

UNIVERSITE SAAD DAHLEB DE BLIDA

Faculté des sciences

Département de Mathématiques

MEMOIRE DE MAGISTER

Spécialité : Recherche opérationnelle

**CONTRIBUTION A L'ETUDE DE LA K-INDEPENDANCE
DANS LES GRAPHS**

Par

Nacéra MEDDAH

Devant le jury composé de :

F. HANNANE
M. BLIDIA
A. BERRACHEDI
I. BOUCHEMAKH
M. CHELLALI

Professeur, U. de Blida
Professeur, U. de Blida
Professeur, USTHB
Maître de conférence, USTHB
Maître de conférence, U. de Blida

Président
Promoteur
Examineur
Examineur
Examineur

Blida, décembre 2006.

RESUME

Soit $G = (V, E)$ un graphe simple. Un sous ensemble S de V est dit dominant de G , si tout sommet de $V-S$ est voisin d'au moins un sommet dans S . On note la cardinalité minimum d'un ensemble dominant de G par $\gamma(G)$. Lorsqu'on impose des conditions supplémentaires à l'ensemble dominant, on obtient d'autres types de domination. Par exemple, si on impose que tout sommet de $V-S$ possède au moins k voisins dans S , on aura la k -domination et si on impose que le degré maximum du sous graphe induit par l'ensemble de sommets S est au plus $k-1$, on aura la k -indépendance.

Dans cette thèse, on s'intéresse à l'étude de la k -indépendance et la k -domination dans les graphes, on établit des bornes pour les paramètres associés à la k -domination et la k -indépendance, à savoir $\gamma_k(G)$, $\Gamma_k(G)$, $i_k(G)$ et $\beta_k(G)$. Enfin on caractérise les graphes extrémaux atteignant certaines bornes dans le cas de certaines classes de graphes simples comme les arbres et les cactus.

ABSTRACT

Let $G = (V, E)$ be a simple graph. A subset S of V is dominating of G if every vertex of $V-S$ has at least a neighbour in S . The minimum cardinality of a dominating set of G is noted by $\gamma(G)$. When we impose extra conditions on the dominating set, we get other types of domination. For example, if we impose that every vertex of $V-S$ has at least k neighbours in S , we have the k -domination and if we impose that the maximum degree of the subset induced by all the vertices of S is at most $k-1$, we have the k -independence.

In this thesis, we interest to the study of the k -independence and k -domination in the graphs. We establish bounds of the parameters associated to k -domination and k -independence, that is $\gamma_k(G)$, $\Gamma_k(G)$, $i_k(G)$ and $\beta_k(G)$. Finally, we characterise the extreme graphs which ready few limits in the case of some classes of simple graphs like the trees and the cactus.

ملخص

ليكن $G=(V,E)$ بيانا بسيطا. نقول أن المجموعة الجزئية S من V مسيطرة، إذا كان كل رأس من $V-S$ يملك جارا على الأقل في S . يرمز للأصلي الأدنى لمجموعة مهيمنة في G ، بـ $\gamma(G)$. تعرف وسائط أخرى للسيطرة بفرض شروط أخرى على المجموعة المسيطرة مثلا إذا فرضنا أن كل رأس من G يملك k -جارا على الأقل في S فسنحصل على الـ k -سيطرة وإذا فرضنا أن أكبر درجة للبيان الجزئي الناتج عن المجموعة هو أقل من k فسنحصل على الـ k -إستقلالية.

في بحثنا هذا سنهتم بدراسة الـ k -إستقلالية والـ k -سيطرة في البيانات. نعطي نهايات للحدود للوسائط المرتبطة بـ الـ k -إستقلالية و الـ k -سيطرة. يعني $\gamma_k, I_k, i_k, \beta_k$. وأخيرا سنميز البيانات الذروية في حالة بعض البيانات البسيطة مثل الأشجار والصبار.

REMERCIEMENTS

En premier je tiens à exprimer mes gratitudes et mes vifs et sincères remerciements envers mon promoteur Monsieur M. BLIDIA pour son suivi, ses précieux conseils et ses judicieuses suggestions.

