200),Delta2(1200)  
Common/b3/ i,j,Imax,itab,corde,Reinf,Itr,Htr  
S,Dsigma,ReDelta2(1200),IsepLam  
*.....  
Call Paraini  
*.....  
Call Cfturb  
*.....  
Isep=i  
If(Imax.eq.Isep)then  
Write(*,*) 'Pas de decollement de la couche limite turbulente'  
Else  
Write(*,*) 'La separation de la couche limite turbulente'  
Write(*,*) 'se fait a sigma/corde=',sigma(Isep)/corde  
end if  
Return  
End
```

```

*.....
Subroutine ParaIni
*.....
Common/b1/ sigma(1200),F2(1200),F2tab(1200),Delta2(1200)
Common/b2/ Realk(1200),Realktab(1200),Cflam(1200),Ue(1200)
Common/b3/ i,j,Imax,itab,corde,Reinf,Itr,Htr
S ,Dsigma,ReDelta2(1200),IsepLam
Common/b4/ H(1200)
Common/b5/ Htab(1200)
Common/b6/ A1,A2,A3,A4,B1,B2,B3,B4,H1(1200),FH1(1200)
S ,H2(1200),GraUe(1200),CfTur(1200)
Common/b9/ Dx,DYDX(1200),dxi,Rex,epsi,R0,a,som,c,d
Common/b10/ ReDel2Tr(1200),C1,C2,C3,C4,SigmaTr,Cx

Delta2Tr=Delta2(Itr)+(SigmaTr-Sigma(Itr))*
$(Delta2(Itr+1)-Delta2(Itr))/
$(Sigma(Itr+1)-Sigma(Itr))
UeTr=Ue(Itr)+(SigmaTr-Sigma(Itr))*(Ue(Itr+1)-Ue(Itr))/
$(Sigma(Itr+1)-Sigma(Itr))
GraUeTr=GraUe(Itr)+(SigmaTr-Sigma(Itr))*
$(GraUe(Itr+1)-GraUe(Itr))/(Sigma(Itr+1)-Sigma(Itr))
HTr=H(Itr)+(SigmaTr-Sigma(Itr))*(H(Itr+1)-H(Itr))/
$(Sigma(Itr+1)-Sigma(Itr))
Sigma(Itr)=SigmaTr
H(Itr)=Htr
Delta2(Itr)=Delta2tr
Ue(Itr)=UeTr
GraUe(Itr)=GraUeTr
ReDelta2(Itr)=Reinf*Ue(Itr)*Delta2(Itr)/corde
If(H(itr).Lt.1.6)Then
H1(itr)=0.8234*(H(itr)-1.1)**(-1.287)+3.3
Else
H1(itr)=1.5501*(H(itr)-0.6778)**(-3.064)+3.3
End if
H2(Itr)=Ue(Itr)*Delta2(Itr)*H1(Itr)
CfTur(itr)=0.246*(ReDelta2(itr)**(-0.268))*(10**(-0.678*H(itr)))
FH1(itr)=0.0306*(H1(itr)-3.0)**(-0.6169)
Return
End

```

```

*.....
Subroutine Cfturb
*.....
Common/b1/ sigma(1200),F2(1200),F2tab(1200),Delta2(1200)
Common/b2/ Realk(1200),Realktab(1200),Cflam(1200),Ue(1200)
Common/b3/ i,j,Imax,itab,corde,Reinf,Itr,Htr
S ,Dsigma,ReDelta2(1200),IsepLam
Common/b4/ H(1200)
Common/b6/ A1,A2,A3,A4,B1,B2,B3,B4,H1(1200),FH1(1200)
S ,H2(1200),GraUe(1200),CfTur(1200)

Do 116 i=Itr,Imax-1
Dsigma=Sigma(i+1)-Sigma(i)

*..... Calcul de A1 et B1.....
A1=(0.5*CfTur(i)-Delta2(i)*(H(i)+2.)*GraUe(i)/Ue(i))
B1=Ue(i)*FH1(i)

