

**UNIVERSITE SAAD DAHLEB de Blida 1**

**Faculté de Technologie**

**Département d'Electronique**

## **THESE de DOCTORAT**

**Spécialité** : Electronique

**Option** : Electronique

Fusion multi capteur par l'algorithme du filtre de Kalman sans parfums (UKF), le filtre de Kalman à différence centrale (CDKF) et le modèle de mélange gaussien (GMM) appliqués à un robot mobile en milieu extérieur.

Présenté par

**BAYASLI Omar**

Devant le jury composé de :

|                      |             |                  |                    |
|----------------------|-------------|------------------|--------------------|
| BEN SELAMA Zoubir    | Professeur, | U. de Blida1     | Président          |
| SALHI Hassen         | Professeur, | U. de Blida1     | Directeur de thèse |
| BENADDA Belkacem     | Professeur, | U. de Tlemcen    | Examineur          |
| MOUALDIA Abdelhafidh | MCA,        | U. de Medea      | Examineur          |
| RABEHI Abdelaziz     | MCA,        | U. de Tissemsilt | Examineur          |

## DEDICACE

Je dédie cette thèse à tous ceux qui ont cru en mes capacités et n'ont jamais cessé de me soutenir.

## RESUME

Le robot mobile a un grand rôle, dans le monde industriel. Il facilite toutes les tâches de production et de service dans les différents domaines. Le contrôle du robot mobile est très important dans la surveillance de la trajectoire à travers des capteurs mobiles.

Dans le présent travail nous avons étudié les différentes méthodes de localisation des paramètres de position et d'orientation du robot mobile dans un environnement connu à l'aide de différents filtres. Le filtre de Kalman étendu (EKF), le filtre de Kalman sans parfums (UKF), le filtre de Kalman à différence centrale (CDKF) ainsi que le modèle de mélange Gaussien (GMM). Cette étude nous a permis de proposer un algorithme pour l'estimation des paramètres de position, d'orientation ainsi que la distance séparant le robot mobile aux obstacles fixes, au cours du déplacement de ce dernier sur une trajectoire connue.

Cet algorithme se base sur la technique de la racine cubique du filtre de Kalman sans parfums (CRUKF). Le paramètre de position est mesuré par le capteur GPS. Le paramètre d'orientation est mesuré par le capteur compas digital et enfin, le paramètre de distance entre le robot mobile et les obstacles fixes est mesuré par le capteur ultra son. Une comparaison des résultats obtenus par les différentes techniques de localisation et d'estimation des trajectoires avec un mouvement du robot mobile sur un plan en deux dimensions a été réalisée.

Divers chemins ont été simulés. Ainsi, les simulations montrent que les différentes techniques du filtre de Kalman donnent des résultats améliorés par rapport au modèle de mélange Gaussien (GMM) avec un réglage fin des matrices d'auto-corrélations des bruits d'état et de mesure de chaque technique.

**Mots clés :** Filtre de Kalman, Fusion multi-capteurs, robot mobile, EKF, UKF, CDKF, GMM et CRUKF

## ABSTRACT

The mobile robot made a big role in the industrial world, to facilitate all stains of the productions and services in all domains. The mobile robot control is very important to supervise his path that is based on mobile sensors.

In this present memory we studied the different localization methods by algorithms of extended Kalman filter (EKF), unscented Kalman filter (UKF), central difference Kalman filter (CDKF), Gaussian mixture model (GMM) and we proposed in this research study the cubic root unscented Kalman filter (CRUKF) algorithm applied for the localization the position and the orientation parameters of mobile robot in environment and to estimate the distance of mobile robot with the obstacles in displacement moment on her trajectory. We suppose a mobile robot movement two plan and the position measured by the GPS sensor and its orientation measured by ultra-son sensor or digital compass sensor.

In our work we simulated a different trajectory to compared and show the difference technics extended Kalman filter (EKF), unscented Kalman filter (UKF), central difference Kalman filter (CDKF), Gaussian mixture model (GMM) and the cubic root unscented Kalman filter (CRUKF). And these kinds of Kalman filter require a regulation of her matrixes of auto-interrelationship of the noises and state and measure.

**Key words:** Kalman Filter, sensor's Fusion, mobile robot, EKF, UKF, CDKF, GMM and CRUKF.

## ملخص

حاليا في عالم الصناعة الربو المتحرك سهل بصفة كبيرة في انجاز المنتجات والخدمات بصفة سريعة في كل المجالات. التحكم الالي مهم جدا في مراقبة مسار الربو و ذلك بالملتقطات المتحركة. في هذه الأطروحة قمنا بدراسة الملتقطات المتحركة المندمجة بخوارزمية مرشح كالمن الممدد (EKF), مرشح كالمن (UKF) و مرشح كالمن (CDKF), مختلطة قصيان (GMM) ومرشح (CRUKF) مطبق في تحكم مسار الربو المتحرك في المجال الخارجي المعروف مع فرض حركة الربو في مستوى ذو بعدين و الوضعية مقاسة بملتقط نظام التموضع العالمي (GPS) و ايضا الاتجاه مقاس بالملتقط الرقمي (Compas). في عملنا قمنا بتقريب مسار الربو المتحرك بواسطة مرشح كالمن الممدد (EKF), مرشح كالمن (UKF), مرشح كالمن (CDKF), مختلطة قصيان (GMM) ومرشح (CRUKF) وهذا النوع من مرشحات كالمن تستوجب تعديل لمصفوفات الضجيج للحالة و القياس.

## مفتاح الكلمات :

الربو المتحرك , مرشح كالمن , مرشح كالمن (EKF), مرشح كالمن (UKF), مرشح كالمن (CDKF), مختلطة (GMM), مرشح (CRUKF) و الملتقطات المتحركة المندمجة.

## **REMERCIEMENTS**

Ce travail a été effectué au sein du laboratoire système et télécommande (LABSET) de département d'électronique de l'université Sâad Dahleb de Blida1.

Je remercie vivement monsieur Ben Selama Zoubir professeur de l'université Blida1 département d'électronique, qui me fait l'honneur de présider le jury.

Je remercie vivement monsieur Salhi Hassen professeur de l'université Blida1 département d'électronique qui m'a dirigé pour réaliser ce travail.

Je remercie vivement monsieur Benadda Belkacem professeur de l'université de Tlemcen département d'électronique, pour avoir accepté d'examiner ce travail.

Je remercie vivement monsieur Moualdia Abdelhafidh maitre de conférences A de l'université de Medea département d'électronique, pour avoir accepté d'examiner ce travail.

Je remercie vivement monsieur Rabehi Abdelaziz maitre de conférences A de l'université de Tissemsilt faculté de technologie, pour avoir accepté d'examiner ce travail.

## TABLES DES MATIERES

|                                                                    |    |
|--------------------------------------------------------------------|----|
| RESUME.....                                                        | 3  |
| REMERCIEMENTS.....                                                 | 6  |
| TABLE DES MATIERES.....                                            | 7  |
| Liste des figures.....                                             | 12 |
| Liste des tableaux.....                                            | 14 |
| Acronymes, abréviations et Notations mathématiques.....            | 15 |
| 1. Acronymes et abréviations.....                                  | 15 |
| 2. Notations mathématiques.....                                    | 17 |
| <b>Introduction générale</b> .....                                 | 20 |
| 1. Problématique de localisation de robot mobile.....              | 20 |
| 2. Objectif du travail de thèse.....                               | 22 |
| 3. Le plan de mémoire.....                                         | 23 |
| <br><b>Chapitre 1 : Rappel sur la modélisation de robot mobile</b> |    |
| 1.1. Introduction.....                                             | 24 |
| 1.2. Généralités sur le robot mobile.....                          | 24 |
| 1.3. Définition de robot mobile.....                               | 24 |
| 1.3.1. Contrôleurs hiérarchiques.....                              | 25 |
| 1.3.2. Contrôleurs réactifs.....                                   | 25 |
| 1.3.3. Contrôleurs hybrides.....                                   | 25 |
| 1.4. Rappel mathématiques sur la modélisation de robot mobile..... | 26 |
| 1.4.1. Roulement sans glissement.....                              | 27 |
| 1.4.2. Les robots mobiles holonomes.....                           | 29 |
| 1.4.3. Les robots mobiles non-holonomes.....                       | 29 |
| 1.4.4. Configuration de modèle du robot mobile.....                | 29 |
| 1.5. Les structures des roues du robot mobile .....                | 31 |
| 1.6. Les types de robots mobiles.....                              | 31 |
| 1.6.1. Robot mobile autonome différentiel ou unicycle.....         | 32 |
| 1.6.1.1. Centre instantané de rotation (CIR) .....                 | 32 |
| 1.6.2. Robot mobile tricycle et de type voiture.....               | 34 |
| 1.6.3. Robot mobile omnidirectionnel.....                          | 35 |
| 1.7. Modélisation générale d'un robot mobile .....                 | 37 |

|                                                                               |    |
|-------------------------------------------------------------------------------|----|
| 1.7.1. Modélisation cinématique d'un robot mobile.....                        | 37 |
| 1.7.1.1 Modélisation cinématique en posture.....                              | 37 |
| 1.7.1.2. Modélisation cinématique en configuration.....                       | 38 |
| 1.7.1.3. Les propriétés de la modélisation cinématique d'un robot mobile..... | 40 |
| 1.7.1.4. Commandabilité des robots mobiles à roues.....                       | 40 |
| 1.7.2. Modélisation dynamique d'un robot mobile.....                          | 41 |
| 1.7.3. Combinaison entre le modèle cinématique et le modèle dynamique.....    | 45 |
| 1.8. Environnement de robot mobile.....                                       | 49 |
| 1.8.1. Environnement des obstacles fixes.....                                 | 49 |
| 1.8.2. Environnement des obstacles mobiles.....                               | 50 |
| 1.9. Conclusion.....                                                          | 50 |

## **Chapitre 2 : La théorie d'estimation et fusion multi capteur**

|                                                                   |    |
|-------------------------------------------------------------------|----|
| 2.1. Introduction.....                                            | 51 |
| 2.2. Définition de l'estimateur.....                              | 51 |
| 2.3. Les méthodes d'estimation.....                               | 52 |
| 2.3.1. La Borne de Cramer-Rao.....                                | 53 |
| 2.3.2. Méthode de maximum de vraisemblance.....                   | 55 |
| 2.3.3. Méthode de Monte Carlo.....                                | 56 |
| 2.4. Estimation d'un signal.....                                  | 57 |
| 2.4.1. Estimation d'un signal connu.....                          | 57 |
| 2.4.2. Estimation d'un signal inconnu.....                        | 58 |
| 2.5. Estimation des paramètres aléatoires.....                    | 58 |
| 2.5.1. La fonction de coût.....                                   | 58 |
| 2.5.1.1. La fonction de coût quadratique .....                    | 58 |
| 2.5.1.2. La fonction de coût valeur absolue.....                  | 59 |
| 2.5.1.3. La fonction de coût uniforme.....                        | 59 |
| 2.5.1.4. Le rôle de la fonction de coût.....                      | 60 |
| 2.6. Estimation des paramètres déterministes.....                 | 61 |
| 2.6.1. Variance d'un estimateur déterministe .....                | 62 |
| 2.7. Estimation optimale des vecteurs .....                       | 63 |
| 2.7.1. Estimation optimale des vecteurs aléatoires.....           | 63 |
| 2.7.1.1. Estimation optimale d'un vecteur aléatoire statique..... | 63 |

|                                                                        |    |
|------------------------------------------------------------------------|----|
| 2.7.1.1.1. Méthode des moindres carrés simple.....                     | 65 |
| 2.7.1.1.2. Méthode des moindres carrés récursive.....                  | 66 |
| 2.7.1.2. Estimation optimale d'un vecteur aléatoire dynamique.....     | 67 |
| 2.7.2. Estimation optimale des vecteurs déterministes.....             | 68 |
| 2.7.2.1. Les performances d'estimation des vecteurs déterministes..... | 69 |
| 2.7.2.1.1. Biais de l'estimateur de vecteurs déterministes.....        | 69 |
| 2.7.2.1.2. Dispersion de l'estimateur des vecteurs déterministes.....  | 70 |
| 2.8. Les Capteurs mobiles.....                                         | 70 |
| 2.8.1. Les Capteurs robotique mobile.....                              | 70 |
| 2.8.2. Mesure de paramètre de position.....                            | 71 |
| 2.8.3. Mesure de paramètre d'orientation.....                          | 72 |
| 2.8.4. Description du système GPS.....                                 | 73 |
| 2.8.5. Le principe de fonctionnement du GPS.....                       | 73 |
| 2.8.6. GPS en mode différentiel.....                                   | 74 |
| 2.8.7. Capteur Compas.....                                             | 75 |
| 2.8.8. Localisation multi-capteur.....                                 | 75 |
| 2.8.9. Capteur ultrason.....                                           | 76 |
| 2.8.9.1. Le principe de fonctionnement du capteur ultrason.....        | 76 |
| 2.8.9.2. Les inconvénients de capteur ultrason.....                    | 76 |
| 2.9. Conclusion.....                                                   | 77 |

### **Chapitre 3 : Les techniques de localisation et d'estimation de la poursuite**

|                                                           |    |
|-----------------------------------------------------------|----|
| 3.1. Introduction.....                                    | 78 |
| 3.2. Définition d'un estimateur optimal.....              | 78 |
| 3.3. Le filtre de Kalman.....                             | 78 |
| 3.3.1. Le principe du filtre de Kalman.....               | 79 |
| 3.3.2. Modélisation du filtre de Kalman.....              | 79 |
| 3.4. Le filtre de Kalman Etendu (EKF).....                | 81 |
| 3.4.1. Modélisation du filtre de Kalman étendu (EKF)..... | 82 |
| 3.4.2. Algorithme du filtre de Kalman Étendu (EKF).....   | 83 |
| 3.5. Le filtre de Kalman sans parfums (UKF).....          | 84 |
| 3.5.1. La transformation sans Parfums (UT).....           | 84 |
| 3.5.2. La transformation sans parfums scalaire (SUT)..... | 87 |

|                                                                                                  |     |
|--------------------------------------------------------------------------------------------------|-----|
| 3.5.3. Le filtre de Kalman sans parfums récursif (RUKF) .....                                    | 89  |
| 3.5.4. Algorithme du filtre de Kalman sans parfums (UKF).....                                    | 91  |
| 3.6. Le filtre de Kalman à différence centrale (CDKF).....                                       | 93  |
| 3.6.1. La formule d'interpolation polynomiale de Stirling.....                                   | 93  |
| 3.6.2. Estimation de la variable aléatoire transformée.....                                      | 95  |
| 3.6.3. Algorithme du filtre de Kalman à différence centrale (CDKF).....                          | 97  |
| 3.7. Le modèle de mélange gaussien (GMM).....                                                    | 99  |
| 3.7.1. Classification du modèle de mélange gaussien (GMM).....                                   | 100 |
| 3.7.2. Algorithme espérance-maximisation EM.....                                                 | 101 |
| 3.7.2.1. Estimation des paramètres EM.....                                                       | 101 |
| 3.7.2.2. Application de l'algorithme EM sur le filtre de Kalman.....                             | 103 |
| 3.7.3. Les paramètres d'un mélange gaussien.....                                                 | 104 |
| 3.7.4. Estimation des covariances d'une gaussienne.....                                          | 105 |
| 3.7.5. Application du modèle de mélange gaussien.....                                            | 105 |
| 3.7.6. La transformation sans parfums (UT) du mélange de deux gaussiennes.....                   | 107 |
| 3.7.7. Algorithme du modèle de mélange gaussien (GMM).....                                       | 107 |
| 3.8. La technique de la racine cubique du filtre de Kalman sans parfums<br>(CRUKF) proposée..... | 110 |
| 3.8.1. La transformation sans parfums cubique.....                                               | 110 |
| 3.8.2. Les sigmas points de la transformation sans parfum cubique.....                           | 111 |
| 3.8.3. La fonction quadrature quadrature.....                                                    | 111 |
| 3.8.4. Algorithme de la racine cubique du filtre de Kalman sans parfums (CRUKF)<br>proposée..... | 112 |
| 3.9. Conclusion.....                                                                             | 114 |

## **Chapitre 4 : Evaluation et comparaisons des résultats obtenues**

|                                                                           |     |
|---------------------------------------------------------------------------|-----|
| 4.1.Introduction.....                                                     | 115 |
| 4.2. Le modèle du robot mobile.....                                       | 115 |
| 4.3. L'expression de la trajectoire du robot mobile.....                  | 116 |
| 4.4. Application les techniques de localisation sur la trajectoireT1..... | 118 |
| 4.4.1. Le filtre de Kalman étendu (EKF).....                              | 118 |
| 4.4.2. Le filtre de Kalman sans parfums (UKF) .....                       | 119 |
| 4.4.3. Le filtre de Kalman à différence centrale (CDKF) .....             | 120 |

|                                                                                                    |            |
|----------------------------------------------------------------------------------------------------|------------|
| 4.4.4. Le modèle de mélange gaussien (GMM).....                                                    | 121        |
| 4.4.5. La technique de la racine cubique du filtre de Kalman sans parfums<br>(CRUKF) proposée..... | 122        |
| 4.5. Application les techniques de localisation sur la trajectoire T2.....                         | 123        |
| 4.5.1. Le filtre de Kalman étendu (EKF).....                                                       | 124        |
| 4.5.2. Le filtre de Kalman sans parfums (UKF).....                                                 | 125        |
| 4.5.3. Le filtre de Kalman à différence centrale (CDKF).....                                       | 126        |
| 4.5.4. Le modèle de mélange gaussien (GMM).....                                                    | 127        |
| 4.5.5. La technique de la racine cubique du filtre de Kalman sans parfums<br>(CRUKF) proposée..... | 128        |
| 4.6. Application les techniques de localisation sur la trajectoire T3.....                         | 129        |
| 4.6.1. Le filtre de Kalman étendu (EKF).....                                                       | 130        |
| 4.6.2. Le filtre de Kalman sans parfums (UKF).....                                                 | 131        |
| 4.6.3. Le filtre de Kalman à différence centrale (CDKF).....                                       | 132        |
| 4.6.4. Le modèle de mélange gaussien (GMM).....                                                    | 133        |
| 4.6.5 La technique de la racine cubique du filtre de Kalman sans parfums<br>(CRUKF) proposée.....  | 134        |
| 4.7. Application les techniques de localisation sur la trajectoire T4.....                         | 135        |
| 4.7.1. Le filtre de Kalman étendu (EKF).....                                                       | 136        |
| 4.7.2. Le filtre de Kalman sans parfums (UKF).....                                                 | 137        |
| 4.7.3. Le filtre de Kalman à différence centrale (CDKF).....                                       | 138        |
| 4.7.4. Le modèle de mélange gaussien (GMM).....                                                    | 139        |
| 4.7.5. La technique de la racine cubique du filtre de Kalman sans parfums<br>(CRUKF) proposée..... | 140        |
| 4.8. L'évaluation et comparaison entre les techniques de localisation.....                         | 141        |
| 4.8.1. Comparaison entre les techniques de localisation pour la trajectoire T1.....                | 141        |
| 4.8.2. Comparaison entre les techniques de localisation pour la trajectoire T2.....                | 143        |
| 4.8.3. Comparaison entre les techniques de localisation pour la trajectoire T3.....                | 144        |
| 4.8.4. Comparaison entre les techniques de localisation pour la trajectoire T4.....                | 145        |
| 4.9. La comparaison entre les performances des techniques d'estimation.....                        | 147        |
| 4.10. Conclusion.....                                                                              | 148        |
| <b>Conclusion générale.....</b>                                                                    | <b>149</b> |
| <b>REFERENCE BIBLIOGRAPHIQUE.....</b>                                                              | <b>151</b> |

## Liste des figures :

Figure 1.1 : Les contrôleurs hiérarchiques pour les robots mobiles

Figure 1.2 : Les contrôleurs réactifs pour les robots mobiles

Figure 1.3 : Les contrôleurs hybrides pour les robots mobiles

Figure 1.4 : Le repérage de robot mobile

Figure 1.5 : Repérage du roulement sans glissement

Figure 1.6 : Les principaux types des roues de robot mobile

Figure 1.7 : Repérage de robot mobile unicycle

Figure 1.8 : Centre instantané de rotation (CIR) d'un robot mobile unicycle.

Figure 1.9 : Le repérage de robot mobile tricycle

Figure 1.10 : Un robot mobile de type voiture et son CIR

Figure 1.11 : Le repérage de robot mobile omnidirectionnel

Figure 1.12 : La représentation des roues libres sans châssis

Figure 1.13 : Les 24 satellites NAVSTAR

Figure 1.14 : Le GPS en mode différentiel

Figure 1.15 : Capteur de Compas CMP03

Figure 2.1 : Algorithme du filtre de Kalman Étendu (EKF)

Figure 2.2 : La transformation sans Parfums(UT)

Figure 2.3 : La de distribution de sigma points pour une gaussienne

Figure 2.4 : Le mélange de deux gaussiennes

Figure 2.5 : La somme de mélange de deux gaussiennes

Figure 2.6 : Application de l'algorithme d'expectation-maximisation (EM) sur le mélange des deux gaussiennes avec 10 itérations.

Figure 2.7 : La transformation sans parfums (UT) de mélange de deux gaussiens

Figure 3.1 : Trajectoire  $T_1$  du robot mobile

Figure 3.2 : La position du robot mobile et son estimée par le filtre EKF

Figure 3.3 : L'erreur d'estimation de la position et son estimée par le filtre EKF

Figure 3.4 : La position du robot mobile et son estimée par le filtre UKF

Figure 3.5- L'erreur d'estimation de la position et son estimée par le filtre UKF

Figure 3.6 : La position du robot mobile et son estimée par le filtre CDKF

Figure 3.7 : L'erreur d'estimation de la position et son estimée par le filtre CDKF

Figure 3.8 : La position du robot mobile et son estimée par le modèle GMM

Figure 3.9 : L'erreur d'estimation de la position et son estimée par le modèle GMM

Figure 3.10 : La position du robot mobile et son estimée par le filtre CRUKF

Figure 3.11 : L'erreur d'estimation de la position et son estimée par le filtre CRUKF

Figure 3.12 : Trajectoire  $T_2$  de robot mobile

Figure 3.13 : La position du robot mobile et son estimée par le filtre EKF.

Figure 3.14 : L'erreur d'estimation de la position et son estimée par le filtre EKF

Figure 3.15 : La position du robot mobile et son estimée par le filtre UKF

Figure 3.16 : L'erreur d'estimation de la position et son estimée par le filtre UKF

Figure 3.17 : La position du robot mobile et son estimée par le filtre CDKF

Figure 3.18 : L'erreur d'estimation de la position et son estimée par le filtre CDKF

Figure 3.19 : La position du robot mobile et son estimée par le modèle GMM

Figure 3.20 : L'erreur d'estimation de la position et son estimée par le modèle GMM

Figure 3.21 : La position du robot mobile et son estimée par le filtre CRUKF

Figure 3.22 : L'erreur d'estimation de la position et son estimée par le filtre CRUKF

Figure 3.23 : Trajectoire aléatoire  $T_3$  de robot mobile

Figure 3.24 : La position du robot mobile et son estimée par le filtre EKF

Figure 3.25 : L'erreur d'estimation de la position et son estimée par le filtre EKF

Figure 3.26 : La position du robot mobile et son estimée par le filtre UKF

Figure 3.27 : L'erreur d'estimation de la position et son estimée par le filtre UKF

Figure 3.28 : La position du robot mobile et son estimée par le filtre CDKF

Figure 3.29 : L'erreur d'estimation de la position et son estimée par le filtre CDKF

Figure 3.30 : La position du robot mobile et son estimée par le modèle GMM

Figure 3.31 : L'erreur d'estimation de la position et son estimée par le modèle GMM

Figure 3.32 : La position du robot mobile et son estimée par le filtre CRUKF

Figure 3.33 : L'erreur d'estimation de la position et son estimée par le filtre CRUKF

Figure 3.34 : Trajectoire cercle  $T_4$  de robot mobile

Figure 3.35 : La position du robot mobile et son estimée par le filtre EKF

Figure 3.36 : L'erreur d'estimation de la position et son estimée par le filtre EKF

Figure 3.37 : La position du robot mobile et son estimée par le filtre UKF

Figure 3.38 : L'erreur d'estimation de la position et son estimée par le filtre UKF

Figure 3.39 : La position du robot mobile et son estimée par le filtre CDKF

Figure 3.40 : L'erreur d'estimation de la position et son estimée par le filtre CDKF

Figure 3.41 : La position du robot mobile et son estimée par le modèle GMM

Figure 3.42 : L'erreur d'estimation de la position et son estimée par le modèle GMM

Figure 3.43 : La position du robot mobile et son estimée par le filtre CRUKF

Figure 3.44 : L'erreur d'estimation de la position et son estimée par le filtre CRUKF

Figure 3.45 : L'estimation de la position du robot mobile par les différentes techniques

Figure 3.46 : La comparaison entre les erreurs d'estimation de la position du robot

Figure 3.47 : L'estimation de la position du robot mobile par les différentes techniques

Figure 3.48 : La comparaison entre les erreurs d'estimation de la position du robot

Figure 3.49 : L'estimation de la position du robot mobile par les différentes techniques

Figure 3.50 : La comparaison entre les erreurs d'estimation de la position du robot

Figure 3.51 : L'estimation de la position du robot mobile par les différentes techniques

Figure 3.52 : La comparaison entre les erreurs d'estimation de la position du robot

### **Liste des tableaux :**

Tableau 1.1 : Comparaison des différents types du robot mobile.

Tableau 4.1 : La comparaison entre les performances des différentes techniques.

## **Acronymes, abréviations et Notations mathématiques:**

### **1- Acronymes et abréviations:**

r.s.g : roulement sans glissement

CIR : centre instantané de rotation

GPS : Global Positioning System

PPT : points par tour

RMS : Root Mean Square (racine de la moyenne des carrés)

EQM : Erreur Quadratique Moyenne

CR : Cramer-Rao

MS : moyenne au carrée (mean square)

LS : l'estimateur des moindres carrés (least square)

MAP : l'estimateur du maximum a posteriori

ML : l'estimateur de maximum likelihood (maximum de vraisemblance)

v. a : La variable aléatoire

RV : Radom Variable (variable aléatoire )

SPKF : Sigma-Point Kalman Filter (filtre de Kalman utilisant des sigma ( $\sigma$ ) points)

KF : Kalman Filter (filtre de Kalman)

EKF : Extended Kalman Filter (filtre de Kalman étendu)

IEKF : Iterated Extended Kalman Filter (filtre de Kalman étendu Itéré)

EnKF : Ensemble Kalman Filter (filtre de Kalman d'ensemble)

UT : Unscented Transformation (Transformation sans parfums)

SUT : scaled Unscented Transformation (La transformation sans parfums scalaire)

RUKF : Recursif Unscented Kalman Filter (filtre de Kalman sans parfums récursif)

UKF : Unscented Kalman Filter (filtre de Kalman sans parfums)

CDKF : Central Difference Kalman Filter (filtre de Kalman à différence centrale)

GMM : Gaussian Mixture Model (modèle de mélange gaussien)

EM : Expectation maximisation (espérance-maximisation)

GEM : Generalized Expectation maximisation (espérance-maximisation généralisé)

CEM : Classification Expectation maximisation (espérance-maximisation  
classification)

SEM : Stochastic Expectation maximisation (espérance-maximisation stochastique)

arg: argument de l'angle

argmax : argument de l'angle maximale

CRUKF : Cubic Root Unscented Kalman Filter (la racine cubique du filtre de Kalman  
sans parfums)

## 2- Notations mathématiques :

$X(t)$  : L'état de système

$\dot{X}(t) = dX/dt$  : La dérivée du vecteur d'état  $x$

$\hat{X}(t)$  : L'état estimé de système

$E(X)$  : L'espérance du vecteur aléatoire  $X$

$E(X/Y = y)$  : L'espérance du vecteur aléatoire  $X$  sachant que la réalisation de  $Y$  est  $y$

$Var(X)$  : La variance de la variable aléatoire  $X$

$E[\hat{X}]$  : La moyenne de  $X$  estimée

$Var(\hat{X})$  : La variance de  $X$  estimée

$q$  : La puissance d'un bruit blanc

$P(X)$  : La probabilité de l'événement  $X$ ,

$p(x/y)$  : La densité de probabilité de  $x$  sachant que la réalisation de  $Y$  est  $y$

$N(m, P)$  : La loi normale de moyenne  $m$  et de matrice de variance-covariance  $P$

$N$  : Le nombre de particules

$[X]$  : L'unité de la variable  $X$

$X_k$  : La variable  $X$  à l'instant  $k$  (la période d'échantillonnage étant implicite)

$\exp$  : La fonction exponentielle

$\ln$  : La fonction logarithme népérien (logarithme de base 2)

$\log$  : La fonction logarithme décimal (logarithme de base 10)

$\arctg$  : La fonction arc-tangente classique, définie de  $\mathbb{R}$  dans  $[-\pi/2; +\pi/2]$

$\int_{\mathbb{R}^n} f(x)$  : L'intégrale multiple de  $f(x)$  sur l'espace où les valeurs de  $x$ , à savoir  $\mathbb{R}^n$

$k$  : Le temps discret

$X_k$  : Le vecteur d'état à l'instant  $k$

$Y_k$  : Le vecteur de mesure ou d'observation à l'instant  $k$

$W_k$  : Le bruit d'état ou de dynamique à l'instant  $k$

$V_k$  : Le bruit de mesure à l'instant  $k$

$u_k$  : Le vecteur déterministe de commande à l'instant  $k$

$\hat{X}_{k/k}$  : L'estimée de  $X_k$  obtenue à partir des mesures  $Y_k$

$\hat{X}_{k+1/k+1}$  : L'estimée de  $X_{k+1}$  obtenue à partir des mesures  $Y_{k+1}$

$P_{k/k}$  : La variance de l'erreur d'estimation à l'instant  $k$

$P_{xx}$  : La matrice de covariance pour la variable aléatoire  $x$

$P_{xy}$  : La matrice de trans-covariance entre les variables aléatoires  $x$  et  $y$

$\hat{Z}_{k+1/k}$  : La valeur de mesure prédite de  $\hat{Z}_{k+1}$

$\hat{X}_{k+1/k}$  : L'état prédit à l'instant  $k + 1$ , en sachant la statistique à l'instant  $k$

$P_{k+1/k}$  : La covariance des erreurs prédite à l'instant  $k + 1$ , en sachant la statistique à l'instant  $k$

$\tilde{X} = X - \hat{X}$  : L'erreur de l'estimation  $X_k$  par  $\hat{X}_{k/k}$

$X = diag(\dots)$  : La matrice diagonale remplie dans l'ordre avec les termes indiqués

$Q, R$  : Les matrices des covariances des bruits d'état (processus) et de mesure (d'observation).

$P(k)$  : La matrice de covariance de l'erreur d'estimation.

$K_f$  : Le gain du filtre de Kalman.

$H_k^T$  : La matrice transposée de  $H$  sachant  $k$

$\psi, \theta, \varphi$  : Cap, tangage, roulis (les angles d'Euler)

$\bar{x}$  : La moyenne de la variable aléatoire  $x$

$\nabla_x f$  : Gradient de la fonction  $f$  par rapport au vecteur  $x$

$\nabla_a$  : Le vecteur gradient par rapport à  $a$

$x^{(i)}$  : Point sigma de rang  $i$  (transformation Unscented)

$w^{(i)}$  : Pondération associée au point  $x^{(i)}$  (transformation Unscented)

$\tilde{D}_{\nabla_z} f$  : Opérateur d'accroissement centré de premier ordre associé à la fonction  $f(z)$

$\tilde{D}_{\nabla_z}^2 f$  : Opérateur d'accroissement centré de deuxième ordre associé à la fonction  $f(z)$

$\tilde{f}(z)$  : La fonction multidimensionnelle

$\mu_k$  : La moyenne de vecteur colonne

$\Sigma_k$  : La matrice de variance covariance

$f(x, \theta_k)$  : La loi normale multidimensionnelle paramétré par  $\theta_k$ .

$g(x, \Phi)$  : La densité de mélange de gaussiennes paramétré par  $\Phi$

$L(x, \theta)$  : Le maximisant de la log-vraisemblance par le paramètre  $\theta$

$g^{(i)}(\theta)$  : La fonction auxiliaire de vraisemblance de paramètre  $\theta$

$f(x|m, \sigma)$  : La fonction gaussienne  $f$  d'une variable aléatoire  $x$  et de la moyenne gaussienne  $m$  et d'une variance  $\sigma$

$P(X)$  : La probabilité d'émission d'une trame  $X$

$m_q$  : La moyenne de mélange gaussien

$\sigma_q$  : La variance diagonale de mélange gaussien  
 $\sigma_q^2$  : La covariance diagonale de mélange gaussien  
 $\alpha_q$  : Le taux d'adaptation de mélange gaussien  
 $qq(X)$  : La fonction quadrature quadrature (la fonction orthogonale)  
 $V^T$  : Le vecteur transposée de  $V$   
 $update(k)$  : La mise à jour de temps  $k$   
 $\sqrt[3]{\cdot}$  : La racine cubique de la matrice triangulaire  
 $T_1$  ,  $T_2$  ,  $T_3$  et  $T_4$ : Les trajectoires de robot mobile

## **Introduction générale**

Dans cette thèse, il sera question de l'exposition de la problématique du thème de recherche, ensuite on s'étalera sur l'objectif du présent travail tout en y avançant quelques propositions de solutions. Enfin, on donnera le plan de travail suivi dans la réalisation de cette thèse.

### **1. Problématique de localisation de robot mobile**

Le robot mobile est utilisé dans les différents domaines industriels. Son avènement a engendré un énorme développement de la technologie et a facilité la réalisation de l'augmentation de la production dans un temps record. Leur intérêt réside dans leur mobilité et leur application dans de nombreux domaines. Les robots manipulateurs sont destinés à assister l'homme dans les tâches difficiles et pénibles comme le transport des charges lourdes, l'inspection des fonds marins, la localisation d'une source d'incendie dans la nature rurale, ou aussi pour faire cueillette des fruits et traitement des plantes dans les champs agricole. On peut aussi les utiliser dans l'exploration spatiale, l'aide aux handicapés physiques, l'assistance et l'intervention dans les cas d'urgence (domaine médicale), surveillance des sites et des endroits sensibles. D'autre part, l'industrie nucléaire a besoin des machines permettant d'agir à distance dans des environnements encombrés et inaccessibles à l'homme pour éviter la décontamination radioactive. Les manipulations dans le domaine de la chimie sont aussi difficiles à mener par l'être humain. Ainsi, pour éviter l'intervention directe de l'homme sur des matériaux toxiques, en milieu dangereux nous avons besoin de l'intervention de robots mobiles autonomes capables de se déplacer d'un point à un autre sur une simple demande de l'utilisateur, qui n'a ainsi plus besoin d'être un expert en pilotage. L'aspect particulier de la mobilité impose une complexité technologique et méthodologique qui s'ajoute en général aux problèmes rencontrés par les robots mobiles. La résolution de ces problèmes passe par l'emploi de toutes les ressources disponibles au niveau de la technologie pour assurer la stabilité de la trajectoire, l'autonomie de l'énergie ainsi que la programmation optimale des commandes. Le traitement des informations passe par l'utilisation des techniques de l'intelligence artificielle et de processeurs particuliers (vectoriel, cellulaires). L'autonomie du robot mobile est une faculté qui va lui permettre de s'adapter ou de prendre une décision dans le but de réaliser une tâche malgré le manque

d'informations préliminaires ou éventuellement erronées. Les recherches sur l'estimation des grandeurs du parcours et de la position sont généralement adaptées par des méthodes directes et indirectes. Dans les méthodes directes, le paramètre du parcours est collecté directement sur le terrain à partir de capteurs mobiles qui sont intégrés soit dans le châssis ou dans les axes des roues du robot mobile. Actuellement, Le GPS (Global Positioning System) est l'outil technologique le plus utilisé pour collecter les données des différents paramètres du parcours, de la position et d'orientation permettant ainsi l'automatisation des méthodes manuelles.

Dans les méthodes indirectes, les paramètres du parcours, de la position et d'orientation sont estimés ou calculés à partir des paramètres intermédiaires, comme la vitesse de robot mobile dans l'espace intégré dans un environnement ou aussi comme la distance entre les obstacles et le robot mobile au cours de mouvement et de fonctionnement à base des capteurs fixes et mobiles ou à base de détecteurs d'objets qui sont actuellement les capteurs les plus utilisés.

La localisation des robots mobiles représente actuellement un domaine de recherche très actif. Les tâches de robots mobiles sont souvent à caractère répétitif sur le même chemin très bien défini sur le sol de l'environnement, soit par des lignes ou des rails. Ainsi, le robot mobile se base sur des capteurs pour détecter les différents objets et les obstacles qui peuvent être fixes ou mobiles, en position derrière ou devant au moment de son déplacement.

La méthode de maximum de vraisemblance, la méthode de Monté Carlo ainsi que la méthode des moindres carrés sont des outils qui permettent de localiser et d'estimer les différentes grandeurs constantes d'état statique ou dynamique. Elles permettent de mesurer l'erreur d'estimation de ces grandeurs. Dans notre travail, nous allons appliquer d'autres techniques : le filtre de Kalman étendu (EKF), le filtre de Kalman sans parfums (UKF), le filtre de Kalman à différence centrale (CDKF), le modèle de mélange Gaussien (GMM) ainsi que la technique de la racine cubique du filtre de Kalman sans parfums (CRUKF) que nous avons proposé pour estimer les paramètres de position et d'orientation du robot mobile. La localisation relative du robot mobile dans l'environnement occupe une place de choix pour déterminer le bon déroulement de la planification et de la navigation. Elle consiste à calculer et à maintenir à jour la connaissance de la position et d'orientation de notre robot mobile dans un repère absolu lié à l'environnement de travail. Le robot mobile est complètement localisé par deux paramètres de position et d'orientation qui sont

mesurées par des capteurs intégrées au niveau, soit des axes des roues ou du châssis de ce robot mobile. Les capteurs utilisés pour cette localisation sont basés sur un modèle mathématique. La réception d'informations et la mise en émission ou en correspondance des données observées avec le modèle passent par l'estimation des grandeurs de la position et d'orientation.

Les problèmes de la mise en oeuvre en trajectoire représentent un aspect majeur du problème de localisation. Les techniques de localisation sont utilisées dans la plupart des systèmes. Il s'agit d'une approche qui consiste à combiner les calculs de la moyenne, de la variance... Les problèmes de la mise en oeuvre en trajectoire sont aussi un peu difficiles lorsqu'on utilise la vision par ordinateur pour acquérir les données sous forme d'images à travers des caméras. On suppose que le modèle du robot mobile est connu ainsi que celui du modèle de l'environnement est disponible. La localisation suit ainsi la même trajectoire de modèle supposé avec les étapes importantes suivantes :

- localisation des paramètres de position et d'orientation du robot mobile.
- l'estimation de la distance entre le robot mobile et les différents obstacles fixes ou mobiles au moment de parcours.
- la stabilité des différentes trajectoires du robot mobile dans un environnement connu.

Les performances des systèmes de localisation finale en termes de temps de calcul et de précision, dépend donc de celles des techniques de localisation utilisés et de chacune des étapes de calcul des expressions des différentes trajectoires possibles. C'est ainsi que le choix du modèle de l'environnement de robot mobile a été effectués.

## **2. Objectif du travail de thèse**

Le but ultime de présent travail a été d'optimiser chacune des techniques de la poursuite et d'estimation de la trajectoire connue pour qu'elles répondent mieux aux commandes de robot mobile dans son espace d'environnement.

Dans le détail de cet objectif principal il a été question de développer une méthode permettant de résoudre les problèmes d'estimation de la position et de la distance entre le robot mobile et les obstacles fixes qui se trouvent dans l'environnement. Pour cela, on a estimé la position et l'orientation du robot mobile par les différentes méthodes de localisation basées sur le filtre de Kalman étendu (EKF), le filtre de

Kalman sans parfums (UKF), le filtre de Kalman à différence centrale (CDKF) et le modèle de mélange Gaussien (GMM). Nous avons proposé un nouveau algorithme pour estimer les paramètres de la position et de l'orientation ainsi que de la distance avec les obstacles fixes au cours de déplacement du robot mobile sur une trajectoire connue. La technique de la racine cubique du filtre de Kalman sans parfums (CRUKF) qui représente l'algorithme que nous avons établi, se base sur la modification des matrices de covariances du filtre de Kalman sans parfums (UKF). Dans la méthodologie proposée, l'évolution de ces filtres sont basée sur la méthode analytique classique des stocks.

La performance de l'algorithme proposé (CRUKF) fera en suite objet de comparaison avec les autres filtres trouvés dans la littérature. Elle sera évaluée par des simulations en choisissant différentes trajectoires. Finalement, sa précision sera comparée avec celles des autres versions classiques.

### **3. Le plan de mémoire**

Le manuscrit est organisé comme suit :

Nous commençons par une introduction générale sur la problématique de localisation du robot mobile et d'estimation de la position et l'angle d'orientation dans différents modèles de trajectoires dans un environnement connu contient sur des obstacles fixes. En fin de cette partie, les principaux aspects est d'optimisé la localisation et l'estimation des différents paramètres du robot mobile par les techniques utilisées qui sont citées avant.

Le Chapitre 1 est consacré à un rappel mathématique sur la modélisation et des définitions des différents types du robot mobile et sa termine par une conclusion.

Le Chapitre 2 est consacré à la théorie d'estimation et fusion multi capteur ainsi que les différentes méthodes d'estimation et sa termine par une conclusion.

Le Chapitre 3 est une présentation des techniques de localisation et d'estimation de la poursuite du robot mobile ainsi que les algorithmes de chaque technique. En fin sa termine par une conclusion.

Le Chapitre 4 est consacré pour l'évaluation et la comparaison des résultats de la poursuite et de localisation du robot mobile. En fin on termine notre thèse par une conclusion générale et quelques perspectives sur les prochaines études de ce domaine.

## **Chapitre 1 : Rappel sur la modélisation de robot mobile**

### **1.1. Introduction**

Le premier chapitre sera consacré à des généralités sur le robot mobile. Ensuite, il sera question d'évoquer quelques généralités portant sur la modélisation cinématique et dynamique. S'ensuivra une modélisation générale de robot. Et on terminera par une conclusion.

### **1.2. Généralités sur le robot mobile**

Actuellement, l'étude et la recherche dans le domaine de la robotique s'intéresse à développer des machines intelligentes : moins de pannes, simple à commander et de plus en plus autonomes. La difficulté d'accès aux humains à des endroits encombrés ou à haut risque (radioactivité, haut potentiel d'explosivité...) à motivé la communauté des chercheurs à se pencher de plus en plus sur la problématique de développement, de réalisation et d'étude d'algorithmes de contrôle de robots mobiles. En effet, il est possible, depuis quelques années, de distinguer des approches originales sur des modèles mathématiques classiques basées sur de nouvelles sources d'inspiration comme par exemple : l'étude du vivant. Les travaux de Rodney Brooks (Brooks 1991) inspirés par l'éthologie et l'étude des insectes ont permis de mettre en avant le concept de décomposition ( behavior based modules ). Ce concept sera la base de nombreux travaux futurs (Ferber 1995) et sera combiné avec d'autres méthodes, elles aussi inspirées du vivant [1, 2, 3]. Le changement de position de ces méthodes aux systèmes robotisés a d'abord eu lieu en simulation. Mais rapidement, la nécessité d'expérimenter les méthodes proposées sur de véritables robots mobiles s'est fait ressentir. En effet, les simulations ne permettent pas de modéliser le monde réel avec exactitude. Les simulateurs ne prennent pas généralement en compte les changements d'éclairage, la poussière, les frottements et les différentes trajectoires compliquées qui viennent à perturber les capteurs de localisation.

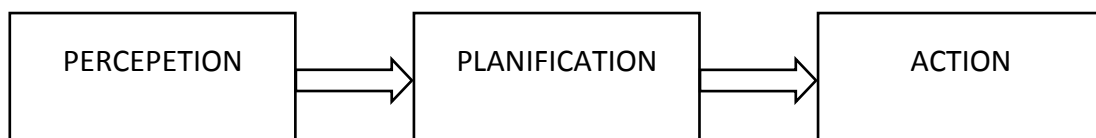
### **1.3. Définition de robot mobile**

Un robot mobile est une machine équipée de perception, de planification et d'action qui lui permettent de se comporter de manière autonome dans son espace d'environnement en fonction de la perception qu'il en a [4, 5]. Bien que dans cette

définition, une architecture soit conçue pour un robot mobile précis, ces architectures classiques ont des contrôleurs qui sont classés en trois parties.

### **1.3.1. Contrôleurs hiérarchiques**

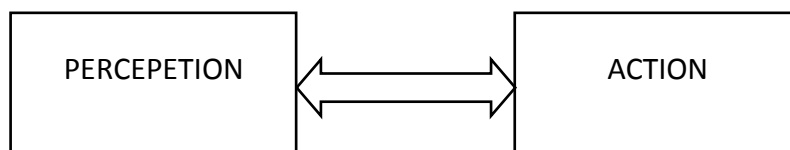
Les premiers robots mobiles dérivant des recherches en intelligence artificielle, utilisent des contrôleurs hiérarchiques. Voir figure (1.1). Travaillant sur un modèle du monde supposé quasiment-parfait, leur fonctionnement repose essentiellement sur la capacité de décision [4, 5, 6, 7, 8]. Les architectures des robots mobiles fonctionnent selon un cycle rigide de modélisation de l'environnement : perception, planification des actions au sein de cette représentation, puis exécution du plan.



**Figure 1.1:** Les contrôleurs hiérarchiques de robot mobile

### **1.3.2. Contrôleurs réactifs**

Dans cette architecture, un ensemble de comportements réactifs, fonctionnant en parallèle, contrôlant le robot mobile et ce sans utiliser de modèle du monde. L'architecture, figure (1.2), supprime évidemment les problèmes dû aux différences entre la réalité, d'une part, et le modèle de l'environnement du robot mobile, d'autre part. Cependant, les tâches de robot mobile sont limitées [4, 5, 6, 7, 8, 9].

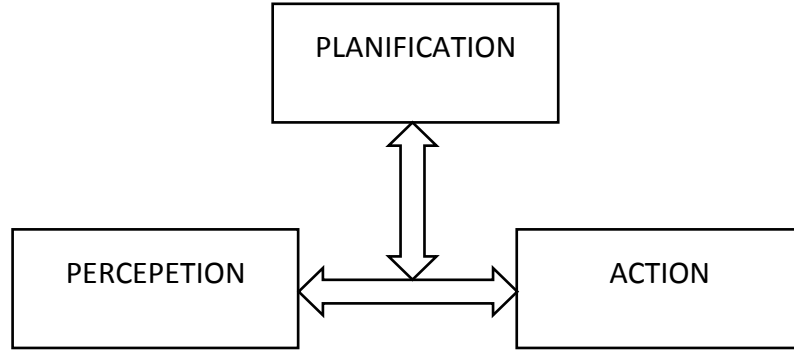


**Figure 1.2:** Les contrôleurs réactifs de robot mobile

### **1.3.3. Contrôleurs hybrides**

Actuellement, la plupart des concepteurs de contrôleurs, choisissent une solution intermédiaire entre ces deux approches sous la forme d'une architecture hybride comme illustré dans la figure (1.3). Cette architecture, se compose de deux niveaux. Le premier est chargé des tâches de navigation de haut niveau, telles que

la localisation, la cartographie et la planification. Pour cela, il s'appuie sur un second niveau réactif qui est chargé d'exécuter les commandes avec le plus de précision possible et de gérer les éléments non modélisés de l'environnement tels que les obstacles inconnus ou dynamiques. La mise en parallèles de ces deux échelles de temps fait la force de ces architectures [4 - 9].



**Figure 1.3:** Les contrôleurs hybrides de robot mobile

#### **1.4. Rappel mathématiques sur la modélisation de robot mobile**

Soit  $\mathcal{R} = (O, \vec{x}, \vec{y}, \vec{z})$  un repère en trois dimensions (3D) fixe, quelconque, dont l'axe vertical  $\vec{z}$  et  $\mathcal{R}' = (O', \vec{x}', \vec{y}', \vec{z}')$ , un repère mobile en trois dimensions lié au robot mobile. On choisit généralement pour  $O'$  un point remarquable de la plateforme, typiquement le centre de l'axe des roues motrices s'il existe, comme illustré à la figure (1.4). La situation du robot mobile est définie par le vecteur :

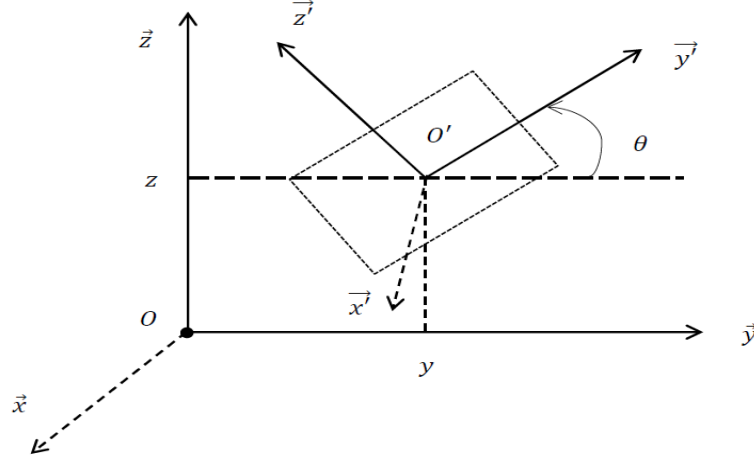
$$\Upsilon = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ \theta \end{pmatrix} \quad (1.1)$$

$y$  et  $z$  sont respectivement les coordonnées du point  $O'$  dans  $\mathcal{R}$  et  $\theta$  l'angle de  $(\vec{y}, \vec{z})$ . La configuration du robot mobile est définie par le vecteur de configuration  $q$ :

$$q = \begin{pmatrix} q_1 \\ q_2 \\ \vdots \\ q_n \end{pmatrix} \quad (1.2)$$

Tel que  $n$  est appelée coordonnée généralisée de vecteur configuration.

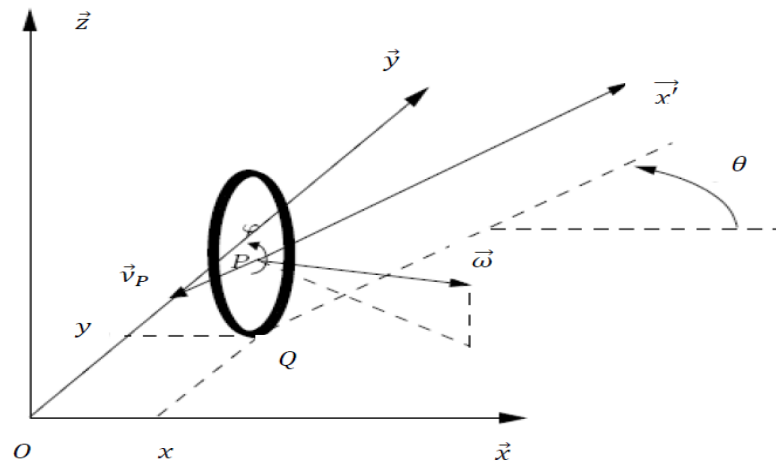
La configuration est ainsi définie sur un espace  $N$  de dimension  $n$ , appelée l'espace des configurations. La situation du robot mobile est donc définie sur un espace  $\mathcal{M}$  de trois dimensions comparable à l'espace opérationnel d'un manipulateur plan.