Je tiens également à remercier Monsieur M.CHELLALI pour sa patience, ses précieux conseils.

J'adresse mes remerciements à Monsieur Farouk HANNANE, Professeur à l'université Saad Dahleb Blida, pour avoir accepté d'être président de jury.

Je remercie également Monsieur Abdelhafid BERRACHEDI, Professeur à l'USTHB et Melle Isma BOUCHEMAKH, Maître de conférence à l'USTHB, pour m'avoir fait l'honneur d'accepter d'être des membres de jury.

J'exprime mes remerciements envers tous ceux qui ont collaboré de près ou de loin pour accomplir ce travail, plus particulièrement mon mari Monsieur R. Bensalah, mes deux enfants Chahrazed et Abderrahmane, madame O. Favaron et Monsieur S. Khelifi.

Enfin j'exprime toute ma reconnaissance à l'ensemble des professeurs ayant contribué à ma formation.

TABLE DES MATIERES

RESUME.	1
REMERCIEMENTS.	4
TABLE DES MATIERES.	5
LISTE DES ILLUSTRATIONS GRAPHIQUES.	7
GLOSSAIRE.	9
INTRODUCTION.	11
CHAPITRE 1. NOTIONS GENERALES SUR LA THEORIE DES GRAPHS.	14
1.1. Concept théorique de base d'un graphe.	14
1.1.1. Voisinage.	15
1.1.2. Connexité.	16
1.1.3. Graphes particuliers.	17
1.2. Les paramètres classiques de domination.	24
1.2.1. Domination.	25
1.2.2. Indépendance.	25
1.2.3. Irrédondance.	27
CHAPITRE 2. LA K-DOMINATION ET LA K-INDEPENDANCE DANS LES	
GRAPHES.	31
2.1. Définitions et premières propriétés.	31
2.1.1. La domination et l'indépendance.	31
2.1.2. Généralisation à la k -domination et la k -indépendance.	32
2.1.3. Premières propriétés.	33
2.2. Inégalités entre les quatre paramètres de domination.	33
2.3. Bornes sur les paramètres γ_k , i_k et β_k	35
2.3.1. Bornes sur γ_k	35
2.3.2. Bornes sur i_k	42
2.3.3. Bornes sur β_k	42
2.4. Croissance des suites (γ_k) et (β_k)	44
2.4.1. Graphes généraux.	44
2.4.2. Classes particulières de graphes.	46
2.5. Problèmes ouverts.	47

CHAPITRE 3. CONTRIBUTION A L'ETUDE DE LA K-INDEPENDANCE DANS

LES GRAPHERS.	48
3.1. Propriétés préliminaires sur i_k et β_k	48
3.2. Bornes supérieures sur i_k	51
3.3. Bornes inférieures sur β_k	55
3.3.1. Caractérisation des arbres T avec $\beta_k(T)=kn/(k+1)$	56
3.4. Etude des nombres i_2 et β_2	59
3.4.1 Etude du nombre i_2	59
a) Caractérisation des arbres T avec $i_2(T)=(n+s(T))/2$	60
b) Caractérisation des graphes G avec $i_2(G)=i(G)+\beta(G)$	66
c) Caractérisation des graphes G avec $i_2(G)=(n+2)/(\Delta+1)$	71
d) Caractérisation des graphes G avec $i_2(G)=(n-\Delta)$	72
3.4.2 Etude du nombre β_2	74
a) Caractérisation des arbres T avec $\beta_2(T)=(n+s(T))/2$	74
CONCLUSION.	78
APPENDICE A.	79
APPENDICE B.	81
REFERENCES.	82