*..... Calcul de A2 et B2.....
ReDelta2(i)=Reinf*Ue(i)*(Delta2(i)+0.5*A1*dsigma)/corde
CfTur(i)=0.246*(abs(ReDelta2(i))**(-0.268))

```

```

$(10**(-0.678*(H(i)+0.5*dsigma*B1)))
  If(H(i).Lt.1.6)Then
    H1(i)=0.8234*abs(H(i)+0.5*dsigma*B1-1.1)**(-1.287)+3.3
  Else
    H1(i)=1.5501*abs(H(i)+0.5*dsigma*B1-0.6778)**(-3.064)+3.3
  End if
  FH1(i)=0.0306*abs(H1(i)-3. )**(-0.6169)
  A2=(CfTur(i)/2. -(Delta2(i)+0.5*dsigma*A1)
  S*(H(i)+0.5*dsigma*B1+2.)*GraUe(i)/Ue(i))
  B2=Ue(i)*FH1(i)
*..... Calcul de A3 et B3.....
  ReDelta2(i)=Reinf*Ue(i)*(Delta2(i)+0.5*A2*dsigma)/corde
  CfTur(i)=0.246*(abs(ReDelta2(i))**(-0.268))
  S*(10**(-0.678*(H(i)+0.5*dsigma*B2)))
  If(H(i).Lt.1.6)Then
    H1(i)=0.8234*abs(H(i)+0.5*dsigma*B2-1.1)**(-1.287)+3.3
  Else
    H1(i)=1.5501*abs(H(i)+0.5*dsigma*B2-0.6778)**(-3.064)+3.3
  End if
  FH1(i)=0.0306*abs(H1(i)-3. )**(-0.6169)
  A3=(0.5*CfTur(i)-(Delta2(i)+0.5*dsigma*A2)
  S*(H(i)+0.5*dsigma*B2+2.)*GraUe(i)/Ue(i))
  B3=Ue(i)*FH1(i)
*..... Calcul de A4 et B4.....
  ReDelta2(i)=Reinf*Ue(i)*(Delta2(i)+A3*dsigma)/corde
  CfTur(i)=0.246*(abs(ReDelta2(i))**(-0.268))
  S*(10**(-0.678*(H(i)+dsigma*B3)))
  If(H(i).Lt.1.6)Then
    H1(i)=0.8234*abs(H(i)+dsigma*B3-1.1)**(-1.287)+3.3
  Else
    H1(i)=1.5501*abs(H(i)+dsigma*B3-0.6778)**(-3.064)+3.3
  End if
  FH1(i)=0.0306*abs(H1(i)-3. )**(-0.6169)
  A4=(0.5*CfTur(i)-(Delta2(i)+dsigma*A3)*(H(i)+dsigma*B3+2. )
  S*GraUe(i)/Ue(i))
  B4=Ue(i)*FH1(i)
*.....Calcul de Delta2 et H .....
  Delta2(i+1)=Delta2(i)+dsigma*(A1+2. *(A2+A3)+A4)/6.
  H2(i+1)=H2(i)+dsigma*(B1+2. *(B2+B3)+B4)/6.
  H1(i+1)=H2(i+1)/(Ue(i+1)*Delta2(i+1))
  ReDelta2(i+1)=Reinf*Ue(i+1)*Delta2(i+1)/corde
  FH1(i+1)=0.0306*abs(H1(i+1)-3. )**(-0.6169)
  H(i+1)=abs((H1(i+1)-3.3)/0.8234)**(-1./1.287)+1.1
  If(H(i+1).Lt.1.6)goto200
  H(i+1)=abs((H1(i+1)-3.3)/1.5501)**(-1./3.064)+0.6778
200 CfTur(i+1)=0.246*(ReDelta2(i+1)**(-0.268))*(10**(-0.678*H(i+1)))
116 CONTINUE
  Return
  End

```