**Figure 1.4:** Le repérage de robot mobile

#### **1.4.1. Roulement sans glissement**

Le déplacement à l'aide de roues dans de bonnes conditions se fait avec un roulement sans glissement (r.s.g) sur un sol parfait et avec une vitesse relative nulle de la roue par rapport au point de contact au sol. Pour vérifier cette condition, il faut que le contact entre les roues et le sol soit ponctuel. Ainsi, les roues, de rayon  $r$ , sont indéformables [6, 9,10,11,12,13]. Physiquement, on peut modéliser le roulement sans glissement (r.s.g), sur une roue. Soit  $P$  le centre de la roue,  $Q$  le point de contact de la roue avec le sol,  $\varphi$  l'angle de rotation propre de la roue et  $\theta$  l'angle entre le plan de la roue et le plan  $(O, \vec{x}, \vec{z})$ , comme indiqué à la figure (1.5).



**Figure 1.5:** Repérage du roulement sans glissement

La vitesse relative  $\vec{v}_Q$  est nulle. Le point de contact (roue/sol) permet d'obtenir une relation vectorielle entre la vitesse  $\vec{v}_P$  du centre  $P$  de la roue et le vecteur de la vitesse de rotation  $\vec{\omega}$  de la roue :

$$\vec{v}_Q = \vec{v}_P + (\vec{\omega} \wedge \vec{r}_{PQ}) = \vec{0} \quad (1.3)$$

Les points  $P$  et  $Q$  ont pour les coordonnées respectives  $(x, y, r)^T$  et  $(x, y, 0)^T$ . Ça devient alors :

$$\dot{x} \vec{x} + \dot{y} \vec{y} + (\dot{\theta} \vec{z} + \dot{\phi}(\sin\theta \vec{x} - \cos\theta \vec{y})) \wedge (-r\vec{z}) = \vec{0} \quad (1.4)$$

On développe la relation (1.4) donc

$$\begin{aligned} & (\dot{\theta} \vec{z} + \dot{\phi}(\sin\theta \vec{x} - \cos\theta \vec{y})) \wedge (-r\vec{z}) = \begin{pmatrix} \vec{x} & \vec{y} & \vec{z} \\ \dot{\phi} \cdot \sin\theta & -\dot{\phi} \cdot \cos\theta & \dot{\theta} \\ 0 & 0 & -r \end{pmatrix} = \\ & = \vec{x} \cdot \begin{vmatrix} -\dot{\phi} \cdot \cos\theta & \dot{\theta} \\ 0 & -r \end{vmatrix} - \vec{y} \cdot \begin{vmatrix} \dot{\phi} \cdot \sin\theta & \dot{\theta} \\ 0 & -r \end{vmatrix} + \vec{z} \cdot \begin{vmatrix} \dot{\phi} \cdot \sin\theta & -\dot{\phi} \cdot \cos\theta \\ 0 & 0 \end{vmatrix} \\ & = \vec{x} \cdot (-\dot{\phi} \cdot \cos\theta) \cdot (-r) - \vec{y} \cdot (\dot{\phi} \cdot \sin\theta) \cdot (-r) + \vec{z} \cdot 0 \\ & \dot{x} \vec{x} + \dot{y} \vec{y} + \vec{x} \cdot (-\dot{\phi} \cdot \cos\theta) \cdot (-r) - \vec{y} \cdot (\dot{\phi} \cdot \sin\theta) \cdot (-r) = \vec{0} \end{aligned}$$

En fin on obtient l'équation :

$$(\dot{x} + r\dot{\phi} \cos\theta) \vec{x} + (\dot{y} + r\dot{\phi} \sin\theta) \vec{y} = \vec{0} \quad (1.5)$$

Ceci nous donne le système de contraintes scalaires suivant :

$$\dot{x} + r\dot{\phi} \cos\theta = 0 \quad (1.6)$$

$$\dot{x} + r\dot{\phi} \sin \theta = 0 \quad (1.7)$$

On peut transformer pour faire apparaître les composantes de la vitesse dans le plan de la roue d'une part et perpendiculairement à la roue d'autre part :

$$-\dot{x} \sin \theta + \dot{y} \cos \theta = 0 \quad (1.8)$$

$$\dot{x} \cos \theta + \dot{y} \sin \theta = -r\dot{\phi} \quad (1.9)$$

Ces contraintes laissent le vecteur  $\vec{v}_p$  agir dans le plan de la roue.

#### **1.4.2. Les robots mobiles holonomes**

Un robot mobile holonome est un robot mobile à roues capable de se déplacer dans n'importe quelle direction quel que soit son orientation sans manœuvre. Ce type est surnommé omnidirectionnel [5, 6].

#### **1.4.3. Les robots mobiles non-holonomes**

Les robots mobiles non holonomes ont une structure et un mouvement très similaire aux véhicules que nous utilisons dans notre vie courante. En générale, leur structure mécanique est simple. Ils ont des roues motrices, des roues directrices et des roues porteuses. On peut même trouver des roues avec deux ou trois fonctions combinées.

Un robot non-holonome ne dispose, sur un plan, que de deux degrés de libertés.

- la translation avance ou recule.
- la rotation tourne vers la droite ou vers la gauche.
- Il est difficile de faire revenir un robot mobile non-holonome après son démarrage à sa position initiale sans manoeuvres. Ce que faire montrer la difficulté de commande et de contrôle ces types de robot dans son environnement [5-7, 9,11,13-15].

#### **1.4.4. Configuration de modèle du robot mobile**

Soit un système de configuration  $q$ , de dimension  $n$ , soumis à un ensemble de contraintes indépendantes s'écrivant sous la forme  $A^T(q)\dot{q} = 0$ .

Soit  $B(q) = (b_1(q) \ b_2(q) \dots b_m(q))$  une matrice de rang plein  $m$ , orthogonale à  $A(q)$  sur tout l'espace des configurations. Soit enfin, l'algèbre de Lie de dimension  $p$ , avec  $m \leq p \leq n$ , engendrée par l'ensemble des colonnes de  $B(q)$ , auxquelles s'ajoutent les crochets de Lie successifs formés à partir de ces colonnes, à condition qu'ils augmentent la dimension de l'algèbre. Une partie des contraintes, auxquelles est soumis le système  $p - n$ , est intégrable. Prenons l'exemple de la roue dont on a écrit le modèle précédemment. Sa configuration a été entièrement définie à travers les équations (1.8) et (1.9).

(1.10), (1.11) et (1.12), représentent, respectivement : vecteur configuration, matrices de configuration.

$$q = (x \ y \ \theta \ \varphi)^T \quad (1.10)$$

$$A(q) = \begin{pmatrix} -\sin\theta & \cos\theta \\ \cos\theta & \sin\theta \\ 0 & 0 \\ 0 & r \end{pmatrix} \quad (1.11)$$

$$B(q) = \begin{pmatrix} \cos\theta & 0 \\ \sin\theta & 0 \\ 0 & 1 \\ -1/r & 0 \end{pmatrix} \quad (1.12)$$

La matrice  $B(q)$  formée par  $b_1(q) = (\cos\theta \ \sin\theta \ -1/r)^T$  et  $b_2(q) = (0 \ 0 \ 1 \ 0)^T$  vérifient  $A^T(q) B(q) = 0$  pour tout  $q$ . On calcule alors les crochets de Lie successifs à partir des colonnes indépendantes  $b_1(q)$  et  $b_2(q)$  :

$$[b_1(q), b_2(q)] = (\sin\theta \ -\cos\theta \ 0 \ 0)^T \quad (1.13)$$

On prend  $[b_1(q), [b_1(q), b_2(q)]] = 0$

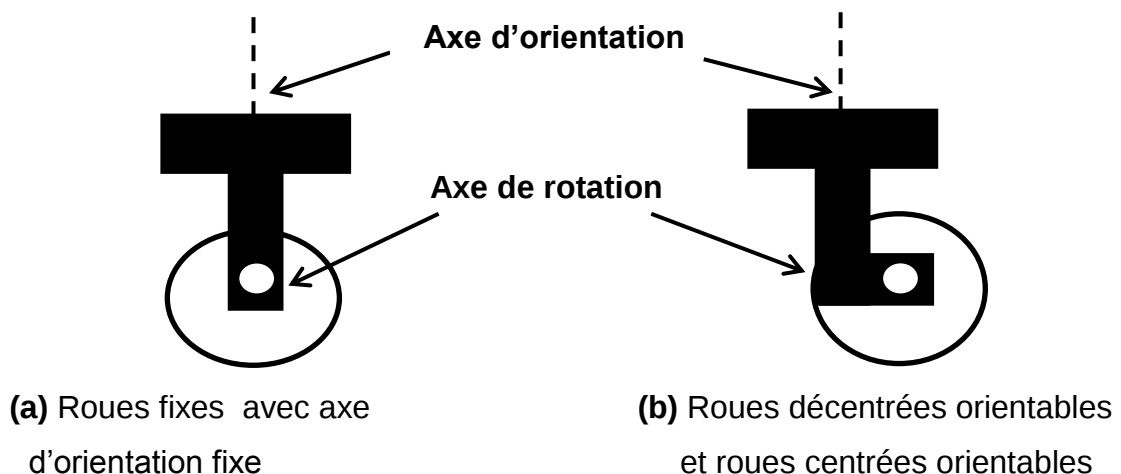
$$[b_2(q), [b_1(q), b_2(q)]] = (\cos\theta \ \sin\theta \ 0 \ 0)^T \quad (1.14)$$

On constate que  $b_1(q)$ ,  $b_2(q)$ ,  $[b_1(q), b_2(q)]$  et  $[b_2(q), [b_1(q), b_2(q)]]$ . Engendrent une algèbre de Lie de dimension 4, égale à celle de  $q$ . On arrête donc le calcul des crochets et on peut conclure qu'il n'existe pas de contrainte intégrable.

Les contraintes (1.8) et (1.9) sont donc des contraintes non holonomes [5, 6, 9, 11, 13-18, 19, 20].

### **1.5. Les structures des roues du robot mobile**

La tâche d'un robot mobile est dépendue de sa structure soit de châssis soit des roues, la combinaison du choix des roues et de leur disposition qui confère à un robot mobile son mode de locomotion propre. Sur les robots mobiles, On distingue trois types de roues, les roues fixes ont un axe de rotation et de direction constante passe par le centre de la roue, les roues centrées orientables leurs axe d'orientation passe par leurs centre comme illustré dans la figure (1.6). Les roues décentrées orientables sont appelées les roues folles leurs axe d'orientation ne passe pas par leurs centre.



**Figure 1.6:** Les principaux types des roues de robot mobile

Il existe pour tous les types de roues un unique point de vitesse nulle autour duquel le robot mobile tourne de façon instantanée. Ce point, lorsqu'il existe, est appelé centre instantané de rotation (CIR). Les points de vitesse nulle liés aux roues se trouvant sur leur axe de rotation, il est donc nécessaire que le point d'intersection des axes de rotation des différentes roues soit unique [5, 6, 7, 9, 11, 13, 14, 15].

### **1.6. Les types des robots mobiles**

On distingue trois types du robot mobile qui sont très utilisés et importants dans les différents domaines industriels.

### 1.6.1. Robot mobile autonome différentiel ou unicycle

Un robot mobile différentiel est un robot unicycle ayant deux roues autopropulsées indépendantes et une ou deux sphères directionnelles. Aussi le robot mobile unicycle actionné par deux roues indépendantes et possédant éventuellement un certain nombre de roues folles assurant sa stabilité [5, 6, 7, 9, 10, 20]. Ce type parfois tend vers l'extrême miniaturisation. Le repérage de robot mobile unicycle est indiqué sur la figure (1.7).

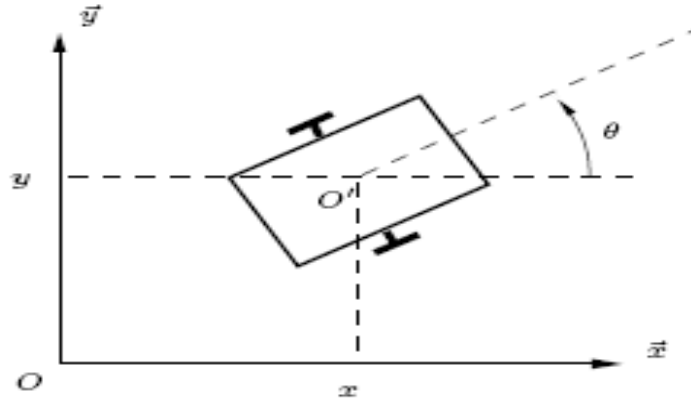


Figure 1.7: Repérage de robot mobile unicycle

#### 1.6.1.1. Centre instantané de rotation (CIR)

Le Centre Instantané de Rotation (CIR) de robot mobile unicycle est un point de l'axe des roues motrices ayant même axe de rotation ainsi la situation de CIR du robot mobile unicycle comme montré dans la figure (1.8).

Soit  $\rho$  le rayon de courbure de la trajectoire du robot,  $L$  la distance entre les axes des roues et  $\omega$  la vitesse de rotation du robot autour du CIR. Alors les vitesses des roues droite et gauche, sont notées  $v_d$  et  $v_g$  qui sont définies comme suit :

$$v_d = -r\dot{\phi}_d = (\rho + L)\omega \quad (1.15)$$

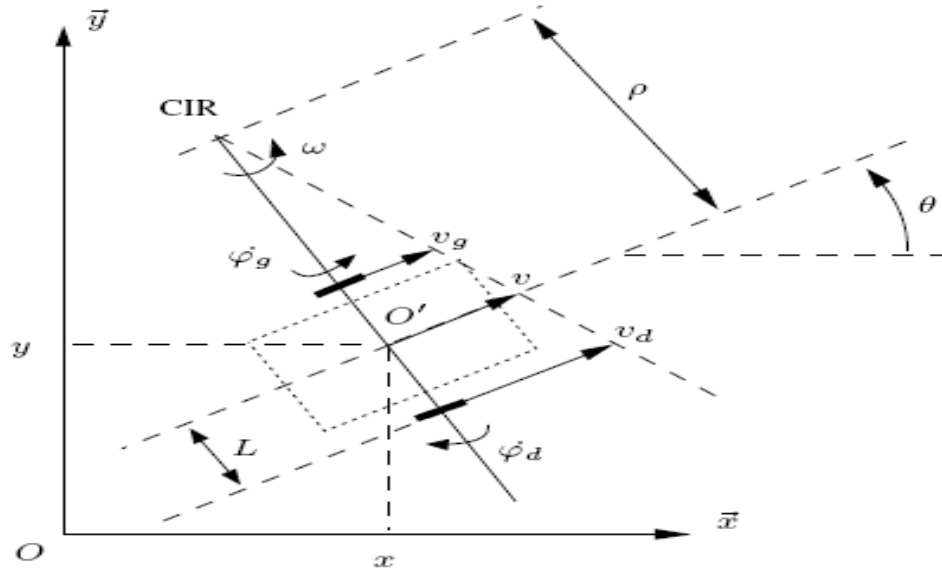
$$v_g = r\dot{\phi}_g = (\rho - L)\omega \quad (1.16)$$

Ce qui permet de déterminer le rayon de courbure de la trajectoire du robot mobile  $\rho$  et la vitesse de rotation  $\omega$  du robot autour du CIR à partir les vitesses des roues :

$$\rho = L \frac{\dot{\phi}_d - \dot{\phi}_g}{\dot{\phi}_d + \dot{\phi}_g} \quad (1.17)$$

$$\omega = \frac{-r(\dot{\phi}_d + \dot{\phi}_g)}{2L} \quad (1.18)$$

L'expression (1.17) permet de situer le CIR sur l'axe des roues. Par ailleurs ces équations expliquent deux propriétés particulières du mouvement de robot mobile de type unicycle, si le couple  $\dot{\phi}_d = -\dot{\phi}_g$ , le robot mobile se déplace en ligne droite ; et si le couple  $\dot{\phi}_d = \dot{\phi}_g$ , alors le robot mobile effectue une rotation sur lui-même. L'utilisation de ces deux modes de locomotion, bien que limitée, permet de découpler les mouvements et de fournir une solution simple pour amener le robot mobile d'une posture à une autre [4, 5, 6, 9, 11, 13, 17 - 22].



**Figure 1.8:** Centre instantané de rotation (CIR) d'un robot mobile unicycle.

Le centre instantané de rotation (CIR) du robot mobile est donné comme suit:

$$\text{CIR} = (x - \rho \cdot \sin(\theta), y + \rho \cdot \cos(\theta))^T \quad (1.19)$$

Avec  $\rho$  est le rayon de courbure de la trajectoire.

$\rho - L$  : est le rayon de courbure de la trajectoire de la roue gauche.

$\rho + L$  : est le rayon de courbure de la trajectoire de la roue droite.

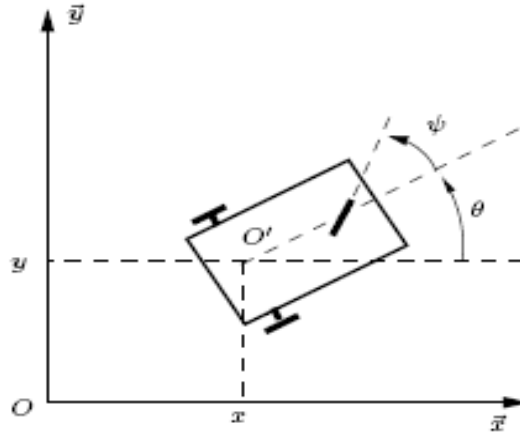
La vitesse longitudinale  $v$  et la vitesse de rotation  $\theta$  du robot mobile sont donné par:

$$v = \frac{v_d + v_g}{2} = \frac{r(\dot{\phi}_g - \dot{\phi}_d)}{2} \quad (1.20)$$

$$\dot{\theta} = \frac{-r(\dot{\phi}_d + \dot{\phi}_g)}{2L} \quad (1.21)$$

### **1.6.2. Robot mobile tricycle et de type voiture**

Le robot mobile tricycle est constitué de deux roues fixes de même axe et d'une roue centrée orientable placée sur l'axe longitudinal du robot comme illustré sur la figure (1.9). Le mouvement est conféré au robot mobile par deux actions qui sont la vitesse longitudinale et l'orientation de la roue orientable. L'intérêt pratique de ce type de robot mobile est resté peu stable et limité [4 - 9, 12, 16, 18, 21].



**Figure 1.9:** Le repérage de robot mobile tricycle

On peut déterminer le rayon de courbure de la trajectoire  $\rho$  et la vitesse de rotation  $\omega$  à partir de la vitesse linéaire  $v$  du robot mobile (vitesse en  $O'$ ) donc :

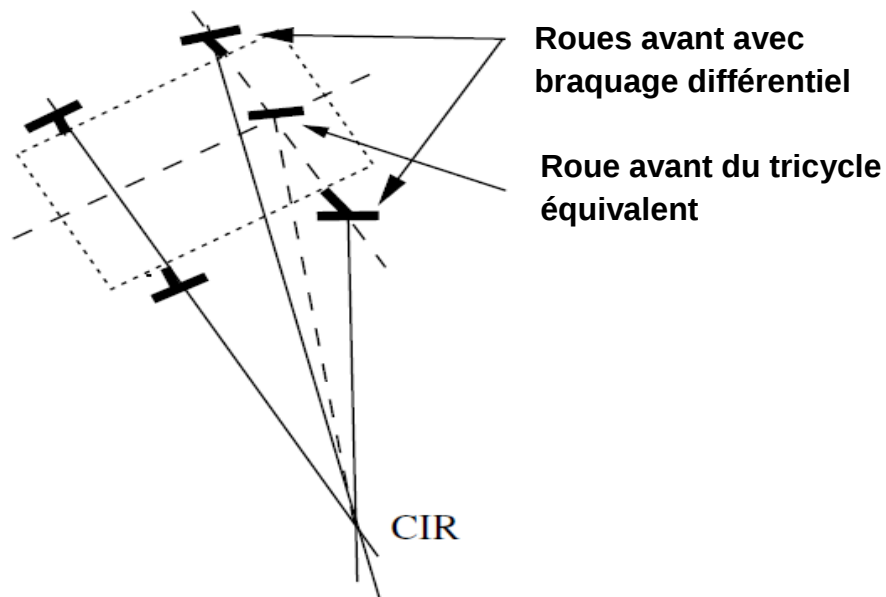
$$\rho = D / \tan(\psi) \quad (1.22)$$

$$\dot{\theta} = \omega = \frac{v}{D} \tan(\psi) \quad (1.23)$$

Ce type de robot mobile peut se diriger en ligne droite pour  $\psi = 0$  et théoriquement tourner autour du point  $O'$  pour  $\psi = \pi/2$ . Néanmoins, le rayon de braquage de la roue orientable, généralement limité, et l'intervalle  $-\pi/2 < \psi < \pi/2$ , interdisant la rotation du robot sur lui-même.

$$\begin{cases} \dot{x} = v \cos(\theta) \\ \dot{y} = v \sin(\theta) \\ \dot{\theta} = \frac{v}{D} \tan(\psi) \\ \dot{\psi} = \eta \end{cases} \quad (1.24)$$

Ou  $u = (v \quad \eta)^T$  est le vecteur de commande cinématique,  $\eta$  représente la vitesse d'orientation imposée à la roue orientable. Ces équations sont celles du modèle cinématique en configuration simplifié. La configuration associée  $q = (x \ y \ \theta \ \psi)^T$  ne décrivant pas les rotations propres des différentes roues [4, 5, 6, 7, 8, 9, 22, 23]. Le roulement idéal des roues, assurant que le CIR est bien unique, est réalisé sur une voiture par un système de braquage différentiel (dit d'Ackermann). L'équivalence entre tricycle et voiture est facile à montrer. Il suffit pour cela de figurer une roue virtuelle qui transformerait un robot de type voiture en tricycle en plaçant la roue orientable du tricycle au centre de l'axe des roues avant de la voiture, orientée de sorte que le CIR reste inchangé, comme montré dans la figure (1.10).



**Figure 1.10:** Le robot mobile de type voiture et son CIR

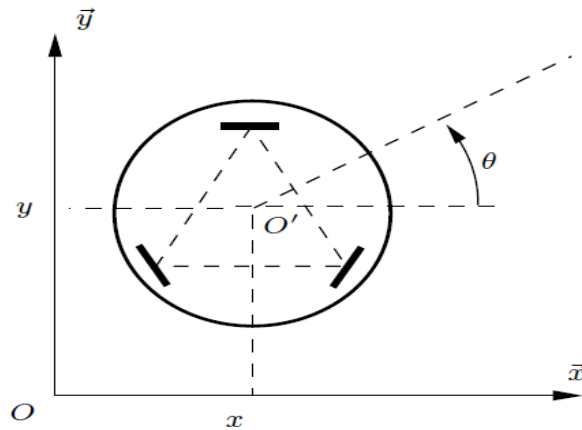
### **1.6.3. Robot mobile omnidirectionnel**

Un robot mobile est dit omnidirectionnel si l'on peut agir indépendamment sur la vitesse de translation selon les axes  $\vec{x}$  et  $\vec{y}$  ainsi la vitesse de rotation autour de

l'axe  $\vec{z}$ . D'un point de vue cinématique on montre que cela n'est pas possible avec des roues fixes ou des roues centrées orientables.

On peut en revanche réaliser un robot mobile omnidirectionnel en ayant recours à l'ensemble de trois roues décentrées orientables ou de trois roues suédoises disposées aux sommets d'un triangle équilatéral.

Le repérage de robot mobile omnidirectionnel est illustré dans la figure (1.11).



**Figure 1.11:** Le repérage de robot mobile omnidirectionnel

Dans ce cas on peut considérer qu'il est possible de commander directement la posture et le modèle cinématique en posture est donné par:

$$\begin{cases} \dot{x} = u_1 \\ \dot{y} = u_2 \\ \dot{\theta} = u_3 \end{cases} \quad (1.25)$$

Les robots mobiles non holonomes sont les robots unicycle, les robots tricycles et les robots de types voiture et les robots holonomes sont les robots de type omnidirectionnels [4, 5, 6, 7, 8, 9, 19, 21, 23, 24, 25].

On peut faire une comparaison entre les types des robots mobiles holonomes et non holonomes celons leurs avantages et inconvénients.

Le tableau (1.1) montre la stabilité, la rotation et le niveau de la complexité mécanique de chaque type de robot mobile à roues. Comme on peut conclure que les propriétés physiques de robot mobile unicycle et robot mobile omnidirectionnel sont meilleurs par rapport aux propriétés physiques des autres types de robot

mobile. Par contre le robot mobile de type tricycle est peu stable et pas de rotation sur soi-même, concernant le robot mobile de type voiture est stable mais pas de rotation sur soi-même.

| type de robot mobile   | les propriétés physiques                                                                |
|------------------------|-----------------------------------------------------------------------------------------|
| Robot unicycle         | non-holonyme, stable, rotation sur soi-même et complexité mécanique faible.             |
| Robot tricycle         | non-holonyme, peu stable, pas de rotation sur soi-même et complexité mécanique moderne. |
| Robot voiture          | non-holonyme, stable, pas de rotation sur soi-même et complexité mécanique moderne.     |
| Robot omnidirectionnel | holonyme, stable, rotation sur soi-même et complexité mécanique importante.             |

**Tableau 1.1:** Comparaison des différents types du robot mobile.

### **1.7. Modélisation générale d'un robot mobile**

Après une combinaison entre la modélisation cinématique et la modélisation dynamique, on obtient la modélisation générale d'un robot mobile.

#### **1.7.1. Modélisation cinématique d'un robot mobile**

La modélisation cinématique d'un robot mobile est l'étude du mouvement d'un système mécanique sans considération des forces qui influent sur son mouvement. On s'intéresse que sur les vecteurs de position et les vecteurs de vitesse. Il y'a une modélisation cinématique en posture et une modélisation cinématique en configuration [4, 5, 6, 20, 24, 25, 26].

##### **1.7.1.1. Modélisation cinématique en posture**

La dérivée de la posture est reliée au vecteur de la commande  $u = (v, \omega)^T$ . Une simple et facile considération géométrique donne un modèle cinématique en posture représenté comme suit:

$$\begin{cases} \dot{x} = v \cos \theta \\ \dot{y} = v \sin \theta \\ \dot{\theta} = \omega \end{cases} \quad (1.26)$$

Ce qui s'écrit, sous forme matricielle :

$$C(q) = \begin{pmatrix} \cos \theta & 0 \\ \sin \theta & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (1.27)$$

$$\xi = C(q)u \quad (1.28)$$

Et le modèle (1.28) est appelé modèle cinématique en posture du robot mobile.

#### **1.7.1.2. Modélisation cinématique en configuration**

On considère maintenant l'expression des conditions de roulement sans glissement (r.s.g) des deux roues. On transpose les équations (1.8) et (1.9) aux deux roues de l'unicycle.

$$\begin{cases} \dot{x} + L \dot{\theta} \cos \theta + r \dot{\varphi}_d \cos \theta = 0 \\ \dot{y} + L \dot{\theta} \sin \theta + r \dot{\varphi}_d \sin \theta = 0 \\ \dot{x} - L \dot{\theta} \cos \theta - r \dot{\varphi}_d \cos \theta = 0 \\ \dot{y} - L \dot{\theta} \sin \theta - r \dot{\varphi}_d \sin \theta = 0 \end{cases} \quad (1.29)$$

En choisissant  $q = (x \ y \ \theta \ \varphi_d \ \varphi_g)^T$  comme vecteur de configuration, ces contraintes se regroupent sous la forme matricielle  $A^T(q)\dot{q} = 0$  avec :

$$A^T(q) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & L \cos \theta & r \cos \theta & 0 \\ 0 & 1 & L \sin \theta & r \sin \theta & 0 \\ 1 & 0 & -L \cos \theta & 0 & -r \cos \theta \\ 0 & 0 & -L \sin \theta & 0 & -r \sin \theta \end{pmatrix} \quad (1.30)$$

L'intégral de l'équation  $\dot{\theta} = \frac{-r(\dot{\varphi}_d + \dot{\varphi}_g)}{2L}$  sa donne l'angle  $\theta$  comme suit :

$$\theta = \frac{-r(\varphi_d + \varphi_g)}{2L} + \theta_0 \quad (1.31)$$

On constate que  $A(q)$  n'est pas de rang plein, sans perte d'information, on peut réécrire les contraintes comme suit:

$$A^T(q) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & L \cos \theta & r \cos \theta & 0 \\ 0 & 1 & L \sin \theta & r \sin \theta & 0 \\ 1 & 0 & -L \cos \theta & 0 & -r \cos \theta \end{pmatrix} \quad (1.32)$$

Ou  $\theta_0$  est la valeur de  $\theta$  à l'initialisation (les angles des roues, généralement mesurés par des codeurs incrémentaux, étant alors choisis nuls). Cette contrainte intégrable est donc en fait une contrainte holonome. Alors on peut éliminer une des quatre variables constituant le vecteur  $q$  choisi initialement, qui n'était pas constitué de grandeurs indépendantes et qui n'était pas aussi un vecteur de configuration au sens strict. En prenant maintenant  $q = (x \ y \ \theta \ \varphi_d)^T$  on obtient :

$$A^T(q) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & L \cos \theta & r \cos \theta \\ 0 & 1 & L \sin \theta & r \sin \theta \end{pmatrix} \quad (1.33)$$

$$B(q) = \begin{pmatrix} \cos \theta & 0 \\ \sin \theta & 0 \\ 0 & 1 \\ -1/r & -L/r \end{pmatrix} \quad (1.34)$$

En remarquant, d'après ce qui précède, que :

$$\begin{cases} \dot{x} = v \cos \theta \\ \dot{y} = v \sin \theta \\ \dot{\theta} = \omega \\ \dot{\varphi}_d = -\frac{v}{r} - \frac{L\omega}{r} \end{cases} \quad (1.35)$$

On constate que, la dérivée du vecteur de configuration s'écrit :

$$\dot{q} = B(q)u \quad (1.36)$$

Pour le vecteur de commande cinématique  $u = (v, \omega)^T$ . La matrice  $B(q)$  représente le modèle cinématique en configuration du robot mobile. Ce résultat pouvant se généraliser. On notera que la connaissance de ce modèle n'est pas

toujours utile du point de vue pratique [5, 6, 7, 8, 25, 27]. Dans le cas de l'unicycle, étant donné que l'on cherche essentiellement à contrôler la posture du robot mobile et que la variable  $\varphi_d$  n'apparaît pas dans la dérivée des équations de la posture, on se contentera généralement du modèle simplifié (1.26).

#### **1.7.1.3. Les propriétés de la modélisation cinématique d'un robot mobile**

La modélisation avec une représentation de la variable d'état que nous avons exposée dans ce chapitre il résulte, dans tous les cas, un modèle dynamique au sens de l'automatique sous la forme (1.36). Si l'on considère que la configuration (réduite)  $q$  fait office de la variable d'état du système suivant :

$$\dot{x} = B(x)u \quad (1.37)$$

Avec  $B(x)$  de dimension  $n \times m$ . Il s'agit d'une représentation non linéaire sans terme de dérivé, en comparaison de la représentation d'état classique d'un système linéaire invariant dans le temps.

$$\dot{x} = Ax + Bu \quad (1.38)$$

C'est le cas des robots mobiles de type tricycle ou voiture, qui par ailleurs font partie d'une classe de système non linéaires particuliers dites systèmes chaînés. Comme on le précisera au paragraphe consacré à la commande des robots à roues [4, 5, 6, 7, 8, 9, 27, 28, 29].

#### **1.7.1.4. Commandabilité des robots mobiles à roues**

Pour que le robot mobile soit utile ou utilisable, il faut en premier lieu s'assurer de sa commandabilité. Cette propriété signifie qu'il existe toujours une loi de commande  $u(t)$  amenant le robot d'un état initial à un état final quelconque.

Pour caractériser la commandabilité d'un système non linéaire, on peut tout d'abord se demander si son linéarisé autour de tout point d'équilibre est commandable. En  $x_0$  quelconque, le modèle linéarisé issu de (1.25) s'écrit :

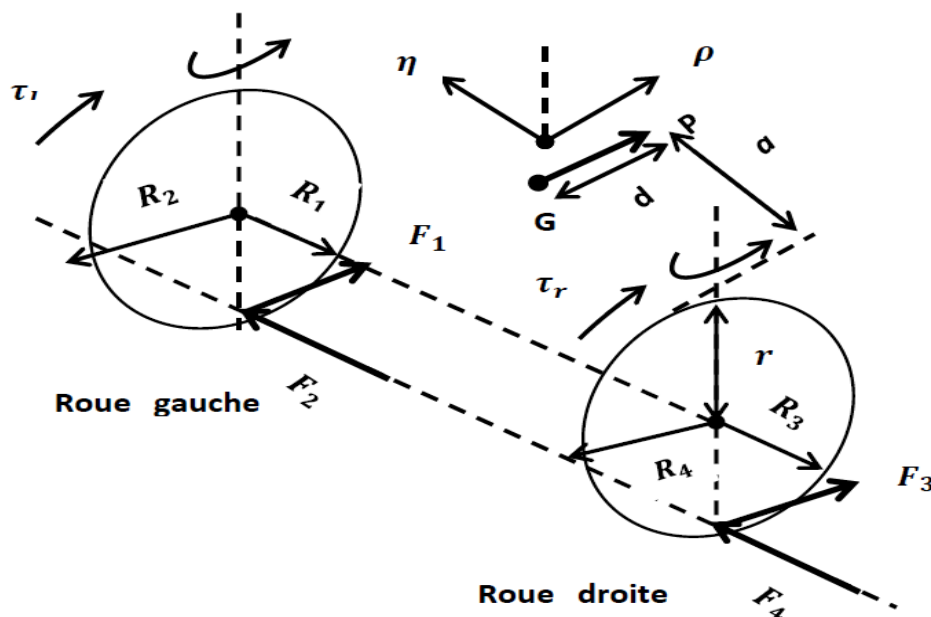
$$\dot{x} = B(x_0)u \quad (1.39)$$

Avec  $B(x_0) \in \mathbb{R}^{n.m}$ . Pour les robots mobiles de type unicycle et voiture, la non-holonomie va de pair avec une forme de sous-actionnement qui se traduit par le fait que  $n > m$ . Appliquée à un tel système, la condition de rang qui est le critère de commandabilité de Kalman :  $\text{Rang}(B, AB, \dots, A^{n-1}B) = n$  qui se résume à la relation de rang suivantes:  $\text{Rang}B(x_0) = n$ .

Cette condition n'est jamais remplie puisque  $n > m$ . La linéarité du système n'est pas donc commandable autour d'un point d'équilibre quelconque. Il faut alors, pour statuer sur la commandabilité du système, utiliser le théorème de Chow [4, 5, 6, 7, 8, 9, 19, 21, 25, 29,30]. On donne ici (sans preuve) son interprétation pour un système dont le modèle cinématique est donnée par la relation (1.26).

### 1.7.2. Modélisation dynamique d'un robot mobile

Le modèle dynamique est essentiel pour la simulation et l'analyse du mouvement du robot mobile, et pour la conception des algorithmes de commande. La dynamique est une étude du mouvement d'un système mécanique en tenant compte les différentes forces qui affectent son mouvement. Pour obtenir un modèle dynamique par l'application directe des équations de Newton-Euler en translation et en rotation, après l'isolement entre les roues et le châssis du robot mobile [5, 6, 7, 31, 32, 33]. Comme représenté sur la figure (1.12).



**Figure 1.12:** La représentation des roues libres sans châssis

Le robot non-holonyme avec un vecteur de coordonnées généralisées  $q$ , et soumis à des contraintes cinématiques peut être décrit par l'équation de mouvement :

$$M(q)\ddot{q} + C(q, \dot{q}) = B(q)\tau + F(\dot{q}) + \Lambda^T(q)\lambda \quad (1.40)$$

Où  $M(q)$  est une matrice d'inertie symétrique définie positive.  $C(q, \dot{q})$  est la matrice des forces centrifuge et de Coriolis.  $B(q)$  est une matrice constante non singulière.  $F(\dot{q})$  est la matrice de frottement de la surface.  $\Lambda^T(q)$  est la matrice des contraintes non-holonomes.  $\lambda$  est le vecteur des multiplicateurs de Lagrange.

La méthode utilisée pour obtenir la dynamique d'un système s'appelle la méthode de Newton-Euler [8, 9, 10, 31, 32, 33, 34, 35]. On applique la relation des forces en système dynamique :  $\sum \vec{F} = m \cdot \vec{a}_G$  d'où

$$\sum F = m \cdot a_G \quad (1.41)$$

Avec  $m$  est la masse du corps,  $a = \dot{v}$  est l'accélération de ce corps, les paramètres  $F_1, F_2, F_3$  et  $F_4$  sont les forces exercées sur le centre de gravité du corps. Pour les mouvements de rotation on a :

$$I \cdot \dot{W} = N \quad (1.42)$$

Avec  $I$  est le moment d'inertie du corps et  $\dot{W}$  est l'accélération angulaire de ce corps et  $N$  est la somme des couples qui produisent cette rotation autour le centre de gravité. On a quatre autres équations dynamiques concernant la translation des roues en tenant compte des forces centripètes, et deux autres équations concernant la rotation.

On note que  $\ddot{\eta}_r$  et  $\ddot{\eta}_l$  sont les accélérations de glissement latérale pour les deux roues droite et gauche respectivement,  $\ddot{\rho}_r$  et  $\ddot{\rho}_l$  sont les accélérations de glissement longitudinal pour les roues droite et gauche. Soit  $(O, \vec{X}, \vec{Y})$  un repère des coordonnées.

$\eta$  et  $\rho$  Les coordonnées du repère fixé sur chaque roue.

$m_r$  : La masse de la plateforme du robot sans les roues, les rotors et les moteurs.

$m_w$  : La masse de chaque roue plus le rotor du moteur.

$I_{rz}$  : Le moment d'inertie de la plateforme du robot sans les roues, les rotors et les moteurs, autour de l'axe vertical qui passe par le point  $G$  centre de gravité.

$I_{wz}$  : Le moment d'inertie de chaque roue avec le rotor du moteur, autour du diamètre de la roue.

$I_{wy}$  : Le moment d'inertie de chaque roue avec le rotor du moteur, autour de l'axe des roues.

$R_1, R_2, R_3$  et  $R_4$  : Les forces de réaction entre le corps du robot et les deux roues motrices.

$F_1$  et  $F_3$  : sont les forces de traction longitudinale pour chaque roue motrice.

$F_2$  et  $F_4$  : sont les forces de traction latérale pour chaque roue motrice.

$\tau_r$  et  $\tau_l$  : Les couples moteur agissant sur l'axe de chaque roue généré par son moteur. Après la projection sur les axes ( $OX$ ) et ( $OY$ ) on obtient les équations :

$$m_r \cdot a_{Gx} = -(R_1 + R_3) \sin(\theta) + (R_2 + R_4) \cos(\theta) \quad (1.43)$$

$$m_r \cdot a_{Gy} = (R_1 + R_3) \cos(\theta) + (R_2 + R_4) \sin(\theta) \quad (1.44)$$

Tel que :  $a_{Gx} = \ddot{x}_G = \dot{v}_x$  et  $a_{Gy} = \ddot{y}_G = \dot{v}_y$

$$(I_{rz} + 2I_{wz}) \ddot{\phi} = d(R_1 + R_3) + a(R_2 - R_4) \quad (1.45)$$

$$m_w \ddot{\eta}_l + m_w \dot{\phi} \dot{\rho}_l = F_2 - R_1 \quad (1.46)$$

$$m_w \ddot{\eta}_r + m_w \dot{\phi} \dot{\rho}_r = F_4 - R_3 \quad (1.47)$$

$$m_w \ddot{\rho}_l + m_w \dot{\phi} \dot{\eta}_l = F_1 - R_2 \quad (1.48)$$

$$m_w \ddot{\rho}_r + m_w \dot{\phi} \dot{\eta}_r = F_3 - R_4 \quad (1.49)$$

$$I_{rz} \ddot{\theta}_l = \tau_l - F_1 r \quad (1.50)$$

$$I_{wz} \ddot{\theta}_r = \tau_r - F_3 r \quad (1.51)$$

On peut écrire ces équations sous forme d'un système matricielle comme donnée dans l'équation suivante :

$$M(q) = \begin{bmatrix} m_r & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & m_r & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & I_{rz} + 2I_{wz} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & m_w & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & m_w & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & m_w & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & m_w & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & I_{wz} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & I_{wz} \end{bmatrix} \quad (1.52)$$

Le vecteur  $\lambda$  qui contient les forces des réactions est donné comme suit :

$$\lambda = [R_1 \quad R_3 \quad R_2 \quad R_4]^T \quad (1.53)$$

Les forces centrifuges appliquées sur les deux roues sont reliées avec le vecteur  $C(q, \dot{q})$  qui est donnée sous la forme suivante:

$$C(q, \dot{q}) = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ m_w \dot{\phi} \dot{\rho}_r \\ m_w \dot{\phi} \dot{\rho}_l \\ -m_w \dot{\phi} \dot{\eta}_r \\ -m_w \dot{\phi} \dot{\eta}_l \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (1.54)$$

La matrice  $B(q)$  est donnée comme suit :

$$B(q) = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (1.55)$$

Le vecteur des forces de traction est donné sous la forme suivante :

$$F(\dot{q}) = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ F_1 \\ F_3 \\ F_2 \\ F_4 \\ -rF_2 \\ -rF_4 \end{bmatrix} \quad (1.56)$$

On a aussi le vecteur de coordonnées généralisées  $q$  du robot mobile non-holonyme qui est donné comme suit:

$$q = [x_G \quad y_G \quad \theta \quad \eta_r \quad \eta_l \quad \rho_r \quad \rho_l \quad \varphi_r \quad \varphi_l]^T \quad (1.57)$$

$$\dot{q} = [\dot{x}_G \quad \dot{y}_G \quad \dot{\theta} \quad \dot{\eta}_r \quad \dot{\eta}_l \quad \dot{\rho}_r \quad \dot{\rho}_l \quad \dot{\varphi}_r \quad \dot{\varphi}_l]^T \quad (1.58)$$

$$\ddot{q} = [\ddot{x}_G \quad \ddot{y}_G \quad \ddot{\theta} \quad \ddot{\eta}_r \quad \ddot{\eta}_l \quad \ddot{\rho}_r \quad \ddot{\rho}_l \quad \ddot{\varphi}_r \quad \ddot{\varphi}_l]^T \quad (1.59)$$

### **1.7.3. Combinaison entre le modèle cinématique et le modèle dynamique**

La combinaison entre le modèle cinématique et le modèle dynamique nous permet de réaliser une modélisation générale du robot mobile, après l'application directe des équations de Newton-Euler en translation et en rotation [7, 8, 31, 35, 36, 37, 39, 40, 41, 42]. La modélisation cinématique du robot mobile est donnée sous la forme suivante :

$$\dot{q}(t) = S(q).v(t) \quad (1.60)$$

Où  $v(t)$  est un vecteur de vitesse comprenant les vitesses de glissement et les vitesses de rotation des roues :

$$v(t) = [\dot{\eta}_l \quad \dot{\rho}_r \quad \dot{\rho}_l \quad \dot{\varphi}_r \quad \dot{\varphi}_l]^T \quad (1.61)$$

On note que les deux roues sont fixées au même axe et ne sont pas guidées ce qui nous donne  $\dot{\eta}_l = \dot{\eta}_r$ . La matrice  $S(q)$  est une matrice de rang complet son produit avec la matrice des contraintes non-holonomes est nul :

$$S^T(q) \cdot \Lambda^T(q) = 0 \quad (1.62)$$

La forme matricielle de  $\Lambda(q)$  est donnée comme suit :

$$\Lambda(q) = \begin{bmatrix} -\sin(\theta) & \cos(\theta) & d & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -\sin(\theta) & \cos(\theta) & d & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \cos(\theta) & \sin(\theta) & a & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ \cos(\theta) & \sin(\theta) & -a & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (1.63)$$

On obtient le modèle de robot mobile par les équations suivantes:

$$\dot{\eta}_l = -\dot{x}_G \cdot \sin(\theta) + \dot{y}_G \cdot \cos(\theta) + d \cdot \dot{\theta} \quad (1.64)$$

$$\frac{\dot{\rho}_l + \dot{\rho}_r}{2} = \dot{x}_G \cdot \sin(\theta) + \dot{y}_G \cdot \cos(\theta) \quad (1.65)$$

$$\frac{-\dot{\rho}_l + \dot{\rho}_r}{2} = a \cdot \dot{\theta} \quad (1.66)$$

Les éléments de la matrice  $S(q)$  sont donnés comme suit:

Avec  $S_{11} = -\sin(\theta)$ ,  $S_{12} = \cos(\theta)$ ,  $S_{21} = \frac{d \cdot \sin(\theta) + a \cdot \cos(\theta)}{2a}$ ,  $S_{22} = \frac{a \cdot \sin(\theta) - d \cdot \cos(\theta)}{2a}$ ,  
 $S_{31} = \frac{-d \cdot \sin(\theta) + a \cdot \cos(\theta)}{2a}$ ,  $S_{32} = \frac{a \cdot \sin(\theta) + d \cdot \cos(\theta)}{2a}$ ,  $S_{23} = \frac{1}{2a}$ ,  $S_{33} = \frac{-1}{2a}$

La matrice  $S(q)$  est donnée sous la forme suivante:

$$S(q) = \begin{bmatrix} S_{11} & S_{21} & S_{31} & 0 & 0 \\ S_{12} & S_{22} & S_{32} & 0 & 0 \\ 0 & S_{23} & S_{33} & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (1.67)$$

Le modèle de la vitesse du robot mobile est exprimé comme suit :

$$v_x = \dot{x}_G = -\dot{\eta}_l \cdot S_{11} + \dot{\rho}_r \cdot S_{21} + \dot{\rho}_l \cdot S_{31} \quad (1.68)$$

$$v_y = \dot{\eta}_l \cdot S_{12} + \dot{\rho}_r \cdot S_{22} + \dot{\rho}_l \cdot S_{32} \quad (1.69)$$

$$\alpha = \dot{\theta} = S_{23} + S_{33} \quad (1.70)$$

On continue à modéliser le robot mobile par la dérivé de l'expression du modèle cinématique (1.60) donc :

$$\ddot{q}(t) = S(q) \cdot \dot{v}(t) + \dot{S}(q) \cdot v(t) \quad (1.71)$$

Les coordonnées de vecteur de vitesse  $v(t)$  sont données dans l'expression (1.61) et après la dérivé on trouve les coordonnées de l'accélération :

$$\dot{v}(t) = [\ddot{\eta}_l \quad \ddot{\rho}_r \quad \ddot{\rho}_l \quad \ddot{\varphi}_r \quad \ddot{\varphi}_l]^T \quad (1.72)$$

La dérivé des éléments de la matrice  $S(q)$  sont donnée comme suit :

$$\begin{aligned} \dot{S}_{11} &= -\dot{\theta} \cos(\theta), \quad \dot{S}_{12} = -\dot{\theta} \sin(\theta), \quad \dot{S}_{21} = \frac{d \cdot \dot{\theta} \cos(\theta) - a \cdot \dot{\theta} \cdot \sin(\theta)}{2a}, \quad \dot{S}_{22} = \frac{a \cdot \dot{\theta} \cdot \cos(\theta) + d \cdot \dot{\theta} \cdot \sin(\theta)}{2a}, \\ \dot{S}_{31} &= \frac{-d \cdot \dot{\theta} \cdot \cos(\theta) - a \cdot \dot{\theta} \cdot \sin(\theta)}{2a}, \quad \dot{S}_{32} = \frac{a \cdot \dot{\theta} \cdot \cos(\theta) - d \cdot \dot{\theta} \cdot \sin(\theta)}{2a}, \quad S_{23} = \frac{1}{2a} = 0, \quad S_{33} = \frac{-1}{2a} = 0. \end{aligned}$$

Donc la dérivé de la matrice  $S(q)$  est donnée comme suit :

$$\dot{S}(q) = \begin{bmatrix} \dot{S}_{11} & \dot{S}_{21} & \dot{S}_{31} & 0 & 0 \\ \dot{S}_{12} & \dot{S}_{22} & \dot{S}_{32} & 0 & 0 \\ 0 & \dot{S}_{23} & \dot{S}_{33} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (1.73)$$

Après le remplacement des équations (1,60) et (1,67) dans l'équation (1,40) sa nous donne :

$$M(q)(S(q).\dot{v}(t) + \dot{S}(q).v(t)) + C(q, \dot{q}) = B(q)\tau + F(\dot{q}) + \Lambda^T(q)\lambda \quad (1.74)$$

On fait le produit des deux côtés par  $S^T(q)$  :

$$S^T(q)M(q)S(q).\dot{v}(t) + S^T(q)M(q)\dot{S}(q).v(t) + S^T(q)C(q, \dot{q}) = (a) \text{ et}$$

$$(a) = S^T(q)B(q)\tau + S^T(q)F(\dot{q}) + S^T(q)\Lambda^T(q)\lambda \quad (1.75)$$

$$S^TMS\dot{v}(t) + S^TM\dot{S}v(t) + S^TC = S^TB\tau + S^TF + S^T\Lambda^T\lambda \quad (1.76)$$

Après le remplacement de l'expression de chaque matrice dans l'expression (1,76) on obtient le modèle mathématique du robot mobile qu'est donnée par l'expression suivante :

$$S(q)_{robot} = \begin{bmatrix} S_{11} & S_{21} & S_{31} \\ S_{12} & S_{22} & S_{32} \\ 0 & S_{23} & S_{33} \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (1.77)$$

$$\begin{aligned} \text{D'où } S_{11} &= -\sin(\theta), \quad S_{12} = \cos(\theta), \quad S_{21} = \frac{d.\sin(\theta)+a.\cos(\theta)}{2a}, \quad S_{22} = \frac{a.\sin(\theta)-d.\cos(\theta)}{2a}, \\ S_{31} &= \frac{-d.\sin(\theta)+a.\cos(\theta)}{2a}, \quad S_{32} = \frac{a.\sin(\theta)+d.\cos(\theta)}{2a}, \quad S_{23} = \frac{1}{2a}, \quad S_{33} = \frac{-1}{2a}. \end{aligned}$$

Donc la modélisation générale de la position du robot mobile est donnée par:

$$x_G = -\eta_l.\sin(\theta) + \rho_r \left( \frac{d.\sin(\theta)+a.\cos(\theta)}{2a} \right) + \rho_l \left( \frac{-d.\sin(\theta)+a.\cos(\theta)}{2a} \right) \quad (1.78)$$

$$y_G = \eta_l.\cos(\theta) + \rho_r \left( \frac{a.\sin(\theta)-d.\cos(\theta)}{2a} \right) + \rho_l \left( \frac{a.\sin(\theta)+d.\cos(\theta)}{2a} \right) \quad (1.79)$$

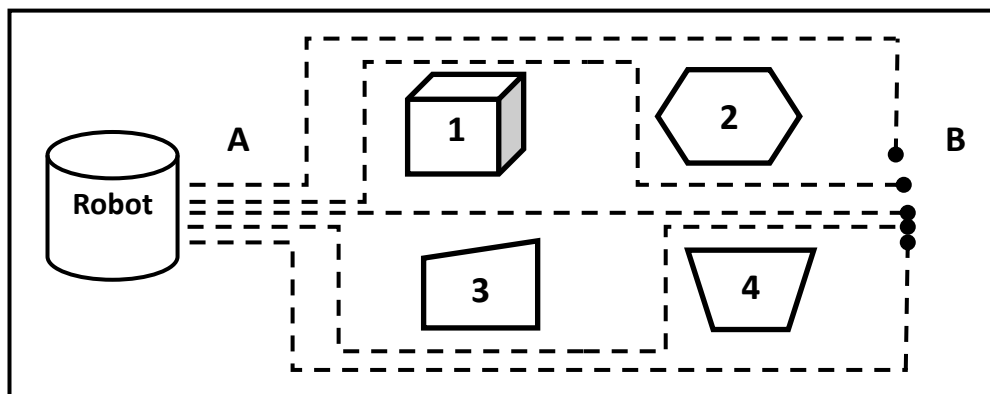
$$\theta_G = \frac{-\rho_l + \rho_r}{2a} \quad (1.80)$$

## **1.8. Environnement de robot mobile**

Un environnement de robot mobile est un milieu contient sur des différents chemins ainsi des obstacles soit fixes ou mobiles. La connaissance du milieu dans lequel évolue le robot mobile n'est établie en général qu'après avoir effectué une campagne de mesure de l'ensemble des éléments constituant l'environnement. Cette procédure peut être évitée si le robot mobile construit lui-même son modèle d'environnement de manière dynamique. Par contre, la planification de la trajectoire n'est pas utilisable tant que le robot mobile ne dispose pas d'un modèle de l'espace d'évolution ce qui handicape très fortement l'utilisation du robot. A partir de cette base d'informations et d'une loi évaluant les erreurs de représentation, le planificateur peut générer des sous-trajectoires faisables dans certaines parties et modifier les sous-trajectoires dans d'autres parties à l'aide des informations locales issues de la mesure des capteurs d'environnement.