LISTE DES ILLUSTRATIONS GRAPHIQUES ET TABLEAUX

Figure 1.1.	Représentation graphique d'un (7.8)-graphe, G	15
Figure 1.2.	Illustration d'un isthme et d'un sommet d'articulation dans le graphe connexe G de la figure 1.2(a).	17
Figure 1.3.	Illustration des concepts : graphe partiel, sous graphe partiel et sous graphe induit d'un graphe G	18
Figure 1.4.	Illustration du concept de couplage dans un graphe G	18
Figure 1.5.	Illustration d'un graphe G , 3-régulier.	19
Figure 1.6.	Illustration des graphes complets.	19
Figure 1.7.	Illustration du concept des graphes multipartis.	20
Figure 1.8.	Illustration des arbres, dont les sommets pendants sont indiqués en noire. .20	
Figure 1.9.	Quelques arbres particuliers.	21
Figure 1.10.	Illustration de la couronne du cycle C_4	22
Figure 1.11.	Représentation d'un graphe G et son graphe complémentaire $\bar{G}$	22
Figure 1.12.	Illustration du concept des blocs graphes.	23
Figure 1.13.	Illustration du concept des cactus graphes.	23
Figure 1.14.	Les rois dans un échiquier.	24
Figure 1.15.	Illustration de la notion d'indépendance et la notion de clique.	26
Figure 1.16.	Le graphe de PETERSEN P	27
Figure 1.17.	Le graphe H	28
Figure 1.18.	Le problème des radars.	30
Figure 2.1.	L'ensemble de sommets en noire est un 2-indépendant maximal mais n'est pas un 2-dominant.	34
Figure 2.2.	Un cactus graphe G tel que $\gamma_2(G) < \beta(G)$	39
Figure 2.3.	Un cactus graphe G tel que $\gamma_2(G) + \beta(G) = n$	39
Figure 2.4.	Un cactus graphe G tel que $\gamma_2(G) = (n(G) + \gamma(G))/2$	40
Figure 2.5.	Un cactus graphe G tel que $\gamma_2(G) = 2k = (n(G) + c'_3(G) + \ell(G))/2$ $= (n(G) + c_0(G) + \ell(G))/2$	41
Figure 2.6.	Un graphe G pour lequel $\Delta = 3$, $\beta_\Delta(G) = 6$ et $\Gamma_\Delta(G) = 6$ donc $\Gamma_\Delta < \beta_\Delta$	43

Figure 2.7.	Un arbre T pour lequel $\beta_k(T) < \Gamma_k(T)$ et $\Gamma_{k+1}(T) < \beta_{k+1}(T)$	44
Figure 2.8.	Les graphes interdits pour avoir quelques propriétés sur γ_k	46
Figure 3.1.	L'étoile généralisée $GS_{p0,p1,\dots,pr}$	49
Figure 3.2.	Un graphe T tel que $i_2(T)=10m$ et $\gamma_2(T)=9m$, i.e $i_2(T) > \gamma_2(T)$ et $i_2(T) - \gamma_2(T) = m \rightarrow \infty$ si $m \rightarrow \infty$	53
Figure 3.3.	Un arbre T pour lequel $\gamma_2(G) > i_2(G)$	54
Figure 3.4.	Un arbre T tel que $i_2(T) > \gamma_t(T)$	54
Figure 3.5.	Un arbre T_k tel que $i_2(T_k) = \gamma_t(T_k) = \gamma_2(T_k)$	55
Figure 3.6.	Un arbre T tel que un $i_2(T)$ -ensemble n'est pas un dominant total et inversement.	55
Figure 3.7.	L'arbre T_t pour $t=0$	57
Figure 3.8.	Un graphe G_k pour lequel $i_2(G_k) = \beta_2(G_k) = (n + s(G_k))/2$	60
Figure 3.9.	Un arbre T tel que $i_2(T) < 2i(T)$	64
Figure 3.10.	Un arbre T pour lequel $i_2(T) = 2i(T)$	64
Figure 3.11.	Un arbre T pour lequel $i_2(T) > 2\gamma(T)$	65
Figure 3.12.	Un graphe G pour lequel $i_2(G) > \gamma(G) + i(G)$	66
Figure 3.13.	Les graphes C_4 , g_1 et le plus petit graphe de la famille $\mathcal{F}$	66
Tableau 3.1.	Variation des valeurs de γ_k et i_k en fonction de k	53

GLOSSAIRE

Arête: Une *arête* est une paire de sommets (u, v) notée par abus $e = uv$ ou bien $e = vu$, où u et v sont les extrémités de e .