### **1.8.1. Environnement des obstacles fixes**

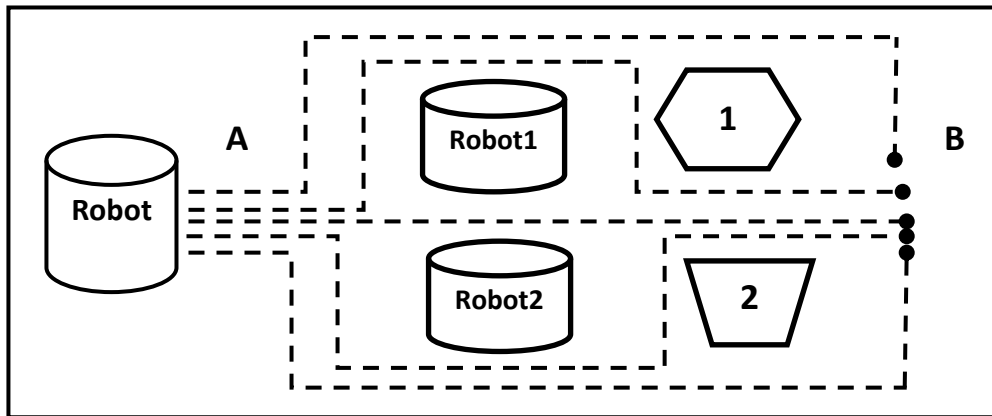
L'environnement de robot mobile permet de réaliser des différentes tâches et des différents rôles de ce robot dans un temps bien déterminé. Le déplacement de robot mobile dans cet environnement peut rencontrer plusieurs types d'obstacles fixes et la figure qui vient après représente un environnement de robot mobile avec des obstacles fixes 1, 2, 3 et 4. Pour que le robot mobile se déplace de point A au point B il y'a donc plusieurs possibilités pour éviter ces obstacles fixes. Comme montré dans la figure (1.13).



**Figure 1.13:** Environnement des obstacles fixes

### **1.8.2. Environnement des obstacles mobiles**

Le déplacement de robot mobile dans un environnement peut rencontrer des obstacles mobiles et aussi des obstacles fixes, comme montré dans la figure (1.14). Cet environnement contient sur les obstacles Robot 1 et Robot 2 qui sont des obstacles mobiles et les obstacles fixes qui sont 1 et 2. Pour que le robot mobile se déplace de point A au point B il y'a plusieurs possibilités pour éviter ces obstacles.



**Figure 1.14 :** Environnement des obstacles mobiles et fixes

### **1.9. Conclusion**

Dans ce chapitre, nous avons présenté une définition du robot mobile. Il a été aussi question de la modélisation mathématique de sa position et de sa vitesse sur les axes des ordonnées et sur les axes des abscisses ainsi que de l'angle d'orientation. S'en est suivi, la modélisation cinématique et dynamique, la modélisation générale de robot mobile et enfin, une brève étude de l'environnement.

## Chapitre 2 : La théorie d'estimation et fusion multi capteur

### 2.1. Introduction

Dans ce chapitre on présente une synthèse de diverses méthodes d'estimation d'état optimale. Parmi ces états, on recense le filtre de Kalman, les procédures d'estimation. Ces dernières représentent l'estimation d'un signal connu et inconnu, ainsi que l'estimation d'un signal aléatoire, déterministe et multiple. Les capteurs mobiles permettent la localisation des paramètres de position et d'orientation d'un robot mobile dans un environnement connu avec une bonne précision. On terminera, cette section, par une conclusion.

### 2.2. Définition de l'estimateur

L'estimation peut être d'une manière mathématique un vecteur  $Z \in R_N$  qui est en fonction d'un autre vecteur  $x_t \in Rp$  avec  $Z = h(x_t)$ . De manière plus précise, on peut construire un estimateur de  $x_t$  notée  $x_{t+1}$ .

On peut également considérer plusieurs niveaux de complexité, similaires, dans les problèmes d'estimation. En détection, il s'agit de décider d'une hypothèse parmi un nombre fini  $M$  d'hypothèses possibles. En estimation, il s'agit d'évaluer la valeur d'une quantité continue au moins par intervalles et qui peut prendre une infinité de valeurs [10, 27, 43, 44].

Un estimateur  $x_{t+1}$  de  $x_t$  est une fonction déterministe  $g(z)$  qui a toute réalisation  $z$  du vecteur  $Z$  fait correspondre une valeur particulière  $x_{t+1}$  : avec  $x_{t+1} = g(z)$ . On peut distinguer trois cas suivants :

1-  $x_t$  et  $Z$  sont des vecteurs aléatoires (v.a) ayant des densités de probabilité :

L'estimateur appartiendra alors à la famille des estimateurs de Bayes.

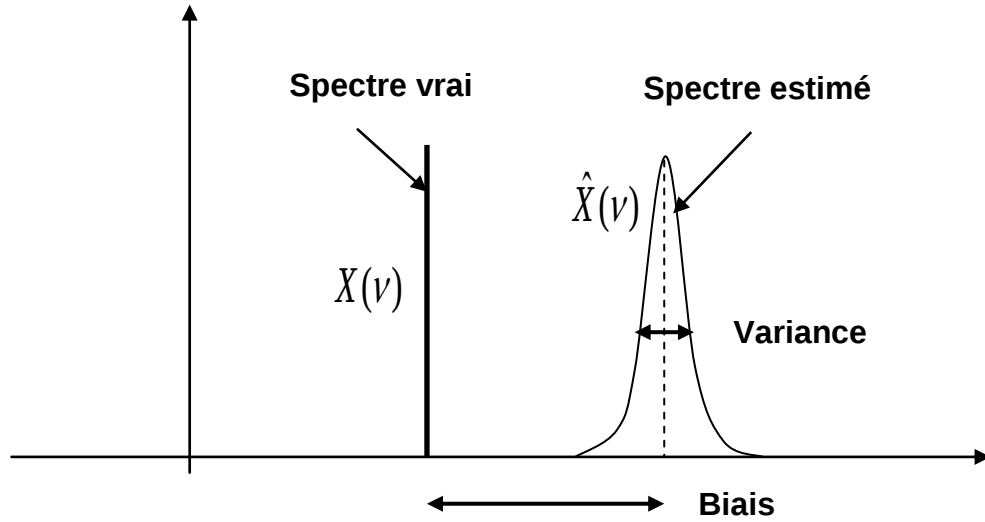
2-  $x_t$  est une déterministe,  $Z$  est un vecteur aléatoire ayant une densité de probabilité: L'estimateur appartiendra alors à la famille des estimateurs de Fisher.

3-  $x_t$  est une déterministe,  $Z$  est une fonction bruitée mais non probabiliste de  $x_t$

Dans ce cas on peut encore définir un estimateur en dehors de tout cadre probabiliste.

### 2.3. Les méthodes d'estimation

Les méthodes d'estimation qu'on va présenter sont la Borne de Cramer Rao, la méthode de maximum de vraisemblance et la méthode de Monté Carlo. Commençant par les Notions de biais et de variance d'un estimateur qui sont indiquées dans la figure (2.1) :



**Figure 2.1:** La situation de biais et la variance

En pratique, l'observation peut être considérée comme la réalisation d'un processus aléatoire, que le signal soit déterministe ou aléatoire [10, 27, 43, 44]. Les formulations mathématiques des statistiques de l'estimateur  $\hat{X}$  est estimé à partir des observations  $Y$ . Si l'estimée  $\hat{X} = 0$  l'estimateur est dit non biaisé. Le moment du 1<sup>er</sup> ordre représente le Biais.

$$E[\hat{X}] = X + \text{biais}(\hat{X}) \quad (2.1)$$

Le moment du 2<sup>eme</sup> ordre représente la Variance et l'erreur quadratique moyenne:

$$\text{Var}(\hat{X}) = E[(\hat{X} - E[\hat{X}])^2] \quad (2.2)$$

$$EQM = E[(X - \hat{X})^2] \quad (2.3)$$

$$EQM = \text{Var}(\hat{X}) + \text{biais}(\hat{X})^2 \quad (2.4)$$

### 2.3.1. La Borne de Cramer-Rao

Pour mesurer les performances de l'estimateur, on calcule sa moyenne (pour déterminer le biais) et sa variance. La moyenne est généralement facile à calculer, mais la variance requiert souvent des calculs complexes. Les inégalités de Cramer-Rao, que nous allons énoncer ci-dessous, fournissent plus facilement une borne inférieure de la variance.

Nous énonçons ci-dessous les inégalités de Cramer-Rao pour des estimateurs non biaisés. Ce résultat peut être étendu à des estimateurs biaisés aussi ces inégalités ont d'abord été proposées par Fisher (1922) et par Dugué (1937). Elles ont été obtenues sous leur forme actuelle par Cramer (1946) et Rao (1945). Tous les estimateurs qui atteignent la borne (la variance est égale à la borne) sont appelés estimateurs efficaces [44, 45, 46, 47]. L'inégalité de Cramér-Rao inférieure de la variance pour un estimateur sans biais est donnée comme suit :

$$Var(\hat{X}) \geq \frac{1}{-E\left[\frac{\partial^2 \ln(p_{Y,X}(y,x))}{\partial x^2}\right]} \quad (2.5)$$

- Si la variance atteint la borne de Cramer Rao (CR), on dit que l'estimateur est efficace.
- L'estimateur idéal est non biaisé et efficace mais variance et biais sont liés par l'erreur moyenne au carrée EQM donc on a l'antagonisme biais-variance.
- L'estimateur est dit consistant si le biais et la variance tendent vers 0 quand le nombre d'observations tend vers l'infini. Autrement soit  $\hat{a}(r)$  un estimateur quelconque non biaisé de  $a$ , tel que  $p(r/a)$  possède des dérivées partielles première et seconde par rapport à  $a$  absolument intégrables, on a alors :

$$Var[\hat{a}(r) - a] \geq \left\{ E \left[ \left( \frac{\partial \ln(p(r/a))}{\partial a} \right)^2 \right] \right\}^{-1} \quad (2.6)$$

$$Var[\hat{a}(r) - a] \geq - \left\{ E \left[ \frac{\partial^2 \ln(p(r/a))}{\partial a^2} \right] \right\}^{-1} \quad (2.7)$$

Si l'estimateur  $\hat{a}(r)$  est non biaisé, alors  $E[\hat{a}(r)] = a$ , et la variable aléatoire  $\hat{a}(r) - a$  est centrée. On a alors tout simplement :

$$Var[\hat{a}(r) - a] = E[(\hat{a}(r) - a)^2] \quad (2.8)$$

Puisque l'estimateur  $\hat{a}(r)$  est non biaisé, on a :

$$E[\hat{a}(r) - a] = \int_{R^k} (\hat{a}(r) - a) p(r/a) dr \quad (2.9)$$

$$\int A^2 dx \int B^2 dx \geq [\int AB dx]^2 \quad (2.10)$$

Après le remplacement de l'équation (2.7) dans (2.9) sa donne donc :

$$\left\{ \int_{R^k} \left[ \frac{\partial \ln(p(r/a))}{\partial a} \sqrt{p(r/a)} \right] [\sqrt{p(r/a)} (\hat{a}(r) - a)] dr \right\}^2 = 1^2 \quad (2.11)$$

$$\int_{R^k} \left[ \frac{\partial \ln(p(r/a))}{\partial a} \sqrt{p(r/a)} \right]^2 dr \int_{R^k} [\sqrt{p(r/a)} (\hat{a}(r) - a)]^2 dr \geq 1 \quad (2.12)$$

$$\left[ \int_{R^k} \left( \frac{\partial \ln(p(r/a))}{\partial a} \right)^2 p(r/a) dr \right] \left[ \int_{R^k} (\hat{a}(r) - a)^2 p(r/a) dr \right] \geq 1 \quad (2.13)$$

La seconde intégrale de cette équation n'est autre que la variance de  $(\hat{a}(r) - a)$ . On arrive finalement à l'inégalité suivante:

$$\int_{R^k} (\hat{a}(r) - a)^2 p(r/a) dr \geq \left[ \int_{R^k} \left( \frac{\partial \ln(p(r/a))}{\partial a} \right)^2 p(r/a) dr \right]^{-1} \quad (2.14)$$

La borne, est atteinte si et seulement si la densité vérifie :

$$\frac{\partial \ln(p(r/a))}{\partial a} = (\hat{a}(r) - a) f(a) \quad (2.15)$$

Où  $f(a)$  est une fonction qui ne dépend pas des observations  $r$ . Un estimateur qui vérifie cette condition est appelé estimateur efficace donc on obtient la relation :

$$E \left[ \left( \frac{\partial \ln(p(r/a))}{\partial a} \right)^2 \right] = -E \left[ \frac{\partial^2 \ln(p(r/a))}{\partial a^2} \right] \quad (2.16)$$

- Toute estimation non biaisée a une variance plus grande qu'une certaine valeur. Malheureusement, dans le cas général, on ne sait pas si la variance est proche ou non de la borne.
- Si l'estimateur  $\hat{a}_{ml}(r)$  atteint la borne, c'est-à-dire :

$$Var[\hat{a}(r) - a] = \left\{ E \left[ \left( \frac{\partial \ln(p(r/a))}{\partial a} \right)^2 \right] \right\}^{-1} = - \left\{ E \left[ \frac{\partial^2 \ln(p(r/a))}{\partial a^2} \right] \right\}^{-1} \quad (2.17)$$

En effet, l'estimateur ML est solution de l'équation de vraisemblance :

$$\frac{\partial \ln(p(r/a))}{\partial a} \Big|_{a=\hat{a}_{ml}(r)} = f(a)(\hat{a}(r) - a) \Big|_{a=\hat{a}_{ml}(r)} = 0 \quad (2.18)$$

Les solutions de l'équation de vraisemblance sont :  $\hat{a}(r) = \hat{a}_{ml}(r)$  et  $f(\hat{a}_{ml}) = 0$

- S'il n'y a pas d'estimateur efficace, c'est-à-dire si  $\frac{\partial \ln(p(r/a))}{\partial a}$  ne peut pas se mettre sous la forme  $f(a)(\hat{a}(r) - a)$  on ne peut pas conclure sur la qualité de l'estimateur ML. De plus, on ne sait pas comment sa variance s'approche de la borne.
- Avant d'utiliser la borne, il faut d'abord vérifier que l'estimateur est non biaisé. Ces bornes ne sont pas applicables pour des estimateurs biaisés, pour lesquels des bornes similaires peuvent être calculées [44, 45, 47, 48, 49, 50, 51, 52, 53].

### **2.3.2. Méthode de maximum de vraisemblance**

On considère une mesure scalaire  $r = a + n$ , avec  $a$  est maintenant déterministe et  $n \sim N(0, \sigma_n)$ . On peut donc écrire la densité conditionnelle de l'observation  $r$  sachant que le paramètre  $a$  :

$$p(r/a) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_n} \exp \left( -\frac{(r-a)^2}{2\sigma_n^2} \right) \quad (2.19)$$

On choisit comme estimation la valeur de  $a$  qui entraîne le plus vraisemblablement l'observation  $r$ , c'est-à-dire pour que la densité est maximale. Dans l'équation (2.19), le terme exponentiel est maximal pour  $a = r$ . Autrement dit, dans le cas d'une mesure avec un bruit additif comme c'est le cas ici, on retranche à  $r$  la valeur la plus probable du bruit  $n$ . C'est bien sûr 0, pour que la valeur  $p_n(u)$  est maximale.

Cet estimateur est appelé estimateur du maximum de vraisemblance (maximum likelihood) ML. Il est noté  $\hat{a}_{ml}(r) = r$  et la densité  $p(r/a)$  est appelée fonction de vraisemblance [44, 47, 53, 54, 55, 56, 57]. La valeur de  $a$  qui maximise  $p(r/a)$ , si le maximum est intérieur à la gamme de variation de  $a$  et si  $\ln(p(r/a))$  a une dérivée première continue, l'estimateur ML satisfait l'équation :

$$\frac{\partial \ln(p(r/a))}{\partial a} \Big|_{a=\hat{a}_{ml}(r)} = 0 \quad (2.20)$$

On remarque que cet estimateur est similaire à l'estimateur de maximum à posteriori (MAP), dans le cas où le terme en  $p(a)$  disparaît, c'est-à-dire si la connaissance a priori sur  $a$  est nulle ce qui implique  $p(a)$  est constante.

### **2.3.3. Méthode de Monte Carlo**

Cette méthode est simple pour évaluer les grandeurs caractéristiques d'une variable aléatoire passée par une fonction non linéaire pour effectuer la simulation de Monte Carlo. Sachant que  $X$  suit une loi normale de moyenne  $\bar{x}$  et de covariance  $\sum xx$ , alors cela consiste à :

- Générer  $N$  réalisations  $x^{(i)}$  de  $X$  en les tirant selon  $N(\bar{x}, \sum xx)$ . Ces  $N$  tirages sont appelés particules, par analogie avec le filtrage particulaire.
- Calculer les  $N$  images  $y^{(i)}$  des particules  $x^{(i)}$  par la fonction  $\varphi$  :

$$y^{(i)} = \varphi(x^{(i)}) \quad (2.21)$$

- Calcul la moyenne  $\bar{y}$  de  $Y$  à partir de l'ensemble des points  $\{y^{(i)}\}_{1 \leq i \leq N}$ .

$$\bar{y} = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N y^{(i)} \quad (2.22)$$

- la covariance  $\sum yy$  et l'inter-covariance  $\sum xy$  à partir  $\{x^{(i)}\}_{1 \leq i \leq N}$  et  $\{y^{(i)}\}_{1 \leq i \leq N}$  :

$$\sum yy = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N (y^{(i)} - \bar{y})(y^{(i)} - \bar{y})^T \quad (2.23)$$

$$\sum xy = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N (x^{(i)} - \bar{x})(y^{(i)} - \bar{y})^T \quad (2.24)$$

Ces résultats permettent d'aboutir directement à l'ensemble de filtre de Kalman (EnKF). A noter que le calcul de la covariance d'ensemble est analogue à celui de la covariance empirique introduite dans les calculs, ce qui est représenté une somme logique puisque ces deux grandeurs sont issues d'un ensemble de simulations. L'introduction du concept de simulation de Monte Carlo dans le problème de filtrage de Kalman non linéaire a été introduite par Geir Evensen. L'emploi de l'interpolation de Stirling, aboutissant au filtre de Kalman à différence centrale (CDKF), l'usage de la transformation dite sans saveur ou sans parfums, conduisant au filtre de Kalman sans parfums (UKF). L'utilisation de la simulation de Monte Carlo, aboutissant à l'ensemble filtre de Kalman (EnKF) [44, 49, 50, 51, 52, 53, 57, 58].

## **2.4. Estimation d'un signal**

L'estimation d'un signal est dépendue de sa nature et son type. Il y'a estimation d'un signal connu, estimation d'un signal inconnu, estimation d'un signal aléatoire dans du bruit et estimation d'un signal déterministe.

### **2.4.1. Estimation d'un signal connu**

Soit un système de communications, dans lequel la source émet un signal analogique  $A(t)$ , échantillonné à  $T_e$ , à chaque instant  $kT_e$ . On mesure l'amplitude  $A(kT_e) = A_k$ , qui est transmise vers le récepteur et perturbée par les bruits du canal, de l'émetteur et du récepteur [44, 49, 50, 51, 52, 53, 54, 59]. Ainsi, avec un émetteur utilisant une modulation d'amplitude, le signal émis est de la forme suivante :

$$s(t, A_k) = A_k \sin(\omega_c t), \quad t \in [kT_e, (k+1)T_e[ \quad (2.25)$$

Dans le cas de la modulation fréquentiel et divers bruits sur le récepteur, on aura :

$$s(t, A_k) = \sin(\omega_c t + A_k t), \quad t \in [kT_e, (k+1)T_e[ \quad (2.26)$$

$$r(t) = s(t, A_k) + n(t), \quad t \in [kT_e, (k+1)T_e[ \quad (2.27)$$

Si on connaît parfaitement le type de modulation et le paramètre  $\omega_c$ , et si l'application entre  $A$  et  $s(t, A)$  est bijective donc le signal reçu  $r(t)$  dépend de l'amplitude  $A$ .

### **2.4.2. Estimation d'un signal inconnu**

On considère le signal reçu en réponse à une émission radar, pour une cible qui se déplace. Le signal reçu est similaire à l'équation (2.27), mais avec un effet Doppler qui se traduit par une variation de pulsation  $\omega_d$ .

$$r(t) = \begin{cases} A_r \sin((\omega_0 + \omega_d)(t - \tau) + \theta_r) + n(t), & \text{si } t \in [kT_r + \tau, kT_r + T + \tau[ \\ n(t) & , \text{ si non} \end{cases} \quad (2.28)$$

On sait qu'il y a une cible et on désire évaluer sa distance et sa vitesse et même sa taille et son type à partir de l'estimation de  $\tau$  et  $\omega_d$ . Dans cet exemple, on remarque qu'il existe, en plus des paramètres utiles, des paramètres supplémentaires inconnus  $A_r$  et  $\theta_r$  qui vont rendre l'estimation difficile. Donc l'estimation d'un signal inconnu.

### **2.5. Estimation des paramètres aléatoires**

Le paramètre à estimer est une variable aléatoire notée  $a$ . L'observation est un vecteur de dimension  $k$ , noté  $r$ .

#### **2.5.1. La fonction de coût**

On essaye d'abord d'étendre l'idée du risque de Bayes au problème d'estimation. Dans le problème de détection  $M$  aire, le risque de Bayes était construit en associant un coût  $C_{ij}$  à chaque situation : décider  $H_i$  alors que  $H_j$  est vraie. Aux  $M^2$  situations possibles, on pouvait donc associer la matrice de coût  $C = C_{ij}$ .

Dans le problème d'estimation, le paramètre  $a$  et son estimée  $\hat{a}(r)$  sont des variables continues. Pour chaque paire  $(a, \hat{a}(r))$ , on peut donc associer un coût  $C(a, \hat{a}(r))$ , qui est une fonction de deux variables [44, 49, 50, 51, 52, 58, 59].

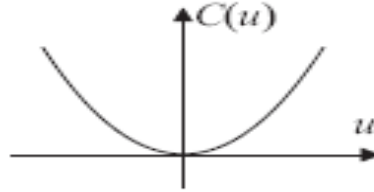
Généralement le coût dépend uniquement de l'erreur d'estimation  $e(r) = \hat{a}(r) - a$ . La fonction de coût se réduit alors à une fonction d'une seule variable. Dans la suite, on va présenter les différents types de la fonction de coût classiques.

##### **2.5.1.1. La fonction de coût quadratique**

La fonction de coût quadratique est donnée par l'expression (2.29) suivante :

$$C_{ls}(e(r)) = (\hat{a}(r) - a)^2 \quad (2.29)$$

Le coût est remplacé par la fonction qu'est représenté dans la figure (2.2) :



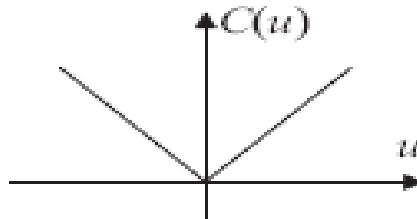
**Figure 2.2:** Le coût quadratique

#### **2.5.1.2. La fonction de coût valeur absolue**

La fonction de coût valeur absolue est donnée par l'expression (2.30) suivante :

$$C_{abs}(e(r)) = |\hat{a}(r) - a| \quad (2.30)$$

Le coût est remplacé par la fonction qu'est représentés dans la figure (2.3) :



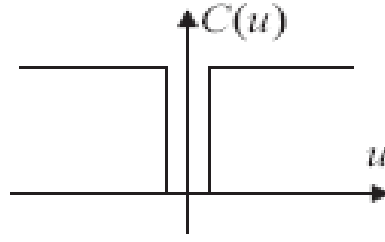
**Figure 2.3:** Le coût valeur absolue.

#### **2.5.1.3. La fonction de coût uniforme**

La fonction de coût uniforme est donnée par l'expression (2.31) suivante :

$$C_{unif}(e(r)) = \begin{cases} 0 & \text{si } e(r) \leq \frac{\Delta}{2} \\ 1 & \text{si } e(r) > \frac{\Delta}{2} \end{cases} \quad (2.31)$$

Le coût est remplacé par la fonction qu'est représenté dans la figure (2.4) :



**Figure 2.4:** Le coût uniforme.

#### **2.5.1.4. Le rôle de la fonction de coût**

Le rôle de chaque fonction de coût est de mesurer la qualité de l'estimation, Et aussi d'aboutir à une solution en minimisant la fonction de coût.

Dans le problème de détection, le risque de Bayes permettait de mesurer un coût moyen, à partir des coûts  $C_{ij}$ , des probabilités a priori  $P_i$  et des densités conditionnelles. Dans le problème d'estimation, on étend cette idée pour mesurer l'erreur moyenne de coût  $C(e(r))$ , la probabilité a priori  $P_i$  est remplacé par la densité de probabilité du paramètre (variable aléatoire)  $a$ . On a alors :

$$R = E[C(e(r))] = \int_A da = \int_{R^k} (\hat{a}(r) - a)p(a, r) dr \quad (2.32)$$

Cette équation montre que la moyenne  $E$  porte à la fois sur toutes les valeurs de  $a$  dans la première intégrale simple, et sur toutes les valeurs de  $r$  dans la seconde intégrale multiple de l'espace d'observation [44, 49, 50, 51, 52, 53, 58, 59].

La densité de probabilité conjointe  $p(a, r)$ , peut être factorisée en appliquant le théorème de Bayes :  $p(a, r) = p(r).p(a/r)$ . En supposant la convergence uniforme des intégrales, après on peut intervertir les deux intégrales, ce qui conduit à la relation suivante :

$$R = \int_{R^k} p(r) \left[ \int_A C(\hat{a}(r) - a)p(a/r) da \right] dr \quad (2.33)$$

Dans cette expression, les termes  $p(r)$  et  $C(\hat{a}(r) - a)p(a/r)$  étant positifs, la minimisation du risque  $R$  sera obtenue en minimisant simplement l'intégrale intérieure. Le meilleur estimateur  $\hat{a}(r)$ , au sens de la fonction de coût  $C$ , est donc obtenu en calculant la valeur de  $\hat{a}(r)$  pour laquelle l'intégrale intérieure est minimale.

## **2.6. Estimation des paramètres déterministes**

Dans cette partie on va présenter l'estimation des paramètres déterministes avec  $a$  est une variable déterministe, la première idée consiste à calculer un critère de Bayes :

$$R_{Bayes}(a) = \int_{R^k} (\hat{a}(r) - a)^2 p(r/a) dr \quad (2.34)$$

En minimisant le risque  $R$  par rapport à  $\hat{a}(r)$ , on obtient  $\hat{a}(r) = a$ . Mais  $a$  étant inconnu, ceci n'est pas applicable. Il faut donc trouver une autre mesure de la qualité de l'estimateur.

- Chaque estimateur est réalisé à partir d'un jeu de mesures bruitées et d'observation  $r$ .
  - Chaque estimation est donc la réalisation d'une variable aléatoire [44, 47, 48, 49].
- Si on considère un ensemble d'estimations virtuel et arbitrairement grand, on peut mesurer la moyenne et la variance qui sont donnés par les expressions suivantes :
- La moyenne :

$$E[\hat{a}(r)] = \int_{R^k} \hat{a}(r) p(r/a) dr \quad (2.35)$$

Pour faire l'évaluation de l'écart appelé le biais à la valeur vraie de  $a$  il faut donc :

- Si  $E[\hat{a}(r)] = a$ , le biais est nul et l'estimateur est dit non biaisé.
  - Si  $E[\hat{a}(r)] = a + b$  où  $b$  est une constante, l'estimation a un biais fixe. En estimant ce biais pour correction facile de l'estimateur.
  - Si  $E[\hat{a}(r)] = a + b(a)$ , où  $b(a)$  est une fonction de  $a$ , le biais devient plus complexe à compenser. Donc on doit mesurer la dispersion des estimations par la variance.
- La variance :

$$Var(\hat{a}(r)) = E[(\hat{a}(r) - E[\hat{a}(r)])^2] \quad (2.36)$$

$$Var(\hat{a}(r)) = \int_{R^k} (\hat{a}(r) - E[\hat{a}(r)])^2 p(r/a) dr \quad (2.37)$$

$$Var(\hat{a}(r)) = E[\hat{a}(r)^2] - E^2[\hat{a}(r)] \quad (2.38)$$

La mesure de la dispersion des estimations autour de leur moyenne et sa variance. La situation idéale serait d'avoir un biais et une variance nuls [44, 49, 50, 51, 52, 53, 58, 59].

### **2.6.1. Variance d'un estimateur déterministe**

Un estimateur déterministe non biaisé est efficace qu'est donné par la relation (2.39)

$$\frac{\partial \ln(p(r/a))}{\partial a} = f(a)(\hat{a}(r) - a) \quad (2.39)$$

Calculons l'opposé de la dérivée seconde de  $\ln(p(r/a))$  :

$$-\frac{\partial^2 \ln(p(r/a))}{\partial a^2} = f(a) - \frac{df}{da}(a)(\hat{a}(r) - a) \quad (2.40)$$

En prenant la moyenne :

$$E_r \left[ -\frac{\partial^2 \ln(p(r/a))}{\partial a^2} \right] = E_r[f(a)] - \frac{df}{da}(a)E_r[(\hat{a}(r) - a)] \quad (2.45)$$

Puisque l'estimateur est non biaisé, le dernier terme est nul. De plus,  $f(a)$  ne dépend pas de  $r$  donc l'espérance de  $f(a)$  sur  $r$  est égale à  $f(a)$ . Finalement :

$$E_r \left[ -\frac{\partial^2 \ln(p(r/a))}{\partial a^2} \right] = E_r[f(a)] \quad (2.46)$$

En utilisant la première borne du théorème de Cramer-Rao, on a simplement :

$$Var(\hat{a}(r) - a) = f(a)^{-1} \quad (2.47)$$

Soit  $\hat{a}(r)$  est un estimateur non biaisé et efficace tel que :

$$\frac{\partial \ln(p(r/a))}{\partial a} = f(a)(\hat{a}(r) - a) \quad (2.48)$$

Alors  $\hat{a}(r) = \hat{a}_{ml}(r)$  et  $Var(\hat{a}(r) - a) = f(a)^{-1}$ .

Ce résultat est très pratique mais il doit être utilisé rigoureusement. En effet le terme  $\frac{\partial \ln(p(r/a))}{\partial a}$  intervient d'abord dans l'équation de vraisemblance :  $\frac{\partial \ln(p(r/a))}{\partial a} = 0$  pour laquelle le facteur  $f(a)$  est sans importance. La forme  $f(a)(\hat{a}(r) - a)$  ne supporte aucune erreur de signe ou de facteur puisque la variance dépend directement du terme  $f(a)$ . [43, 44, 47, 56, 59].

## **2.7. Estimation optimale des vecteurs**

Dans ce type d'estimation il est nécessaire d'estimer les vecteurs aléatoires, et les vecteurs déterministes, c'est à dire plusieurs paramètres par exemple le cas d'estimation des paramètres d'une cible radar, la position, la vitesse, etc. La plupart des idées introduites dans les paragraphes précédentes peuvent être étendues dans le cas multi variable. Dans ce cadre, on considère l'ensemble des paramètres sous forme d'un vecteur.

### **2.7.1. Estimation optimale des vecteurs aléatoires**

Ce type d'estimation consiste sur l'estimation optimale d'un vecteur aléatoire statique, et l'estimation optimale d'un vecteur aléatoire dynamique, qui se base sur la méthode des moindres carrés simples et récursifs.

#### **2.7.1.1. Estimation optimale d'un vecteur aléatoire statique**

Soit  $X$  un vecteur dont les  $n_x$  composantes sont des constantes décrivant l'état d'un système statique. Le but recherché est d'estimer ces  $n_x$  grandeurs inconnues. Pour ce faire, un nombre  $n_y$  de mesures également appelées observations directes ou indirectes des  $n_x$  composantes de  $X$  sont effectuées, cette procédure étant retirée un certain nombre de fois. Les  $n_y$  mesures obtenues lors de la  $k^{\text{ième}}$  campagne d'observation sont regroupées dans le vecteur de mesure  $Y$  et l'observation  $Y_k^*$  est reliée au vecteur d'état  $X$  au travers d'une équation dite de régression linéaire :

$$Y_k^* = H_k X \quad (2.49)$$

Où  $H_k$  est une matrice connue dont les coefficients peuvent varier avec le temps. Généralement, l'observation  $Y_k^*$  est imparfaite car entachée d'une erreur additive  $V_k$ .

Ainsi la grandeur effectivement mesurée n'est pas  $Y_k^*$  mais  $Y_k$ , définie comme suit :

$$Y_k = Y_k^* + V_k = H_k X + V_k \quad (2.50)$$

L'application de cette relation pour  $k = 1, \dots, N$  ( $N \in \mathbb{N}^+$ ) conduit au système (2.51)

$$\begin{cases} Y_1 = H_1 X + V_1 \\ \vdots \\ Y_k = H_k X + V_k \\ \vdots \\ Y_N = H_N X + V_N \end{cases} \quad (2.51)$$

En règle générale,  $n_y < n_x$  et les erreurs de mesures ne sont pas connues [43, 44, 47]. Il s'examine donc impossible de calculer de manière exacte l'état  $X$  à partir des observations  $Y_{1 \rightarrow N} = \{Y_k\}_{1 \leq k \leq N}$  du fait que la relation (2.51), présente plus d'inconnues ( $X$  et  $V_{1 \rightarrow N} = \{V_k\}_{1 \leq k \leq N}$ , ce qui représente  $Nn_y + n_x$  variables). Afin d'obtenir une solution explicite du problème formulé, il est nécessaire de formuler des hypothèses, par exemple en se plaçant dans un cadre stochastique. A partir de l'optimisation d'un critère donné, on fournit l'estimée ponctuelle  $\hat{x}$  de  $X$  dont la densité de probabilité est entièrement définie sur l'espace d'état  $\mathbb{R}^{n_x}$  par la moyenne  $\bar{x}$  et la covariance  $\Sigma^{xx}$ . Pour ce faire, les informations exploitées proviennent de l'ensemble de mesures :

$Y_{1 \rightarrow N} = \{Y_1, \dots, Y_k, \dots, Y_N\}$ , lesquelles sont considérées comme étant les réalisations respectives des variables aléatoires  $Y_1, \dots, Y_k, \dots, Y_N$ . Par conséquent, l'estimée de  $X$  obtenue à partir de  $Y_{1 \rightarrow N}$  sera désormais notée  $\hat{x}_N$  afin de marquer sa dépendance vis-à-vis du nombre  $N$  de mesures effectuées. Le critère d'optimalité choisi définit la nature de l'estimation. On en distingue deux estimations principales :

- l'estimation au sens du maximum a posteriori :  $\hat{x}_N$  est la valeur qui maximise la densité de probabilité  $P(X | Y_{1 \rightarrow N})$  de  $X$  laquelle est reconstruite à partir de  $Y_{1 \rightarrow N}$  et des covariances  $\Sigma_k^{vv} (k = 1 \dots, N)$  du bruit de mesure.
- l'estimation au sens des moindres carrés :  $\hat{x}_N$  est calculé de sorte à minimiser le critère de la forme suivante :

$$E(\|X - \hat{x}_N\|^2 | Y_{1 \rightarrow N} = y_{1 \rightarrow N}) = E((X - \hat{x}_N)^T | Y_{1 \rightarrow N} = y_{1 \rightarrow N}) \quad (2.52)$$

On montre alors que  $\hat{x}_N$  est égal à l'espérance de  $X$ , conditionnée par les informations disponibles, à savoir les  $N$  mesures réalisées :

$$\hat{x}_N = E((X|Y_{1 \rightarrow N}) = y_{1 \rightarrow N}) \quad (2.53)$$

Une des conséquences de la gaussianité de  $X$  et que les deux estimateurs précédentes donnent le même résultat. La moyenne d'une variable gaussienne est également la valeur correspondante au maximum de sa densité de probabilité. Par la suite, nous nous intéresserons à l'obtention de  $\hat{x}_N$  via l'optimalité au sens des moindres carrés et selon le type de problème considéré, on présente la méthode des moindres carrés simple et récursive [43, 44, 47, 49, 50, 51, 55, 56, 58, 59].

#### **2.7.1.1.1. Méthode des moindres carrés simple**

La méthode des moindres carrés simple consiste directement à calculer  $\hat{x}_N$  à partir d'un ensemble de  $N$  mesures  $y_{1 \rightarrow N}$ ,  $N$  étant fixé. Une telle formulation est en général utilisée dans des applications de traitement a posteriori des informations. Il s'agit d'effectuer une campagne de mesures sur le procédé étudié et de relever et enregistrer un nombre  $N$  d'observations  $Y_k$  avec  $(k = 1, \dots, N)$ . Ensuite,  $\hat{x}_N$  est calculé à partir de l'ensemble  $y_{1 \rightarrow N}$  des mesures collectées. Dans un cadre gaussien entre les estimées au sens des moindres carrés et celles au sens du maximum a posteriori (MAP), il est possible de montrer que l'obtention de  $\hat{x}_N$  via de minimiser le critère (2.53) qu'est équivalent au calcul suivant :

$$\hat{x}_N = \arg \{X_{\in \mathbb{R}^{n_x}} \min (\sum_{k=1}^N (Y_k - H_k X)^T (\Sigma_k^{vv})^{-1} (Y_k - H_k X))\} \quad (2.54)$$

On développe les calculs, avec  $\mathcal{H}_N$  soit de plein rang colonne donc :

$$\hat{x}_N = \left( \begin{bmatrix} H_1 \\ \vdots \\ H_N \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} \Sigma_1^{vv} & \dots & 0_{n_y x n_y} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0_{n_y x n_y} & \dots & \Sigma_1^{vv} \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} H_1 \\ \vdots \\ H_N \end{bmatrix} \right)^{-1} \begin{bmatrix} H_1 \\ \vdots \\ H_N \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} \Sigma_1^{vv} & \dots & 0_{n_y x n_y} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0_{n_y x n_y} & \dots & \Sigma_1^{vv} \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} Y_1 \\ \vdots \\ Y_N \end{bmatrix} \quad (2.55)$$

L'équation (2.53) montre de manière évidente que l'estimateur des moindres carrés est linéaire, du fait que  $\hat{X}_N$  dépend linéairement de chaque mesure  $Y_k$ .

$$\hat{X}_N = X + \hat{x}_N V_{1 \rightarrow N} \quad (2.56)$$

La matrice (2.57) qui vient par la suite est appelé la matrice de Gram qui permet de linéariser l'estimateur des moindres carrés [43, 44,45, 46, 50, 53].

$$\begin{bmatrix} H_1 \\ \vdots \\ H_N \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} H_1 \\ \vdots \\ H_N \end{bmatrix} = \sum_{k=1}^N \begin{bmatrix} H_1 \\ \vdots \\ H_N \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} H_1 \\ \vdots \\ H_N \end{bmatrix} \quad (2.57)$$

L'estimateur des moindres carrés se résume à la régularité de la matrice de Gram.

#### **2.7.1.1.2. Méthode des moindres carrés récursive**

Le but de la méthode des moindres carrés récursive est de calculer l'estimée  $\hat{x}_k$  de  $X$  ainsi que sa covariance d'erreur d'estimation  $\Sigma_k^{xx}$  en fonction de  $\hat{x}_k$ , de l'observation  $y_k$  et de la covariance  $\Sigma_k^{yy}$  de son bruit de mesure. Pour obtenir les équations désirées, une méthode classique réside à développer le résultat (2.54). Son avantage sur la première méthode est de mettre en évidence certaines propriétés de l'estimateur des moindres carrés, telles que le principe d'orthogonalité [43, 44,45, 46, 50, 53]. En adoptant les notations suivantes pour  $k \in N^*$  :

$$\bar{x}_{k-1} = E((X|Y_{1 \rightarrow k-1}) = y_{1 \rightarrow k-1}) \quad (2.58)$$

$$\bar{y}_{k-1} = E((Y_k|Y_{1 \rightarrow k-1}) = y_{1 \rightarrow k-1}) \quad (2.59)$$

$$\Sigma_{k-1}^{xx} = ((X - \bar{x}_{k-1})(X - \bar{x}_{k-1})^T | Y_{1 \rightarrow k-1} = y_{1 \rightarrow k-1}) \quad (2.60)$$

$$\Sigma_{k-1}^{yy} = ((Y_k - \bar{y}_{k-1})(Y_k - \bar{y}_{k-1})^T | Y_{1 \rightarrow k-1} = y_{1 \rightarrow k-1}) \quad (2.61)$$

$$\Sigma_{k-1}^{xy} = ((X - \bar{x}_{k-1})(Y_k - \bar{y}_{k-1})^T | Y_{1 \rightarrow k-1} = y_{1 \rightarrow k-1}) = (\Sigma_{k-1}^{xy})^T \quad (2.62)$$

L'équation des moindres carrés récursive est donnée comme suit :

$$\hat{x}_k = \hat{x}_{k-1} + \Sigma_{k-1}^{xy} (\Sigma_{k-1}^{yy})^{-1} (y_k - \bar{y}_{k-1}) \quad (2.63)$$

L'expression de la covariance de l'erreur d'estimation est donnée par :

$$\Sigma_k^{xx} = \Sigma_{k-1}^{xx} - \Sigma_{k-1}^{xy} (\Sigma_{k-1}^{yy})^{-1} \Sigma_{k-1}^{yx} \quad (2.64)$$

### **2.7.1.2. Estimation optimale d'un vecteur aléatoire dynamique**

Dans la partie précédente, une méthode optimale d'estimation d'un vecteur aléatoire statique gaussien, appelée méthode des moindres carrés, a été présentée. Une manière d'adapter cet outil au problème d'estimation d'un vecteur dont les composantes peuvent lentement varier dans le temps a également été évoquée. Cependant, dans le domaine des sciences de l'ingénieur, le problème d'estimation d'un vecteur de dynamique rapide est fréquemment rencontré. L'algorithme des moindres carrés tel que présenté ne constitue alors en aucun cas d'une solution convenable. Un autre outil, pouvant être considéré comme une extension directe des moindres carrés, est alors utilisé : il s'agit du filtre de Kalman, du nom de son concepteur, Rudolph Emil Kalman [43, 44, 47, 50, 55, 57]. Cet estimateur est dénommé "filtre" car son principe de fonctionnement contribue à atténuer l'effet des différentes sources de bruit. Considérons que les mesures  $\{Y_k\}_{k \in N^*}$  parviennent de manière régulière, l'intervalle de temps entre deux mesures consécutives quelconques étant constant. L'état dynamique à l'instant  $k$ , où  $Y_k$  est disponible dorénavant représenté par le vecteur aléatoire  $X_k$ . Le problème d'estimation d'un état dynamique consiste à trouver un estimateur ponctuel  $\hat{x}_k$  de  $X_k$  en fonction de l'ensemble de mesures  $Y_{1 \rightarrow n}$ . Trois cas de figure sont alors à distinguer :

- si  $k > n$ , il s'agit d'un problème de prédiction.
- si  $k = n$ , il s'agit d'un problème de filtrage.
- si  $k < n$ , il s'agit d'un problème de lissage.

Nous considérons toujours l'estimateur des moindres carrés sous forme récursive, lequel calcule  $\hat{x}_k = E(X_k | Y_{1 \rightarrow k} = y_{1 \rightarrow k})$ . Les hypothèses de blancheur du bruit de mesures  $\{V_k\}_{k \in N^*}$  et d'indépendance des observations  $\{Y_k\}_{k \in N^*}$  sont à nouveau utilisées. Le vecteur d'état évolue selon un processus de Gauss- Markov forcé :

$$X_{k+1} = f_k(X_k, u_k, W_k) \quad (2.65)$$

où  $f_k$  est une fonction connue pouvant être linéaire ou non linéaire,  $u_k \in \mathbb{R}^{n_u}$  représente un vecteur déterministe commandant l'évolution de  $X_k$  et  $W_k \in \mathbb{R}^{n_w}$  est le

bruit d'état également appelé bruit de dynamique, supposé blanc, gaussien, centré et de covariance  $\Sigma_k^{ww}$ . La séquence  $\{W_k\}_{k \in N}$  est supposée indépendante du bruit de mesures  $\{V_k\}_{k \in N^*}$ . L'état initial  $X_0$  est supposé gaussien et indépendant de  $\{W_k\}_{k \in N}$  et  $\{V_k\}_{k \in N^*}$ . Cette dernière condition est suffisante pour assurer que  $X_k$  est décorrélé de  $V_k$  et  $W_k$  quel que soit  $k \in N^*$ . De manière analogue à celle utilisée lors de la présentation des moindres carrés, les notations générales suivantes pour deux vecteurs aléatoires quelconques  $A_n, B_n$  avec  $n \in N^*$  sont adoptées :

$$\hat{a}_{n/m} = E( A_n | Y_{1 \rightarrow m} = y_{1 \rightarrow m} ) \quad (2.66)$$

$$\Sigma_{n/m}^{ab} = (( A_n - \hat{a}_{n/m} )( B_n - \hat{b}_{n/m} )^T | Y_{1 \rightarrow m} = y_{1 \rightarrow m} ) \quad (2.67)$$

$$\hat{a}_n = \hat{a}_{n/n} \quad (2.68)$$

$$\Sigma_n^{ab} = \Sigma_{n/n}^{ab} \quad (2.69)$$

Donc les équations d'estimation deviennent :

$$\tilde{y}_{k/k-1} = y_k - \hat{y}_{k/k-1} \quad (2.70)$$

$$K_k = \Sigma_{k/k-1}^{xy} ( \Sigma_{k/k-1}^{yy} )^{-1} \quad (2.71)$$

$$\hat{x}_k = \hat{x}_{k/k-1} + K_k \tilde{y}_{k/k-1} \quad (2.72)$$

$$\Sigma_k^{xx} = \Sigma_{k/k-1}^{xx} - K_k \Sigma_{k/k-1}^{yy} K_k^T \quad (2.73)$$

Ces équations constituent les relations générales du filtre de Kalman, telles que  $K_k$  étant le gain associé au filtre de Kalman, parfois appelé gain de Kalman. Sous une telle forme, ces équations ne sont pas exploitables. Toutefois, dans le cas où la fonction  $f_k$  du modèle d'état (2.65) est linéaire, ainsi que quelques modifications et extensions de cet algorithme de base [43, 44, 45, 49, 50, 57, 58]. Cette section a une solution approchée de (2.65) dans le cas où  $f_k$  est non linéaire et continue.

### **2.7.2. Estimation optimale des vecteurs déterministes**

Pour un vecteur déterministe, on choisit l'estimateur du maximum de vraisemblance, c'est-à-dire la valeur  $a = \hat{a}(r)$  qui maximise la vraisemblance multi variable  $p(a/r)$ . Si le maximum est intérieur au domaine de variation de la variable  $a$ , et si les dérivées partielles  $\partial \ln(p(r/a))/\partial a_i$  existent, l'équation du maximum de vraisemblance est constituée de  $p$  équations élémentaires:

$$\frac{\partial \ln(p(r/a))}{\partial a_i} |_{a=\hat{a}_{ml}(r)} = 0, i = 1, \dots, p \quad (2.74)$$

$$\nabla_a \ln(p(r/a)) |_{a=\hat{a}_{ml}(r)} = 0 \quad (2.75)$$

Où  $\nabla_a$  représente le vecteur gradient par rapport à  $a$  on doit encore sélectionner parmi les solutions, celle qui correspond au maximum [43, 44, 45, 46, 50, 53, 54].

#### **2.7.2.1. Les performances d'estimation des vecteurs déterministes**

Dans le cas d'estimation de vecteurs déterministes, on mesure les performances en calculant l'écart entre l'estimation et la solution théorique (le biais) et la dispersion des estimations [51, 52, 53, 54].

##### **2.7.2.1.1. Biais de l'estimateur des vecteurs déterministes**

Dans le cas multi variable, le biais est un vecteur, calculé simplement comme la différence entre l'espérance de l'estimateur et le vecteur théorique :

$$b(a) = E[\hat{a}(r)] - a \quad (2.76)$$

L'estimateur est non biaisé, si le biais et le vecteur sont nuls,  $b(a)$  c'est-à-dire si chaque composante est nulle :

$$(b(a))_i = E[\hat{a}_i(r)] - a_i = 0, \quad \forall i = 1, \dots, p \quad (2.77)$$

### **2.7.2.1.2. Dispersion de l'estimateur de vecteurs déterministes**

Dans le cas d'un scalaire, la dispersion était mesurée par la variance de l'écart entre l'estimateur et la valeur théorique. Dans le cas multi variable, la dispersion pourra être mesurée par la matrice de variance-covariance  $\Gamma_e$  de l'erreur  $er$  :

$$er = \hat{a}(r) - a \quad (2.78)$$

$$\Gamma_e = E[((\hat{a}(r) - a) - E[\hat{a}(r) - a])([\hat{a}(r) - a] - E[\hat{a}(r) - a])^T] \quad (2.79)$$

Les éléments diagonaux, d'indice  $i i$ , de la matrice donneront la dispersion de chacune des composantes  $a_i$ . Les éléments  $i j$ , hors de la diagonale, renseignent sur le couplage des erreurs d'estimation entre  $a_i$  et  $a_j$  [51, 52, 53, 54, 58, 59].

## **2.8. Les Capteurs mobiles**

La notion de perception en robotique mobile est relative à la capacité du système à recueillir, traiter et mettre en forme des informations utiles au robot pour agir et réagir dans le monde qui l'entoure. Alors que pour des tâches de manipulation on peut considérer que l'environnement du robot est relativement structuré, ce n'est plus le cas lorsqu'il s'agit de naviguer de manière autonome dans des lieux très partiellement connus. Aussi, pour extraire les informations utiles à l'accomplissement de sa tâche, il est nécessaire que le robot dispose de nombreux capteurs mesurant aussi bien son état interne que l'environnement dans lequel il évolue. Le choix des capteurs dépend bien évidemment de l'application envisagée. Pour se focaliser sur le problème de navigation, nous allons nous restreindre dans cette partie de ce chapitre aux capteurs utiles à cette tâche. Dans un second temps, nous expliquerons comment utiliser les données issues de ces capteurs pour obtenir une représentation fiable de l'état du système et de l'environnement [58, 59, 60, 61, 62].