Adjacent: Deux sommets d'un graphe G sont dits *adjacents* s'il existe une arête de G joignant ces deux sommets.

Cycle: Un *cycle* est une chaîne d'ordre $n \geq 3$, dont les deux extrémités initiale et terminale sont confondues, Un graphe qui consiste en un seul cycle d'ordre n est appelé un unicycle et est noté C_n .

Acyclique: Un graphe G est dit *acyclique* s'il ne contient pas de cycle.

Boucle: Une *boucle* est une arête dont les deux extrémités sont confondues.

Cardinalité: Le nombre des éléments dans un ensemble est appelé *cardinalité*.

Chaîne: Une *chaîne* dans un graphe G est une séquence alternative des sommets et des arêtes. Le nombre d'arêtes dans la chaîne définit sa longueur, et le nombre de sommets définit son ordre.

Couronne: Une *couronne* d'un graphe G d'ordre n est le graphe obtenu en attachant à chaque sommet de G un nouveau sommet.

Clique: Une *clique* est un sous graphe complet du graphe G .

Ensemble d'arêtes: L'ensemble $E(G)$, comporte toutes les arêtes du graphe G , est appelé l'*ensemble d'arêtes* de graphe.

Ensemble indépendant: Un sous ensemble des sommets S d'un graphe G est appelé *indépendant* si les sommets de S ne sont pas adjacents deux à deux.

Ensemble indépendant maximal: Un ensemble indépendant S des sommets dans un graphe G est appelé *ensemble indépendant maximal* s'il n'est sous ensemble propre d'aucun autre ensemble indépendant de G .

Ensemble dominant minimal: Un ensemble dominant S d'un graphe G est appelé un *ensemble dominant minimal* s'il ne contient pas de sous ensemble propre qui soit un ensemble dominant de G .

Graphe partiel: Un graphe H est appelé *graphe partiel* d'un graphe G si $V(H) = V(G)$ et $E(H) \subseteq E(G)$.

Incident: Un sommet v et une arête e d'un graphe G sont dits incidents, si v est une extrémité de e dans G .

Nombre d'indépendance: La cardinalité maximum d'un ensemble indépendant de G est appelée le *nombre d'indépendance* de G et est notée par $\beta(G)$.

Nombre de domination indépendant : Chaque ensemble dominant et indépendant du graphe G est appelé un ensemble indépendant dominant de G , la cardinalité minimum parmi ces derniers est appelée *nombre de domination indépendant*, notée $i(G)$.

Ordre: La cardinalité de l'ensemble des sommets $V(G)$ du graphe G est appelé l'*ordre* de G .

Sommet pendant: Un sommet est dit *pendant* si la cardinalité de son voisinage ouvert est égal à 1.

Sous graphe partiel: Un graphe H est appelé *sous graphe* d'un graphe G si $V(H) \subseteq V(G)$ et $E(H) \subseteq E(G)$.

Sous graphe induit: Pour un sous ensemble de sommets non vide $S \subseteq V(G)$ de graphe G , le *sous graphe induit* de S dans G , noté $\langle S \rangle_G$, est un sous graphe de G dont l'ensemble de sommets $V(\langle S \rangle_G) = S$ et l'ensemble d'arêtes $E(\langle S \rangle_G) = \{uv \in E(G) : u, v \in S\}$.

Voisinage ouvert: Le *voisinage ouvert* d'un sommet v dans un graphe G est l'ensemble de tous les sommets adjacents à v dans G , et est noté $N_G(v)$.

Le voisinage ouvert d'un ensemble S dans G est défini par $N_G(S) = \cup_{v \in S} \{N_G(v)\}$.