### **2.8.1. Les Capteurs en robotique mobile**

En robotique mobile, on classe traditionnellement les capteurs en deux catégories selon qu'ils mesurent l'état du robot lui-même ou l'état de son environnement. Dans le premier cas, à l'image de la perception chez les êtres vivants, on parle de proprioception et donc de capteurs proprioceptifs. On trouve par

exemple dans cette catégorie les capteurs de position ou de vitesse des roues et les capteurs de charge de la batterie. Les capteurs renseignant sur l'état de l'environnement, donc de ce qui est extérieur au robot lui-même, sont eux appelés capteurs extéroceptifs. Il s'agit de capteurs donnant la distance du robot à l'environnement, la température, signalant la mise en contact du robot avec l'environnement, etc. L'étude détaillée des capteurs, qui relève à la fois de la physique, de l'électronique et du traitement du signal, ne sera pas vue ici. Nous nous concentrerons d'expliquer les principes de fonctionnement des capteurs présentés. On tachera simplement de garder à l'esprit que les défauts inhérents aux différents systèmes de mesure utilisés (bruit, erreurs ou échecs de mesures, difficulté de modélisation) influent fortement sur la perception que le robot dans l'environnement [58, 59, 60, 61, 62, 63].

### **2.8.2. Mesure de paramètre de position**

Pour mesurer une grandeurs physique vitesse ou distance on utilise un capteur mobile qui donne des bons résultats. Il existe très peu de systèmes donnant la position absolue d'un point dans un repère fixe donné. Le GPS (Global Positioning System) [2, 4, 5], initialement développé pour les applications militaires est actuellement à la disposition du grand public. La mesure des paramètres de position d'un robot mobile peut se faire par un capteur mobile comme le GPS qu'est intégré dans le chassait de robot mobile.

Le GPS fonctionne avec un ensemble de satellites, qui effectuent des émissions synchronisées dans le temps. Par recoupement des instants d'arrivée des signaux et de la position des satellites émetteurs, les récepteurs peuvent calculer leur position. Le principe de calcul de la position est basé sur une triangulation, à l'aide de quatre signaux reçus simultanément (le quatrième signal assure la robustesse de la mesure). En termes de précision, la localisation ainsi obtenue est entachée d'une erreur de l'ordre de la quinzaine de mètres, ce qui n'est bien évidemment pas suffisant pour permettre à un robot de naviguer de manière robuste. Ainsi, on a systématiquement recours à une méthode différentielle pour obtenir des résultats plus satisfaisants. La localisation se fait à l'aide de deux récepteurs, dont l'un est statique et positionné avec précision dans l'environnement. On peut alors obtenir une précision de l'ordre du centimètre. Pour capter les signaux émis par des satellites, ce type de dispositif est donc plutôt destiné au positionnement en extérieur. Par ailleurs

sa faible précision et son prix élevé le réservent plutôt à des systèmes multi robots, associant par exemple des robots mobiles à des engins volants et sous-marins, comme cela est à l'étude dans les applications militaires les plus récentes. Enfin, ce système de mesure, autorisant des rafraîchissements à des fréquences de l'ordre de seulement 5 Hz, n'est pas utilisable pour une commande en temps-réel. Il est donc principalement utile pour des recalages ponctuels [59, 60, 64, 65, 66].

### **2.8.3. Mesure de paramètre d'orientation**

Chaque roue motrice d'un robot mobile est généralement associée à un servomoteur. Celui-ci est équipé d'un dispositif de mesure de rotation à l'aide d'un capteur disposé sur l'axe lui-même. Il s'agit d'un capteur proprioceptif, car il renseigne sur l'orientation, c'est-à-dire sur l'état interne du système. Les capteurs utilisés en robotique mobile ne se différencient pas de ceux rencontrés en commande d'axe de manière plus générale. On notera ensuite que dans le cas des robots mobiles la mesure utile est généralement la vitesse de rotation et non la position angulaire. Cette mesure de vitesse peut être obtenue par une mesure directe, à l'aide d'un capteur compas ou d'une génératrice tachymétrie notamment. Cependant, pour des raisons évidentes (moindre coût, moindre encombrement, moindre entretien), elle est le plus souvent réalisée d'une manière indirecte. La technologie la plus classique consiste à utiliser des codeurs optiques, délivrant des impulsions carrées lorsque l'arbre tourne. On peut estimer que le comptage de ces impulsions suffit à déterminer la vitesse de rotation des roues, qui découle de la fréquence des impulsions. Cette mesure est nécessairement entachée d'un bruit de quantification, qui peut être important, notamment aux basses vitesses. Pour réduire ce bruit, on choisit des codeurs de meilleure résolution, possédant un nombre élevé de points par tour (PPT), c'est-à-dire mesurant des incréments angulaires très petits (typiquement 2000 PPT). Une alternative des synchro résolveurs, qui utilisent des signaux sinusoïdaux et dont la précision est bien meilleure. Une plus vaste gamme de capteurs potentiomètres, capteurs inductifs, capteurs capacitifs et les capteurs magnétiques sont à la disposition de mesure de l'angle d'orientation de robot mobile dans un environnement connu et modélisé pour faciliter les tâches et le rôle de robot mobile dans les différentes applications industrielles [59, 60, 64, 65, 66, 67].

#### **2.8.4. Description du système GPS**

Le système GPS comprend trois composantes principales la composante spatiale, la composante de contrôle et la composante utilisateur.

- la composante spatiale constituée de 24 satellites en orbite autour de la Terre (Space segment).
- la composante de contrôle formée de stations de poursuite au sol (Control segment).
- la composante utilisateur qui comprend les récepteurs (User segment).

Les 24 satellites NAVSTAR sont répartis sur 6 plans orbitaux (4 par plan) dont l'inclinaison est de  $55^{\circ}$  par rapport à l'équateur terrestre. Comme montrée dans la figure suivante :



**Figure 2.6:** les 24 satellites NAVSTAR

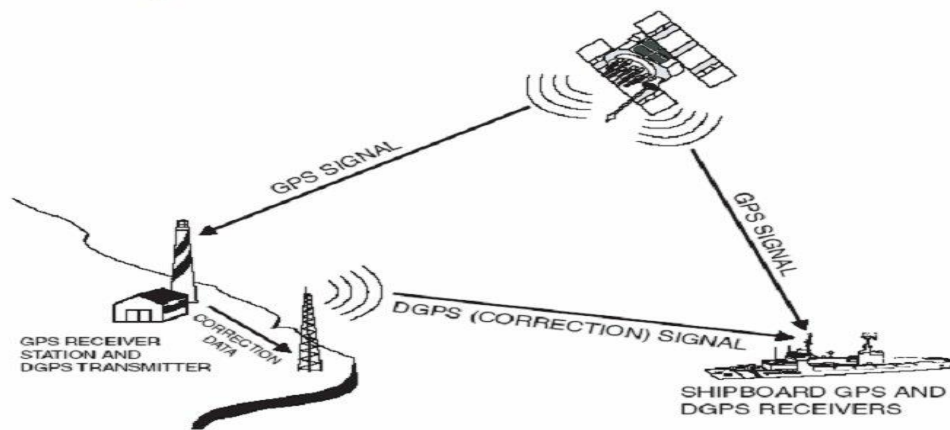
#### **2.8.5. Le principe de fonctionnement du GPS**

Le principe de fonctionnement du GPS repose sur la mesure de la distance d'un récepteur par rapport à plusieurs satellites. Les satellites sont répartis de telle manière que 4 à 8 d'entre eux soient toujours visibles. Chaque satellite émet un signal, capté sur Terre par le récepteur, permettant ainsi de mesurer très précisément la distance séparant l'émetteur du récepteur grâce au temps de parcours. Avec la réception des signaux de quatre satellites tel que trois pour obtenir le point d'intersection de trois sphères, un quatrième pour la synchronisation du temps et le récepteur mobile est capable de calculer sa position géographique par triangulation. L'association d'un récepteur GPS et d'un logiciel de cartographie permet d'obtenir un système de guidage routier efficace qui permet de faire un

affichage d'une carte avec les directions et guidage audio par synthèse vocale, ainsi développé sous différente forme de système embarqué en robot mobile intégré dans un boîtier autonome avec le récepteur [66, 67, 68, 69, 70, 71, 72, 73,74].

#### **2.8.6. GPS en mode différentiel**

Un moyen efficace permettant de réduire l'effet des erreurs inhérentes au GPS est un positionnement relatif. Le principe consiste à recueillir simultanément les observations d'un récepteur localisé et d'une station de référence dont les coordonnées sont connues. Les mesures de distance sont comparées aux distances théoriques calculées à partir des coordonnées connues de la station et des satellites. Ces différences de distance représentent les erreurs de mesure et sont calculées pour chaque satellite à chaque époque d'observations. Par la suite, ces différences de distance deviennent des termes correctifs, aussi appelés corrections différentielles qui sont appliqués aux mesures de distance recueillies par le récepteur mobile. Comme montrée dans la figure (2.7). De cette façon, les erreurs d'observations communes de la station de référence et du récepteur mobile sont éliminées. Les erreurs sont d'autant plus identiques lorsque les deux récepteurs sont plus rapprochés [67, 75, 76, 77, 78, 79].



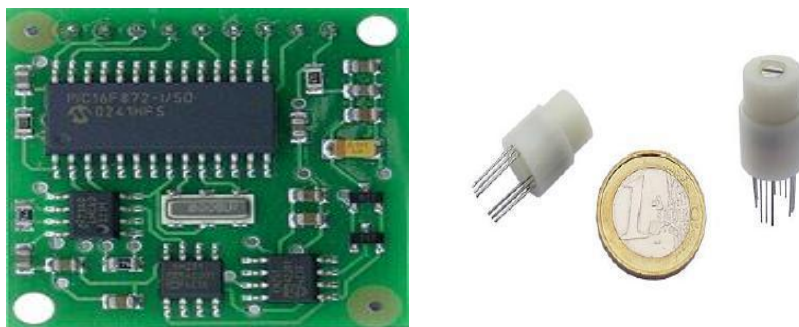
**Figure 2.7:** le GPS en mode différentiel

La précision du positionnement relatif (avec des mesures de pseudo distance) est de l'ordre de 1 à 5 m. Cette précision est une fonction de la précision des mesures de pseudo distance, de la géométrie, de la configuration des satellites et de l'espacement entre les récepteurs qui peut facilement aller jusqu'à quelques centaines de kilomètres. Il est important de mentionner que les corrections

différentielles ne doivent pas être appliquées au niveau des coordonnées, sauf si les mêmes satellites sont observés par les deux récepteurs. Les corrections différentielles peuvent être appliquées à plus d'un récepteur mobile et l'inter visibilité entre les récepteurs n'est pas requis.

### **2.8.7. Capteur Compas**

Les compas et les boussoles fournissent une information d'orientation par rapport à une référence fixe (nord magnétique typiquement). Ils sont donc extéroceptifs. Les modules présentés à la figure (2.8) sont des compas électroniques capables de détecter le nord. Par déduction, un module comme le CMP03 indiquera son orientation avec une résolution d'environ de 3 à 4 degrés, ce qui reste acceptable en complément de l'odométrie. Un tel composant, de très faible encombrement [66, 67, 75, 77, 79, 80].



**Figure 2.8:** Capteur de Compas CMP03

### **2.8.8. Localisation multi capteur**

Le processus de localisation classique en robotique mobile consiste à combiner les mesures proprioceptives et extéroceptives, fournissant respectivement des informations relatives et absolues sur la posture. Faisons le point sur les techniques évoquées précédemment. Pour ce qui est de la posture relative on suppose qu'elle est donnée par l'odométrie. Pour la mesure extéroceptive de la posture du robot mobile on peut envisager les modalités suivantes pour assurer un positionnement relativement précis, de l'ordre de quelques centimètres.

- localisation d'amers (motifs, balises) dont les positions dans un repère absolu sont Connues.

- localisation externe du robot mobile par des capteurs disposés dans l'environnement par détection de la posture aux alentours d'une position de stationnement à l'aide de caméras placées au plafond.
- mise en correspondance de la carte acquise par le système avec une carte préexistante du lieu pour déduire la posture du robot mobile. Dans le cas de navigation en environnement inconnu il faut notamment au minimum acquérir préalablement à toute navigation une carte de localisation dans l'environnement [65, 66, 67, 75, 77, 79, 80].

### **2.8.9. Capteur ultrason**

La mesure d'une distance par ultrasons permet d'effectuer une mesure sans contact avec les objets et dans notre étude on utilise le capteur ultrason pour mesurer et déterminer les distances entre le robot mobile et les différents obstacles dans un environnement connu. Son principe de fonctionnement repose comme son nom l'indique sur l'utilisation des ultrasons. Ce sont des ondes acoustiques dont la fréquence est trop élevée pour être audible par l'être humain. On peut utiliser d'autres moyens comme la pression hydrostatique exercée par le fluide pour déterminer la distance entre le robot mobile et les différents obstacles dans un environnement connu [75,77, 79, 80].

#### **2.8.9.1. Le principe de fonctionnement de capteur ultrason**

Le capteur ultrason contient deux montages principaux, l'émetteur et le récepteur qui sont situés dans le même boîtier. L'émetteur envoie un train d'ondes qui va se réfléchir sur l'objet à détecter et ensuite revenir à la source [75,77, 79, 80]. Le temps  $t$  mis pour parcourir un aller-retour permet de déterminer la distance de l'objet par rapport à la source. Plus l'objet sera loin plus il faudra longtemps pour que le signal revienne. Pour détecter la distance  $d$ , on utilise l'équation cinématique  $v = d/t$  donc on aura  $d = v.t$

#### **2.8.9.2. Les inconvénients du capteur ultrason**

Le capteur ultrasonique comporte certains inconvénients qui sont :

- Il est très vite inopérant lorsqu'il y a la présence des échos parasites, en présence de poussière ou encore lorsque le niveau mesuré se trouve dans un cite trop étroit.

- Aucun fonctionnement possible dans le vide.
- Il y a une zone que l'on appelle zone morte et qui correspond à la distance minimum que doit avoir le niveau à détecter par rapport au capteur pour que celui-ci fonctionne correctement.

## **2.9. Conclusion**

Nous avons abordé, dans ce chapitre, la théorie d'estimation et fusion multi-capteur. Nous avons donné la définition de l'estimateur, la fonction de vraisemblance de l'estimation des paramètres, le Biais, la Variance de l'estimateur, les différentes méthodes d'estimation, ainsi que l'estimation des vecteurs aléatoires et déterministes. Il a été aussi question de la définition du filtre de Kalman utilisé dans l'estimation du vecteur aléatoire dynamique ou du processus aléatoire. Puis on a défini brièvement les capteurs mobiles, le GPS, le capteur compas pour mesurer et localiser les paramètres de position et d'orientation de robot mobile. Le capteur ultrason qui est utilisé dans la détection des différents obstacles disposés dans l'environnement a fait aussi l'objet de quelques recherches dans l'état de l'art.

## **Chapitre 3 : Les techniques de localisation et d'estimation de la poursuite**

### **3.1. Introduction**

Dans ce chapitre on va présenter l'estimateur optimal, les filtres de Kalman (KF) et le modèle de mélange gaussien (GMM) qui sont utilisés pour localiser et estimer les différents modèles proposés du robot mobile. Nous avons débuté ce chapitre par quelque définition portant sur l'estimateur, le calcul du filtre de Kalman suivi par le filtre de Kalman étendu (EKF). S'en est suivi une présentation du filtre de Kalman sans parfums (UKF), où il a été question de définir ses propriétés ainsi que les étapes de calcul. Nous avons enchainé avec une présentation du filtre de Kalman à différence centrale (CDKF), suivi d'une présentation du modèle de mélange gaussien (GMM). Par ailleurs, la technique de la racine cubique du filtre de Kalman sans parfums (CRUKF) que nous avons proposé à fait l'objet d'une présentation ainsi que l'algorithme de chaque technique.

### **3.2. Définition d'un estimateur optimal**

Un estimateur optimal est un estimateur qui suit le modèle d'états linéaires ou non linéaires d'une façon exacte avec une erreur d'estimation autour de zéro. Le filtre de Kalman est un estimateur optimal car il donne ce résultat après le réglage des matrices de covariance qui permet aussi de résoudre directement la prédiction, le filtrage, et la correction.

### **3.3. Le filtre de Kalman**

Le filtre de Kalman est un observateur stochastique car on introduit dans son modèle des bruits d'état et de mesure. Le problème du filtrage linéaire a été résolu d'une façon large par un filtre récursif ou un filtre de Kalman-Bucy. Ce dernier se présente sous la forme d'un ensemble d'équations différentielles. Cette forme est facile à résoudre sur un ordinateur. La réalisation de ce filtre fournit l'estimation optimale. La variance de l'erreur d'estimation est un reconstruteur d'état dans un environnement stochastique si les variances des bruits sont connues, donc est un estimateur minimisant de la variance de l'erreur d'estimation. Généralement un filtre optimal aux systèmes non stationnaires est la présence de conditions initiales et des entrées déterministes. Le reconstruteur est un observateur dans le cas d'un modèle déterministe, et est un filtre dans le cas d'un modèle stochastique [81,82, 83, 84].

### **3.3.1. Le principe du filtre de Kalman**

Le filtre de Kalman peut être appliqué aux systèmes dynamiques linéaires, continus ou discrets dont le bruit de mesure est blanc. Le problème de l'estimation de l'état  $X(t)$  d'un système dynamique soumis à des entrées déterministes et aléatoires à partir des mesures  $Z(t)$  bruitées, peut classer en trois classes distinctes selon l'intervalle d'observation  $[t_0, t_r]$  :

- Le problème de prédiction pour :  $t_0 > t_r$
- Le problème de filtrage pour :  $t_0 = t_r$
- Le problème de lissage pour :  $t_0 < t_r$

Le filtre de Kalman permet de résoudre directement la prédiction, le filtrage, et le lissage [81,82, 83, 84].

### **3.3.2. Modélisation du filtre de Kalman**

La modélisation de filtre de Kalman est d'écrite par un système d'équations différentielles. L'état du système est observé par l'équation du mesure  $Z(t)$  est liées à l'équation d'état  $X(t)$  par l'équation d'observation [81,82, 83, 84].

$$\dot{X}(t) = A(t).X(t) + B(t).U(t) + W(t) \quad (3.1)$$

$$Z(t) = C(t).X(t) + V(t) \quad (3.2)$$

Tel que  $\dot{X}(t)$  : le vecteur d'état de dimension  $(n)$ .

$A(t)$  : la matrice dynamique de la représentation d'état  $(n \times n)$ .

$B(t)$  : le vecteur de commande de la représentation de l'état  $(n)$ .

$U(t)$  : le vecteur d'entrée.

$W(t)$ : un bruit blanc gaussien de moyenne nulle.

$C(t)$ : la matrice d'observation de la représentation d'état.

$V(t)$  : un bruit blanc gaussien de moyenne nulle.

$Q(t)$ : la matrice définie non négative.

$R(t)$ : la matrice définie non négative.

$X(t_0)$  : l'état initiale, aléatoire de statique connue gaussien, est de moyenne:

$E[X(t_0)] = m_0$ , indépendant de bruit  $W(t)$ .

$$E[W(t).W^T(t+\tau)] = Q(t).\delta(\tau) \quad (3.3)$$

$$E[V(t).V^T(t+\tau)] = R(t).\delta(\tau) \quad (3.4)$$

$$E[W(t).W^T(t+\tau)] = 0 \quad (3.5)$$

$$E[W(t)X^T(t_0)] = E[V(t)X^T(0)] = 0 \quad (3.6)$$

Les équations du filtre de Kalman peuvent être obtenues plus simplement en remplaçant l'hypothèse gaussienne par la recherche d'un filtre linéaire non biaisé, à une variance minimale et la forme d'un filtre linéaire est donnée comme suit :

$$\hat{X}(t) = A_1(t).\hat{X}(t) + B_1(t).U(t) + K(t).Z(t) \quad (3.7)$$

$$E[\hat{X}(t)] = E[X(t)] \quad (3.8)$$

$$E = E[\dot{X}(t)] \quad (3.9)$$

Soit en prenant la moyenne des expressions (3.1) et (3.2):

$$A_1(t)E[X(t)] + B_1U(t) + K(t)C(t)E[X(t)] = A(t) E[X(t)] + B(t) U(t) \quad (3.10)$$

$$A_1(t) = A(t) - K(t).C(t) \quad (3.11)$$

Et on prend  $B_1(t) = B(t)$  , donc l'expression de filtre  $X(t)$  est donnés par :

$$X(t) = A(t).\hat{X}(t) + B(t).U(t) + K(t)[Z(t) - C(t).\hat{X}(t)] \quad (3.12)$$

Tel que la matrice de gain  $K(t)$  doit minimiser la variance de l'erreur  $\tilde{X}$  exprimée par :

$$\tilde{X} = X - \hat{X} \quad (3.13)$$

$$\tilde{X}(t) = [A(t) - K(t).C(t)].\tilde{X}(t) + W(t) - K.V(t) \quad (3.14)$$

$\tilde{X}(t)$  est donc la sortie d'un système linéaire ayant une entrée bruit blanc, on prend :

$$(W(t) - K(t).V(t)) = (Q + K R K^T) \quad (3.15)$$

La variance  $P$  de l'erreur de la solution de l'équation différentielle de Riccati :

$$P(t) = (A - K.C)P + P(A - K.C) + Q + K R K^T \quad (3.16)$$

Finalement, les équations de l'état  $X(t)$ , de la variance  $P(t)$  et de gain  $K(t)$  du filtre de Kalman sont données comme suit:

$$\dot{X}(t) = A(t).X(t) + B(t).U(t) + K(t).Z(t) - C(t).X(t) \quad (3.17)$$

$$\dot{P}(t) = A(t).P(t) + P(t).A(t) - P(t).C^T(t).R_1(t).P(t) + Q(t) \quad (3.18)$$

$$K(t) = P(t) C^T (C P(t) C^T + R)^{-1} \quad (3.19)$$

### **3.4. Le filtre de Kalman Étendu (EKF)**

Le filtre de Kalman étendu est une adaptation du filtre de Kalman aux problèmes non linéaires. Le principe est d'approximer les fonctions non linéaires par linéarisation afin de pouvoir appliquer les équations du filtre de Kalman classique. Bien que couramment utilisé, ce filtre n'est pas idéal car il propage la moyenne à travers les équations non linéaires de la fonction du modèle dynamique, alors que la covariance est calculée avec les matrices linéarisées et la matrice de transition est calculée à l'aide de la matrice dynamique du système obtenue par dérivation. La plupart des méthodes d'estimation récursives proposées jusqu'à présent, pour résoudre le problème de filtrage dans le cas non-linéaire, font des approximations du modèle ou au niveau des hypothèses des statistiques initiales. La première solution proposée a été le filtre de Kalman Étendu (EKF). Cette solution repose sur un développement en série de Taylor des équations de processus et d'observation qui forment le modèle. Aussi le filtre de Kalman Étendu est défini par une linéarisation de premier ordre dans le développement de Taylor pour les non-linéarités correspondantes aux équations de processus et/ou observation [81, 84 ,85 ,87].

### **3.4.1. Modélisation du filtre de Kalman étendu (EKF)**

La modélisation de filtre de Kalman étendu est écrite par un système d'équations différentielles. L'état du système est observé par l'équation du mesure  $Z(t)$  est liées à l'équation d'état  $X(t)$  par l'équation d'observation [86, 87 ,88 ,89].

Le modèle de filtre de Kalman étendu est donné comme suit :

$$\dot{X}(t) = A(t).X(t) + B(t).W(t) \quad (3.20)$$

$$Z(t) = C(t).X(t) + V(t) \quad (3.21)$$

La moyenne des bruits, l'auto corrélation et l'indépendance sont données par :

$$E[W(t)] = E[V(t)] = 0 \quad (3.22)$$

$$E[W(t).W^T(t + \tau)] = Q(t).\delta(\tau) \quad (3.23)$$

$$E[V(t).V^T(t + \tau)] = R(t).\delta(\tau) \quad (3.24)$$

$$E[W(t).V^T(t + \tau)] = E[W(t).X^T(t_0)] = E[V(t).X^T(t_0)] = 0 \quad (3.25)$$

- Calcul de la prédiction du filtre de Kalman étendu:

$$\hat{X}(t/t) = A(t).\hat{X}(t/t) + K(t).P(t) \quad (3.26)$$

$$P(t) = Z(t) - C(t).\hat{X}(t/t) \quad (3.27)$$

- Calcul du gain du filtre de Kalman étendu :

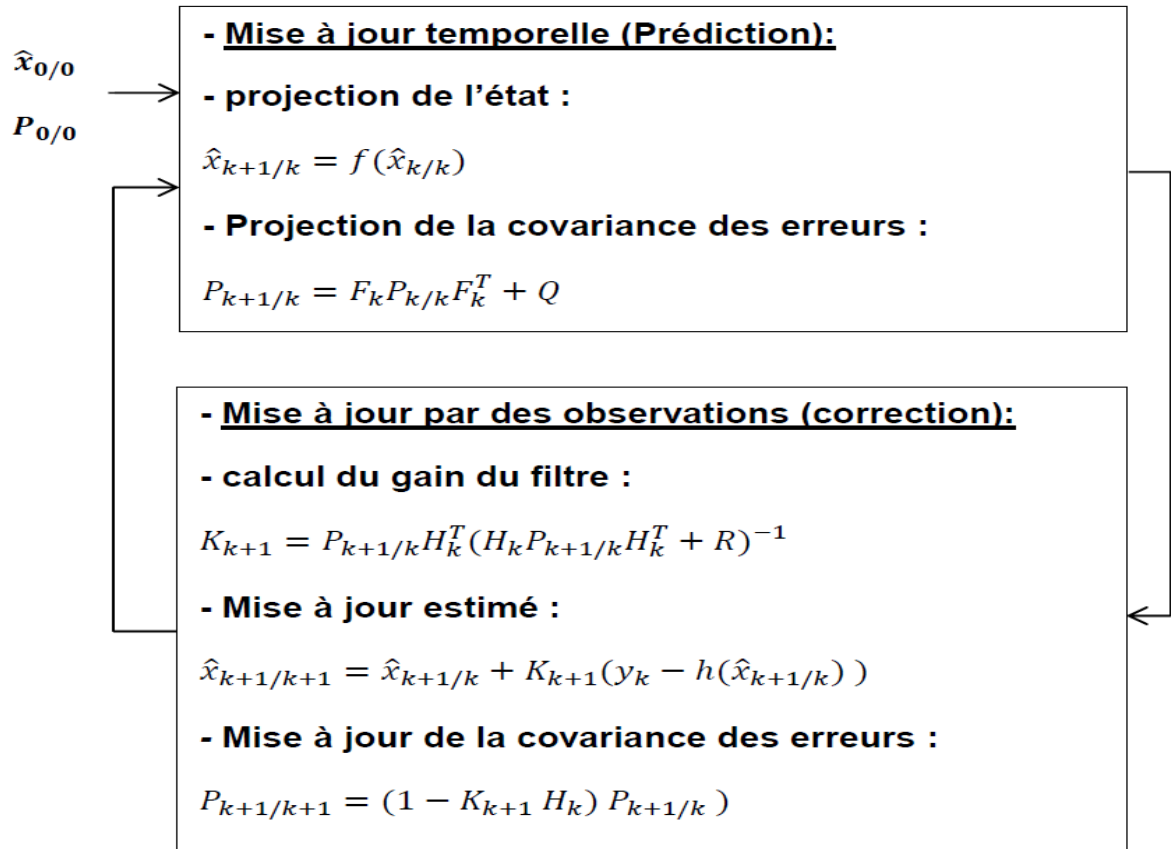
$$K(t) = P(t/t).C^T(t).R^{-1}(t) \quad (3.28)$$

- Calcul de la variance du filtre de Kalman étendu :

$$P(t/t) = A(t)P(t/t) + P(t/t)A^T(t) + B(t)p(t)B^t(t) - P(t/t)C^T(t)R^{-1}(t)C(t)P(t/t) \quad (3.29)$$

### 3.4.2. Algorithme du filtre de Kalman Étendu (EKF)

L'algorithme du filtre de Kalman Étendu (EKF) est proposé dans la figure (3.1).



**Figure 3.1:** Algorithme du filtre de Kalman Étendu (EKF)

Les équations générales de filtre de Kalman étendue seront simplifiées. Toute méthode du filtre de Kalman peut être écrite comme une application récursive d'une transformation de la statistique de l'état au cours du temps. Ainsi pour une méthode de filtrage quelconque l'algorithme est écrit sous la forme de deux transformations successives, l'une pour implémenter les équations de mise à jour temporelle et l'autre pour la propagation de la statistique de l'état prédit à travers le modèle d'observation [87, 88, 89, 90, 91]. En utilisant l'observation courante on peut calculer le vecteur d'innovation et estimer de la nouvelle statistique de l'état. La transformation non-linéaire est définie comme une application destinée au calcul de la statistique d'une variable aléatoire qui subit une transformation à travers la fonction de sortie. On va présenter la transformation non-linéaire considérée par le filtre de Kalman étendu (EKF) pour mettre en place le mécanisme de filtrage. Ainsi,

l'utilisation du modèle de propagation donné par les équations (3.8) et (3.9) et la linéarisation effectuée dans la série de Taylor va mener aux expressions des moments d'ordre un et deux :

$$F_k = \partial f / \partial x|_{x_{k-1/k-1}} \quad (3.30)$$

$$H_k = \partial h / \partial x|_{x_{k/k-1}} \quad (3.31)$$

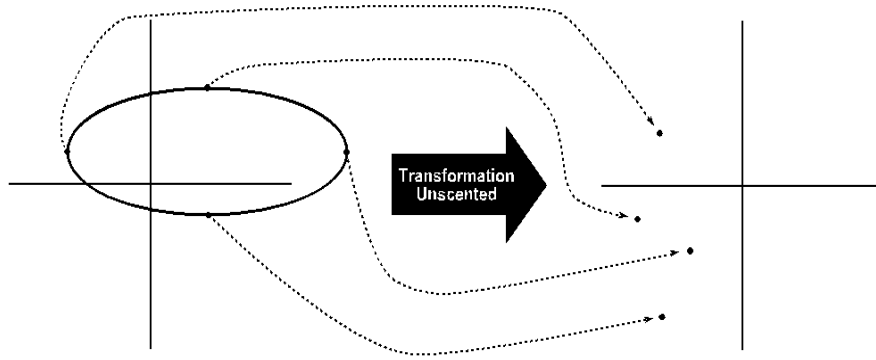
### **3.5. Le filtre de Kalman sans parfums (UKF)**

Le filtre de Kalman sans parfums, est appelé dans la littérature anglaise (Unscented Kalman Filtre), ce filtre est une autre extension du filtre de Kalman aux systèmes non-linéaires. Comme le cas de filtre de Kalman étendu (EKF) la densité conditionnelle est supposée peut être une gaussienne qui sera maintenant caractérisée par un ensemble de  $(2q + 1)$  sigma points. Ils sont alors propagés grâce à la vraie équation dynamique non-linéaires du système. Ils permettent d'évaluer précisément la moyenne et la matrice de covariance de l'état prédit avec une précision d'ordre trois de Taylor.

Contrairement à l'algorithme du filtre de Kalman étendu (EKF), mais l'algorithme de filtre de Kalman sans parfums (UKF) n'utilise pas explicitement le calcul du gradient des équations du système. Les approximations sont basées sur les interpolations des équations du système avec les sigmas points [92, 93, 94].

#### **3.5.1. La transformation sans Parfums (UT)**

Le filtre de Kalman sans Parfums est défini de même que le filtre de Kalman étendu (EKF) à l'aide d'une transformation non-linéaire cette transformation est appelé la transformation sans parfums (UT) a été introduite par Julier, dans l'idée d'estimer la distribution de probabilité de la statistique transformée en évitant d'approximer la fonction non-linéaire, dont la linéarisation au premier ordre fait partie. Ainsi cette approche se base sur une constellation de points appelés sigma points et respectivement leurs pondérations, distribués dans l'espace d'état de la variable aléatoire initiale pour approximer sa statistique. Comme on peut l'observer sur la figure (3.2).



**Figure 3.2:** La transformation sans Parfums(UT)

Ces points sont choisis de telle manière que leur moyenne et covariance représentent exactement la statistique initiale. L'ensemble de points choisis  $X^{(i)}$ , auquel on associe les coefficients de pondération  $W^{(i)}$  calculés d'une manière déterministe forme l'ensemble de sigma points  $S = \{X^{(i)}, W^{(i)}\}$ , qui caractérise complètement les vraies moyennes et covariance. Cet ensemble de points subit ensuite la propagation à travers la fonction non-linéaire. Cette méthode de propagation de points a une ressemblance avec le filtrage particulaire. Mais à la différence de celui-ci, le choix de points est déterministe et les pondérations associées sont choisies d'une autre manière, sans se baser sur la distribution [92, 93, 94, 95, 96]. Julier démontre qu'un tel ensemble de points, permettant le calcul de la moyenne et covariance de la variable aléatoire transformée, est donné par un nombre de  $2q$  points, où  $q$  est la dimension du vecteur d'état  $x$ . Les sigma points sont définis comme suit :

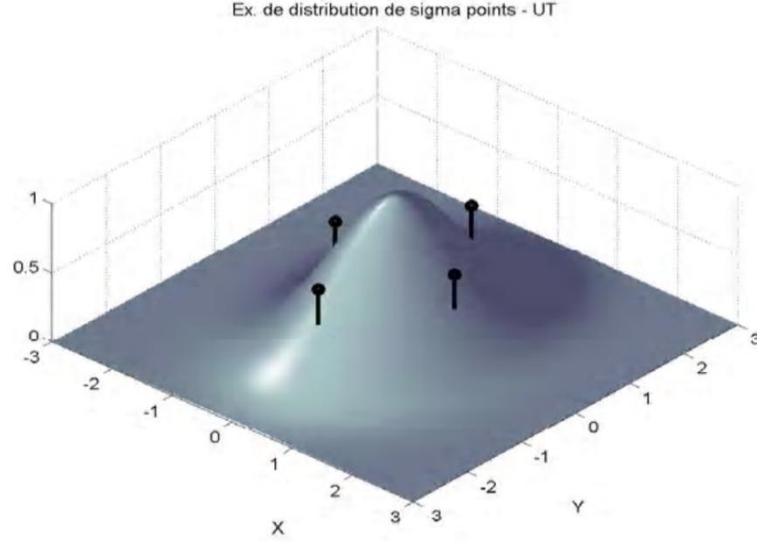
$$X^{(i)} = \bar{X} + \sqrt{q \cdot P_{xx}} \quad (3.32)$$

$$X^{(i+q)} = \bar{X} - \sqrt{q \cdot P_{xx}} \quad (3.33)$$

$$W^{(i)} = 1/2q \quad (3.34)$$

$$W^{(i+q)} = 1/2q \quad (3.35)$$

Où  $i = 1, \dots, q$ , représente la  $i^{\text{ème}}$  ligne ou colonne de la matrice  $\sqrt{q \cdot P_{xx}}$  et où  $W^{(i)}$  est la pondération associée. La figure (3.3) représente un exemple pour le choix de sigma points avec l'hypothèse d'une distribution initiale gaussienne bidimensionnelle. Les points sont situés par rapport à la surface gaussienne à une distance égale au coefficient de pondération.



**Figure 3.3:** La distribution de sigma points pour une gaussienne

Les sigmas points sont le long des haches majeures de la matrice de la covariance du variable aléatoire (Radom Variable RV) et les captures complètes [95, 96, 97, 98].

- La hauteur de chaque sigma point indique son poids relatif.
- Les premières et les deuxièmes statistiques de l'ordre de la variable aléatoire.
- Calcul de la moyenne et la variance de l'ensemble de points.
- Une propagation par la fonction non-linéaire pour obtenir l'ensemble de points transformés  $Z^{(i)}$  tel que :

$$Z^{(i)} = f[X^{(i)}] \quad (3.36)$$

- La moyenne et la covariance sont calculées par la somme des points transformés, pondérés par  $\bar{Z}$  respectivement :

$$\bar{Z} = \sum_{i=1}^{2q} W^{(i)} Z^{(i)} \quad (3.37)$$

$$P_{zz} \approx \sum_{i=1}^{2q} W^{(i)} (Z^{(i)} - \bar{Z})(Z^{(i)} - \bar{Z})^T \quad (3.38)$$

L'ensemble de sigma points ainsi défini, permet d'approximer la valeur moyenne de la vraie distribution jusqu'au deuxième ordre dans le développement de Taylor mais par contre offre une estimation biaisée au niveau de la covariance. Ce biais découle de l'impossibilité de l'ensemble de points à traduire l'influence des moments supérieurs de la statistique. Pour corriger ce problème la plus simple solution est de compléter l'ensemble de points choisi avec un ou plusieurs points. Ainsi le nouvel ensemble de sigma points proposé est défini comme suit :

$$X^{(0)} = \bar{X} \quad (3.39)$$

$$X^{(i)} = \bar{X} + (\sqrt{(q+k)P_{xx}})_i \quad (3.40)$$

$$X^{(i+q)} = \bar{X} - (\sqrt{(q+k)P_{xx}})_i \quad (3.41)$$

$$W^{(0)} = k/(q+k) \quad (3.42)$$

$$W^{(i)} = 1/2(q+k) \quad (3.43)$$

$$W^{(i+q)} = 1/2(q+k) \quad (2.44)$$

Le choix de paramètre introduit  $k$ , en plus le capteur d'influence des moments supérieurs, doit être utilisé aussi pour limiter la dispersion de sigma points dans l'espace d'état en présence de la non-linéarité. Avec la définition du nouvel ensemble de sigma points, on observe que la distance du  $i^{\text{ème}}$  points par rapport à  $\bar{X}$  est proportionnelle à la valeur  $\sqrt{(q+k)}$ . Ainsi le choix de paramètre  $k = 0$ , on remplace dans les équations (3.40), (3.41), (3.42), (3.43) et (3.44), tandis qu'une valeur  $k > 3$  éloigne les points de la moyenne, et avec une valeur négative de  $k$ , on trouve l'effet inverse avec un rapprochement des points. Pour  $k = 3 - q$ , correspondant à l'annulation de la dimension  $q$  sur la distribution de sigma points.

### **3.5.2. La transformation sans parfums scalaire (SUT)**

Il existe un nouvel ensemble de sigma points est proposé avec un paramètre de décalage:

$$X^{(i)} = X^{(0)} + \alpha(X^{(i)} - X^{(0)}), \quad i = 1, \dots, 2q, \quad 0 < \alpha < 1 \quad (3.45)$$

Cette nouvelle transformation porte le nom de transformation sans parfums scalaire (scaled Unscented). Les auteurs ont démontré que le nouveau paramètre de décalage  $\alpha$  introduit ne va pas influencer de manière négative l'estimation de la statistique de la variable transformée ( $\bar{Z}$ ,  $P_{zz}$ ), avec une expression exacte jusqu'au la deuxième ordre des moments de la variable aléatoire initiale, et une pondération des autres moments supérieurs grâce à  $\alpha$ . Enfin on a un ensemble de points sigma qui intègre ce décalage ainsi que les nouvelles pondérations associées :

$$X^{(0)} = \bar{X} \quad (3.46)$$

$$X^{(i)} = \bar{X} + (\sqrt{(q + \lambda)P_{xx}})_i, \quad i = q \quad (3.47)$$

$$X^{(i)} = \bar{X} - (\sqrt{(q + \lambda)P_{xx}})_i, \quad i = q + 1, \dots, 2q \quad (3.48)$$

$$W_{(m)}^{(0)} = \frac{\lambda}{q + \lambda} \quad (3.49)$$

$$W_{(c)}^{(0)} = [1/2(q + \lambda)] + 1 - \alpha^2 + \beta \quad (3.50)$$

$$W_{(m)}^{(i)} = W_{(c)}^{(i)} = 1/2(q + \lambda) \quad (3.51)$$

Où  $\lambda = \alpha^2(q + k) - q$  avec les pondérations désignées par  $W_{(m)}^{(i)}$  et  $W_{(c)}^{(i)}$  sont associées au calcul de la moyenne et de la covariance, respectivement. L'expression du point central  $X^{(0)}$  garantit une matrice de covariance définie semi-positive. Le choix des paramètres qui apparaissent dans le calcul de l'ensemble de points se fait de la manière suivante :

- Afin d'avoir une matrice de covariance définie semi-positive, on prendra  $k \geq 0$ . Il s'avère que la valeur de  $k$  n'est pas critique, de telle sorte que  $k = 0$  correspond généralement à tous les cas d'estimation.

- Le paramètre  $0 < \alpha < 1$  considéré antérieurement va influencer directement sur la dimension de l'ellipsoïde de distribution de sigma points. Ainsi de façon idéale sa valeur doit être petite.

- Enfin le paramètre introduit  $\beta$ , est choisi positif pour avoir une bonne amélioration des performances de la transformation du filtre de Kalman étendu (EKF) et du filtre de Kalman sans parfums (UKF) [95, 96, 97, 98, 99].

### **3.5.3. Le filtre de Kalman sans parfums récursif (RUKF)**

La définition de la transformation sans parfums (UT) donnée ci-dessus la forme récursive du filtre de Kalman peut être facilement déduite [98, 99, 100]. On propose une formulation générale dont le vecteur d'état est modifié en ajoutant à l'état original les vecteurs associés aux bruits de processus et d'observation donc le modèle de filtre de Kalman sans parfums récursif est donnée comme suit :

$$X_{k+1} = f(x_k) \quad (3.52)$$

$$Z_k = h(x_k) \quad (3.53)$$

La dimension du nouveau vecteur d'état augmenté est  $N_a = N_x + N_v + N_w$ , Où  $N_x$ ,  $N_v$  et  $N_w$  représentent les dimensions des vecteurs  $X_k$ ,  $V_k$  et  $W_k$  respectivement. Le modèle d'estimation récursif peut être écrit sous la forme générale suivante :

$$X_{k+1}^a = f^a(X_k^a) \quad (3.54)$$

$$Z_k = h^a(X_k^a) \quad (3.55)$$

Avec la transformation sans parfums (UT) qui calcule les sigmas points à partir des expressions des moments suivants:

$$\mu_k^a = \begin{bmatrix} \mu_k \\ 0_{N_v \times 1} \\ 0_{N_w \times 1} \end{bmatrix} \quad (3.56)$$

$$P_{k/k}^a = \begin{bmatrix} P_{k/k} & 0 & 0 \\ 0 & Q_k & 0 \\ 0 & 0 & R_k \end{bmatrix} \quad (3.57)$$

Finalement l'algorithme récursif du filtre de Kalman sans parfums pour un instant  $k$  quelconque. Le modèle général peut être écrit avec la corrélation entre les bruits et les états ou entre les bruits eux-mêmes [95, 97, 99, 101, 102, 103, 104].

$$\{X_{k/k}^{(i)}, W^{(i)}\}_{i=0 \dots \dots \dots N_a} \quad (3.58)$$

- Propagation de l'ensemble des points construit à travers la fonction de processus :

$$X_{k+1/k}^{(i)} = f^a(X_{k/k}^{(i)}), i = 0 \dots \dots \dots N_a \quad (3.59)$$

- Calcul de la valeur estimée et de covariance des erreurs prédites :

$$\hat{X}_{k+1/k} = \sum_{i=1}^{N_a} W_{(m)}^{(i)} \cdot X_{k+1/k}^{(i)} \quad (3.60)$$

$$P_{x_{k+1/k} x_{k+1/k}} = \sum_{i=1}^{N_a} W_{(c)}^{(i)} \cdot \{X_{k+1/k}^{(i)} - \hat{X}_{k+1/k}\} \{X_{k+1/k}^{(i)} - \hat{X}_{k+1/k}\}^T \quad (3.61)$$

- Propagation des sigmas points à travers le modèle d'observation :

$$Z_{k+1/k}^{(i)} = h^{(i)}\{X_{k+1/k}^{(i)}\}, i = 0 \dots \dots \dots N_a \quad (3.62)$$

- Calcul de l'observation prédite, calcul de la covariance de l'innovation:

$$\hat{Z}_{k+1} = \sum_{i=1}^{N_a} W_{(m)}^{(i)} * Z_{k+1/k}^{(i)} \quad (3.63)$$

$$P_{z_{k+1/k} z_{k+1/k}} = \sum_{i=1}^{N_a} W_{(c)}^{(i)} \{Z_{k+1/k}^{(i)} - \hat{Z}_{k+1/k}\} \{Z_{k+1/k}^{(i)} - \hat{Z}_{k+1/k}\}^T \quad (3.64)$$

$$P_{x_{k+1/k} z_{k+1/k}} = \sum_{i=1}^{N_a} W_{(c)}^{(i)} \{X_{k+1/k}^{(i)} - \hat{X}_{k+1/k}\} \{Z_{k+1/k}^{(i)} - \hat{Z}_{k+1/k}\}^T \quad (3.65)$$

- Le gain du filtre de Kalman, l'expression de l'état estimé et l'expression de la covariance des erreurs sont calculés par :

$$K_{k+1} = (P_{x_{k+1/k} z_{k+1/k}})(P_{z_{k+1/k} z_{k+1/k}})^{-1} \quad (3.66)$$

$$\hat{X}_{k+1/k+1} = \hat{X}_{k+1/k} + K_{k+1}(Z_{k+1} - \hat{Z}_{k+1/k}) \quad (3.67)$$

$$P_{k+1/k+1} = (P_{x_{k+1/k} z_{k+1/k}}) - K_{k+1}(P_{z_{k+1/k} z_{k+1/k}})K_{k+1}^T \quad (3.68)$$

Le développement du filtre de Kalman sans parfums scalaire est accompli. La solution choisie pour former l'ensemble de points sigma n'est pas unique [99, 100, 105, 106, 107].

#### **3.5.4. Algorithme du filtre de Kalman sans parfums (UKF)**

- Initialisation :

$$\hat{X}_0 = E[X_0] \quad (3.69)$$

$$P_{X_0} = E[(X_0 - \hat{X}_0)(X_0 - \hat{X}_0)^T] \quad (3.70)$$

$$\hat{X}_0^a = E[X_0^a] = [\hat{X}_0^T \quad \bar{v}_0^T \quad \bar{n}_0^T]^T \quad (3.71)$$

$$P_0^a = E[(X_0^a - \hat{X}_0^a)(X_0^a - \hat{X}_0^a)^T] \quad (3.72)$$

$$P_0^a = \begin{bmatrix} P_{x_0} & 0 & 0 \\ 0 & R_v & 0 \\ 0 & 0 & R_n \end{bmatrix} \quad (3.73)$$

- Calcul de sigma-points :

$$S_k^a = [\hat{X}_k^a \quad \hat{X}_k^a + \gamma\sqrt{P_k^a} \quad \hat{X}_k^a - \gamma\sqrt{P_k^a}] \quad (3.74)$$

- Les équations de la mise à jour du temps :

$$S_{k+1/k}^x = f(S_k^x, S_k^v, u_k) \quad (3.75)$$

$$\hat{X}_{\overline{k+1}} = \sum_{i=0}^{2L} W_i^m S_{i,k+1/k}^x \quad (3.76)$$

$$P_{\bar{x}_{k+1}} = \sum_{i=0}^{2L} W_i^m (S_{i,k+1/k}^x - \hat{X}_{\overline{k+1}})(S_{i,k+1/k}^x - \hat{X}_{\overline{k+1}})^T \quad (3.77)$$

- Les équations de la mise à jour de mesure

$$Y_{k+1/k} = h(S_{k+1/k}^x, S_{k+1/k}^n) \quad (3.78)$$

$$\hat{Y}_{\overline{k+1}} = \sum_{i=0}^{2L} W_i^m Y_{i,k+1/k} \quad (3.79)$$

$$P_{\tilde{Y}_{k+1}} = \sum_{i=0}^{2L} W_i^c (Y_{i,k+1/k} - \hat{Y}_{\overline{k+1}})(Y_{i,k+1/k} - \hat{Y}_{\overline{k+1}})^T \quad (3.80)$$

$$P_{X_{k+1}Y_{k+1}} = \sum_{i=0}^{2L} W_i^c (S_{i,k+1/k}^x - \hat{X}_{\overline{k+1}})(Y_{i,k+1/k} - \hat{Y}_{\overline{k+1}})^T \quad (3.81)$$

$$K_{k+1} = P_{X_{k+1}Y_{k+1}} P_{\tilde{Y}_{k+1}}^{-1} \quad (3.82)$$

$$\hat{X}_{k+1} = \hat{X}_{\overline{k+1}} + K_{k+1}(Y_{k+1} - \hat{Y}_{\overline{k+1}}) \quad (3.83)$$

$$P_{X_{k+1}} = P_{\bar{x}_{k+1}} - K_{k+1} P_{\tilde{Y}_{k+1}} K_{k+1}^T \quad (3.84)$$

Les expressions des paramètres sont données comme suit :

$\gamma = \sqrt{L + \lambda}$  ,  $W_0^m = \lambda/(L + \lambda)$  ,  $W_0^c = W_0^m + (1 - \alpha^2 + \beta)$  ,  $W_i^c = W_i^m = 1/2(L + \lambda)$  pour  $i = 1, \dots, 2L$ . Ainsi  $\lambda = \alpha^2 (L + k) - L$ .  $\lambda$  est un paramètre de l'écaillage composé,  $L$  est la dimension de vecteur de l'état augmenté,  $0 < \alpha \leq 1$  est le facteur de l'écaillage fondamental qui détermine l'ampleur de l'étendue des points sigma autour de la moyenne antérieure. La gamme typique pour  $\alpha$  est  $-3 < \alpha \leq 1$ ;  $\beta$  est un facteur de l'écaillage secondaire accentuant le peser sur le point du sigma de zéros pour le calcul de la covariance postérieur.  $\beta$  Peut être utilisé pour minimiser des certains termes de l'erreur de plus haut ordre basé sur les moments connus du variable aléatoire antérieur. Pour l'antérieur Gaussien,  $\beta = 2$  sont optimaux.  $k$  est un

facteur de l'écaillage tertiaire et habituellement est égal à 0. En général, les valeurs optimales de ceux-ci qui pèsent des paramètres seront problème spécifique. Pour plus de détail sur comment les choisir, voir Julier & Uhlmann [101, 105, 107, 108]. Le vecteur de l'état augmenté et le vecteur de point sigma est donné par :  $X^a = [X^T \ v^T \ n^T]^T$ ,  $S^a = [(S^x)^T \ (S^v)^T \ (S^n)^T]$ .

$R_v$  et  $R_n$  sont respectivement la matrice de covariance du bruit de processus et du bruit de l'observation.

$\sqrt{P_k^a}$  : La racine carrée de la matrice qui utilise la décomposition de Cholesky triangulaire inférieure.

### **3.6. Le filtre de Kalman à différence centrale (CDKF)**

De façon parallèle avec le développement de la structure de filtre de Kalman sans parfums (UKF) présentées auparavant, d'autres solutions ont été proposées pour contourner le problème du calcul de dérivés partiels et de stabilité rencontrés dans le cas de filtrage étendu. Ainsi le Divided Difference Filter proposé par Norgaard et le filtre de Kalman à différence centrale proposé par Ito et Xiong utilisent la formule d'interpolation polynomiale de Stirling pour approximer la non-linéarité présente dans le modèle d'interpolation qui permet par la suite de calculer les moments de la statistique transformée. Comme le fait remarquer Van Der Merwe, ces deux structures sont presque identiques et peuvent être désignées simplement sous le nom de filtre de Kalman à différence centrale (CDKF). Cette méthode de filtrage sera exploitée juste pour donner les aspects généraux de la formule de Stirling et le calcul des moments en utilisant la transformation associée [105, 108, 109, 110].

#### **3.6.1. La formule d'interpolation polynomiale de Stirling**

Comme dans les développements en série de Taylor, l'interpolation avec la formule de Stirling est donnée pour une approximation de deuxième ordre, avec une hypothèse de fonction mono - dimensionnelle, par la relation suivante:

$$f(x) = f(\tilde{x}) + \tilde{D}_{\Delta_z} f + \frac{1}{2!} \tilde{D}_{\Delta_x}^2 \tilde{f} \quad (3.85)$$

Avec  $f(x)$  est une fonction non-linéaire et continue.

Les termes  $\tilde{D}_{\Delta_z} f$  ,  $\tilde{D}_{\Delta_x}^2 \tilde{f}$  représentent les opérateurs d'accroissement centré du premier et deuxième ordre respectivement, appliqués à la fonction  $f(x)$  . Dans le cas scalaire, ils sont donnés par :

$$\tilde{D}_{\Delta_z} f = (x - \bar{x}) \left( \frac{f(\bar{x}+h) - f(\bar{x}-h)}{2h} \right) \quad (3.86)$$

$$\tilde{D}_{\Delta_x}^2 \tilde{f} = (x - \bar{x})^2 \left( \frac{f(\bar{x}+h) - f(\bar{x}-h) - 2f(\bar{x})}{h^2} \right) \quad (3.87)$$

Où  $h$  est la longueur de l'intervalle choisi, pour accomplir l'approximation. Pour étendre ces résultats aux cas multidimensionnel, la solution proposée est de découpler statistiquement la variable aléatoire  $x$  initiale en utilisant la transformation linéaire suivante :

$$z = S_x^{-1} x \quad (3.88)$$

$$\tilde{f}(z) = f(S_x z) = f(x) \quad (3.89)$$

Où  $S_x$  représente la matrice obtenue par la factorisation Cholesky de la matrice de covariance  $P_x$  :

$$P_x = S_x S_x^T \quad (3.90)$$

Les décompositions de l'approximation réalisée antérieurement, dans le cas multidimensionnel, indépendamment pour chaque composante de la fonction  $\tilde{f}(z)$ :

$$\tilde{D}_{\Delta_z} \tilde{f} = (\sum_{i=1}^{N_x} \Delta_{z_i} m_i d_i) \tilde{f}(\bar{z}) \quad (3.91)$$

$$\tilde{D}_{\Delta_x}^2 \tilde{f} = (\sum_{i=1}^{N_x} \Delta_{z_i}^2 d_i^2 + \sum_{j=1}^{N_x} \sum_{q=1, j \neq q}^{N_x} \Delta_{z_j} \Delta_{z_q} (m_j d_j) (m_q d_q)) \tilde{f}(\bar{z}) \quad (3.92)$$

Où  $\Delta_{z_i} = (z - \bar{z})_i$  est la  $i^{\text{ème}}$  composante du vecteur  $z - \bar{z}$  ,  $N_x$  est la dimension de l'espace d'état et  $m_i, d_i^2$  représentent la différence partielle au premier ordre, ainsi la moyenne et la différence partielle au deuxième ordre, respectivement :

$$d_i \tilde{f}(\bar{z}) = \frac{1}{2h} [\tilde{f}(\bar{z} + he_i) - \tilde{f}(\bar{z} - he_i)] \quad (3.93)$$

$$m_i \tilde{f}(\bar{z}) = \frac{1}{2} [\tilde{f}(\bar{z} + he_i) + \tilde{f}(\bar{z} - he_i)] \quad (3.94)$$

$$d_i^2 \tilde{f}(\bar{z}) = \frac{1}{2h^2} [\tilde{f}(\bar{z} + he_i) - \tilde{f}(\bar{z} - he_i) - 2\tilde{f}(\bar{z})] \quad (3.95)$$

$e_i$  : étant le  $i^{\text{ème}}$  vecteur unité. La mise en forme de l'approximation ci-dessus, pour la fonction multidimensionnelle  $\tilde{f}(z)$ , va nous permettre par la suite l'implémentation d'une solution similaire à la transformation sans parfums pour le calcul de la statistique d'une variable aléatoire transformée. D'après le développement initial, on peut écrire:

$$\tilde{f}(\bar{z} \pm he_i) = f(S_x(\bar{z} \pm he_i)) \quad (3.96)$$

$$\tilde{f}(\bar{z} \pm he_i) = f(S_x(S_x \bar{z} \pm hS_x e_i)) \quad (3.97)$$

$$\tilde{f}(\bar{z} \pm he_i) = f(c \pm hS_{x_i}) \quad (3.98)$$

Où  $S_{x_i}$  représente la  $i^{\text{ème}}$  colonne de la matrice Cholesky obtenue par la décomposition de  $P_x$ . Avec cette observation on voit bien qu'on tombe facilement sur l'ensemble de points proposé par la transformation sans parfums (UT), bien sûr avec d'autres coefficients de pondération [109, 110, 111].

### **3.6.2. Estimation de la variable aléatoire transformée**

Comme dans le cas des autres transformations on considère la propagation d'une variable aléatoire  $x$  de moyenne  $\bar{x}$  et covariance  $P_x$  à travers une fonction non-linéaire quelconque. Norgaard propose ainsi deux solutions de filtrage basées sur une approximation d'ordre un et d'ordre deux. Comme le cas à l'ordre un peut être déduit directement de celui à l'ordre deux, seul le cas le plus général est présenté. En utilisant la même notation pour la variable aléatoire transformée  $y = f(x)$ , on obtient l'approximation suivante:

$$y = f(x) \approx \tilde{f}(\bar{z}) + \tilde{D}_{\Delta_z} \tilde{f} + \frac{1}{2!} \tilde{D}_{\Delta_x}^2 \tilde{f} \quad (3.99)$$

Où  $z = S_x^{-1}x$ , la matrice  $S_x$  étant définie antérieurement (3.88).

En appliquant ce modèle d'approximation, on obtient les relations suivantes pour les deux premiers moments de la statistique de la variable aléatoire transformée :

– Calcul de la moyenne  $\bar{y}$  :

$$\bar{y} = E[y] \quad (3.100)$$

$$\bar{y} = E[\tilde{f}(\bar{z}) + \tilde{D}_{\Delta_z} \tilde{f} + \frac{1}{2!} \tilde{D}_{\Delta_x}^2 \tilde{f}] \quad (3.101)$$

$$\bar{y} = \frac{h^2 - N_x}{h^2} \tilde{f}(\bar{z}) + \frac{1}{2h^2} \sum_{i=1}^{N_x} [\tilde{f}(\bar{z} + h e_i) + \tilde{f}(\bar{z} - h e_i)] \quad (3.102)$$

$$\bar{y} = \frac{h^2 - N_x}{h^2} \tilde{f}(\bar{z}) + \frac{1}{2h^2} \sum_{i=1}^{N_x} [f(\bar{x} + h S_{x_i}) + f(\bar{x} - h S_{x_i})] \quad (3.103)$$

- Calcul de la variance  $P_{yy}$  :

$$P_{yy} = E[(y - \bar{y})(y - \bar{y})^T] \quad (3.104)$$

$$P_{yy} = E[(y - f(\bar{x}))(y - f(\bar{x}))^T] - E[y - f(\bar{x})]E[y - f(\bar{x})]^T \quad (3.105)$$

$$P_{yy} = E\left[\left(\tilde{D}_{\Delta_z} \tilde{f} + \frac{1}{2!} \tilde{D}_{\Delta_x}^2 \tilde{f}\right)\left(\tilde{D}_{\Delta_z} \tilde{f} + \frac{1}{2!} \tilde{D}_{\Delta_x}^2 \tilde{f}\right)^T\right] - E\left[\tilde{D}_{\Delta_z} \tilde{f} + \frac{1}{2!} \tilde{D}_{\Delta_x}^2 \tilde{f}\right] - E\left[\tilde{D}_{\Delta_z} \tilde{f} + \frac{1}{2!} \tilde{D}_{\Delta_x}^2 \tilde{f}\right]^T \quad (3.106)$$

On développe les espérances mathématiques, la relation (3.103) peut s'écrire sous :

$$P_{yy} = \frac{1}{4h^2} \sum_{i=1}^{N_x} [f(\bar{x} + h S_{x_i}) + f(\bar{x} - h S_{x_i})] \cdot [f(\bar{x} + h S_{x_i}) + f(\bar{x} - h S_{x_i})]^T + \frac{h^2 - 1}{4h^2} \sum_{i=1}^{N_x} [f(\bar{x} + h S_{x_i}) + f(\bar{x} - h S_{x_i}) - 2f(\bar{x})] \cdot [f(\bar{x} + h S_{x_i}) + f(\bar{x} - h S_{x_i}) - 2f(\bar{x})]^T \quad (3.107)$$

- Calcul de la cross-covariance  $P_{xy}$  :

$$P_{xy} = E[(x - \bar{x})(y - \bar{y})^T] \quad (3.108)$$

$$P_{xy} = E[(S_x(z - \bar{z}))(\tilde{D}_{\Delta_z} \tilde{f} + \frac{1}{2} \tilde{D}_{\Delta_x}^2 \tilde{f} - E[\frac{1}{2} \tilde{D}_{\Delta_x}^2 \tilde{f}])]^T \quad (3.109)$$

$$P_{xy} = \frac{1}{2h^2} \sum_{i=1}^{N_x} S_{x_i} [f(\bar{x} + hS_{x_i}) + f(\bar{x} - hS_{x_i})]^T \quad (3.110)$$

Les expressions des moments calculées, l'implémentation de l'algorithme de filtrage est immédiate avec des équations similaires à celles développées pour le filtre de Kalman sans parfums (3.30) et (3.31). Comme ce type de filtrage n'a pas fait l'objet d'une implémentation dans la suite de notre étude, on se limite à cet ensemble de relations pour montrer que le filtre de Kalman à différence centrale (CDKF) peut offrir une solution plus générale que le filtre de Kalman sans parfums (UKF) avec un temps de calcul plus important [109, 110, 111, 112, 113].

### **3.6.3. Algorithme du filtre de Kalman à différence centrale (CDKF)**

- Initialisation :

$$\hat{X}_0 = E[X_0] \quad (3.111)$$

$$P_{X_0} = E[(X_0 - \hat{X}_0)(X_0 - \hat{X}_0)^T] \quad (3.112)$$

- Calcul de sigma points pour la mise à jour du temps:

$$\hat{X}_k^{a_v} = [\hat{X}_k \quad \bar{v}] \quad (3.113)$$

$$P_k^{a_v} = \begin{bmatrix} P_{X_{k-1}} & 0 \\ 0 & R_v \end{bmatrix} \quad (3.114)$$

$$S_k^{a_v} = \begin{bmatrix} \hat{X}_k^{a_v} & \hat{X}_k^{a_v} + h\sqrt{P_k^{a_v}} & \hat{X}_k^{a_v} - h\sqrt{P_k^{a_v}} \end{bmatrix} \quad (3.115)$$

- Les équations de la mise à jour du temps :

$$S_{k+1/k}^x = f(S_k^x, S_k^y, u_k) \quad (3.116)$$

$$\hat{X}_{k+1} = \sum_{i=0}^{2L} W_i^m S_{i,k+1/k}^x \quad (3.117)$$

$$P_{\tilde{x}_{k+1}} = \sum_{i=1}^L [W_i^{c1} (S_{i,k+1/k}^x - S_{L+i,k+1/k}^x)^2 + W_i^{c2} (S_{i,k+1/k}^x + S_{L+i,k+1/k}^x - 2S_{0,k+1/k}^x)^2] \quad (3.118)$$

- Calcul de sigma points pour la mise à jour de mesure :

$$\hat{X}_{k+1/k}^{a_n} = [\hat{X}_{k+1} \quad \bar{n}] \quad (3.119)$$

$$P_{k+1/k}^{a_n} = \begin{bmatrix} P_{\bar{X}_k} & 0 \\ 0 & R_n \end{bmatrix} \quad (3.120)$$

$$S_{k+1/k}^{a_n} = \begin{bmatrix} \hat{X}_{k+1/k}^{a_n} & \hat{X}_{k+1/k}^{a_n} + h \sqrt{P_{k+1/k}^{a_n}} & \hat{X}_{k+1/k}^{a_n} - h \sqrt{P_{k+1/k}^{a_n}} \end{bmatrix} \quad (3.121)$$

- Les équations de la mise à jour de mesure :

$$Y_{k+1/k} = h(S_{k+1/k}^x, S_{k+1/k}^n) \quad (3.122)$$

$$\hat{Y}_{k+1} = \sum_{i=0}^{2L} W_i^m Y_{i,k+1/k} \quad (3.123)$$

$$P_{\tilde{Y}_{k+1}} = \sum_{i=1}^L [W_i^{c1} (Y_{i,k+1/k} - Y_{L+i,k+1/k})^2 + W_i^{c2} (Y_{i,k+1/k} + Y_{L+i,k+1/k} - 2Y_{0,k+1/k})^2] \quad (3.124)$$

$$P_{X_{k+1} Y_{k+1}} = \sqrt{W_i^{c1} P_{\bar{X}_k}} [Y_{1:L,k+1/k} - Y_{L+1:2L,k+1/k}]^T \quad (3.125)$$

$$K_{k+1} = P_{X_{k+1} Y_{k+1}} P_{\tilde{Y}_{k+1}}^{-1} \quad (3.126)$$

$$\hat{X}_{k+1} = \hat{X}_{k+1} + K_{k+1} (Y_{k+1} - \hat{Y}_{k+1}) \quad (3.127)$$

$$P_{X_{k+1}} = P_{\bar{X}_{k+1}} - K_{k+1} P_{\tilde{Y}_{k+1}} K_{k+1}^T \quad (3.128)$$

Les données des paramètres sont:

$W_0^m = (h^2 - L)/h^2$  ;  $W_i^m = 1/(2h^2)$  ;  $W_i^{c1} = 1/(4h^2)$  et  $W_i^{c2} = (h^2 - 1)/(4h^2)$  pour  $i = 1, \dots, 2L$  où  $h \geq 1$  est la dimension de l'intervalle de la différence centrale scalaire qui est une mise optimale égal à la racine carré du kurtosis du variable aléatoire antérieur pour Gaussien antérieur, la valeur optimale est  $h = \sqrt{3}$ . Le facteur de l'écaillage  $h$  dans le filtre de Kalman à différence centrale (CDKF) joue le même rôle de  $\alpha$  dans le filtre de Kalman sans parfums (UKF), veut dire on détermine l'étendue des points sigmas autour de la moyenne antérieure. Tel-que  $L$  est la dimension du vecteur de l'état augmenté [109, 110, 111, 112, 113].

Ici nous augmentons encore l'état du système avec le bruit du processus et vecteurs du bruit de l'observation ( $v_k$  et  $n_k$ ) comme nous avons fait pour le filtre de Kalman sans parfums (UKF). Pour le filtre de Kalman à différence centrale (CDKF), cependant, nous avons fendu cette augmentation entre la mise à jour de temps et la mise à jour de mesure, donc pour la mise à jour de temps le vecteur de l'état augmenté et la matrice de covariance augmentée est donnée par :

$$X_{k+1}^{a_v} = [X_k^T \quad V_k^T]^T \quad (3.129)$$

$$P_{k+1}^{a_v} = \begin{bmatrix} P_{X_{k+1}} & 0 \\ 0 & R_V \end{bmatrix} \quad (3.130)$$

$$X_{k+1}^{a_n} = [X_k^T \quad V_k^T]^T \quad (3.131)$$

$$P_{k+1}^{a_n} = \begin{bmatrix} P_{X_{k+1}} & 0 \\ 0 & R_V \end{bmatrix} \quad (3.132)$$

Les sigmas points sont :  $S^{a_v} = [(S^x)^T \quad (S^v)^T]^T$  ;  $S^{a_n} = [(S^x)^T \quad (S^n)^T]^T$  et  $a^2 = aa^T$ .

### **3.7. Le modèle de mélange gaussien (GMM)**

Un modèle de mélange gaussien usuellement abrégé par l'acronyme anglais GMM pour (Gaussian Mixture Model) est un modèle statistique exprimé selon une densité mélange. Il sert usuellement à estimer paramétriquement la distribution des variables aléatoires en les modélisant comme une somme de plusieurs gaussiennes appelées noyaux. Il s'agit alors de déterminer la variance,

la moyenne et l'amplitude de chaque gaussienne. Ces paramètres sont optimisés selon un critère de maximum de vraisemblance pour approcher le plus possible la distribution recherchée. Cette procédure se fait le plus souvent itérativement par l'algorithme espérance-maximisation (EM) [114, 115, 116].

### **3.7.1. Classification du modèle de mélange gaussien (GMM)**

Dans les modèles de mélanges, le problème classique de la classification automatique est de considérer qu'un échantillon de données provienne d'un nombre de groupes inconnus a priori qu'il faut retrouver. Si en plus, on considère les lois que suivent les individus sont normales, alors on se place dans le cadre des modèles de mélanges gaussiens. Par la suite, on notera  $x$  un échantillon composé de  $p$  individus  $(x_1, \dots, x_p)$   $p$  variables continues. Dans le cadre des modèles de mélanges, on considère que ces individus appartiennent chacun à un des  $g$  ( $g$  étant fixé a priori)  $G_1, \dots, G_g$  suivant chacun une loi normale de moyenne  $\mu_k$  et de la matrice de variance covariance  $\Sigma_k$ . D'autre part, on va noter  $\pi_1, \dots, \pi_g$ , les proportions des différents groupes sont données comme suit :

$$\theta_k = (\mu_k, \Sigma_k) \quad (3.133)$$

Le paramètre de chaque loi normale est donnée par :

$$\Phi = (\pi_1, \dots, \pi_g, \theta_1, \dots, \theta_g) \quad (3.134)$$

La loi de mélange que suit l'échantillon peut s'écrire par l'expression suivante :

$$g(x, \Phi) = \sum_{k=1}^g \pi_k f(x, \theta_k) \quad (3.135)$$

Avec  $f(x, \theta_k)$  est la loi normale multidimensionnelle paramétré par  $\theta_k$ .

La loi normale multidimensionnelle est appelée la loi normale multivariée ou la loi multinormale ou la loi de Gauss à plusieurs variables et aussi une loi de probabilité qui est la généralisation multidimensionnelle de la loi normale [115, 116, 117]. La densité  $g(x, \Phi)$  ci-dessus correspond bien à un mélange de gaussiennes

$$g(x, \Phi) = \sum_{k=1}^g \pi_k f(x, \theta_k) = \sum_{k=1}^g \mathbb{P}(\theta_k) \mathbb{P}(x|\theta_k) \quad (3.136)$$

$$g(x, \Phi) = \sum_{k=1}^g \mathbb{P}(x, \theta_k) \quad (3.137)$$

$$g(x, \Phi) = \mathbb{P}\left(\bigcup_{k=1}^g (x, \theta_k)\right) = \mathbb{P}\left(\bigcup_{k=1}^g (X = x, \theta = \theta_k)\right) \quad (3.138)$$

Avec  $X$  est un vecteur gaussien de dimension  $p$  et de paramètre  $\theta$

La difficulté de cette approche consiste à déterminer le meilleur paramètre  $\Phi$ . Pour cela, on cherche habituellement le paramètre qui maximise la vraisemblance, donnée dans ce cas, par la formule :

$$L(x, \Phi) = \sum_{i=1}^p \log\left(\sum_{k=1}^g \pi_k f(x_i, \theta_k)\right) \quad (3.139)$$

### **3.7.2. Algorithme espérance-maximisation EM**

L'algorithme espérance-maximisation en anglais expectation-maximization, souvent abrégé (EM), proposé par Dempster et al. (1977), est un algorithme itératif qui permet de trouver les paramètres du maximum de vraisemblance d'un modèle probabiliste lorsque ce dernier dépend de variables latentes non observables. De nombreuses variantes ont par la suite été proposées, formant une classe entière d'algorithmes [114, 115, 117, 118].

#### **3.7.2.1. Estimation des paramètres EM**

Une des applications d'espérance-maximisation EM est l'estimation des paramètres d'une densité de mélange en classification automatique dans le cadre des modèles de mélanges gaussiens. Dans ce problème, on considère qu'un échantillon  $(x_1, \dots, x_n)$  de  $\mathbb{R}^p$ , caractérisé par  $p$  variables continues, est en réalité issu de  $g$  différents groupes. En considérant que chacun de ces groupes  $G_k$  suit une loi  $f$  de paramètre  $\theta_k$ , et dont les proportions sont données par un vecteur  $(\pi_1, \dots, \pi_g)$ .

La force de l'algorithme EM est justement de s'appuyer sur ces données pour réaliser l'estimation. En notant  $z_{ik} = 1$  si l'individu  $x_i$  appartient au groupe  $G_k$  et 0 sinon :

$$z_{ik} = \begin{cases} 1 & \text{si } x_i \in G_k \\ 0 & \text{si non} \end{cases} \quad (3.140)$$

La log-vraisemblance des données complétées s'écrit :

$$L(x, z, \Phi) = \sum_{i=1}^n \sum_{k=1}^g z_{ik} \log(\pi_k f(x_i, \theta_k)) \quad (3.141)$$

On obtient alors rapidement

$$Q(\Phi, \Phi^{(c)}) = \sum_{i=1}^n \sum_{k=1}^g E(z_{ik} | x, \Phi^{(c)}) \log(\pi_k f(x_i, \theta_k)) \quad (3.142)$$

On note  $t_{ik}$  la quantité par l'expression :

$$t_{ik} = E(z_{ik} | x, \Phi^{(c)}) \quad (3.143)$$

On peut séparer l'algorithme EM en deux étapes, qu'on appelle classiquement, dans le cas des modèles de mélanges, l'étape Estimation et l'étape Maximisation. Ces deux étapes sont itérées jusqu'à la convergence [114, 115, 117, 118].

- Étape E : calcul de  $t_{ik}$  par la règle d'inversion de Bayes :

$$t_{ik} = \frac{\pi_k^{(c)} f(x_i, \theta_k^{(c)})}{\sum_{l=1}^g \pi_l^{(c)} f(x_i, \theta_l^{(c)})} \quad (3.144)$$

- Étape M : détermination de  $\Phi$  maximisant :

$$Q(\Phi, \Phi^{(c)}) = \sum_{i=1}^n \sum_{k=1}^g t_{ik} \log(\pi_k f(x_i, \theta_k)) \quad (3.145)$$

L'avantage de cette méthode est qu'on peut séparer le problème en  $g$  problèmes élémentaires qui sont, en général relativement simples. Dans tous les cas, les proportions optimales sont données par l'expression :

$$\pi_k = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n t_{ik} \quad (3.146)$$

L'estimation des  $\theta$  dépend par ailleurs de la fonction de probabilité  $f$  choisie. Dans le cas normal, il s'agit des moyennes  $\mu_k$  des vecteurs et les colonnes des matrices de variance-covariance  $\Sigma_k$ . Donc Les estimateurs optimaux sont alors donnés par :

$$\mu_k = \frac{\sum_{i=1}^n t_{ik} x_i}{\sum_{i=1}^n t_{ik}} \quad (3.147)$$

$$\Sigma_k = \frac{\sum_{i=1}^n t_{ik} (x_i - \mu_k)(x_i - \mu_k)^T}{\sum_{i=1}^n t_{ik}} \quad (3.148)$$

L'algorithme (EM) allie, dans la plupart des cas, simplicité de mise en œuvre et efficacité. Néanmoins quelques cas problématiques ont donné lieu à des développements complémentaires. Parmi les variantes existantes de cet algorithme nous évoquerons l'algorithme GEM (generalized EM) qui permet de simplifier le problème de l'étape maximisation; l'algorithme CEM (classification EM) permettant de prendre en compte l'aspect classification lors de l'estimation, ainsi que l'algorithme SEM (stochastic EM) dont l'objectif est de réduire le risque de tomber dans un optimum local de vraisemblance [114, 117, 118, 119, 120].

### **3.7.2.2. Application de l'algorithme EM sur le filtre de Kalman**

Soit le logarithme népérien de la fonction de vraisemblance d'un filtre de Kalman :

$$\log L(y; \theta) = \log P(y|\theta) = \sum_{k=0}^N \log |S_{k|k-1}| + \tilde{y}_{k|k-1}^T S_{k|k-1}^{-1} \tilde{y}_{k|k-1} \quad (3.149)$$

On ne peut pas maximiser directement la fonction de vraisemblance. L'algorithme d'espérance-maximisation EM [114, 115] donne une solution itérative pour approcher le maximum de vraisemblance. Chaque itération  $i$  de l'algorithme EM se décompose en deux étapes :

- Étape E : Expectation

L'expression de la densité de probabilité est donnée comme suit :

$$x_{k|N}^{(i)} = x_n | y_{0 \rightarrow N}, \theta^{(i)} \quad (3.150)$$

Les densités de probabilité sont estimées via les algorithmes de filtrage et de lissage.

Pour déterminer la fonction auxiliaire de vraisemblance qui a le même sens de variation que la fonction de vraisemblance qui est donnée par :

$$g^{(i)}(\Theta) = E(\log(L(x, y; \Theta)) | y, \Theta^{(i)}) \quad (3.151)$$

- Etape M : Maximisation

Les paramètres du modèle sont mis à jour en maximisant la fonction auxiliaire de vraisemblance par rapport à ceux-ci :

$$\Theta^{(i+1)} = \operatorname{argmax}_{\theta} (g^{(i)}(\Theta)) \quad (3.152)$$

Un algorithme converge lui-aussi vers un maximum de la fonction de vraisemblance et se dénomme algorithme EM généralisé (GEM) [114, 119, 120].

### **3.7.3. Les paramètres d'un mélange gaussien**

Un modèle de mélange gaussien est un modèle statistique exprimé selon une densité mélange. Il sert usuellement à estimer paramétriquement la distribution de variables aléatoires en les modélisant comme une somme de plusieurs gaussiennes. La forme générale d'une fonction gaussienne  $f$  d'une variable aléatoire  $x$  et de la moyenne gaussienne  $m$  et d'une variance  $\sigma$  est donnée comme suit :

$$f(x|m, \sigma) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{(x-m)^2}{2\sigma^2}\right) \quad (3.153)$$

La modélisation d'un mélange de gaussiennes est de faire la reconnaissance du locuteur, et souvent un locuteur comme une source pouvant avoir plusieurs comportements gaussiens de moyenne  $m_q$  et de variance  $\sigma_q$  et de covariance diagonale  $\sigma_q^2$ . Chacun de ces comportements a une probabilité a priori  $P_i$ . La probabilité d'émission d'une trame  $X$  est donnée par l'expression de la fonction de probabilité gaussienne  $P(X)$  suivante :

$$P(X) = \sum_{q \in Q} (P_q \prod_{W \in \Omega} \frac{1}{\sigma_q(W)\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{(X(W)-m_q(W))^2}{\sigma_q^2(W)}\right)) \quad (3.154)$$

### 3.7.4. Estimation des covariances d'une gaussienne

L'estimation des covariances des sources se base sur le filtrage de Wiener [114, 115, 117, 120, 121]. En effet, pour une trame  $X$  décomposée sur un dictionnaire, l'estimation ML (maximum de likelihood) de la production de la composante  $q_0$  est donnée par :

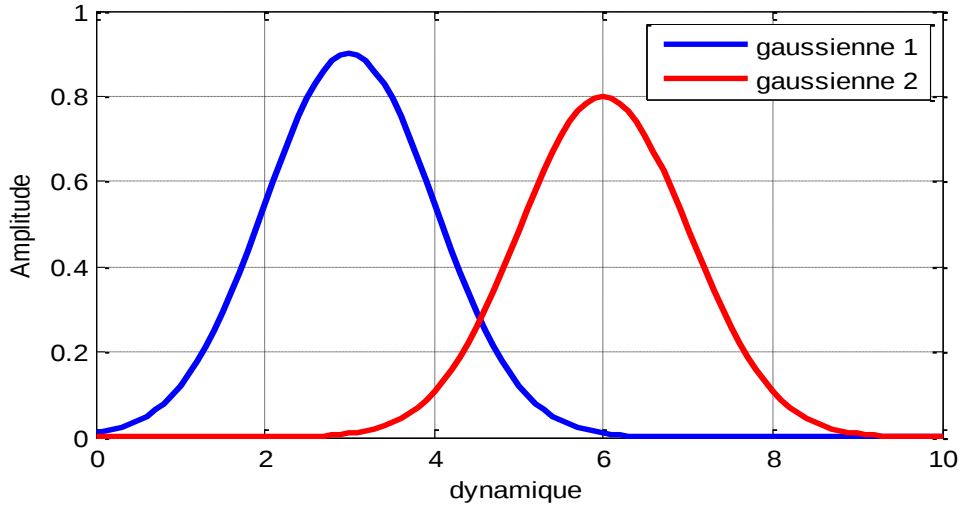
$$\hat{X}_{q_0}(W, t) = \frac{a_{q_0}(t) \cdot \sigma_{q_0}^2(W)}{\sum_{q \in Q} (a_q(t) \cdot \sigma_q^2(W))} X(W, t) \quad (3.155)$$

On estime donc la covariance de la composante  $q_0$  par la variance empirique :

$$\hat{\sigma}_{q_0}^2(W) = E_{t \in T} \left( \hat{X}_{q_0}(W, t) \right) = E_{t \in T} \left( \left( \frac{a_{q_0}(t) \cdot \sigma_{q_0}^2(W)}{\sum_{q \in Q} (a_q(t) \cdot \sigma_q^2(W))} \right)^2 X(W, t) \right) \quad (3.156)$$

### 3.7.5. Application du modèle de mélange gaussien

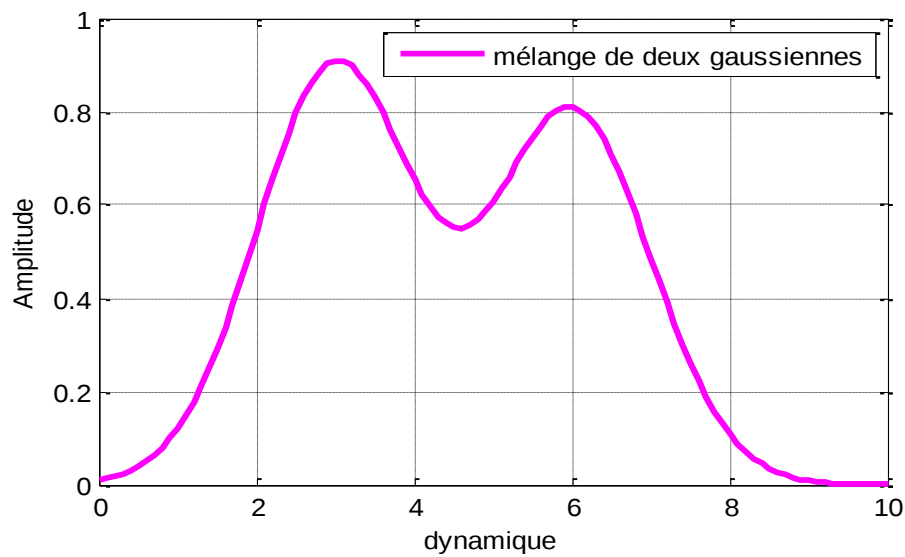
Dans notre étude on va prendre un mélange de deux gaussiennes comme illustré dans la figure (3.4) suivante :



**Figure 3.4:** Le mélange de deux gaussiennes

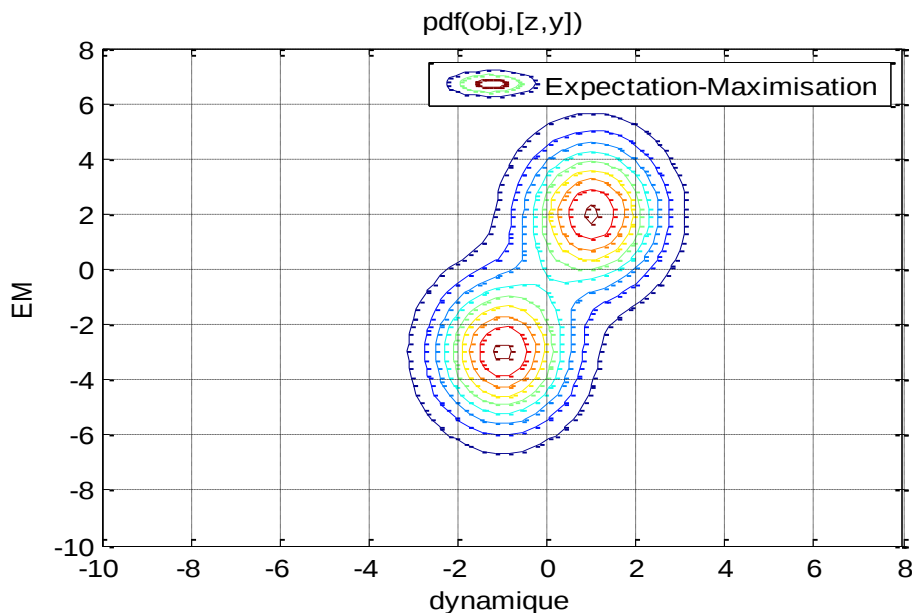
Avec ce mélange on va faire une transformation des sigmas points, ou bien la transformation sans parfums (UT) pour les utiliser dans l'algorithme de GMM pour pouvoir localiser et estimer la position et orientation du robot mobile qu'est l'objectif de notre travail. Tel que les points sigma mensonges le long des haches majeures de la matrice de la covariance de la variable aléatoire (Random Variable RV) et les captures complètes [118, 119, 121, 122].

Après le mélange on fait la somme des deux gaussiennes pour pouvoir appliquer l'algorithme d'expectation-maximisation EM comme montré dans la figure (3.5) :



**Figure 3.5:** La somme de mélange de deux gaussiennes

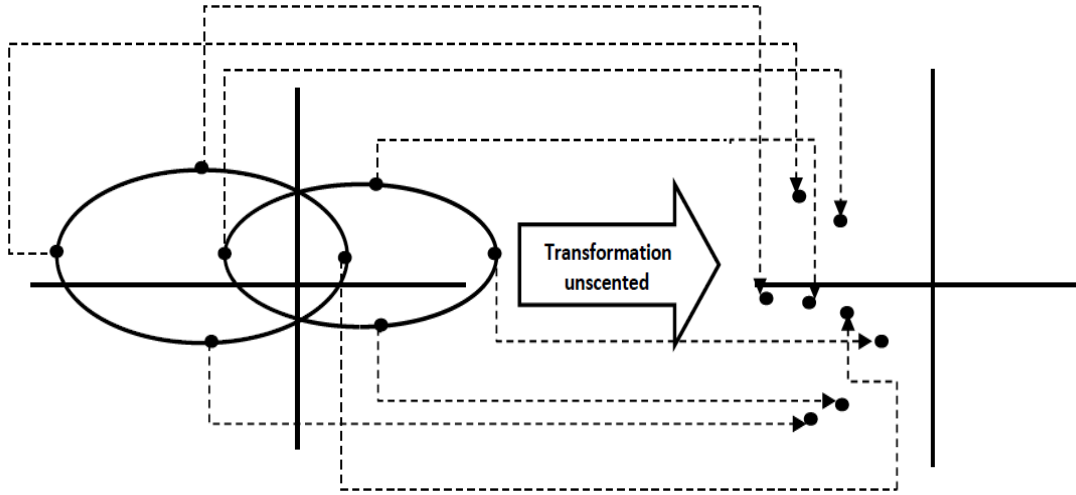
Après la somme de deux gaussiennes, on a appliqué l'algorithme d'expectation-maximisation EM sur le mélange de deux gaussiennes avec 10 itérations. On a obtenue le résultat illustré dans la figure (3.6).



**Figure 3.6:** Application de l'algorithme d'expectation-maximisation EM sur le mélange des deux gaussiennes avec 10 itérations.

### 3.7.6. La transformation sans parfums (UT) du mélange de deux gaussiennes

On prend quatre points de chaque gaussien pour réaliser la transformation sans parfums (UT) qui s'appelle les sigma-points pour les utiliser dans l'algorithme de GMM comme illustré dans la figure (3.7).



**Figure 3.7:** La transformation sans parfums (UT) de mélange de deux gaussiennes.

### 3.7.7. Algorithme du modèle de mélange gaussien (GMM)

- Initialisation :

$$P(X_0) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{(X_0-m)^2}{2\sigma^2}\right) \quad (3.157)$$

$$P(Y_0) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{(Y_0-m)^2}{2\sigma^2}\right) \quad (3.158)$$

$$\hat{P}(X_0) = E[P(X_0)] \quad (3.159)$$

$$\hat{P}(Y_0) = E[P(Y_0)] \quad (3.160)$$

$$P_{X_0} = E[(P(X_0) - \hat{P}(X_0)) (P(X_0) - \hat{P}(X_0))^T] \quad (3.161)$$

$$P_{Y_0} = E[(P(Y_0) - \hat{P}(Y_0)) (P(Y_0) - \hat{P}(Y_0))^T] \quad (3.162)$$

- Calcul de sigma-points pour la mise à jour du temps:

$$\hat{X}_k^{a_v} = [\hat{P}(X_k) \quad \bar{v}] \quad (3.163)$$

$$\hat{Y}_k^{a_w} = [\hat{P}(Y_k) \quad \bar{v}] \quad (3.164)$$

$$P_k^{a_v} = \begin{bmatrix} P(X_{k-1}) & 0 \\ 0 & R_v \end{bmatrix} \quad (3.165)$$

$$P_k^{a_w} = \begin{bmatrix} P(Y_{k-1}) & 0 \\ 0 & R_v \end{bmatrix} \quad (3.166)$$

$$S_k^{a_v} = \begin{bmatrix} \hat{X}_k^{a_v} & \hat{X}_k^{a_v} + h\sqrt{P_k^{a_v}} & \hat{X}_k^{a_v} - h\sqrt{P_k^{a_v}} \end{bmatrix} \quad (3.167)$$

$$S_k^{a_w} = \begin{bmatrix} \hat{Y}_k^{a_w} & \hat{Y}_k^{a_w} + h\sqrt{P_k^{a_w}} & \hat{Y}_k^{a_w} - h\sqrt{P_k^{a_w}} \end{bmatrix} \quad (3.168)$$

- Les équations de la mise à jour du temps :

$$S_{k+1/k}^X = f(S_k^X, S_k^v, S_k^Y, S_k^w, u_k) \quad (3.169)$$

$$\hat{X}_{\overline{k+1}} = \sum_{i=0}^{2L} W_i^m (S_{i,k+1/k}^X) \quad (3.170)$$

$$P_{\bar{p}_{k+1}} = \sum_{i=1}^L [W_i^{c1} (S_{i,k+1/k}^X - S_{L+i,k+1/k}^X)^2 + W_i^{c2} (S_{i,k+1/k}^X + S_{L+i,k+1/k}^X - 2S_{0,k+1/k}^X)^2] \quad (3.171)$$

- Calcul de sigma points pour la mise à jour de mesure :

$$\hat{X}_{k+1/k}^{a_n} = [\hat{P}_{X_{\overline{k+1}}} \quad \bar{n}] \quad (3.172)$$

$$\hat{Y}_{k+1/k}^{a_m} = [\hat{P}_{Y_{\overline{k+1}}} \quad \bar{n}] \quad (3.173)$$

$$P_{k+1/k}^{a_n} = \begin{bmatrix} P_{\bar{X}_k} & 0 \\ 0 & R_n \end{bmatrix} \quad (3.174)$$

$$P_{k+1/k}^{a_m} = \begin{bmatrix} P_{\tilde{Y}_k} & 0 \\ 0 & R_n \end{bmatrix} \quad (3.175)$$

$$S_{k+1/k}^{a_n} = \begin{bmatrix} \hat{X}_{k+1/k}^{a_n} & \hat{X}_{k+1/k}^{a_n} + h\sqrt{P_{k+1/k}^{a_n}} & \hat{X}_{k+1/k}^{a_n} - h\sqrt{P_{k+1/k}^{a_n}} \end{bmatrix} \quad (3.176)$$

$$S_{k+1/k}^{a_m} = \begin{bmatrix} \hat{Y}_{k+1/k}^{a_m} & \hat{Y}_{k+1/k}^{a_m} + h\sqrt{P_{k+1/k}^{a_m}} & \hat{Y}_{k+1/k}^{a_m} - h\sqrt{P_{k+1/k}^{a_m}} \end{bmatrix} \quad (3.177)$$

- Calcul Expectation Maximisation :

$$\log L(y; \Theta) = \log P(y|\Theta) = \sum_{k=0}^N \log |S_{k|k-1}| + \tilde{y}_{k|k-1}^T S_{k|k-1}^{-1} \tilde{y}_{k|k-1} \quad (3.178)$$

$$x_{k|N}^{(i)} = x_n \big| y_{0 \rightarrow N}, \Theta^{(i)} \quad (3.179)$$

$$g^{(i)}(\Theta) = E(\log(L(x, y; \Theta)) | y, \Theta^{(i)}) \quad (3.180)$$

$$\Theta^{(i+1)} = \operatorname{argmax}_{\Theta} (g^{(i)}(\Theta)) \quad (3.181)$$

- Les équations de la mise à jour de mesure :

$$Y_{k+1/k} = h(S_{k+1/k}^X, S_{k+1/k}^n, S_{k+1/k}^Y, S_{k+1/k}^m) \quad (3.182)$$

$$\hat{Y}_{\overline{k+1}} = \sum_{i=0}^{2L} W_i^m Y_{i,k+1/k} \quad (3.183)$$

$$P_{\tilde{Y}_{k+1}} = \sum_{i=1}^L [W_i^{c1} (Y_{i,k+1/k} - Y_{L+i,k+1/k})^2 + W_i^{c2} (Y_{i,k+1/k} + Y_{L+i,k+1/k} - 2Y_{0,k+1/k})^2] \quad (3.184)$$

$$P_{X_{k+1}Y_{k+1}} = \sqrt{W_i^{c1} P_{\tilde{X}_k}} [Y_{1:L,k+1/k} - Y_{L+1:2L,k+1/k}]^T \quad (3.185)$$

$$G_{k+1} = P_{X_{k+1}Y_{k+1}} P_{\tilde{Y}_{k+1}}^{-1} \quad (3.186)$$

$$\hat{X}_{k+1} = \hat{X}_{k+1} + G_{k+1}(Y_{k+1} - \hat{Y}_{k+1}) \quad (3.187)$$

$$P_{X_{k+1}} = P_{\bar{X}_{k+1}} - G_{k+1}P_{\bar{Y}_{k+1}}G_{k+1}^T \quad (3.188)$$

Les des paramètres sont:  $W_0^m = (h^2 - L)/h^2$ ;  $W_i^m = 1/(2h^2)$ ;  $W_i^{c1} = 1/(4h^2)$  et  $W_i^{c2} = (h^2 - 1)/(4h^2)$  pour  $i = 1, \dots, 2L$  où  $h \geq 1$  est la dimension de l'intervalle de la différence centrale scalaire qui est une mise optimale égal à la racine carré du kurtosis du variable aléatoire antérieur pour Gaussien (Radom variable RV) antérieur, la valeur optimale est  $h = \sqrt{3}$ . Le facteur de l'écaillage  $h$  dans le GMM joue le même rôle de  $\alpha$  dans le filtre de Kalman sans parfums (UKF).  $L$  est la dimension du vecteur de l'état augmenté [101, 102, 105].

### **3.8. La technique de la racine cubique du filtre de Kalman sans parfums (CRUKF) proposée**

Dans notre travail on a proposée l'algorithme de la technique de la racine cubique du filtre de Kalman sans parfums qui base sur l'algorithme de la racine carré du filtre de Kalman sans parfums [123, 124, 125, 126, 127]. On a utilisé la fonction quadrature quadrature dans l'algorithme de cette technique. On a étudié les coefficients de la matrice de covariance pour introduire la racine cubique pour localiser la position et l'orientation de robot mobile dans les différents modèles supposés et aussi pour minimiser l'erreur d'estimation.

#### **3.8.1. La transformation sans parfums cubique**

Les sigmas points de la transformation sans parfums cubique sont données par:

$$X_c^{(i)} = \bar{X} + \sqrt[3]{q \cdot P_{xx}} \quad (3.189)$$

$$X_c^{(i+q)} = \bar{X} - \sqrt[3]{q \cdot P_{xx}} \quad (3.190)$$

$$W_c^{(i)} = 1/2q \quad (3.191)$$

$$W_c^{(i+q)} = 1/2q \quad (3.192)$$

Les points sont choisis de telle manière que leur moyenne et covariance représentent exactement la statistique initiale.

### **3.8.2. Les sigmas points de la transformation sans parfums cubique**

L'ensemble de sigma points ainsi défini, permet d'approximer la valeur moyenne de la vraie distribution jusqu'au deuxième ordre dans le développement de Taylor mais par contre offre une estimation biaisée au niveau de la covariance. Et les sigma points sont proposées comme suit :

$$X_c^{(0)} = \bar{X} \quad (3.193)$$

$$X_c^{(i)} = \bar{X} + (\sqrt[3]{(q+k)P_{xx}})_i \quad (3.194)$$

$$X_c^{(i+q)} = \bar{X} - (\sqrt[3]{(q+k)P_{xx}})_i \quad (3.195)$$

$$W_c^{(0)} = k/(q+k) \quad (3.196)$$

$$W_c^{(i)} = 1/2(q+k) \quad (3.197)$$

$$W_c^{(i+q)} = 1/2(q+k) \quad (2.198)$$

### **3.8.3. La fonction quadrature quadrature**

On a utilisé une fonction quadrature quadrature qui se base sur la fonction orthogonale dans l'algorithme de la racine cubique du filtre de Kalman sans parfums pour calculer les matrices de covariances et pour faire aussi la mise à jour des équations de temps et de mesure et on l'a noté  $qq(X)$  est déduite de la fonction  $ortho(X)$  à travers la décomposition de donnée de la matrice  $X$  et sa relation est donnée comme suit :

$$qq = I_1 - \frac{2V_1V_1^T}{\|V_1\|} \cdot I_2 - \frac{2V_2V_2^T}{\|V_2\|} \quad (3.199)$$

$I_1$  et  $I_2$  sont les matrices d'identité.

$V_1$  et  $V_2$  sont des vecteurs.

$V_1^T$  et  $V_2^T$  sont des vecteurs transposées de  $V_1$  et  $V_2$ .

$\|V_1\|$  et  $\|V_2\|$  sont des modules des vecteurs de  $V_1$  et  $V_2$ .

#### **3.8.4. Algorithme de la racine cubique du filtre de Kalman sans parfums (CRUKF) proposée**

- initialisation :

$$\hat{A}_0 = \sqrt[3]{E[A_0]} \quad (3.200)$$

$$S_v = \sqrt[3]{R_v} \text{ and } S_n = \sqrt[3]{R_n} \quad (3.201)$$

$$S_{A_0} = \sqrt[3]{E[(A_0 - \hat{A}_0)(A_0 - \hat{A}_0)^T]} \quad (3.202)$$

$$\hat{A}_0^a = \sqrt[3]{E[A^a]} = [\hat{A}_0 \quad \bar{v} \quad \bar{n}]^T \quad (3.203)$$

$$S_0^a = \sqrt[3]{E[(A_0^a - \hat{A}_0^a)(A_0^a - \hat{A}_0^a)^T]} \quad (3.204)$$

$$S_0^a = \begin{bmatrix} S_{A_0} & 0 & 0 \\ 0 & S_v & 0 \\ 0 & 0 & S_n \end{bmatrix} \quad (3.205)$$

1. Set  $t_c = k_c - 1$  pour  $k_c = 1, \dots, \infty$ ; ( pour la racine cubique de UKF )

2. Calcul de la mise à jour de temps des sigma-points:

$$A_{t_c}^a = [\hat{A}_{t_c}^a \quad \hat{A}_{t_c}^a + N\sqrt[3]{S_{A_{t_c}}^a} \quad \hat{A}_{t_c}^a - N\sqrt[3]{S_{A_{t_c}}^a}] \quad (3.206)$$

3. La mise à jour de temps des équations:

$$A_{k_c|t_c}^x = f(A_{t_c}^a, A_{t_c}^v, u_{t_c}) \quad (3.207)$$

$$\hat{x}_{k_c}^s = \sum_{i=0}^{2L} w_i^m A_{i,k_c|t_c}^x \quad (3.208)$$

$$S_{x_{k_c}}^s = qq\{[\sqrt[3]{w_1^c} (A_{1:2L,k_c|t_c}^x - \hat{x}_{k_c}^s)]\} \quad (3.209)$$

$$S_{x_{k_c}}^s = \text{update}\{S_{x_{k_c}}^s, A_{0,k_c|t_c}^x - \hat{x}_{k_c}^s, w_0^{(c)}\} \quad (3.210)$$

$$B_{k_c|t_c} = h(A_{i,k_c|t_c}^x, A_{t_c}^n) \quad (3.211)$$

$$\hat{B}_{k_c}^s = \sum_{i=0}^{2L} w_i^m B_{i,k_c|t_c} \quad (3.212)$$

4. La mise à jour des équations de mesure:

$$S_{B_{k_c}}^s = qq\{[\sqrt[3]{w_1^c}(B_{1:2L,k_c|t_c} - \hat{B}_{k_c}^s)]\} \quad (3.213)$$

$$S_{B_{k_c}}^s = \text{update}\{S_{B_{k_c}}^s, B_{0,k_c|t_c} - \hat{B}_{k_c}^s, w_0^{(c)}\} \quad (3.214)$$

$$P_{x_{k_c}B_{k_c}} = \sum_{i=0}^{2L} w_i^c (A_{i,k_c|t_c}^x - \hat{x}_{k_c}^s)(B_{i,k_c|t_c} - \hat{B}_{k_c}^s)^T \quad (3.215)$$

$$G_{k_c} = (P_{x_{k_c}B_{k_c}}/S_{B_{k_c}}^T)/S_{B_{k_c}}^s \quad (3.216)$$

$$\hat{A}_{k_c} = \hat{A}_{k_c}^s + G_{k_c}(B_{k_c} - \hat{B}_{k_c}^s) \quad (3.217)$$

$$U = G_k S_{B_{k_c}}^s \quad (3.218)$$

$$P_{x_{(k+1)_c}B_{k_c}} = P_{x_{k_c}B_{k_c}} - G_{(k+1)_c} P_{x_{k_c}B_{k_c}} G_{(k+1)_c}^T \quad (3.219)$$

Les paramètres sont données par :  $M = \sqrt{L + \lambda}$  ,  $N = \sqrt[3]{L + \lambda}$  ,  $w_0^m = \lambda/(L + \lambda)$  ,

$w_0^c = w_0^m + (1 + \alpha^2 + \beta)$  ,  $w_i^c = w_i^m = 1/2(L + \lambda)$  , pour  $i = 1 \dots 2L$  , et

$\lambda = \alpha^2(L + k) - L$ .  $\lambda$  est un paramètre de l'écaillage composé,  $L$  est la dimension de vecteur de l'état augmenté,  $0 < \alpha \leq 1$  est le facteur de l'écaillage fondamental qui détermine l'ampleur de l'étendue des points sigma autour de la moyenne antérieure.

La gamme typique pour  $\alpha$  est  $-3 < \alpha \leq 1$ ;  $\beta$  est un facteur de l'écaillage secondaire accentuait le peser sur le point du sigma de zéros pour le calcul de la covariance postérieur.  $\beta$  peut être utilisé pour minimiser des certains termes de l'erreur de plus haut ordre basé sur les moments connus du variable aléatoire (Random Variable RV) antérieur. Pour l'antérieur Gaussien,  $\beta = 2$  sont optimaux.  $k$  est un facteur de

l'écaillage et habituellement est égal à 0. En général, les valeurs optimales de ceux-ci qui pèsent des paramètres seront problème spécifique. Pour plus de détail sur comment les choisir, voir Julier & Uhlmann [91, 100, 101, 128]. Le vecteur de l'état augmenté et le vecteur de point sigma est donné par :  $X^a = [X^T \ v^T \ n^T]^T$ ,  $S^a = [(S^x)^T \ (S^v)^T \ (S^n)^T]$ .

$R_v$  est la matrice de covariance du bruit de processus.

$R_n$  est la matrice de covariance du bruit de l'observation.

$\sqrt[3]{\cdot}$  : La racine cubique de la matrice triangulaire.

$qq(X)$ : La fonction quadrature quadrature est déduite de la fonction *ortho*( $X$ ) à travers la décomposition de donnée de la matrice  $X$ .

$update\{R, U, \pm v\}$ :  $N$  consecutive rank-1 : la mise à jour la fonction orthogonal de facture  $q$  par la colonne  $N$ .

$\sqrt{v}U$ : / : l'inverse de la racine carré de la décomposition pivoté en utilisant la fonction orthogonal  $QQ$  enfin ces paramètres pour les deux filtres CRUKF et UKF.

### **3.9. Conclusion**

Nous avons étudié, dans ce chapitre, le filtre de Kalman étendu (EKF) qui est le meilleur filtre, car il donne de très bons résultats dans les systèmes faiblement non linéaires. Lorsque les systèmes sont fortement non linéaires, les performances du filtre de Kalman étendu sont mauvaises. Le filtre de Kalman sans parfums (UKF) est une nouvelle variante du filtre de Kalman, utilisant un jeu de sigma points, permettant d'aboutir à de meilleurs résultats. La présentation du filtre de Kalman à différence centrale (CDKF) se basant sur l'utilisation du même jeu de sigma points, nous a permis d'offrir une solution plus générale que le filtre de Kalman sans parfums (UKF) mais par contre à un coût de calcul plus important. La technique du modèle de mélange gaussien (GMM) utilisant un jeu de double point sigmas a été aussi présenté dans ce chapitre. Celle-ci permettant de localiser et d'estimer les systèmes non linéaires qui donne généralement de très bons résultats et cela avec une erreur d'estimation autour de zéros. La technique de la racine cubique du filtre de Kalman sans parfums (CRUKF), a été proposée. La localisation et l'estimation des paramètres des systèmes non linéaires appliquées sur les différents modèles de robot mobile a donné de très bons résultats et ce avec une estimation d'erreur tendant vers zéros.

## Chapitre 4 : Evaluation et comparaisons des résultats obtenus

### 4.1. Introduction

Ce chapitre a été consacré à la présentation des modèles du robot mobile. Des résultats de simulation permettant la comparaison entre les algorithmes des techniques de localisation et d'estimation du robot mobile utilisés se basant sur l'approche de l'observateur ont été obtenus. Nous avons utilisés les techniques du filtre de Kalman étendu (EKF), le filtre de Kalman sans parfums (UKF), le filtre de Kalman à différence centrale (CDKF), le modèle de mélange gaussien (GMM) et la technique de la racine cubique du filtre de Kalman sans parfums (CRUKF). Cette dernière que nous avons proposée pour estimer les variables d'état. Ces techniques ont été appliquées pour la poursuite et la localisation des différentes trajectoires du robot mobile dans un environnement connu contenant sur des obstacles fixes. Les types d'algorithmes du filtre de Kalman sont calculés à partir des modèles vus dans le chapitre 3.

### 4.2. Le modèle du robot mobile

Dans cette partie de thèse on applique le filtre de Kalman étendu (EKF), le filtre de Kalman sans parfums (UKF), le filtre de Kalman à différence centrale (CDKF), le modèle de mélange gaussien (GMM) et la technique de la racine cubique de filtre de Kalman sans parfums (CRUKF) sur le modèle de robot mobile suivant :

$$x_{k+1} = x_k + v_k \cdot T \cdot u_1 \cdot \cos(\theta_{k+1}) + w_1 \quad (4.1)$$

$$y_{k+1} = y_k + v_k \cdot T \cdot u_2 \cdot \sin(\theta_{k+1}) + w_2 \quad (4.2)$$

$$\theta_{k+1} = \theta_k + \Delta\theta + w_3 \quad (4.3)$$

Tel que :  $(x_k, y_k)$  : est la position de robot mobile à un temps  $t_k$

$$x_k = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}, \text{ avec } x_k = x_1, \quad y_k = x_2 \text{ et } \theta_k = x_3$$

$\theta_k$  : est l'angle entre l'axe de robot et l'axe des abscisses.

$w_k = \begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \\ w_3 \end{pmatrix}$  : sont les bruits gaussienne.

$u_k = \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix}$  : est la vitesse angulaire des roues.

$v_k = R \cdot (u_1 + u_2)/2$  : est la vitesse linéaire de robot mobile.

$T = t_{k+1} - t_k$  : est la période de temps.

$\Delta\theta = R \cdot (u_2 - u_1) \cdot T / L$  : est la variation de l'angle de rotation de robot mobile dans l'intervalle de temps  $[t_k, t_{k+1}]$ .

$L$ : est la longueur de l'axe des roues.

$R$  : est le rayon des roues.

#### **4.3. L'expression de la trajectoire du robot mobile**

On détermine l'expression de la trajectoire  $y_{k+1} = f(x_{k+1})$  à travers le modèle du robot mobile. D'après le modèle des relations (4.1) et (4.2), on aura donc:

$$x_{k+1} - x_k - w_1 = v_1 \cdot T \cdot u_1 \cdot \cos(\theta_{k+1}) \quad (4.4)$$

$$y_{k+1} - y_k - w_2 = v_2 \cdot T \cdot u_2 \cdot \sin(\theta_{k+1}) \quad (4.5)$$

$$\frac{(x_{k+1} - x_k - w_1)}{v_1 \cdot T \cdot u_1} = \cos(\theta_{k+1}) \quad (4.6)$$

$$\frac{(y_{k+1} - y_k - w_2)}{v_2 \cdot T \cdot u_2} = \sin(\theta_{k+1}) \quad (4.7)$$

On met au carrée les équations (4.6) et (4.7), sa nous donne :

$$\frac{(x_{k+1} - x_k - w_1)^2}{(v_1 \cdot T \cdot u_1)^2} = \cos^2(\theta_{k+1}) \quad (4.8)$$

$$\frac{(y_{k+1} - y_k - w_2)^2}{(v_2 \cdot T \cdot u_2)^2} = \sin^2(\theta_{k+1}) \quad (4.9)$$

On fait la somme de (4.8) et (4.9), sa nous donne donc :

$$\frac{(x_{k+1}-x_k-w_1)^2}{(v_1.T.u_1)^2} + \frac{(y_{k+1}-y_k-w_2)^2}{(v_2.T.u_2)^2} = \cos^2(\theta_{k+1}) + \sin^2(\theta_{k+1}) \quad (4.10)$$

$$\cos^2(\theta_{k+1}) + \sin^2(\theta_{k+1}) = 1 \quad (4.11)$$

$$\frac{(x_{k+1}-x_k-w_1)^2}{(v_1.T.u_1)^2} + \frac{(y_{k+1}-y_k-w_2)^2}{(v_2.T.u_2)^2} = 1 \quad (4.12)$$

$$(4.12) \Rightarrow \frac{(y_{k+1}-y_k-w_2)^2}{(v_2.T.u_2)^2} = 1 - \frac{(x_{k+1}-x_k-w_1)^2}{(v_1.T.u_1)^2}$$

$$\Rightarrow (y_{k+1} - y_k - w_2)^2 = (v_2.T.u_2)^2 \left(1 - \frac{(x_{k+1}-x_k-w_1)^2}{(v_1.T.u_1)^2}\right)$$

$$\Rightarrow y_{k+1} - y_k - w_2 = \sqrt{(v_2.T.u_2)^2 \left(1 - \frac{(x_{k+1}-x_k-w_1)^2}{(v_1.T.u_1)^2}\right)}$$

L'expression finale de la trajectoire de robot mobile est donnée comme suit :

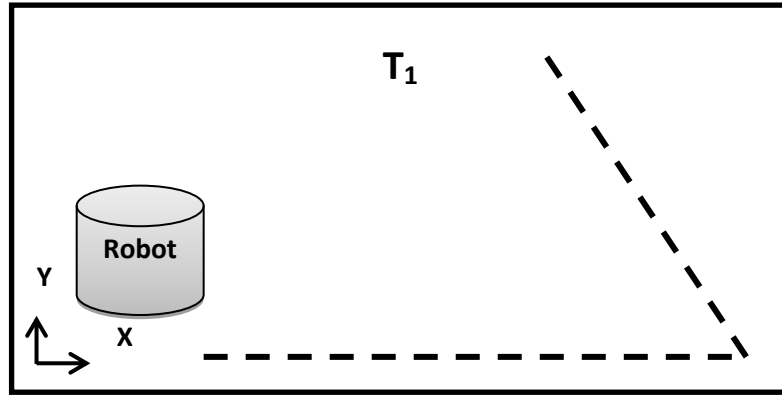
$$y_{k+1} = y_k + w_2 + v_2.T.u_2 \sqrt{\left(1 - \frac{(x_{k+1}-x_k-w_1)^2}{(v_1.T.u_1)^2}\right)} \quad (4.13)$$

Pour représenter la trajectoire  $T_1$ , on remplace les variables :

$x_k = x_1 = 1$ ;  $y_k = x_2 = 1$ ;  $\theta_k = x_3 = \pi/3$ ;  $T = 1s$ ;  $v_1 = v_2 = 0,02m/s$ ;  $\Delta\theta = 0.1rad$   
 $u_1 = u_2 = 1 rad/s$ ;  $w_1 = 0.1$ ;  $w_2 = 0.9$  et  $w_3 = 0.3$  dans l'équation (4.13). Donc  
l'expression (4.14) de la trajectoire  $T_1$  est donnée par :

$$y_{k+1} = 1,89 + 2.10^{-3} \sqrt{\left(1 - \frac{(x_{k+1}-0,9)^2}{17.10^{-6}}\right)} \quad (4.14)$$

Le tracé de la trajectoire  $T_1$  est illustré dans la figure (4.1).



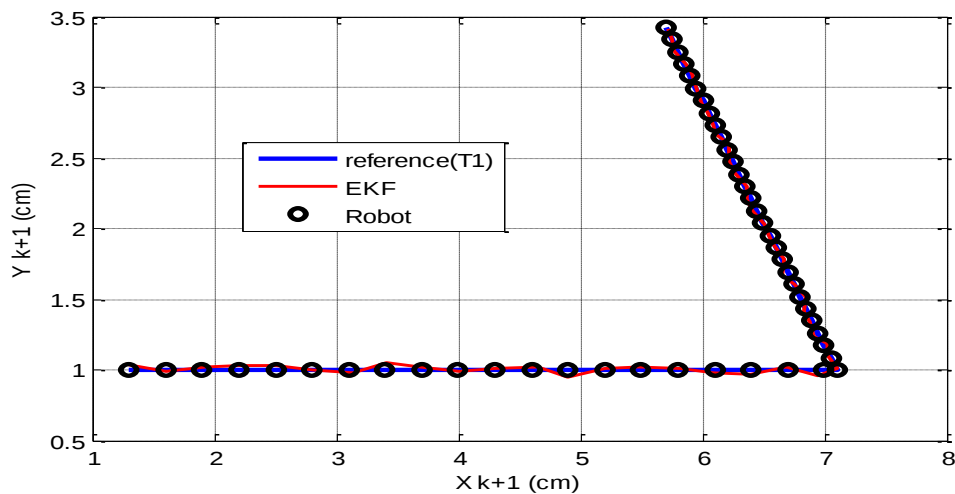
**Figure 4.1:** Trajectoire  $T_1$  du robot mobile

#### **4.4. Application les techniques de localisation sur la trajectoire $T_1$**

On applique les différentes techniques de localisation du filtre de Kalman étendu (EKF), le filtre de Kalman sans parfums (UKF), le filtre de Kalman à différence centrale (CDKF), le modèle de mélange gaussienne (GMM) et la technique de la racine cubique de filtre de Kalman sans parfums (CRUKF) sur le modèle pour localiser le robot mobile.

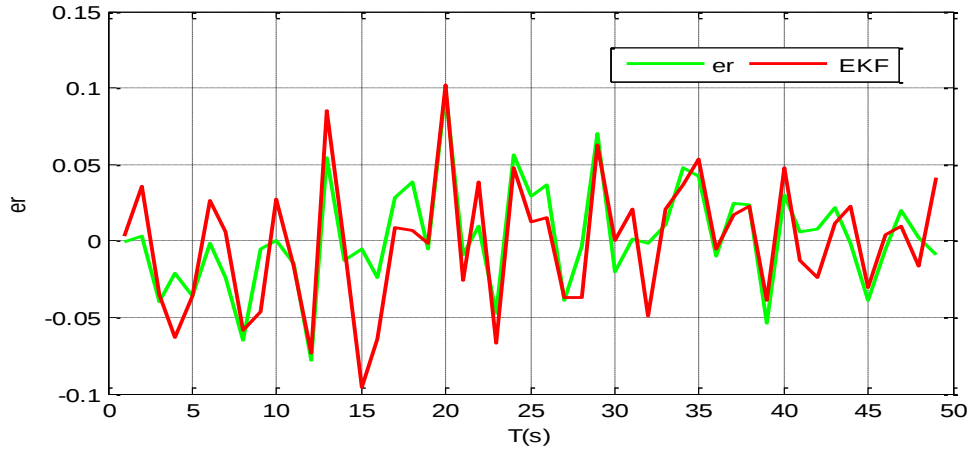
##### **4.4.1. Le filtre de Kalman étendu (EKF)**

On utilise la technique de filtre de Kalman étendu pour localiser les paramètres de position et d'orientation de robot mobile dans la trajectoire  $T_1$ . Le robot mobile fait un angle de rotation  $\pi/3$ , les figures (4.2) et (4.3) montrent l'évolution de la trajectoire avec son estimé et l'erreur d'estimation respectivement.



**Figure 4.2:** La position du robot mobile et son estimée par le filtre EKF

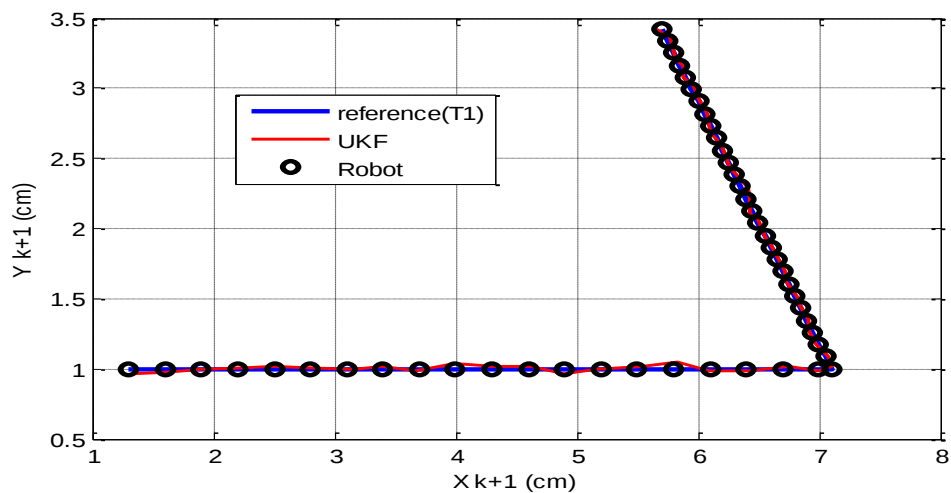
La trajectoire du robot mobile pour un angle de rotation  $\pi/3$  est bien estimée avec le filtre de Kalman étendu. Le résultat est illustré dans la figure (4.2) qui montrent la position du robot mobile mesuré et son estimé.



**Figure 4.3:** L'erreur d'estimation de la position et son estimée par le filtre EKF  
L'erreur d'estimation de la position  $er$  est bien estimée par le filtre de Kalman étendu. Comme montrée dans la figure (4.3).

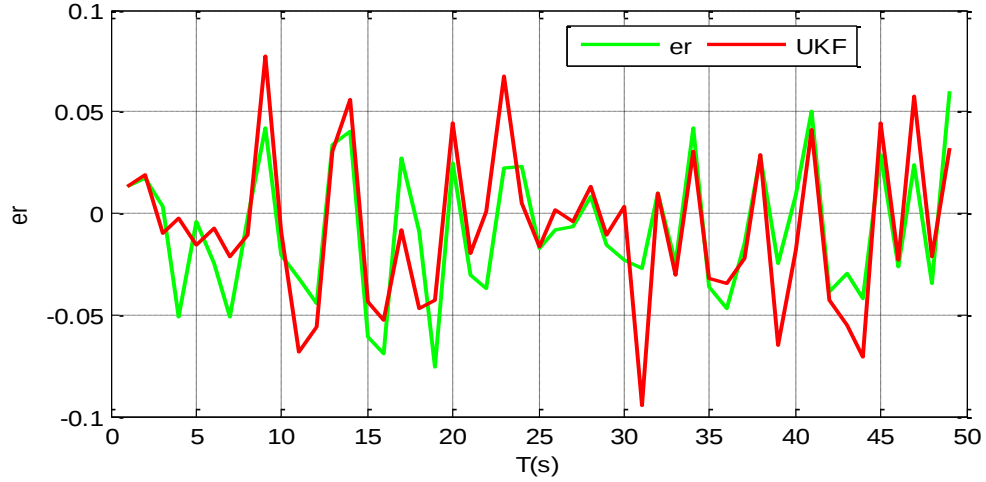
#### 4.4.2. Le filtre de Kalman sans parfums (UKF)

On utilise le filtre Kalman sans parfums pour localiser les paramètres de position et d'orientation de robot mobile pour la trajectoire  $T_1$ . Le robot mobile fait un angle de rotation  $\pi/3$ . Les figures (4.4) et (4.5) montrent l'évolution de la trajectoire du robot mobile avec son estimé et l'erreur d'estimation respectivement.



**Figure 4.4:** La position du robot mobile et son estimée par le filtre UKF

La trajectoire du robot mobile pour un angle de rotation  $\pi/3$  est bien estimée avec le filtre de Kalman sans parfums. Le résultat est illustré dans la figure (4.4) qui montrent la position du robot mobile mesuré et son estimé.

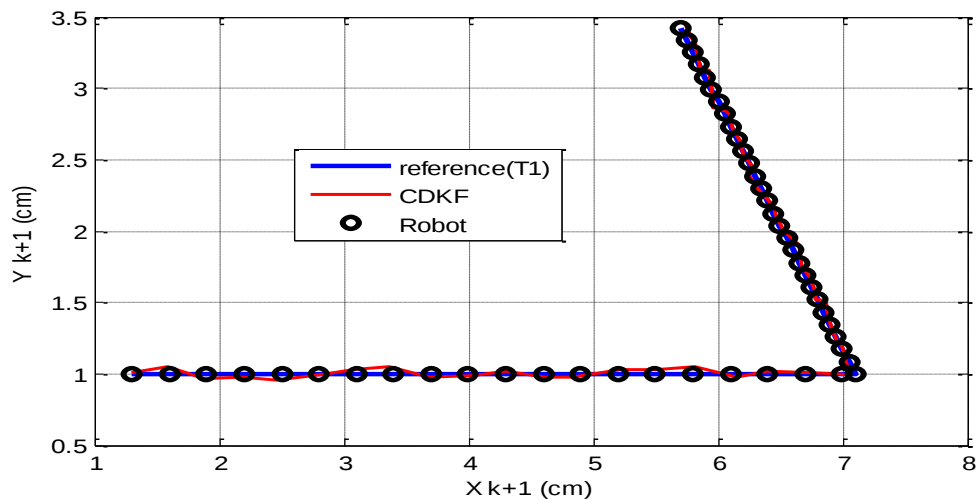


**Figure 4.5:** L'erreur d'estimation de la position et son estimée par le filtre UKF

L'erreur d'estimation de la position  $er$  est bien estimée par le filtre de Kalman sans parfums. Comme montrée dans la figure (4.5).

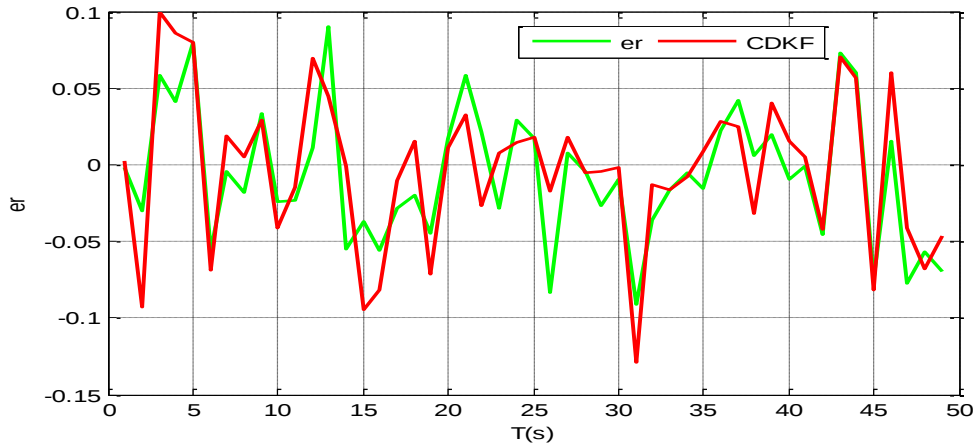
#### **4.4.3. Le filtre de Kalman à différence centrale (CDKF)**

On utilise le filtre de Kalman à différence centrale pour localiser les paramètres de position et d'orientation de robot mobile pour toujours la trajectoire  $T_1$ . Le robot mobile fait un angle de rotation  $\pi/3$ , les figures (4.6) et (4.7) montrent l'évolution de la trajectoire de robot mobile avec son estimé et l'erreur d'estimation respectivement.



**Figure 4.6:** La position du robot mobile et son estimée par le filtre CDKF

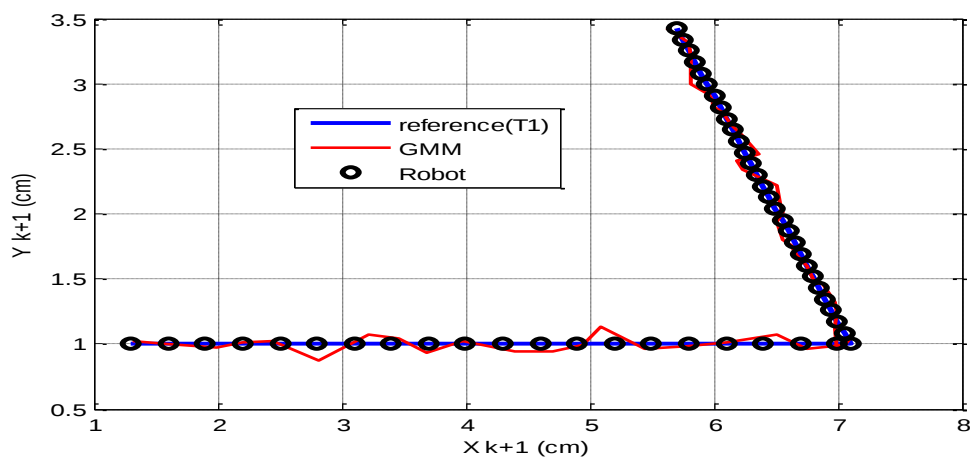
La trajectoire du robot mobile pour un angle de rotation  $\pi/3$  est bien estimée avec le filtre de Kalman à différence centrale. Le résultat est illustré dans la figure (4.6) qui montrent la position du robot mobile mesuré et son estimé.



**Figure 4.7:** L'erreur d'estimation de la position et son estimée par le filtre CDKF  
L'erreur d'estimation de la position  $er$  est bien estimée par le filtre de Kalman à différence centrale. Comme montrée dans la figure (4.7).

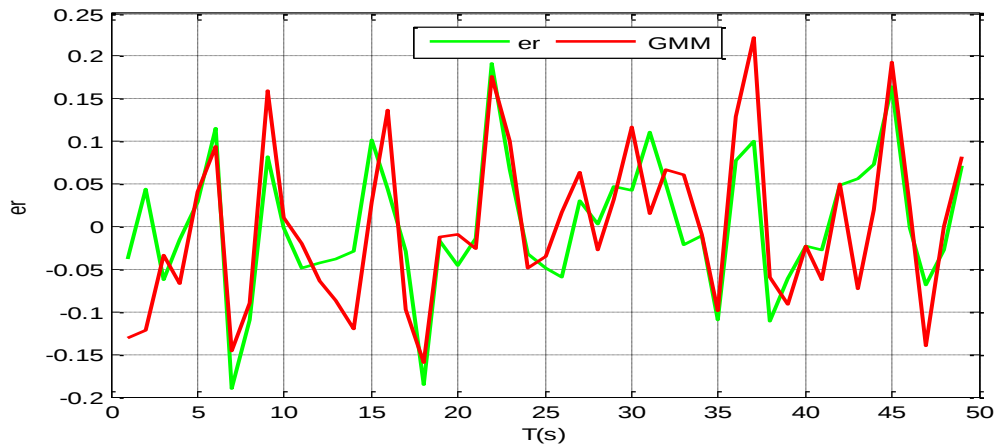
#### 4.4.4. Le modèle de mélange gaussien (GMM)

On utilise le modèle de mélange gaussien (GMM) pour localiser les paramètres de position et d'orientation de robot mobile pour la trajectoire  $T_1$ . Le robot mobile fait un angle de rotation  $\pi/3$ , les figures (4.8) et (4.9) montrent l'évolution de la trajectoire de Le robot mobile avec son estimé et l'erreur d'estimation respectivement.



**Figure 4.8:** La position du robot mobile et son estimée par le modèle GMM

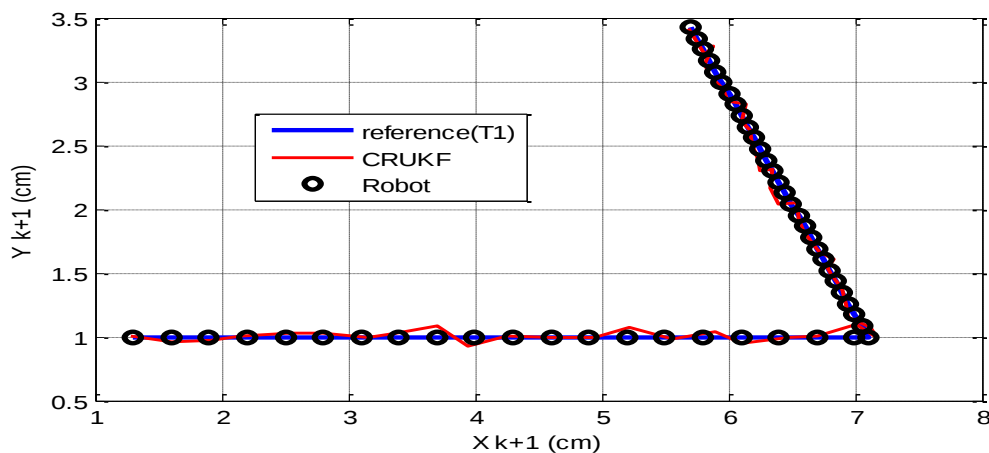
La trajectoire du robot mobile pour un angle de rotation  $\pi/3$  est bien estimée avec le modèle de mélange gaussienne. Le résultat est illustré dans la figure (4.8) qui montrent la position du robot mobile mesuré et son estimé.



**Figure 4.9:** L'erreur d'estimation de la position et son estimée par le modèle GMM  
L'erreur d'estimation de la position  $er$  est bien estimée par le modèle de mélange gaussien. Comme montrée dans la figure (4.9).

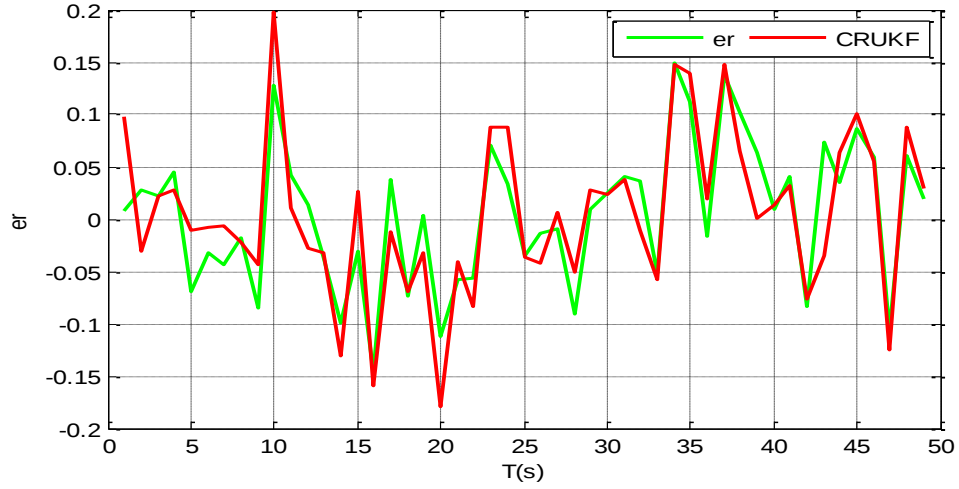
#### **4.4.5. La technique de la racine cubique du filtre de Kalman sans parfums (CRUKF) proposée**

On utilise la technique de la racine cubique du filtre de Kalman sans parfums (CRUKF) proposée pour localiser les paramètres de position et d'orientation de robot mobile pour la trajectoire  $T_1$ . Le robot mobile fait un angle de rotation de  $\pi/3$ , les figures (4.10) et (4.11) montrent l'évolution de position du robot mobile dans la trajectoire avec son estimé et l'erreur d'estimation respectivement.



**Figure 4.10:** La position du robot mobile et son estimée par le filtre CRUKF

La trajectoire de robot mobile pour un angle de rotation  $\pi/3$  est bien estimée avec la technique de la racine cubique du filtre de Kalman sans parfums. Le résultat est illustré dans la figure (4.10) qui montrent la position du robot mobile mesuré et son estimé.



**Figure 4.11:** l'erreur d'estimation de la position et son estimée par le filtre CRUKF  
L'erreur d'estimation de la position  $er$  est bien estimée par la technique de la racine cubique du filtre de Kalman sans parfums. Comme montrée dans la figure (4.11).

#### 4.5. Application les techniques de localisation sur la trajectoireT2

On applique les différentes techniques de localisation du filtre de Kalman étendu (EKF), le filtre de Kalman sans parfums (UKF), le filtre de Kalman à différence centrale(CDKF), le modèle de mélange gaussienne (GMM) et la technique de la racine cubique de filtre de Kalman sans parfums (CRUKF) sur le modèle pour localiser le robot mobile.

On représente la trajectoire  $T_2$ , on remplace les variables par :  $x_k = x_1 = 1$ ;

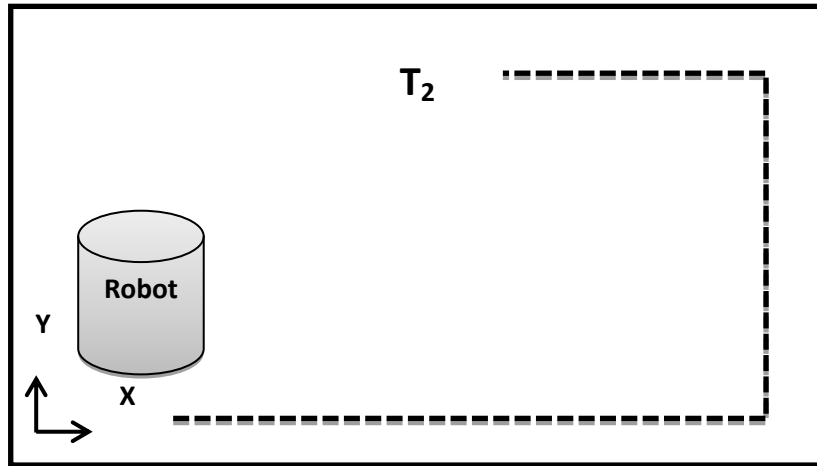
$y_k = x_2 = 1$ ;  $\theta_k = x_3 = \frac{\pi}{2}$ ;  $T = 1s$ ;  $v_1 = v_2 = \frac{0,02m}{s}$ ;  $\Delta\theta = 0.1rad$ ;  $u_1 = 1 rad/s$

$u_2 = 1 rad/s$ ;  $w_1 = 0.1$ ;  $w_2 = 0.9$  et  $w_3 = 0.3$  dans l'équation(3.13).

Donc on obtient l'expression de la trajectoire  $T_2$ :

$$y_{k+1} = 1,79 + 2.10^{-3} \sqrt{\left(1 - \frac{(x_{k+1}-0,96)^2}{16.10^{-6}}\right)} \quad (4.15)$$

Le tracé de la trajectoire  $T_2$  est illustré dans la figure (4.12).

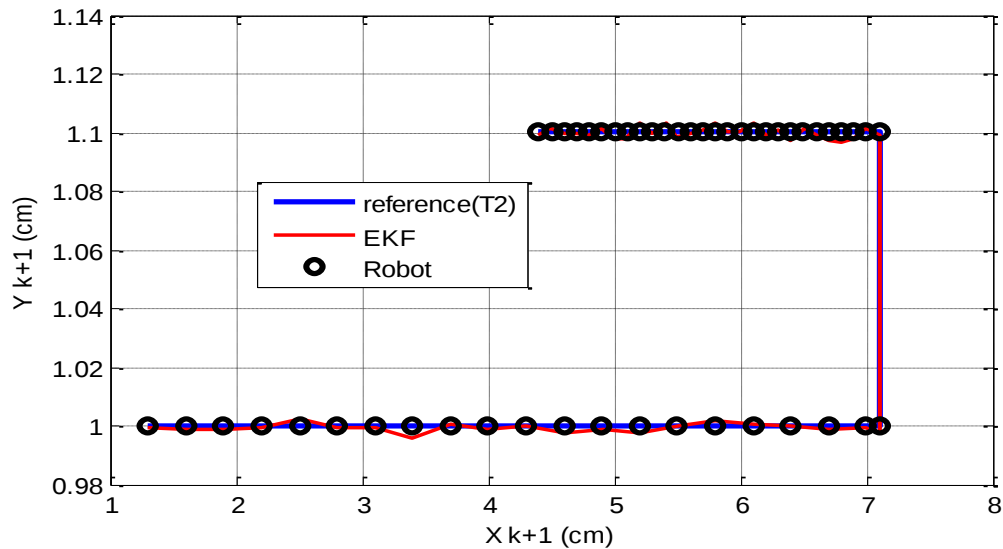


**Figure 4.12:** Trajectoire  $T_2$  de robot mobile

#### 4.5.1. Le filtre de Kalman étendu (EKF)

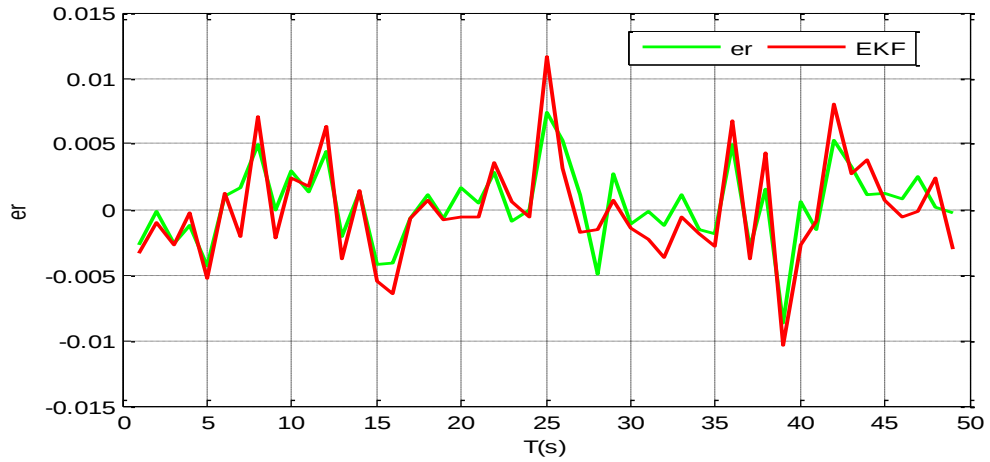
On utilise la technique du filtre de Kalman étendu pour localiser les paramètres de position et d'orientation de robot mobile dans la trajectoire  $T_2$ . Le robot mobile fait deux rotations successives de  $\pi/2$ .

Les figures (4.13) et (4.14) montrent l'évolution de la trajectoire avec son estimé et l'erreur d'estimation respectivement.



**Figure 4.13:** La position du robot mobile et son estimée par le filtre EKF.

La trajectoire du robot mobile pour deux rotations  $\theta_1 = \pi/2$  et  $\theta_2 = \pi/2$  est bien estimée avec le filtre de Kalman étendu. Le résultat est illustré dans la figure (4.13) qui montrent la position du robot mobile mesuré et son estimé.



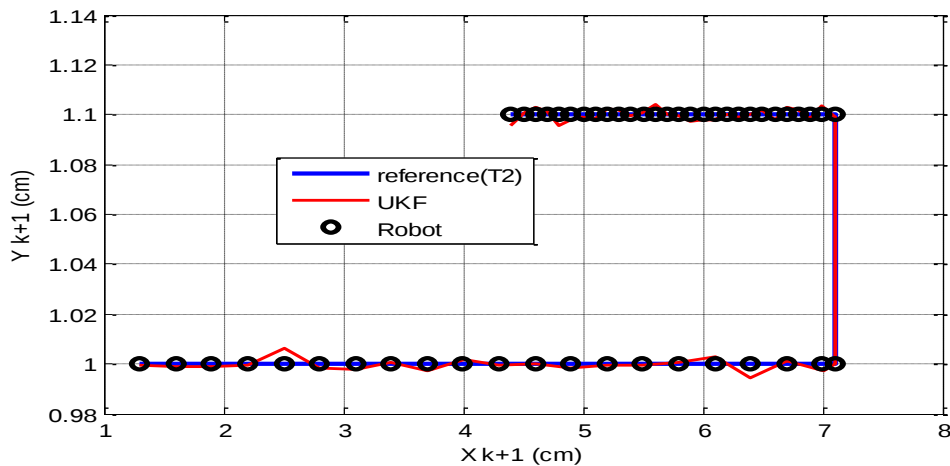
**Figure 4.14:** L'erreur d'estimation de la position et son estimée par le filtre EKF

L'erreur d'estimation de la position  $er$  est bien estimée par le filtre de Kalman étendu. Comme montrée dans la figure (4.14).

#### **4.5.2. Le filtre de Kalman sans parfums (UKF)**

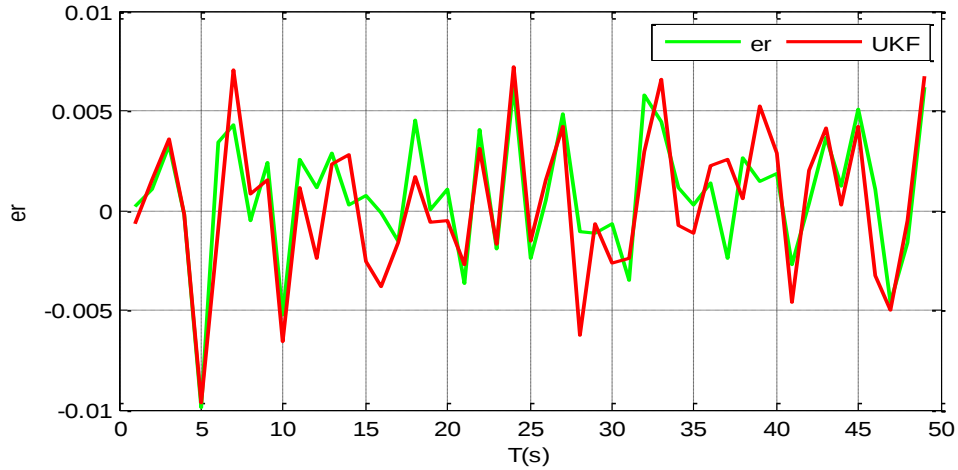
On utilise le filtre Kalman sans parfums pour localiser les paramètres de position et d'orientation de robot mobile pour la trajectoire  $T_2$ . Le robot mobile fait deux rotations successives pour  $\theta_1 = \pi/2$  et  $\theta_2 = \pi/2$ .

Les figures (4.15) et (4.16) montrent l'évolution de la trajectoire du robot mobile avec son estimé et l'erreur d'estimation respectivement.



**Figure 4.15:** La position du robot mobile et son estimée par le filtre UKF

La trajectoire du robot mobile pour deux rotations  $\theta_1 = \pi/2$  et  $\theta_2 = \pi/2$  est bien estimée avec le filtre de Kalman sans parfums. Le résultat est illustré dans la figure (4.15) qui montrent la position du robot mobile mesuré et son estimé.

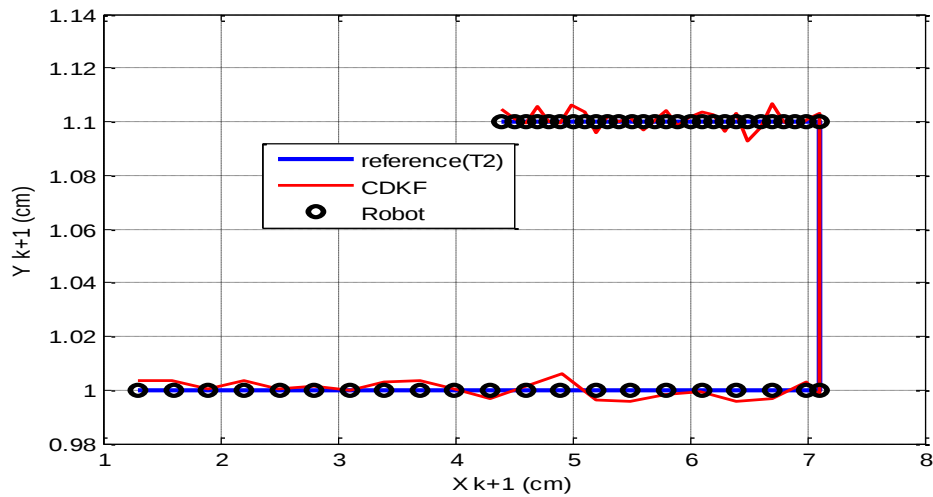


**Figure 4.16:** L'erreur d'estimation de la position et son estimée par le filtre UKF

L'erreur d'estimation de la position  $er$  est bien estimée par le filtre de Kalman sans parfums. Comme montrée dans la figure (4.16).

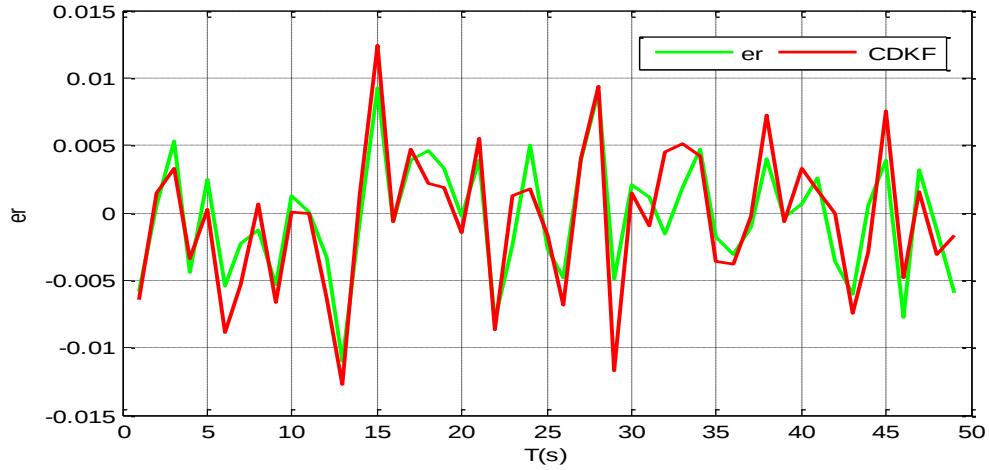
#### 4.5.3. Le filtre de Kalman à différence centrale (CDKF)

On utilise le filtre de Kalman à différence centrale pour localiser les paramètres de position et d'orientation de robot mobile pour toujours la trajectoire  $T_2$ . Le robot mobile fait deux rotations successives pour  $\theta_1 = \pi/2$  et  $\theta_2 = \pi/2$ . Les figures (4.17) et (4.18) montrent l'évolution de la trajectoire du robot mobile avec son estimé et l'erreur d'estimation respectivement.



**Figure 4.17:** La position du robot mobile et son estimée par le filtre CDKF

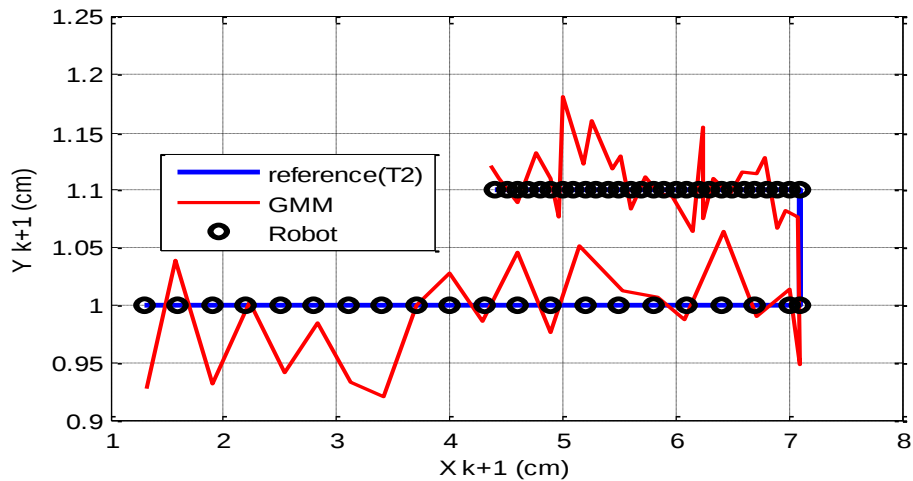
La trajectoire du robot mobile pour deux rotations  $\theta_1 = \pi/2$  et  $\theta_2 = \pi/2$  est bien estimée avec le filtre de Kalman à différence centrale. Le résultat est illustré dans la figure (4.17) qui montrent la position du robot mobile mesuré et son estimé.



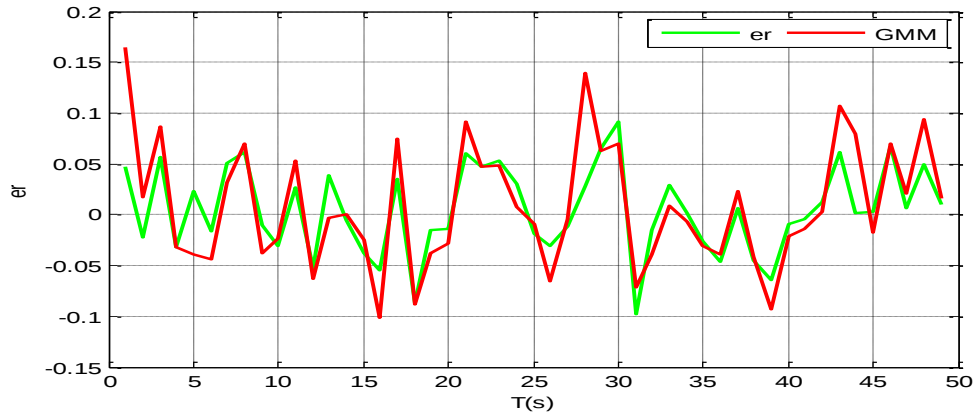
**Figure 4.18:** L'erreur d'estimation de la position et son estimée par le filtre CDKF  
L'erreur d'estimation de la position  $er$  est bien estimée par le filtre de Kalman à différence centrale. Comme montrée dans la figure (4.18).

#### 4.5.4. Le modèle de mélange gaussien (GMM)

On utilise le modèle de mélange gaussien (GMM) pour localiser les paramètres de position et d'orientation de robot mobile pour toujours la trajectoire  $T_2$ . Le robot mobile fait deux rotations successives  $\theta_1 = \pi/2$  et  $\theta_2 = \pi/2$ . Les figures (4.19) et (4.20) montrent l'évolution de la trajectoire de robot mobile avec son estimé et l'erreur d'estimation respectivement.



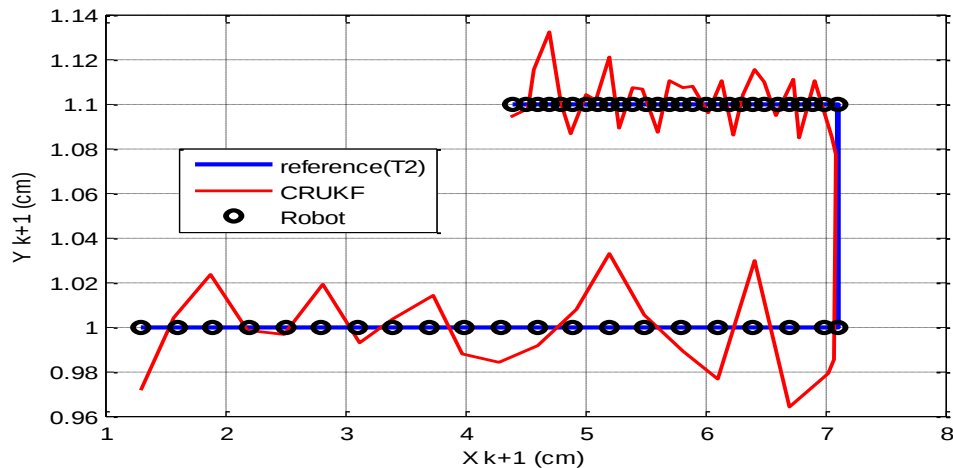
**Figure 4.19:** La position du robot mobile et son estimée par le modèle GMM  
La trajectoire du robot mobile pour deux rotations  $\theta_1 = \pi/2$  et  $\theta_2 = \pi/2$  est bien estimée avec le modèle de mélange gaussien. Le résultat est illustré dans la figure (4.19) qui montrent la position du robot mobile mesuré et son estimé.



**Figure 4.20:** L'erreur d'estimation de la position et son estimée par le modèle GMM  
L'erreur d'estimation de la position  $er$  est bien estimée par le modèle de mélange gaussien. Comme montrée dans la figure (4.20).

#### **4.5.5. La technique de la racine cubique du filtre de Kalman sans parfums (CRUKF) proposée**

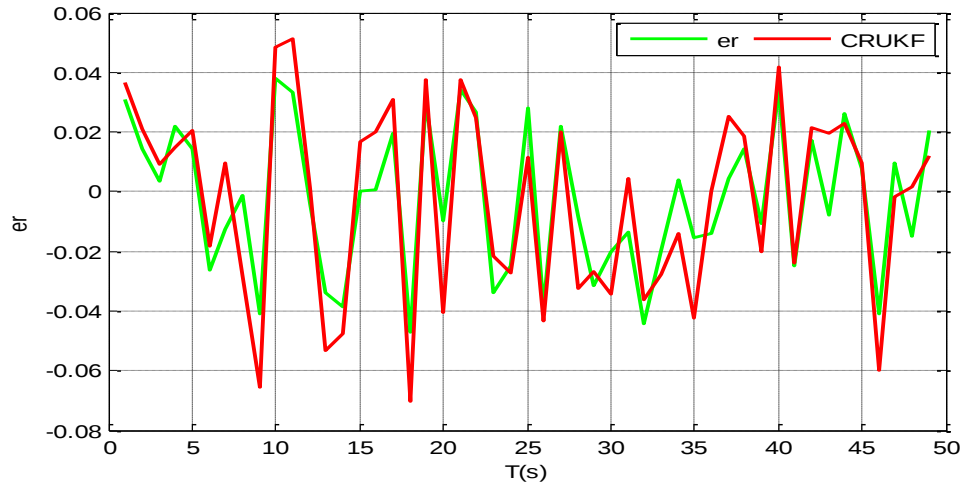
On utilise la technique de la racine cubique du filtre de Kalman sans parfums (CRUKF) proposée pour localiser les paramètres de position et d'orientation de robot mobile pour la trajectoire  $T_2$ . Le robot mobile fait deux rotations successives pour  $\theta_1 = \pi/2$  et  $\theta_2 = \pi/2$ . Les figures (4.21) et (4.22) montrent l'évolution de position du robot mobile dans la trajectoire avec son estimé et l'erreur d'estimation respectivement.



**Figure 4.21:** La position du robot mobile et son estimée par le filtre CRUKF

La trajectoire du robot mobile pour deux rotations  $\theta_1 = \pi/2$  et  $\theta_2 = \pi/2$  est bien estimée avec la technique de la racine cubique du filtre de Kalman sans parfums. Le

résultat est illustrée dans la figure (4.21) qui montrent la position du robot mobile mesuré et son estimé.



**Figure 4.22:** L'erreur d'estimation de la position et son estimée par le filtre CRUKF

L'erreur d'estimation de la position  $er$  est bien estimée par la technique de la racine cubique du filtre de Kalman sans parfums. Comme montrée dans la figure (4.22).

#### **4.6. Application les techniques de localisation sur la trajectoire T3**

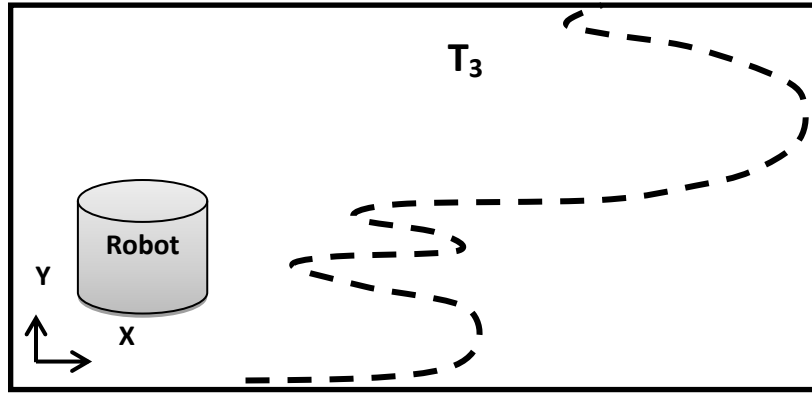
On applique les différentes techniques proposées des filtres pour faire localisation des paramètres du robot mobile, encore une fois et dans une autre trajectoire  $T_3$  de plusieurs déviations dans un environnement connu.

Pour représenter cette trajectoire  $T_3$ , on remplace les variables :  $x_k = 1$ ;  $x_1 = 1$ ;  $y_k = 1$ ;  $x_2 = 1$  ;  $\theta_k = x_3 = \frac{2\pi}{3} + \frac{\pi}{5}$  ;  $T = 1s$  ;  $v_1 = v_2 = 0,03m/s$  ;  $\Delta\theta = 0.3rad$ ;  $u_1 = u_2 = 1rad/s$  ;  $w_1 = 0.001$  ;  $w_2 = 0.09$  et  $w_3 = 0.03$ , dans l'équation (4.13).

On obtient l'équation de la trajectoire  $T_3$  :

$$y_{k+1} = 1,07 + 4.10^{-3} \sqrt{\left(1 - \frac{(x_{k+1}-0,988)^2}{16.10^{-6}}\right)} \quad (4.16)$$

Le tracé de la trajectoire  $T_3$  est illustré dans la figure (4.23) :

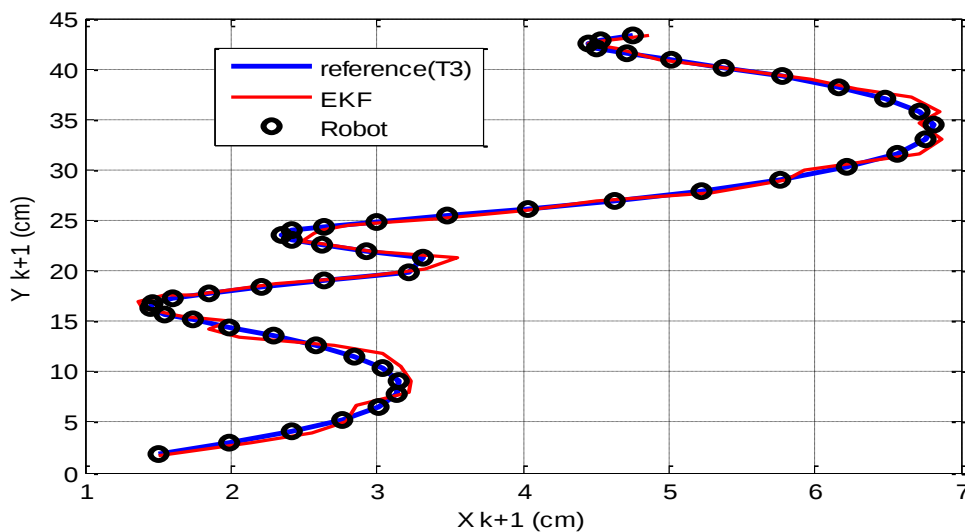


**Figure 4.23:** Trajectoire de plusieurs déviations  $T_3$  de robot mobile

La figure (4.23) représente la trajectoire de plusieurs déviations de robot mobile pour voir un autre cas de localisation et d'estimation du paramètre de la position et d'orientation ainsi l'erreur d'estimation de chaque technique.

#### **4.6.1. Le filtre de Kalman étendu (EKF)**

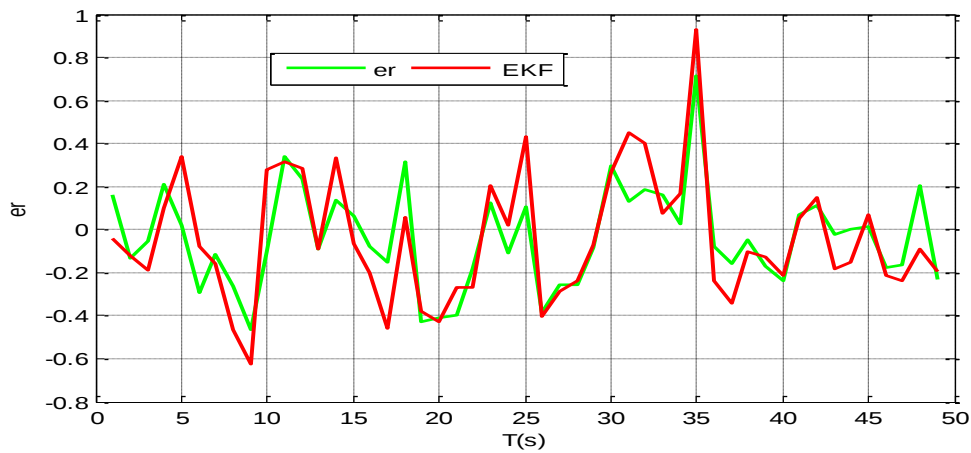
On utilise la technique du filtre de Kalman étendu pour localiser les paramètres de position et d'orientation du robot mobile dans une trajectoire de plusieurs déviations  $T_3$ . Le robot mobile fait un déplacement de plusieurs déviations et les figures (4.24) et (4.25) montrent l'évolution de la trajectoire position avec son estimé et l'erreur d'estimation respectivement.



**Figure 4.24:** La position du robot mobile et son estimée par le filtre EKF

La position du robot mobile pour une trajectoire de plusieurs déviations  $T_3$  est bien estimée avec le filtre de Kalman étendu.

Le résultat est illustré dans la figure (4.24) qui montrent la position du robot mobile mesuré et son estimé.

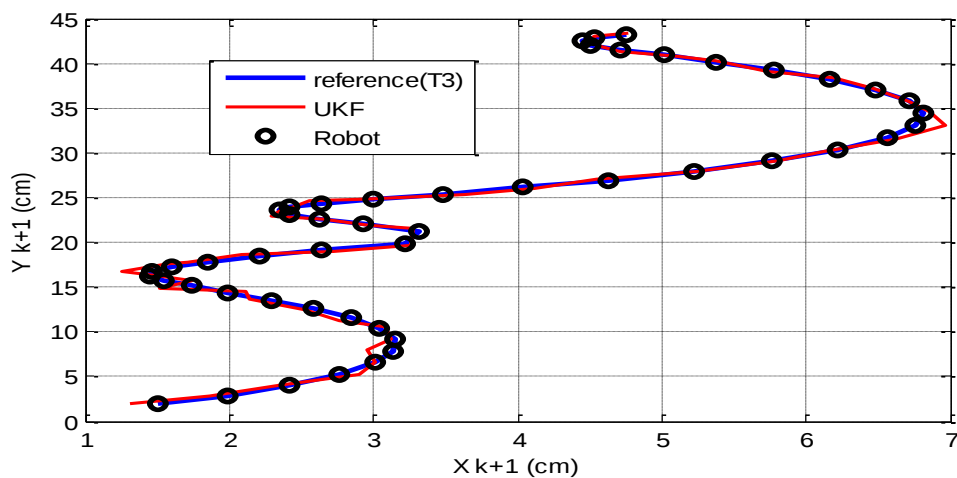


**Figure 4.25:** L'erreur d'estimation de la position et son estimée par le filtre EKF

L'erreur d'estimation de la position  $er$  est bien estimée par le filtre de Kalman étendu. Comme montrée dans la figure (4.25).

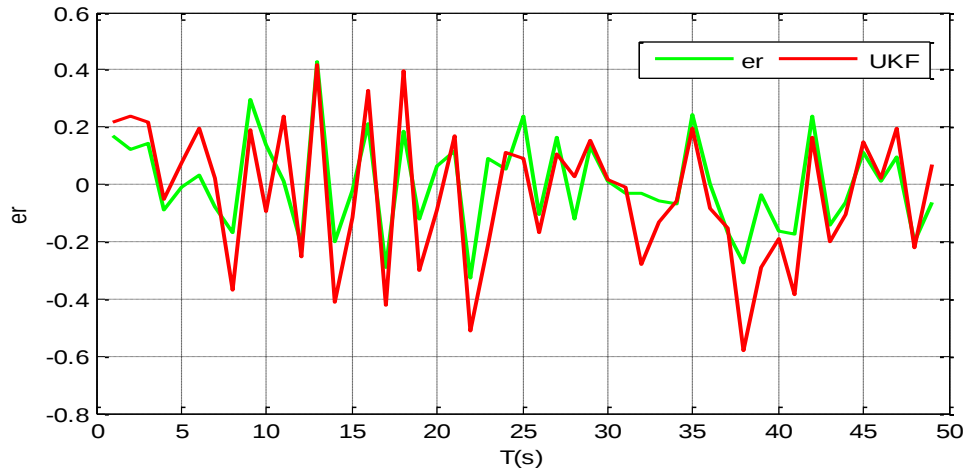
#### **4.6.2. Le filtre de Kalman sans parfums (UKF)**

On utilise le filtre Kalman sans parfums pour localiser les paramètres de position et d'orientation du robot mobile pour la trajectoire de plusieurs déviations  $T_3$ . Le robot mobile fait un déplacement avec plusieurs déviations et les figures (4.26) et (4.27) montrent l'évolution de la trajectoire position avec son estimé et l'erreur d'estimation respectivement.



**Figure 4.26:** La position du robot mobile et son estimée par le filtre UKF

La position du robot mobile pour une trajectoire de plusieurs déviations  $T_3$  est bien estimée avec le filtre de Kalman sans parfums. Le résultat est illustré dans la figure (4.26) qui montrent la position du robot mobile mesuré et son estimé.

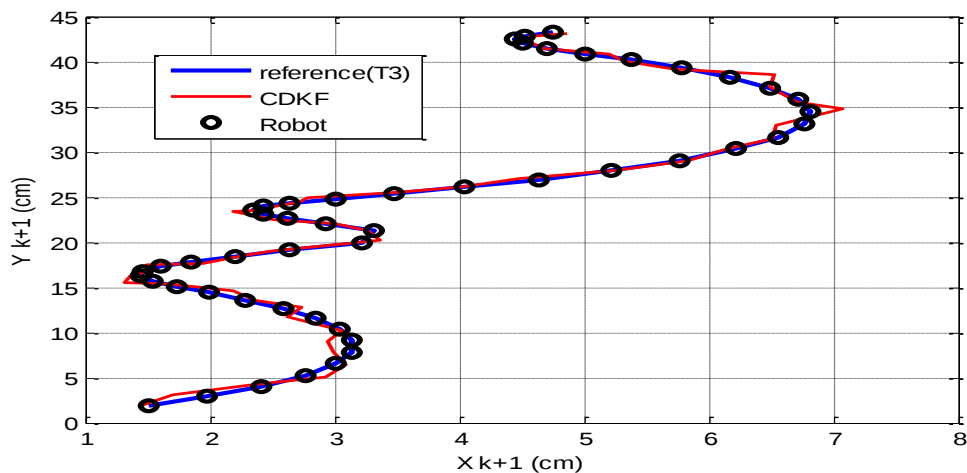


**Figure 4.27:** L'erreur d'estimation de la position et son estimée par le filtre UKF

L'erreur d'estimation de la position  $er$  est bien estimée par le filtre de Kalman sans parfums. Comme montrée dans la figure (4.27).

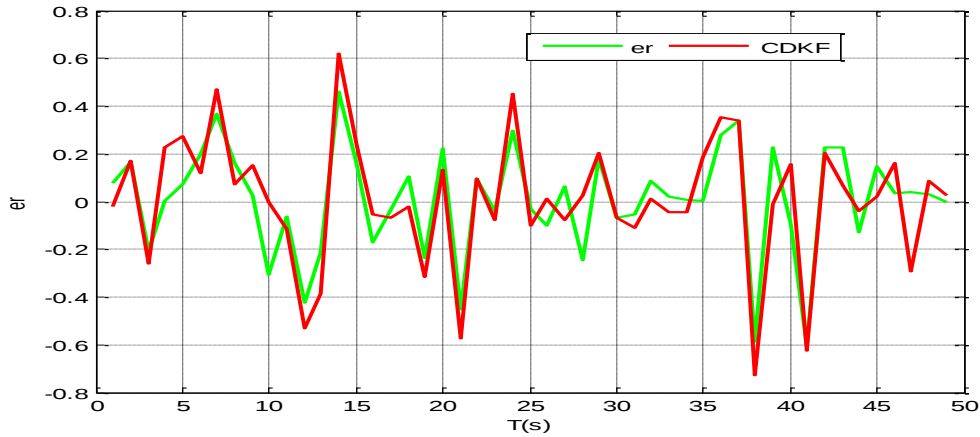
#### **4.6.3. Le filtre de Kalman à différence centrale (CDKF)**

On utilise le filtre Kalman à différence centrale pour localiser les paramètres de position et d'orientation du robot mobile pour toujours la trajectoire de plusieurs déviations  $T_3$ . Le robot mobile fait un déplacement de plusieurs déviations et les figures (4.28) et (4.29) montrent l'évolution de la trajectoire position avec son estimé et l'erreur d'estimation respectivement.



**Figure 4.28:** La position du robot mobile et son estimée par le filtre CDKF

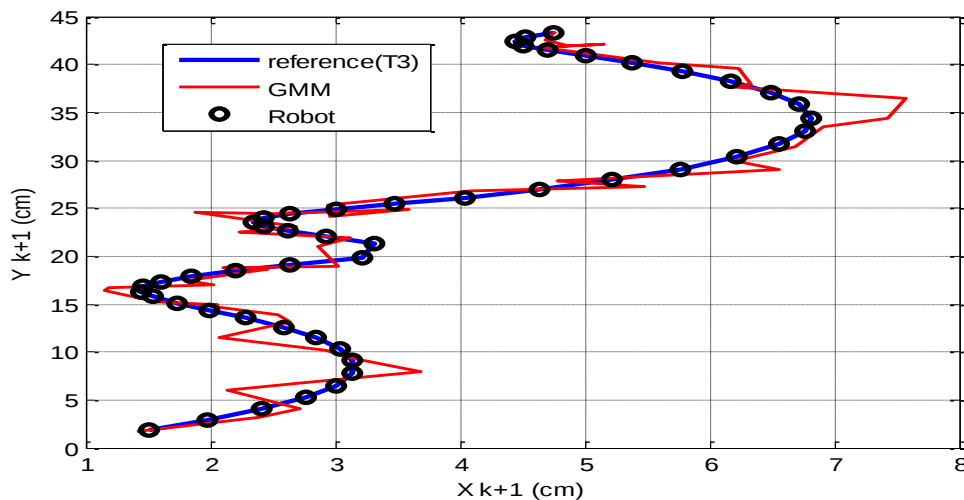
La position du robot mobile pour une trajectoire de plusieurs déviations  $T_3$  est bien estimée avec le filtre de Kalman à différence centrale. Le résultat est illustré dans la figure (4.28) qui montrent la position du robot mobile mesuré et son estimé.



**Figure 4.29:** L'erreur d'estimation de la position et son estimée par le filtre CDKF  
L'erreur d'estimation de la position  $er$  est bien estimée par le filtre de Kalman à différence centrale. Comme montrée dans la figure (4.29).

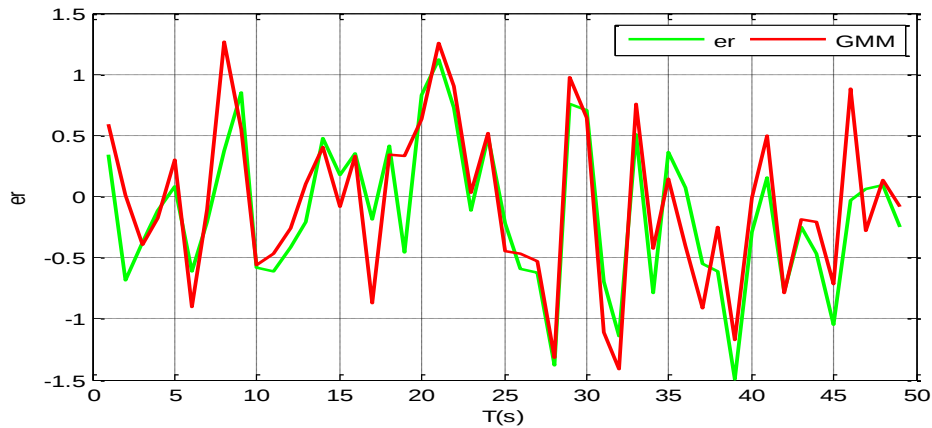
#### 4.6.4. Le modèle de mélange gaussien (GMM)

On utilise le modèle de mélange gaussien (GMM) pour localiser les paramètres de position et d'orientation du robot mobile toujours pour la trajectoire de plusieurs déviations  $T_3$ . Le robot mobile fait un déplacement de plusieurs déviations et les figures (4.30) et (4.31) montrent l'évolution de la trajectoire de position avec son estimé et l'erreur d'estimation respectivement.



**Figure 4.30:** La position du robot mobile et son estimée par le modèle GMM

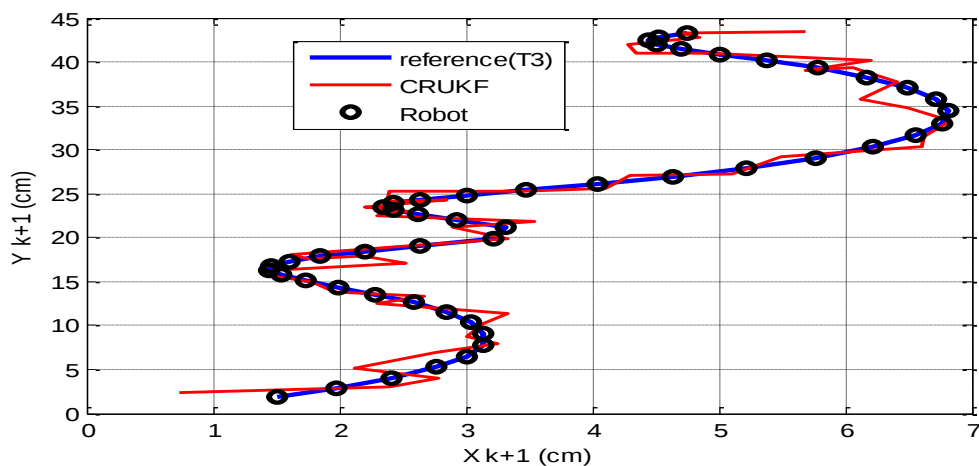
La position du robot mobile pour une trajectoire de plusieurs déviations  $T_3$  est bien estimée avec le modèle de mélange gaussien. Le résultat est illustré dans la figure (4.30) qui montrent la position du robot mobile mesuré et son estimé.



**Figure 4.31:** L'erreur d'estimation de la position et son estimée par le modèle GMM  
L'erreur d'estimation de la position  $er$  est bien estimée par le modèle de mélange gaussien. Comme montrée dans la figure (4.31).

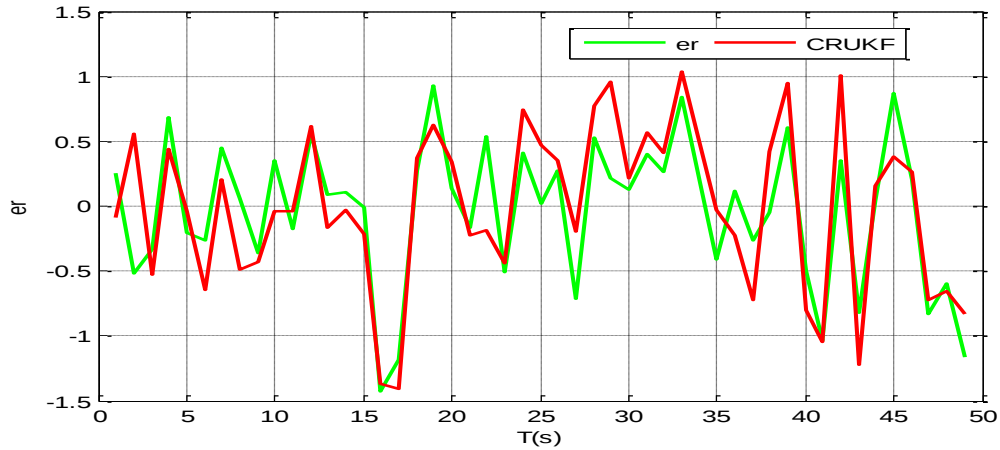
#### **4.6.5. La technique de la racine cubique du filtre de Kalman sans parfums (CRUKF) proposée**

On utilise la technique de la racine cubique du filtre de Kalman sans parfums (CRUKF) proposé pour localiser les paramètres de position et d'orientation du robot mobile pour la trajectoire de plusieurs déviations  $T_3$ . Le robot mobile fait un déplacement de plusieurs déviations et les figures (4.32) et (4.33) montrent l'évolution de position du robot mobile dans la trajectoire avec son estimé et l'erreur d'estimation respectivement.



**Figure 4.32:** La position du robot mobile et son estimée par le filtre CRUKF

La position du robot mobile pour une trajectoire de plusieurs déviations  $T_3$  est bien estimée avec la technique de la racine cubique du filtre de Kalman sans parfums. Le résultat est illustré dans la figure (4.32) qui montrent la position du robot mobile mesuré et son estimé.



**Figure 4.33:** L'erreur d'estimation de la position et son estimée par le filtre CRUKF

L'erreur d'estimation de la position  $er$  est bien estimée par la technique de la racine cubique du filtre de Kalman sans parfums. Comme montrée dans la figure (4.33).

#### **4.7. Application les techniques de localisation sur la trajectoire T4**

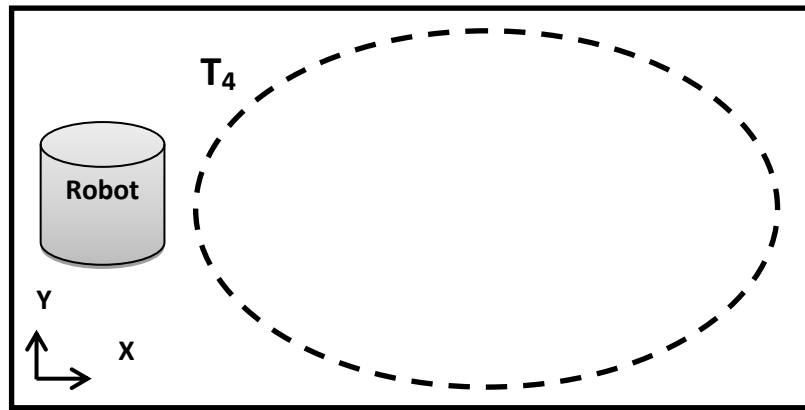
On applique les différentes techniques proposées de filtre de Kalman pour localiser le robot mobile sur une trajectoire de cercle  $T_4$ . On remplace les variables :  $x_k = y_k = 0$  ;  $\theta_k = x_3 = 2\pi$  ;  $T = 1s$  ;  $v_1 = v_2 = 0,02 \text{ m/s}$  ;  $u_1 = u_2 = 1$  ;  $\Delta\theta = 0.2\text{rad}$  ;  $w_1 = w_2 = 0$  ;  $w_3 = 0$ , dans l'équation (4.12) on aura :

$$\frac{(x_{k+1}-x_k-w_1)^2}{(v_1.T.u_1)^2} + \frac{(y_{k+1}-y_k-w_2)^2}{(v_2.T.u_2)^2} = 1 \Rightarrow \frac{(x_{k+1})^2}{(0,02)^2} + \frac{(y_{k+1})^2}{(0,02)^2} = 1$$

On obtient donc l'expression de la trajectoire  $T_4$  d'un cercle donné par :

$$(y_{k+1})^2 + (x_{k+1})^2 = (0,02)^2 \quad (4.17)$$

Le tracé de la trajectoire  $T_4$  d'un cercle est illustré dans la figure (4.34).

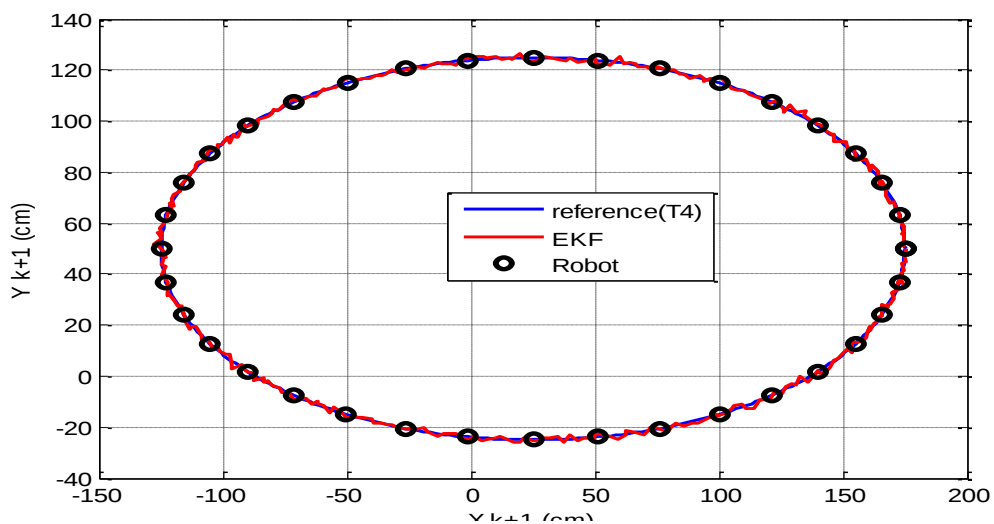


**Figure 4.34:** Trajectoire cercle  $T_4$  du robot mobile

La figure (4.34) représente la trajectoire cercle  $T_4$  du robot mobile dans un environnement connu pour voir aussi la localisation et l'estimation des paramètres de position et d'orientation ainsi l'erreur d'estimation de chaque technique utilisé.

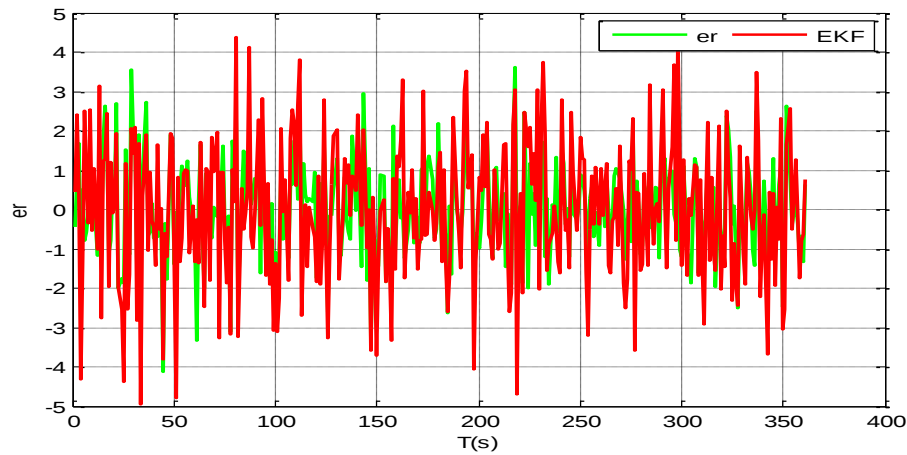
#### **4.7.1. Le filtre de Kalman étendu (EKF)**

On utilise la technique de filtre de Kalman étendu (EKF) pour localiser et estimer les paramètres de position et l'angle d'orientation du robot mobile dans la trajectoire de cercle  $T_3$ . Le robot mobile fait un une trajectoire de cercle  $T_4$  et les figures (4.35) et (4.36) montrent l'évolution de la trajectoire position avec son estimé et l'erreur d'estimation respectivement.



**Figure 4.35:** La position du robot mobile et son estimée par le filtre EKF

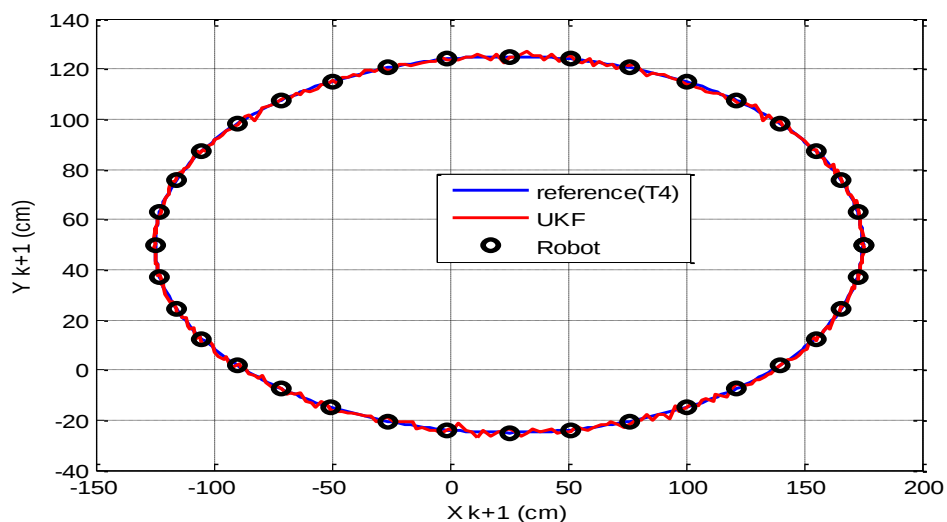
La position du robot mobile pour une trajectoire de cercle  $T_4$  est bien estimée avec le filtre de Kalman étendu. Le résultat est illustré dans la figure (4.35) qui montrent la position du robot mobile mesuré et son estimé.



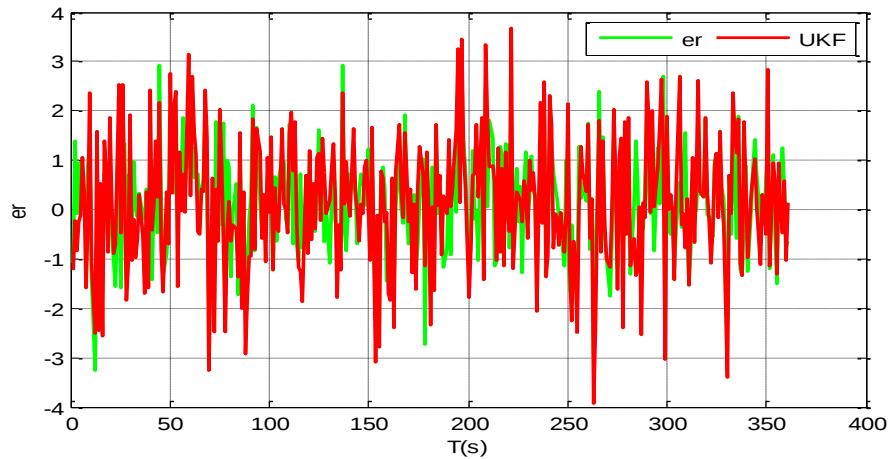
**Figure 4.36:** L'erreur d'estimation de la position et son estimée par le filtre EKF  
L'erreur d'estimation de la position  $er$  est bien estimée par le filtre de Kalman étendu. Comme montrée dans la figure (4.36).

#### **4.7.2. Le filtre de Kalman sans parfums (UKF)**

On utilise le filtre Kalman sans parfums pour localiser les paramètres de position et d'orientation du robot mobile pour la trajectoire de cercle  $T_4$ . Le robot mobile fait un déplacement sur un cercle et les figures (4.37) et (4.38) montrent l'évolution de la trajectoire position avec son estimé et l'erreur d'estimation respectivement.



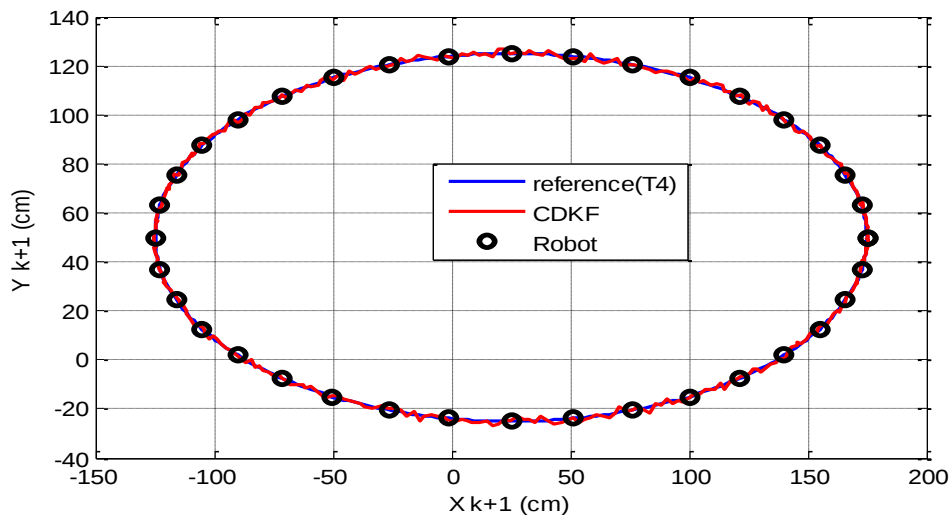
**Figure 4.37:** La position du robot mobile et son estimée par le filtre UKF  
La position du robot mobile pour une trajectoire de cercle  $T_4$  est bien estimée avec le filtre de Kalman sans parfums. Le résultat est illustré dans la figure (4.37) qui montrent la position du robot mobile mesuré et son estimé.



**Figure 4.38:** L'erreur d'estimation de la position et son estimée par le filtre UKF  
L'erreur d'estimation de la position  $er$  est bien estimée par le filtre de Kalman sans parfums. Comme montrée dans la figure (4.38).

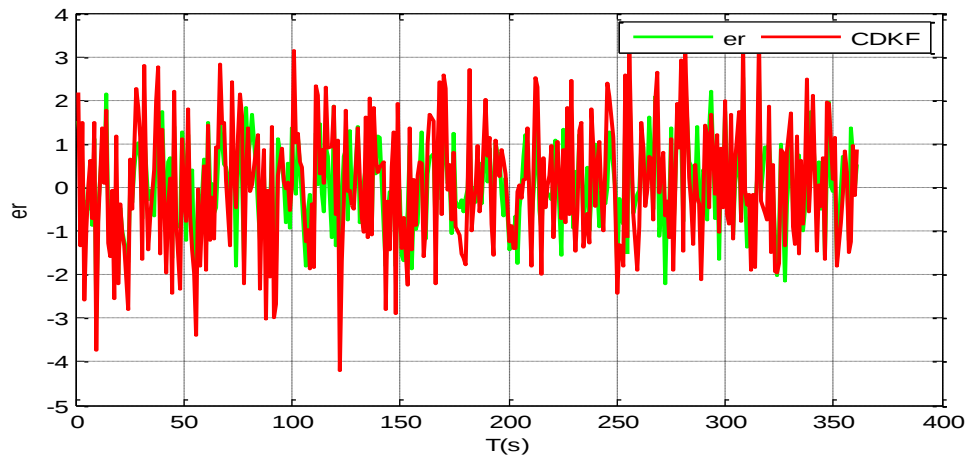
#### **4.7.3. Le filtre de Kalman à différence centrale (CDKF)**

On utilise le filtre Kalman à différence centrale pour localiser les paramètres de position et d'orientation de robot mobile pour toujours la trajectoire de cercle  $T_4$ . Le robot mobile fait un déplacement sur un cercle et les figures (4.39) et (4.40) montrent l'évolution de la trajectoire position avec son estimé et l'erreur d'estimation respectivement.



**Figure 4.39:** La position du robot mobile et son estimée par le filtre CDKF

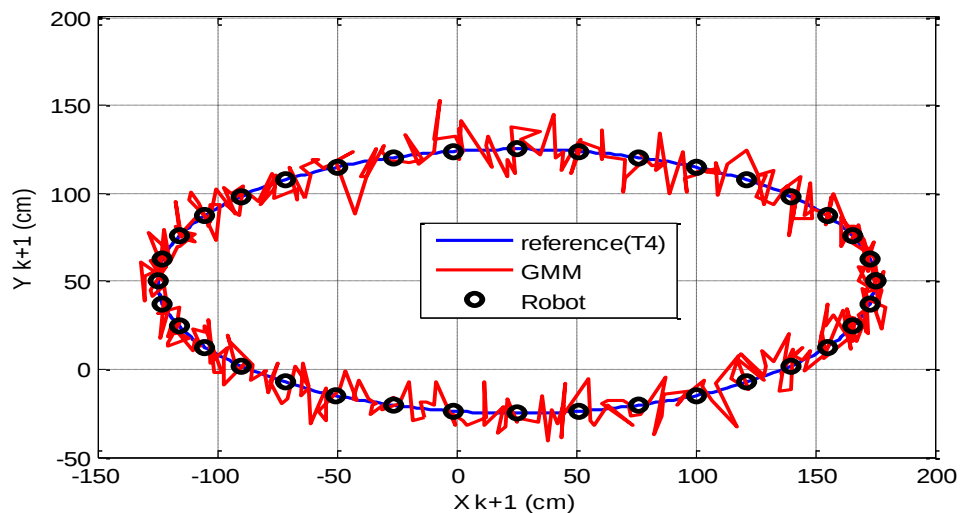
La position du robot mobile pour une trajectoire de cercle  $T_4$  est bien estimée avec le filtre de Kalman à différence centrale. Le résultat est illustré dans la figure (4.39) qui montrent la position du robot mobile mesuré et son estimé.



**Figure 4.40 :** l'erreur d'estimation de la position et son estimée par le filtre CDKF  
L'erreur d'estimation de la position  $er$  est bien estimée par le filtre de Kalman à différence centrale. Comme montrée dans la figure (4.40).

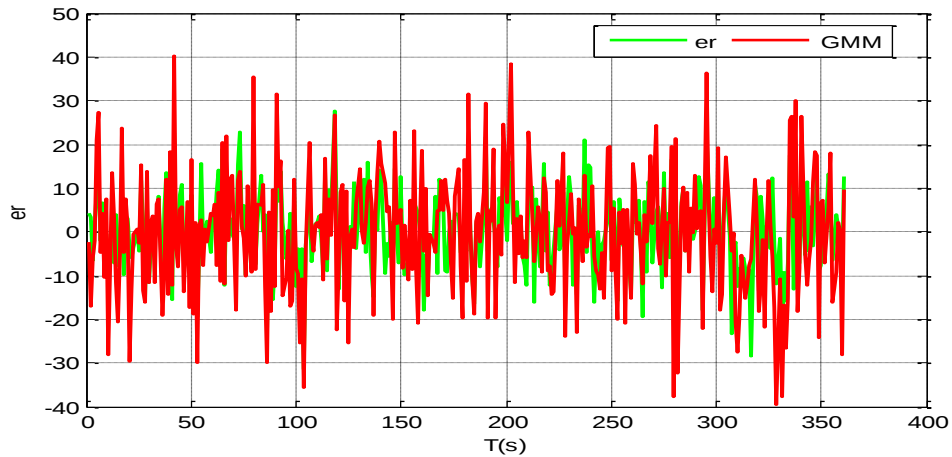
#### **4.7.4. Le modèle de mélange gaussien (GMM)**

On utilise le modèle de mélange gaussien (GMM) pour localiser les paramètres de position et d'orientation du robot mobile pour toujours la trajectoire de cercle  $T_4$ . Le robot mobile fait un déplacement sur un cercle et les figures (4.41) et (4.42) montrent l'évolution de la trajectoire position avec son estimé et l'erreur d'estimation respectivement.



**Figure 4.41:** La position du robot mobile et son estimée par le modèle GMM

La position du robot mobile pour une trajectoire de cercle  $T_4$  est bien estimée avec le modèle de mélange gaussienne. Le résultat est illustré dans la figure (4.41) qui montrent la position du robot mobile mesuré et son estimé.

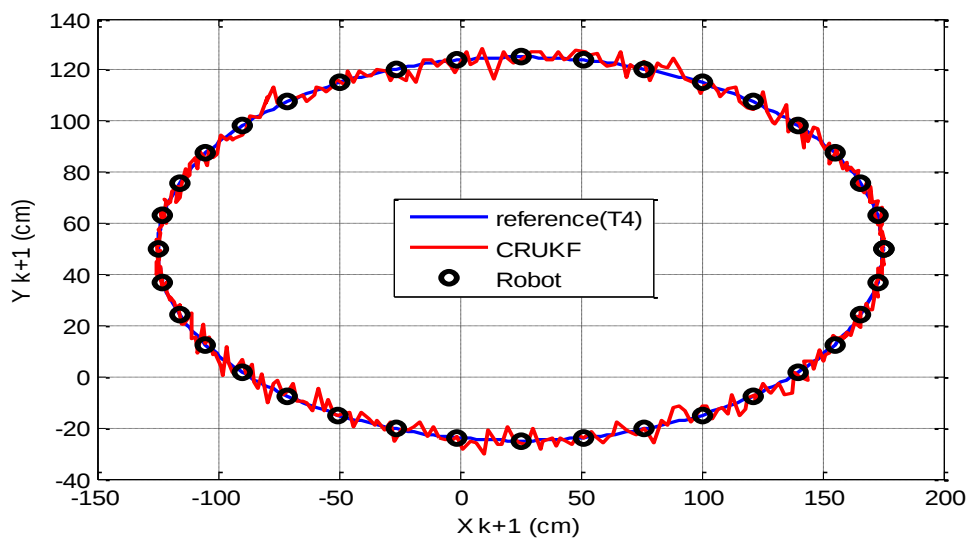


**Figure 4.42:** L'erreur d'estimation de la position et son estimée par le modèle GMM

L'erreur d'estimation de la position  $er$  est bien estimée par le modèle de mélange gaussien. Comme montrée dans la figure (4.42).

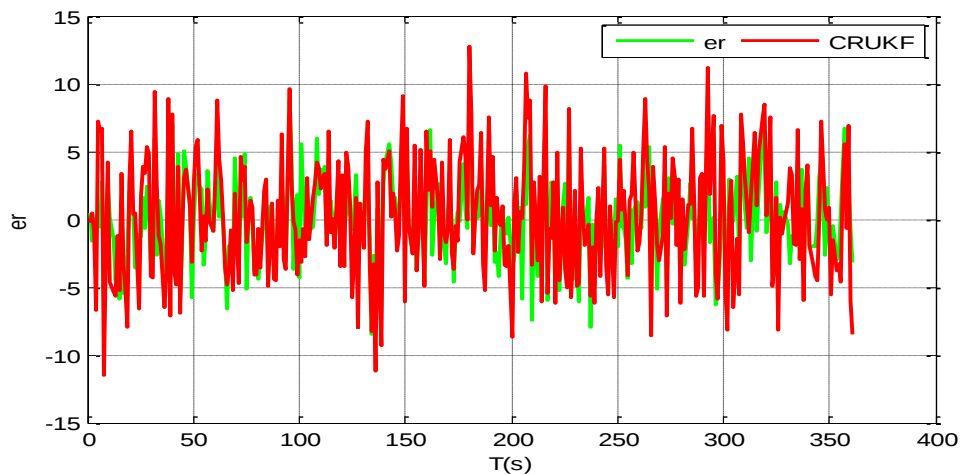
#### **4.7.5. La technique de la racine cubique du filtre de Kalman sans parfums (CRUKF) proposée**

On utilise la technique de la racine cubique du filtre de Kalman sans parfums (CRUKF) proposée pour localiser les paramètres de position et d'orientation du robot mobile pour la trajectoire de cercle  $T_4$ . Le robot mobile fait un déplacement de cercle  $T_4$  et les figures (4.43) et (4.44) montrent l'évolution de position du robot mobile dans la trajectoire avec son estimé et l'erreur d'estimation respectivement.



**Figure 4.43:** La position du robot mobile et son estimée par le filtre CRUKF

La position du robot mobile pour une trajectoire de cercle  $T_4$  est bien estimée avec la technique de la racine cubique du filtre de Kalman sans parfums. Le résultat est illustré dans la figure (4.43) qui montrent la position du robot mobile mesuré et son estimé.



**Figure 4.44:** L'erreur d'estimation de la position et son estimée par le filtre CRUKF

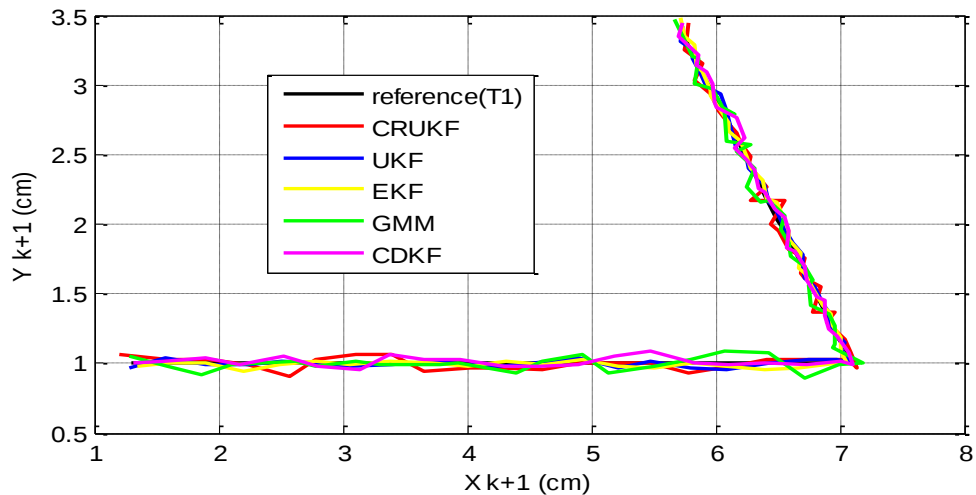
L'erreur d'estimation de la position  $er$  est bien estimée par la technique de la racine cubique du filtre de Kalman sans parfums. Comme montrée dans la figure (4.44).

#### **4.8. L'évaluation et comparaison entre les techniques de localisation**

La présentation des résultats de simulation nous laisse à penser de faire une comparaison entre les techniques de localisation du filtre de Kalman étendu (EKF), le filtre de Kalman sans parfums (UKF), le filtre de Kalman à différence centrale (CDKF), le modèle de mélange gaussien (GMM) et la technique de la racine cubique du filtre de Kalman sans parfums (CRUKF) pour voir et déduire la différence entre les techniques d'estimation pour mesurer les paramètres de position et d'orientation du robot mobile sur les quatre trajectoires de modèle proposée.

##### **4.8.1. Comparaison entre les techniques de localisation pour la trajectoire $T_1$**

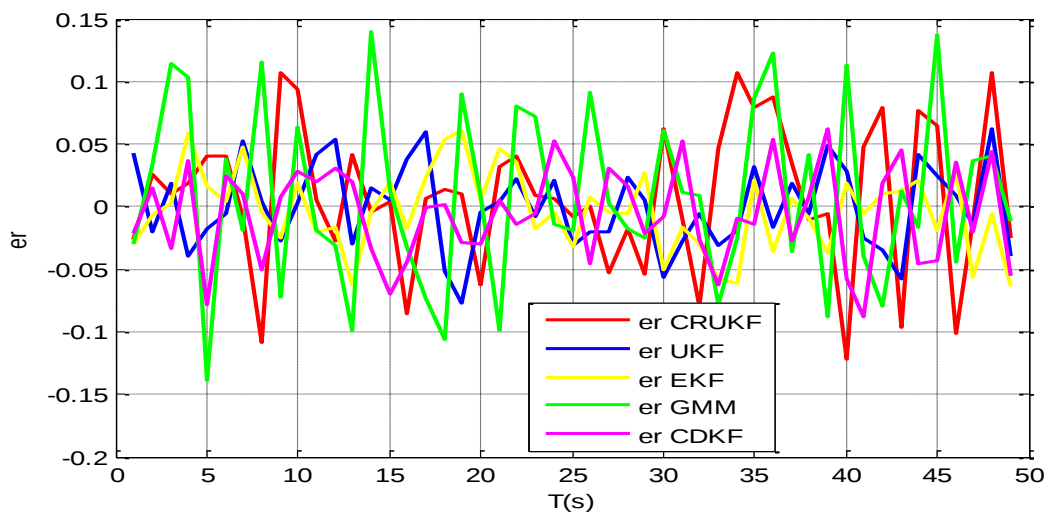
Dans cette partie on va mesurer les paramètres de la position et d'orientation pour localiser le robot mobile dans la trajectoire  $T_1$  à la fois par toutes les techniques utilisés. Les figures (4.45) et (4.46) montrent l'évolution du position dans la trajectoire  $T_1$  du robot mobile avec son estimé et l'erreur d'estimation respectivement par tous les filtres utilisés.



**Figure 4.45:** L'estimation de la position du robot mobile par les différentes techniques

La trajectoire  $T_1$  du robot mobile pour un angle de rotation  $\theta = \pi/3$  est bien estimée avec le filtre de Kalman étendu (EKF), le filtre de Kalman sans parfums (UKF), le filtre de Kalman à différence centrale (CDKF), le modèle de mélange gaussien (GMM) et la technique de la racine cubique du filtre de Kalman sans parfums (CRUKF). Le résultat est illustré dans la figure (4.45) qui montrent la position du robot mobile mesuré et leurs estimés par les différentes techniques.

La figure suivante (4.46) montre la comparaison entre les erreurs d'estimation par les différentes techniques utilisées.



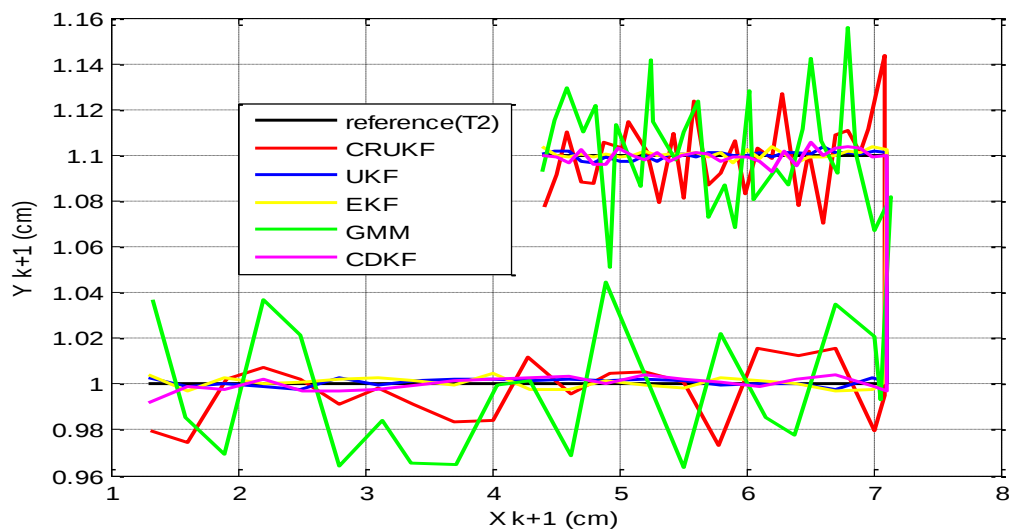
**Figure 4.46:** la comparaison entre les erreurs d'estimation de la position du robot

La comparaison entre les erreurs d'estimation de la position dans la trajectoire  $T_1$  par le filtre de Kalman étendu (EKF), le filtre de Kalman sans parfums (UKF), le filtre

de Kalman à différence centrale(CDKF), le modèle de mélange gaussien (GMM) et la technique de la racine cubique du filtre de Kalman sans parfums (CRUKF). Le résultat est illustré dans la figure (4.46) qui montre la différence entre les erreurs d'estimations par ces différentes techniques.

#### **4.8.2. Comparaison entre les techniques de localisation pour la trajectoire T2**

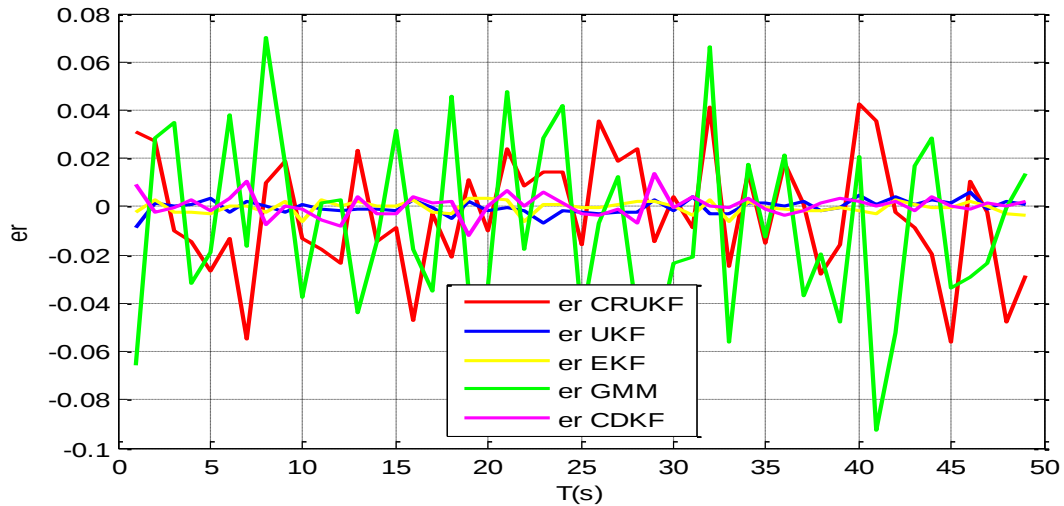
Dans cette partie on va mesurer les paramètres de la position et d'orientation pour localiser le robot mobile dans la trajectoire  $T_2$  à la fois par toutes les techniques utilisés. Les figures (4.47) et (4.48) montrent l'évolution du position dans la trajectoire  $T_2$  du robot mobile avec son estimé et l'erreur d'estimation respectivement par tous les filtres utilisés.



**Figure 4.47:** L'estimation de la position du robot mobile par les différentes techniques

La trajectoire  $T_2$  du robot mobile pour deux rotations  $\theta_1 = \pi/2$  et  $\theta_2 = \pi/2$  est bien estimée avec le filtre de Kalman étendu (EKF), le filtre de Kalman sans parfums (UKF), le filtre de Kalman à différence centrale (CDKF), le modèle de mélange gaussien (GMM) et la technique de la racine cubique du filtre de Kalman sans parfums (CRUKF). Le résultat est illustré dans la figure (4.47) qui montrent la position du robot mobile mesuré et leurs estimés par les différentes techniques.

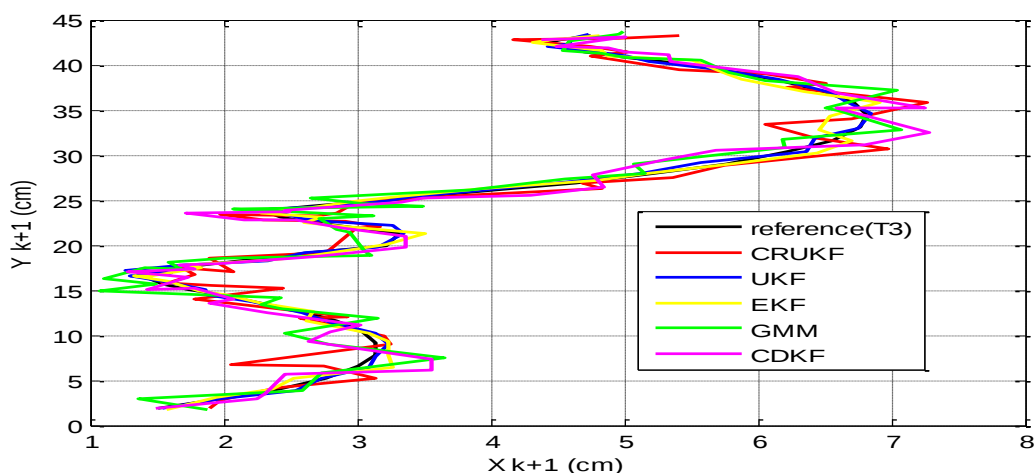
La figure suivante (4.48) montre la comparaison entre les erreurs d'estimation par les différentes techniques utilisées.



**Figure 4.48:** La comparaison entre les erreurs d'estimation de la position du robot La comparaison entre les erreurs d'estimation de la position dans la trajectoire  $T_2$  par le filtre de Kalman étendu (EKF), le filtre de Kalman sans parfums (UKF), le filtre de Kalman à différence centrale (CDKF), le modèle de mélange gaussien (GMM) et la technique de la racine cubique du filtre de Kalman sans parfums (CRUKF). Le résultat est illustré dans la figure (4.48) qui montre la différence entre les erreurs d'estimations par ces différentes techniques.

#### **4.8.3. Comparaison entre les techniques de localisation pour la trajectoire T3**

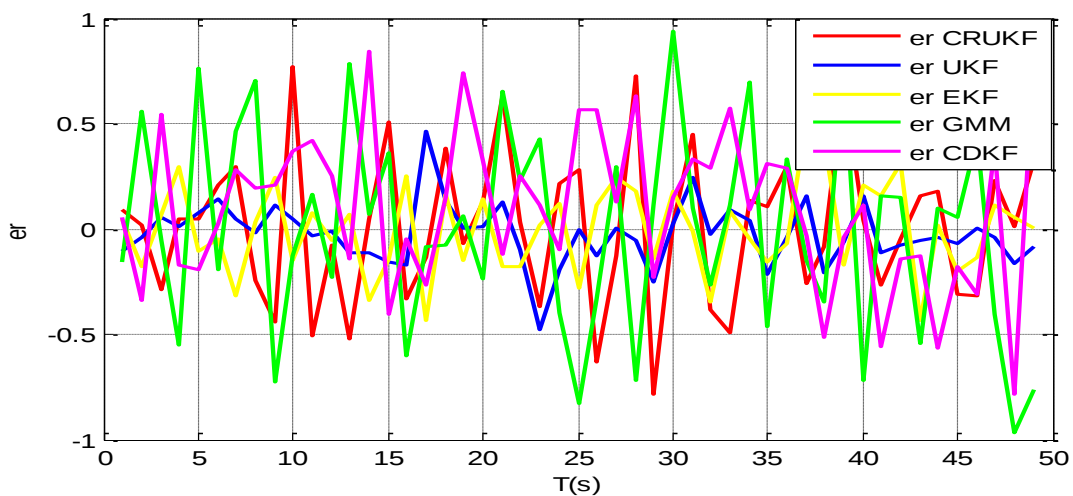
On va mesurer les paramètres de la position et d'orientation pour localiser le robot mobile dans la trajectoire  $T_3$  à la fois par toutes les techniques utilisés. Les figures (4.49) et (4.50) montrent l'évolution du position dans la trajectoire  $T_3$  du robot mobile avec son estimé et l'erreur d'estimation respectivement par tous les filtres utilisés.



**Figure 4.49:** L'estimation de la position du robot mobile par les différentes techniques

La trajectoire  $T_3$  du robot mobile pour un déplacement de plusieurs déviations est bien estimée avec le filtre de Kalman étendu (EKF), le filtre de Kalman sans parfums (UKF), le filtre de Kalman à différence centrale (CDKF), le modèle de mélange gaussien (GMM) et la technique de la racine cubique du filtre de Kalman sans parfums (CRUKF). Le résultat est illustré dans la figure (4.49) qui montrent la position du robot mobile mesuré et leurs estimés par les différentes techniques.

La figure suivante (4.50) montre la comparaison entre les erreurs d'estimation par les différentes techniques utilisées.

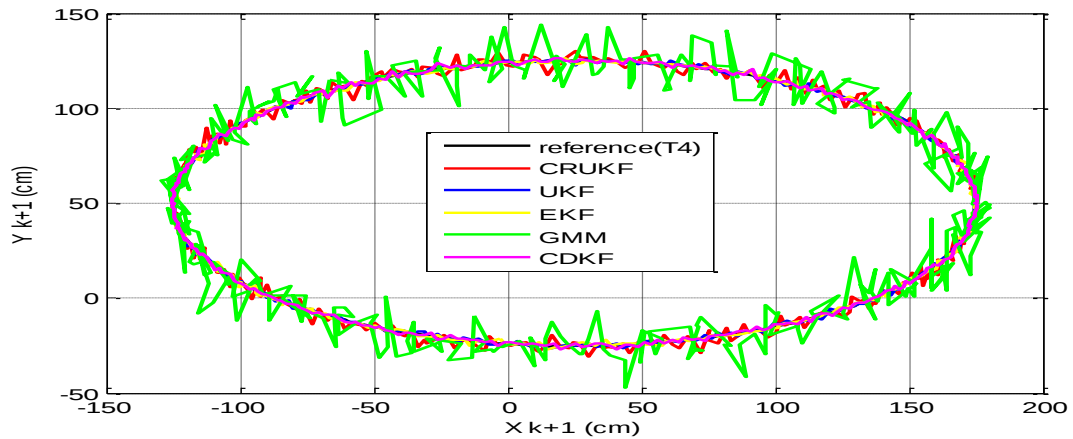


**Figure 4.50:** La comparaison entre les erreurs d'estimation de la position du robot

La comparaison entre les erreurs d'estimation de la position dans la trajectoire  $T_3$  par le filtre de Kalman étendu (EKF), le filtre de Kalman sans parfums (UKF), le filtre de Kalman à différence centrale (CDKF), le modèle de mélange gaussien (GMM) et la technique de la racine cubique du filtre de Kalman sans parfums (CRUKF). Le résultat est illustré dans la figure (4.50) qui montre la différence entre les erreurs d'estimations par les différentes techniques.

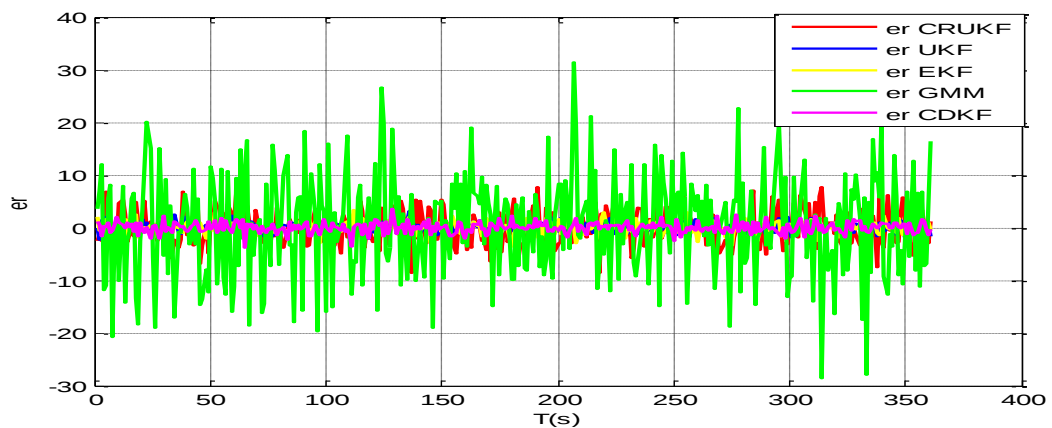
#### **4.8.4. Comparaison entre les techniques de localisation pour la trajectoire T4**

Dans cette partie on va mesurer les paramètres de la position et d'orientation pour localiser le robot mobile dans la trajectoire  $T_4$  à la fois par toutes les techniques utilisés. Les figures (4.51) et (4.52) montrent l'évolution du position dans la trajectoire de cercle  $T_4$  du robot mobile avec son estimé et l'erreur d'estimation respectivement par tous les filtres utilisés.



**Figure 4.51:** L'estimation de la position du robot mobile par les différentes techniques. La trajectoire  $T_4$  du robot mobile pour un déplacement sur un cercle est bien estimée avec le filtre de Kalman étendu (EKF), le filtre de Kalman sans parfums (UKF), le filtre de Kalman à différence centrale (CDKF), le modèle de mélange gaussien (GMM) et la technique de la racine cubique du filtre de Kalman sans parfums (CRUKF). Le résultat est illustré dans la figure (4.51) qui montrent la position du robot mobile mesuré et leurs estimés par les différentes techniques.

La figure suivante (4.52) montre la comparaison entre les erreurs d'estimation par les différentes techniques utilisées.



**Figure 4.52:** La comparaison entre les erreurs d'estimation de la position du robot. La comparaison entre les erreurs d'estimation de la position dans la trajectoire  $T_4$  par le filtre de Kalman étendu (EKF), le filtre de Kalman sans parfums (UKF), le filtre de Kalman à différence centrale (CDKF), le modèle de mélange gaussien (GMM) et la technique de la racine cubique du filtre de Kalman sans parfums (CRUKF). Le résultat est illustré dans la figure (4.52) qui montre la différence entre les erreurs d'estimations par les différentes techniques.

#### 4.9. La comparaison entre les performances des techniques d'estimation

On compare les performances des techniques d'estimation qui sont le filtre de Kalman étendu (EKF), le filtre de Kalman sans parfums (UKF), le filtre de Kalman à différence centrale (CDKF), le modèle de mélange gaussien (GMM) et la technique de la racine cubique du filtre de Kalman sans parfums (CRUKF). On commence par les points initial de la trajectoire:  $(A_0, B_0) = (1, 1)$  avec  $\theta_1 = 0$ . On choisit  $t = 1s$  et chaque trajectoire a besoin de gain  $k_f$  et on prend  $k_f = 400 s$ , appliqué au profile de la vitesse angulaire des roues. Les paramètres utilisé dans les techniques sont:  $\alpha = 10^{-4}$  ;  $\beta = 5$  ;  $\kappa = (8 - n)/2$  ;  $\lambda = \alpha^2(n + \kappa) - n$  et  $\hat{\theta}_{1/0} = \pi/2$ .

$\beta = 3$  minimise l'erreur de covariance à posteriori lorsque le bruit est Gaussien.

$W = \text{diag}\{0.123 \quad 0.124 \quad 0.121\}$  , qui correspond à la déviation standard avec  $A_k$  ,  $B_k$  en centimètre et  $\theta_k$  en degré

$V = \text{diag}\{0.110 \quad 0.100 \quad 0.111\}$  , la déviation standard inférieure de 0.1 centimètre pour chaque capteur.

$\hat{A}_{0/0} = [1.5000 \quad 1.9821 \quad 2.4123]'$  , l'état estimé initial de robot mobile

$A_0 = [1 \quad 1 \quad 0]'$  , l'état initial de robot mobile et  $B_0 = 1$  ;  $\hat{B}_{0/0} = 1.330$

$P_{0/0} = [0.5010 \quad 0.5021 \quad 0.5023]'$  , la déviation standard de la largeur et la longueur dans la position et l'orientation du robot mobile.

On compare les performances des techniques par le calcul de l'intervalle de l'erreur

de la position est donnée par :  $\varepsilon_x = \frac{1}{k_f+1} \sum_{k=0}^{k_f} \|[A_k - \hat{A}_{k/k}, B_k - \hat{B}_{k/k}]\|'$

L'intervalle de l'erreur d'orientation est :  $\varepsilon_\theta = \frac{1}{k_f+1} \sum_{k=0}^{k_f} |\theta_{k+1} - \hat{\theta}_{k+1/k}|$

L'intervalle de l'erreur de covariance estimé est :  $\pi = \frac{1}{k_f+1} \sum_{k=0}^{k_f} \text{tr}(\sum P_{k/k})$

Le tableau suivant (4.1) montre la comparaison entre les performances des différentes techniques.

| techniques   | $\varepsilon_x(m)$             | $\varepsilon_\theta(rad)$      | $\pi$                          |
|--------------|--------------------------------|--------------------------------|--------------------------------|
| <b>EKF</b>   | 0.023 0.017 0.013 0.015        | 0.025 0.018 0.015 0.019        | 0.021 0.015 0.011 0.016        |
| <b>UKF</b>   | 0.024 0.013 0.011 0.019        | 0.022 0.017 0.011 0.015        | 0.019 0.013 0.012 0.018        |
| <b>CDKF</b>  | <b>0.015 0.011 0.010 0.009</b> | <b>0.014 0.011 0.012 0.012</b> | <b>0.014 0.013 0.010 0.011</b> |
| <b>GMM</b>   | 0.028 0.026 0.021 0.030        | 0.027 0.024 0.029 0.021        | 0.023 0.023 0.025 0.020        |
| <b>CRUKF</b> | 0.025 0.028 0.017 0.023        | 0.029 0.025 0.018 0.027        | 0.023 0.016 0.021 0.020        |

**Tableau 4.1** : Comparaison entre les performances des différentes techniques.

#### **4.10. Conclusion**

Les résultats de simulation du filtre de Kalman étendu (EKF), qui représente le meilleur filtre, car donnant de très bons résultats dans le cadre d'estimation de la trajectoire du robot mobile et cela avec une petite erreur d'estimation qui tourne au voisinage de zéro. La simulation du filtre de Kalman sans parfums (UKF) a révélé de meilleurs résultats par rapport au filtre de Kalman étendu, dans l'estimation de la même trajectoire du robot mobile et ce avec une petite erreur d'estimation par rapport à l'erreur du filtre de Kalman étendu. De même que la simulation des résultats du filtre de Kalman à différence centrale (CDKF) a permis d'obtenir de meilleurs résultats par rapport aux deux autres filtres précédemment cités (EKF et UKF). Les simulations ont donné de très bons résultats dans l'estimation de la même trajectoire du robot mobile et ce avec une petite erreur d'estimation par rapport aux deux autres filtres. La simulation utilisant le modèle de mélange gaussien (GMM) a donné de bons résultats mais pas du même niveau que les résultats du filtre de Kalman étendu, au celui du filtre de Kalman sans parfums ou encore celui du filtre de Kalman à différence centrale. L'erreur d'estimation, dans ce cas, tourne autour de zéro. La simulation par la technique de la racine cubique du filtre de Kalman sans parfums (CRUKF) a permis de réaliser de meilleurs résultats que ceux obtenus à partir du modèle de mélange gaussien (GMM). L'erreur d'estimation se situe toujours au voisinage de zéro, qu'il s'agisse des trois filtres de Kalman (EKF, UKF et CDKF) ou de la technique de la racine cubique du filtre de Kalman sans parfums (CRUKF). La comparaison d'estimation de la position et d'orientation du robot mobile par les différents filtres utilisés a permis de faire ressortir la technique la plus performante en matière d'estimation des erreurs et de localisation dans les différentes trajectoires. La comparaison entre les performances des différentes techniques par des calculs de l'erreur de la position et de l'erreur d'orientation ainsi que de l'erreur de covariance estimée a montré que l'erreur de CDKF est faible par rapport aux erreurs de UKF, EKF, GMM et CRUKF (voir Tableau 4.1).

## **Conclusion générale**

La présente étude exposée dans le cadre de cette thèse porte sur la problématique de localisation et d'estimation des différents modèles ainsi que la poursuite des différentes trajectoires du robot mobile dans un environnement connu contenant des obstacles fixes en présence des incertitudes d'estimation. L'objet de l'une de nos principales approches, à savoir la synthèse d'un dispositif d'estimation d'état pour les systèmes non linéaires, est le filtre de Kalman. Le présent travail s'intéresse au développement d'algorithmes permettant de résoudre le problème de non linéarité des systèmes. Le premier consiste en l'utilisation du filtre de Kalman étendu (EKF). Le deuxième, quant à lui, consiste en l'utilisation du filtre de Kalman sans parfums (UKF) alors que le troisième consiste en l'utilisation du filtre de Kalman à différence centrale (CDKF). Le quatrième consiste en l'utilisation du modèle de mélange gaussien (GMM). La proposition de nouvelle méthode d'estimation se basant sur la technique de la racine cubique du filtre de Kalman sans parfums (CRUKF) a donné de très bon résultats d'estimation du profil des différentes trajectoires du robot mobile, de la position et de l'orientation. Ces techniques, appliquées sur les divers chemins ont été simulées donnant ainsi des résultats améliorés par rapport au modèle de mélange gaussien (GMM), mais nécessitant, toutefois, un réglage des matrices d'auto-corrélations des bruits d'état et de mesure comme montré dans les figures de chapitre quatre. Le mouvement de robot mobile dans le plan à deux dimensions (2D), ainsi que la position du robot mobile ont été mesurés par le capteur GPS. L'orientation a été mesurée par le capteur compas digital ainsi que la distance entre le robot mobile et les différents obstacles qui ont été mesurés par le capteur ultrason.

La comparaison des résultats de simulation des algorithmes des différentes techniques de localisation et d'estimation du modèle du robot mobile a révélé que les erreurs d'estimation de la position, l'orientation et la distance entre le robot mobile et les obstacles se situe au voisinage de zéro. Sachant que les résidus de dérive sont bornés, cette méthode, nous l'avons exploité à travers différentes techniques de localisation sous contraintes. Les résultats obtenus ont montré une légère diminution des erreurs d'estimation du filtre de Kalman à différence centrale (CDKF) par rapport aux autres filtres : le filtre de Kalman étendu (EKF), le filtre de Kalman sans parfums (UKF), la technique de la racine cubique du filtre de Kalman sans parfums (CRUKF)

ainsi que le modèle de mélange gaussien (GMM). La comparaison entre les performances des différentes techniques par des calculs de l'erreur de position, l'erreur d'orientation ainsi que l'erreur de covariance estimée a montré que l'erreur de CDKF est faible par rapport aux erreurs dues à l'utilisation d'autres techniques : UKF, EKF, GMM et CRUKF.

Enfin, le présent travail peut s'ouvrir sur de nombreuses perspectives, parmi lesquelles nous proposons:

- l'affinement des hypothèses de travail et des modèles associés, comme par exemple celle d'une terre ellipsoïdale et non sphérique présentant de biais accélérométriques et ainsi de suite.
- la mise au point d'une technique de " bornage de covariance", qui consisterait à contraindre les écarts types associés aux résidus de dérive qui sont modélisés par des sommes de processus auto-corrélés d'ordre 1 permettant ainsi de réduire les matrices de covariance des techniques utilisées pour la poursuite de robot mobile.
- l'essai dans un avenir proche de la solution proposée sur d'autres trajectoires plus compliquées et d'autres applications comme l'estimation de la trajectoire du robot mobile dans un environnement qui contient des obstacles fixes et mobiles.
- l'essai de stabiliser les trajectoires du robot mobile dans son environnement.

## REFERENCE BIBLIOGRAPHIQUE:

- [1] Rodney, Brooks, "A robust layered control system for a mobile robot" IEEE Journal of Robotics and Automation, RA-2, April 1986.
- [2] Rodney, Brooks, "Intelligence sans représentation", l'intelligence artificielle, 47(1-3): 139-159, Janvier 1991.
- [3] N. Mansard, O. Stasse, F. Chaumette et K Yokoi. "Visually-guided grasping while walking on a humanoid robot". In IEEE Int. Conf. on Robotics and Automation, ICRA'07, pages 3041–3047, Roma, Italy, April 2007.
- [4] O. Bonnet Torres. 'Filtrage de Kalman appliqué à la navigation inertielle'. 2003.
- [5] J. E. Bortz. "A new mathematical formulation for strapdown inertial navigation". IEEE Transactions on Aerospace and Electronic Systems, 1971.
- [6] P. Borne, G. Dauphin-Tanguy, J. P. Richard, F. Rotella & I. Zambettakis. "Commande et optimisation des processus " . Technip, 1990.
- [7] M. Khatib, H. Jaouni, R. Chatila & J.P. Laumond. Dynamic Path Modification for Car-Like Nonholonomic Mobile Robots. IEEE International Conference on Robotics and Automation, pages 2920\_2925. Albuquerque, USA, 1997.
- [8] P. Morin et C. Samson. "Introduction à la commande par retour d'état des systèmes non-holonomes". Ecole des Mines de Paris, 2003.
- [9] J. Neimark et N. Fufaev." Dynamics of non holonomic systems", volume 33. Translations of Mathematical Monographs, 1972.
- [10] B. Schiele et J. L. Crowley. "A Comparison of Position Estimation Techniques Using Occupancy Grids". In IEEE International Conference on Robotics and Automation, pages 1628–1634, San Diego, Etats-Unis, mai 1994.
- [11] H. Nijmeijer et A. J. Van der Shaft. "Nonlinear dynamical control systems". Springer Verlag, New York, 1990.
- [12] D.P. Tsakiris, P. Rives et C. Samson. "Applying visual servoing techniques to control non-holonomic mobile robots". In Proceedings of the workshop on new trends in image based robot servoing (IROS'97), Grenoble, France, September 1997.
- [13] Dhaouadi, R., & Hatab, A. A. "Dynamic Modelling of Differential-Drive Mobile Robots using Lagrange and Newton-Euler Methodologies", A Unified Framework. Advance in Robotics and Automation, 2013.
- [14] Nandy, S., Shome, S. N., Somani, R., Tanmay, T., Chakraborty, G., & Kumar, C. S. (2011, August). "Detailed slip dynamics for nonholonomic mobile robotic system".

In Mechatronics and Automation (ICMA), International Conference on (pp. 519-524). IEEE, 2011.

[15] Khatib O. "Commande dynamique dans l'espace opérationnel des robots-manipulateurs en présence d'obstacles", Thèse de Docteur-Ingénieur, Ecole Nationale Supérieure de l'Aéronautique et de l'Espace, Toulouse, France, December 1980.

[16] Korrami F., Özgüner U., "Decentralized control of robot manipulators via state and proportional-integral feedback", Proc. IEEE Int. Conf. on Robotics and Automation, Philadelphia, USA, April 1988, p. 1198-1203.

[17] Lewis F.L., Abdallah C.T., Dawson D.M., "Control of robot manipulators", Macmillan, New York, USA, 1993.

[18] M. Suzuki, "Enactive Robot Vision". PhD thesis, École Polytechnique Fédérale de Lausanne (EPFL), 2007.

[19] R. Vidal, O. Shakernia & S. Sastry. "Distributed Formation Control with Omnidirectional Vision-Based Motion Segmentation and Visual Servoing". IEEE Robotics and Automation Magazine, vol. 11, no. 4, pages 14–20, 2004.

[20] C. Urmson, J. Anhalt, M. Clark, T. Galatali, J.P. Gonzalez, J. Gowdy, A. Gutierrez, S. Harbaugh, M. Johnson-Roberson, H. Kato, P.L. Koon, K. Peterson, B.K. Smith, S. Spiker, E. Tryzelaar et W. L. Whittaker. High Speed Navigation of Unrehearsed Terrain : Red Team Technology for Grand Challenge 2004. Rapport technique, Université de Carnegie Mellon, Pittsburg, Etats-Unis, 2004.

[21] G. Campion, G. Bastin et B. D'Andréa-Novel. "Structural Properties and Classification of Kinematic and Dynamic Models of Wheeled Mobile Robots". IEEE Transactions on Robotics and Automation, vol. 12, no. 1, pages 47–62, 1996.

[22] C. Canudas de Wit, B. Siciliano et G. Bastin, éditeurs. "Theory of robot control". Springer, 1996.

[23] G. Dudek et M. Jenkin. "Computational principles of mobile robotics". Cambridge University Press, 2000.

[24] J.-Y. Fourquet et M. Renaud. "Coordinated Control of a Non-Holonomic Mobile Manipulator." In ISER'1999, pages 115–125, Sydney, Australie, mars 1999.

[25] OmniBot. "Projet Robea. De la vision omnidirectionnelle à la commande de robots mobiles", 2004.

[26] C. Samson, M. Leborgne et B. Espiau. "Robot control. the task function approach", volume 22 of Oxford Engineering Series. Oxford University Press, 1991.

- [27] B. Schiele et J. L. Crowley. "A Comparison of Position Estimation Techniques Using Occupancy Grids". In IEEE International Conference on Robotics and Automation, pages 1628–1634, San Diego, Etats-Unis, mai 1994.
- [28] Omar Ait yeder "Localisation référencée modèle d'un robot mobile d'intérieur " thèse doctorat., Université D'évry Parais, Décembre 2002.
- [29] Benoit Thuilot "Contribution À La Modélisation Et À La Commande De Robots Mobiles À Roues" , thèse doctorat De L'école Des Mines De Parais, 1995.
- [30] Ré-Mi HAGE "Estimation du temps de parcours d'un réseau urbain par fusion de données de boucles magnétiques et de véhicules traceurs Une approche stochastique avec mise en oeuvre d'un filtre de Kalman sans parfum", thèse doctorat à IFSTTAR-Nantes, Septembre 2012.
- [31] U. R. Zimmer. Mobile Robotics "Path Planning and Motion Control". Université Nationale d'Australie, Camberra, Australie, 2001.
- [32] Tian, Y., Sidek, N., & Sarkar, N. "Modeling and control of a nonholonomic wheeled mobile robot with wheel slip dynamics". In Computational Intelligence in Control and Automation, CICA 2009. IEEE Symposium on (pp. 7-14). IEEE, 2009.
- [33] Tzafestas, S. G.. "Introduction to Mobile Robot Control". Elsevier, 2014.
- [34] Sidek, N., & Sarkar, N. "Dynamic modeling and control of nonholonomic mobile robot with lateral slip". In Systems, 2008. ICONS 08. Third International Conference on (pp. 35-40). IEEE.
- [35] Bliman, P. A., & Sorine, M.. "Friction modeling by hysteresis operators. Application to Dahl, sticktion and Stribeck effects". Pitman Research Notes in Mathematics Series, 10-10. 1993
- [36] Bliman, P. A., & Sorine, M. "A system-theoretic approach of systems with hysteresis. application to friction modelling and compensation". In Proceedings of the 2nd European control conference (pp. 1844-1849). September, 1993,
- [37] Hahn, J. O., Rajamani, R., & Alexander, L. "GPS-based real-time identification of tire-road friction coefficient". Control Systems Technology, IEEE Transactions on, 10(3), 331-343. 2002
- [38] Li, L., Wang, F. Y., & Zhou, Q. "Integrated longitudinal and lateral tire/road friction modeling and monitoring for vehicle motion control". Intelligent Transportation Systems, IEEE Transactions on, 7(1), 1-19. 2006.

- [39] A. Micaelli, B. d'Andréa-Novet, and H.T. Bailot. "Modeling and asymptotic stabilization of mobile robots equipped with two or more steering wheels ". In Proc. ICAR-CV Conf., pages RO:13.5.1-13.5.5, Singapore, September 1992 ,
- [40] G. Benet, F. Blanes, J. E. Simó and P. Pérez, 'Using infrared sensors for distance measurement in mobile robots'. Journal of Robotics and Autonomous Systems, n° 40, pp. 255-266, Elsevier Science Publishers, 2002.
- [41] F.M. Antoniali and G. Driolo, "Robot localization in nonsmooth environments : experiments with a new filtering technique". Submitted at the 2001 IEEE International Conference on Robotics and Automation, 2001.
- [42] Geovany Araujo Borges and Marie-José Aldon, "Robustified estimation algorithms for mobile robot localization based on geometrical environment maps". Journal of Robotics and Autonomous Systems, n° 45, pp. 131-159, Elsevier Science Publishers, 2003.
- [43] Wolfram Burgard, Dieter Fox, D. Henning and T. Schmidt, "Estimating the absolute position of a mobile robot using position probability grids". In AAAI / IAAI, volume 2, pp. 896-901, 1996.
- [44] P. L. Bogler. "Tracking a maneuvering target using input estimation". IEEE Transactions on Aerospace and Electronic Systems, 1987.
- [45] D. Declecq, " Signaux et systèmes en questions (IV) Détection et estimation des signaux ", Hermès, 1996.
- [46] M. Akay, "Detection and estimation methods for biomedical signals", California Academic Press, 1996.
- [47] P. Comon, C. Jutten, "Handbook of Blind source Separation - Independent Component Analysis and Applications", Elsevier, 2010
- [48] M. Gugliemi, "Signaux aléatoires : modélisation, estimation, détection", Hermès, 2004.
- [49] M. Kunt, G. Coray, Granlund G. H., J.-P. Haton, "Reconnaissance de formes et analyse de scènes", Presses polytechniques et universitaires romandes, CNET-NST, 2000.
- [50] A. Quinquis, C.-S. Maroni, "Détection et estimations des signaux : exercices et problèmes corrigés", Hermès, 1999.
- [51] L. L. Scharf, "Statistical Signal Processing - Detection, Estimation and Time Series Analysis", Addison-Wesley, 1991.

- [52] H. Van Trees, "Detection, Estimation and Modulation Theory", John Wiley and Sons, (Tomes 1, 2 et 3) 1968.
- [53] H. Stark, "Probability, Random Processes, and Estimation Theory for Engineers", Prentice Hall, 1994.
- [54] B. Picinbono, "Signaux aléatoires", Tomes 1 et 2, Dunod université, 1994
- [55] Azzimonti, D. "Contributions to Bayesian set estimation relying on random field priors". PhD thesis, University of Bern. 2016.
- [56] Azzimonti, D., Ginsbourger, D., Chevalier, C., Bect, J., and Richet, Y. "Adaptive Design of Experiments for Conservative Estimation of Excursion Sets". working paper or preprint 2018.
- [57] Bachoc, F. "Cross validation and maximum likelihood estimations of hyperparameters of Gaussian processes with model misspecification". Computational Statistics & Data Analysis, 66 :55\_69. 2013a.
- [58] Bachoc, F. "Estimation paramétrique de la fonction de covariance dans le modèle de krigeage par processus gaussiens : application à la quantification des incertitudes en simulation numérique". PhD thesis, Université Paris-Diderot Paris VII. 2013b.
- [59] De Haan, L. Estimation of the minimum of a function using order statistics. Journal of the American Statistical Association, 76(374) :467\_469. 1981.
- [60] M.-J. Aldon. "Capteurs et méthodes pour la localisation des robots mobiles". Techniques de l'Ingénieur, traité Informatique Industrielle, vol. S-7852, pages 1–19, 2001.
- [61] G. Giralt, R. Chatila et M. Vaisset. "An Integrated Navigation and Motion Control System for Autonomous Multisensory Mobile Robots". In First International Symposium on Robotics Research, pages 191– 214, Cambridge, 1984.
- [62] A. Kelly. "Some Useful Results for Closed Form Propagation of Errors in Vehicle Odometry". Rapport technique CMU-RI-TR-00-20, Université de Carnegie Mellon, Pittsburg, Etats-Unis, 2000.
- [63] J.-C. Radix. "Gyroscopes et Gyromètres rotatif avec éléments mécaniques". Techniques de l'Ingénieur, traité Mesures et Contrôle, vol. R-1940, pages 1–10, 1999.
- [64] Rhudy. M, Gu. Y, Gross. J, and Napolitano. M. R. "Evaluation of Matrix Square Root Operations for UKF within a UAV GPS/INS Sensor Fusion Application".

International Journal of Navigation and Observation, Vol. 2011, Article ID 416828, 11 pages, Dec. 2011.

[65] Rhudy. M, Gu. Y, Gross. J, Gururajan. S, and Napolitano. M. R. "Sensitivity and Robustness Analysis of EKF and UKF Design Parameters for GPS/INS Sensor Fusion". AIAA Journal of Aerospace Information Systems, Vol. 10, No. 3, pp. 131-143. March 2013.

[66] S. Emura and S. Tachi, "Compensation of time lag between actual and virtual spaces by multi-sensor integration" in Proceedings of IEEE International Conference on Multisensor Fusion and Integration for Intelligent Systems, pp. 463–469, October 1994.

[67] E. Foxlin, "Inertial head-tracker sensor fusion by a complementary separate-bias Kalman filter," in Proceedings of the IEEE Virtual Reality Annual International Symposium, pp. 185–194, April 1996.

[68] L. Xue, W. Yuan, H. Chang, and C. Jiang, "MEMS-based multi sensor integrated attitude estimation technology for MAV applications," in Proceedings of the 4th IEEE International Conference on Nano/Micro Engineered and Molecular Systems (NEMS '09), pp. 1031–1035, January 2009.

[69] P. Setoodeh, A. Khayatian, and E. Farjah, "Attitude estimation by separate-bias Kalman filter-based data fusion," Journal of Navigation, vol. 57, no. 2, pp. 261–273, 2004.

[70] E. Abbott and D. Powell. "Land-Vehicle Navigation using GPS". Proc. of the IEEE, Vol. 87, NO. 1, Jan. 1999.

[71] B. Barshan and H.F. Durrant-Whyte. "Inertial navigation systems for mobile robots". IEEE Trans. On Rob. and Auto.. pp. 328-342. Vol. 11, n°3, June 1995.

[72] Ph. Bonnifait, G. Garcia. "Design and Experimental Validation of an Odometric and Goniometric Localization System for Outdoor Robot Vehicles". IEEE Trans. On Rob. and Auto. Vol. 14, n° 4, pp. 541 - 548. 1998.

[73] Ph. Bonnifait, P. Bouron. "Statistical Modeling of the GPS and DGPS signals". Technical report UTC/Heudiasyc, n° 2296. May 2000.

[74] S. Cooper and H. Durrant-Whyte. "A Kalman Filter Model for GPS Navigation of Land Vehicles". IROS.. Munich. pp. 157-163. Sept. 1994.

[75] J. Guivant, E. Nebot, S. Baiker. "High accuracy Navigation Using Laser Range Sensors in outdoors Applications". San Francisco. pp. 3817-3822. ICRA2000.

- [76] S. Julier, H. Durrant-Whyte. "Process Models For The High-Speed Navigation of Road Vehicles". ICRA. pp. 101-105. 1995.
- [77] D. Mc Neil. "Multi-rate Sensor Fusion for GPS Navigation Using Kalman Filtering". M. Sc. Report. Virginia Polytechnic Institute. May, 1999.
- [78] P. Setoodeh, A. Khayatian, and E. Farjah, "Attitude estimation by separate-bias Kalman filter-based data fusion," *Journal of Navigation*, vol. 57, no. 2, pp. 261–273, 2004.
- [79] S. Kwanmuang, L. Ojeda, and J. Borenstein, "Magnetometer enhanced personal locator for tunnels and GPS-denied outdoor environments," in *Sensors, and Command, Control, Communications, and Intelligence Technologies*, Orlando, Fla, USA, April 2011.
- [80] B. D. O. Anderson & J. B. Moore. "Optimal filtering". Prentice Hall inc., 1979.
- [81] Julier, J. Uhlmann, and H. Durrant-Whyte, "A new approach for filtering nonlinear systems," in *Proceedings of the American Control Conference*. 1995.
- [82] W. Burgard, D. Fox, D. Hennig, and T. Schmidt. "Estimating the absolute position of a mobile robot using position probability grids". In *Proceedings of the Thirteenth National Conference on Artificial Intelligence (AAAI-96)*, 1996.
- [83] Vincent Sircoulomb. "Etude des concepts de filtrage robuste aux méconnaissances de modèle et aux pertes de mesures. Application aux systèmes de navigation". Thèse de Doctorat. 2006.
- [84] R. E. Kalman. "A new approach to linear filtering and prediction problems". *Transactions of the ASME - Journal of Basic Engineering, Series D*, 1960.
- [85] R. E. Kalman & R. S. Bucy. "New results in linear filtering and prediction theory". *Transactions of the ASME - Journal of Basic Engineering, Series D*, 1961.
- [86] L. D. Avendaño-Valencia, L. E. Avendaño, J. M. Ferrero & G. Castellanos Dominguez. "Improvement of an extended Kalman filter power line interference suppressor for ECG signals". *Computers in cardiology*, 2007.
- [87] S. Azou. "Réalisation équilibrée de systèmes par orthogonalisation de fonctions d'entrée". *Grammiens et approximation. Thèse de doctorat, Université de Bretagne occidentale*, 1997.
- [88] M. V. Basin. "On optimal filtering for polynomial system states. *J. of Dynamic Systems, Measurement, and Control*", March 2003.
- [89] Bradley M. Bell and Frederick W. Cathey. "The iterated kalman filter update as a gauss-newton method". *IEEE Trans. Automat. Contr*, Feb. 1993.

- [90] S. Buyamin & J. W. Finch. "Tuning extended Kalman filter for induction motor drives using simulated annealing". Modelling, Identification and Control Conference, Innsbruck, Austria, 2007.
- [91] Z. Cai, F. Le Gland & H. Zhang. "An adaptive local grid refinement method for nonlinear filtering". Rapport technique n°2679, INRIA, Rennes, 1995.
- [92] J. Carpenter, P. Clifford & P. Fearnhead. "Efficient implementation of particle filters for nonlinear systems". 4th interim report, DRA contract WSS/U1172, department of statistics, University of Oxford, 1997.
- [93] R. Van der Merwe. "SPKF for probabilistic inference in dynamic state-space models". Thèse de doctorat, Faculty of the OGI school of Science & Engineering, 2004.
- [94] R. Van der Merwe & E. Wan. "Sigma-Point Kalman Filters for integrated navigation". 60th annual meeting of the Institute Of Navigation (ION), Dayton, U.S.A., 2004.
- [95] R. Van der Merwe & E. Wan. "Sigma-Point Kalman Filters for nonlinear estimation and sensor fusion. Applications to integrated navigation". AIAA Guidance, Navigation and Control Conference and Exhibit, Providence, R.I., U.S.A., 2004.
- [96] E. Wan & R. Van der Merwe. "The unscented Kalman filter". Ed. : T. Haykins, Kalman filtering and neural network, John Wiley & sons inc., 2001.
- [97] E. Wan & A. Nelson. "Dual Kalman filtering methods for nonlinear prediction, estimation and smoothing". Advances in neural information processing systems, Cambridge, U.K., 1997.
- [98] Harianto, M. Rivai, D. Purwanto, "Implementation of Electronic Nose in Omnidirectional Robot", International Journal of Electrical and Computer Engineering, 3, 399-406, 2013.
- [99] Hamissi, Minoo & Faez, Karim. "Real-Time Hand Gesture Recognition Based on the Depth Map for Human Robot Interaction". International Journal of Electrical and Computer Engineering (IJECE). 3. 10.11591/ijece.v3i6.3954. 2013.
- [100] Bachir, Ouamri & Foitih, Zoubir. "Adaptive Neuro-fuzzy Inference System Based Control of puma 600 Robot Manipulator". International Journal of Electrical and Computer Engineering (IJECE). 2. 10.11591/ijece.v2i1.116. 2011.
- [101] Stephens Benjamin J. and Atkeson Christopher G. "Push recovery by stepping for humanoid robots with force controlled joints". InIEEE International Conference on Humanoid Robots.2010.

- [102] Rezaee, Alireza & Afshar, Reza. "Digital Encoder Designing for Mobile Robot Control". International Journal of Electrical and Computer Engineering (IJECE). 4. 10.11591/ijece.v4i4.5500. 2014.
- [103] Sahu, Jagannath & Choudhury, Bibhuti & Patra, M.R. "An Effective Development and Analysis of a Mobile Robot". International Journal of Electrical and Computer Engineering (IJECE). 6. 654. 10.11591/ijece.v6i2.pp654-665. 2016.
- [104] Nurmaini, Siti & Tutuko, Bambang. "Intelligent Robotics Navigation System: Problems, Methods, and Algorithm". International Journal of Electrical and Computer Engineering. 7. 10.11591/ijece.v7i6.pp3711-3726. 2017.
- [105] Malagon-Soldara, Salvador & Toledano-Ayala, Manuel & Soto-Zarazua, Genaro & Carrillo-Serrano, R.V. & Rivas-Araiza, Edgar. "Mobile Robot Localization: A Review of Probabilistic Map-Based Techniques". IAES International Journal of Robotics and Automation (IJRA). 4. 10.11591/ijra.v4i1.6548. 2015.
- [106] Julier, Simon & Uhlmann, J.K. "Reduced sigma point filters for propagation of means and covariances through nonlinear transformations". Proceedings of the American Control Conference. 2. 887 - 892 vol.2. 10.1109/ACC.2002.1023128. 2002.
- [107] Chahmi, Abdelghani & Mokhtar, Bendjebbar & Raison, Bertrand & Benbouzid, Mohamed. "An Extender Kalman Filter-based Induction Machines Faults Detection". International Journal of Electrical and Computer Engineering (IJECE). 6. 535-548. 10.11591/IJECE.v6i1.9387.2016.
- [108] Melo, Leonimer & Junior, Jose. (2010). "Trajectory Planning for Nonholonomic Mobile Robot Using Extended Kalman Filter". Mathematical Problems in Engineering. 2010. 10.1155/2010/979205.
- [109] Jun Li, Huazhong Lu, Zhou Yang, Feng Pei. "State-of-Charge Estimation and Charge Equalization for Electric Agricultural Machinery Using Square-Root Central Difference Kalman Filter". International Conference on Transportation, Mechanical, and Electrical Engineering (TMEE), Changchun, China, December 2011.
- [110] R. Merwe, E. Wan, and S. J. Julier, "Sigma-Point Kalman Filters for Nonlinear Estimation and Sensor-Fusion: Applications to Integrated Navigation," Proc. AIAA Guidance, Navigation & Control, pp.1-30, Aug. 2004.
- [111] Guoliang Liu and Guohui Tian. "Central Difference Information Filter with Interacting Multiple Model for Robust Maneuvering Object Tracking". International Conference on Information and Automation (IEEE) Lijiang, China, August 2015.

- [112] Rudolph van der Merwe. "Sigma-point Kalman filters for probabilistic inference in dynamic statespace models". Workshop on Advances in Machine Learning, Montreal., June 2003.
- [113] Simon Julier and Jeffrey Uhlmann. A new extension of the kalman filter to nonlinear systems. Int. Symp. Aerospace/Defense Sensing, Simul and Controls, Orlando, FL, 1997.
- [114] A.P. Dempster, N.M. Laird et Donald Rubin, " Maximum Likelihood from Incomplete Data via the EM Algorithm ", Journal of the Royal Statistical Society. Series B (Methodological), vol. 39, n° 1, p. 1–38, 1977.
- [115] G. Celeux et G. Govaert, „ A classification EM algorithm for clustering and two stochastic versions,, Computational Statistics Quarterly, vol. 2, n° 1, p. 73–82, 1991.
- [116] Frank Nielsen, k-MLE: „A fast algorithm for learning statistical mixture models,, arxiv (ICASSP 2012), 2012.
- [117] G. Celeux et G. Diebolt, « The sem algorithm : a probabilistic teacher algorithm derived from the em algorithm for the mixture proble » Rapport de recherche RR-1364, Inria, Institut National de Recherche en Informatique et en Automatique, 1985.
- [118] Jean-Luc Gauvain et Chin-Hui Lee. "Maximum a Posteriori estimation for multivariate gaussian mixture observations of Markov chains". IEEE Transactions on Acoustics, Speech and Signal Processing, 2 :291\_298, avril 1994.
- [119] Guillaume Gravier, Laurent Benaroya, Alexey Ozerov, Rémi Gribonval, et Frédéric Bimbot. "Séparation de sources à partir d'un seul capteur pour la reconnaissance robuste de la parole". In Journées d'étude sur la parole, Fes, 2004.
- [120] Douglas A. Reynolds, Thomas F. Quatieri, et Robert B. Dunn « Speaker verification using adapted gaussian mixture models ». Digital Signal Processing, 10 :19\_41, 2000.
- [121] Valérien Nêmesin « Apprentissage non-supervisé dans les modèles linéaires gaussiens. Application à la biométrie dynamique de l'iris » Thèse De Doctorat, Ecole Centrale Marseille .septembre 2014.
- [122] S. Arulampalam, S. Maskell, N. Gordon & T. Clapp. "A tutorial on particle filters for online nonlinear/non-Gaussian Bayesian tracking". IEEE Transactions on Signal Processing, 2002.
- [123] Zhide Liu, Jiabin Chen, Xingtai Yao, Chunlei Song, Yong Wang. "An improved square root unscented Kalman filter for projectile's attitude determination". Industrial

Electronics and Applications (ICIEA) 2010 the 5th IEEE Conference on, pp. 1747-1751, 2010.

[124] Rudolph van der Merwe and Eric A. Wan . "The Square-Root Unscented Kalman Filter For State And Parameter-Estimation". Oregon Graduate Institute of Science and Technology 20000 NW Walker Road, Beaverton, Oregon 97006, USA ; rvdmerwe,ericwan}@ece.ogi.edu.

[125] Eric A. Wan and Rudolph van der Merwe. The Unscented Kalman Filter for Nonlinear Estimation. in Proc. of IEEE Symposium 2000 (AS-SPCC), Lake Louise, Alberta, Canada, Oct. 2000.

[126] Eric A. Wan and Rudolph van der Merwe, and A. T. Nelson. Dual Estimation and the Unscented Transformation. in Neural Information Processing Systems 12. 2000, pp. 666–672, MIT Press.

[127] R. van der Merwe and Eric A. Wan, "The square-root unscented Kalman filter for state and parameter-estimation," in 2001 IEEE International Conference on Acoustics, Speech, and Signal Processing, vol. 6, pp. 1- 4, 2001.

**[128] O. Bayasli, H.Salhi " the cubic root unscented Kalman filter to estimate the position and orientation of mobile robot trajectory " . International Journal of Electrical and Computer Engineering, Vol. 10, No. 5, October 2020, pp. 5243~5250.**

**[129] O. Bayasli, H.Salhi "Localisation and estimation of mobile robot trajectory using extended filter and unscented filter of an integrated sensors".communication in university of Ghardaia, Algeria, SSENAM'5 ,Ghardaia, November 22-23,2019.**