Voisinage fermé: Le *voisinage fermé* d'un sommet v dans un graphe G est l'ensemble de tous les sommets adjacents à v dans G et contenant v , il est noté $N_G[v]$.

Le voisinage fermé d'un ensemble S dans G est défini par $N_G[S] = \cup_{v \in S} \{N_G[v]\}$.

Degré: Le *degré* d'un sommet v dans un graphe G est la cardinalité de voisinage ouvert de v dans G , et est noté $d_G(v)$.

Chenille: Une *chenille* est un arbre pour lequel si on supprime tous les sommets de degré 1 on aura une chaîne.

INTRODUCTION

Souvent, le moyen le plus commode lorsqu'on veut représenter certaines situations ou les relations existant entre les éléments d'un même système, est de dessiner un schéma incluant des « points » et des « trajets » unissant ces points. Ce dessin est appelé graphe, les points et les traits sont appelés respectivement sommets et arêtes (arcs, si les traits ont une orientation) [1].

La théorie des graphes est un sujet d'étude relativement récent en Mathématiques. Le texte le plus ancien semble être dû à EULER, en 1736 (dans le problème des ponts de Königsberg, il s'agissait de parcourir les sept ponts sur la rivière Pregel une et une seule fois chacun), et le suivant à Monge, en 1781 (à propos d'un problème de déplacement de terre de déblai et de remblai). On remarque ensuite les contributions de KIRKMAN et HAMILTON en 1856 au sujet des parcours désormais appelés chemins hamiltoniens. Mais c'est vers la fin du 19^{ème} siècle, avec CAYLEY, que la théorie des graphes commença à prendre son essor et à fixer sa terminologie.

On signale que la théorie des graphes est parfois « classée » comme sous-discipline de l'Informatique théorique en raison de l'importance des algorithmes, parfois comme sous-discipline des Mathématiques en raison de sa proximité avec la Combinatoire. En réalité, la théorie des graphes se trouve « à la croisée des chemins », entre Mathématiques, Recherche opérationnelle, Informatique et Gestion des réseaux de distribution ou de transport, s'appliquant aussi bien en économie, biologie ou en psychologie.

Pour les applications de la théorie des graphes, On considère généralement que le problème des ponts de Königsberg, résolu par EULER, est le premier résultat formel de la théorie des graphes. Elle s'est surtout développée depuis la deuxième moitié du 19^{ème} siècle (avec HAMILTON, HEAWOOD, KEMPE, KIRCHOFF, PETERSEN, TAIT), et connaît un grand essor depuis les années 30 (avec KÖNIG, HALL, KURATOWSKI, WHITNEY, ERDÖS, TUTTE, EDMONDS, BERGE, LOVÁSZ, SEYMOUR, et beaucoup d'autres). Elle présente des liens évidents avec l'algèbre, la topologie, et d'autres domaines de la combinatoire. On trouve des applications de la théorie des graphes - et souvent aussi la motivation de nouveaux problèmes - en informatique, recherche opérationnelle, théorie des jeux, théorie de la décision.

Les grands problèmes classiques de la théorie des graphes sont : flots et connectivité ("fiabilité" d'un réseau), couplage (affectation), parcours eulérien (qui traverse chaque

arête : problème du "postier chinois"), parcours hamiltonien (qui traverse chaque sommet: problème du "voyageur de commerce"), coloration, ensemble stable, ensemble absorbant. Certains de ces problèmes (flot maximum, couplage maximum, parcours eulérien) peuvent être résolus "efficacement", mais la plupart sont très difficiles ("NP-complets").

On s'intéresse dans cette thèse à étudier un type particulier de domination dans les graphes qu'on considère actuellement comme l'un des domaines les plus florissants de la théorie des graphes. La domination trouve son origine dans les problèmes de jeux d'échecs. Elle devient un domaine théorique à partir de 1958 grâce à CLAUDE BERGE et ne connaîtra sa véritable expansion qu'à partir de 1977 grâce aux travaux de COCKAYNE et HEDETNIEMI. L'intéressement majeur à cette théorie est dû à sa richesse dans de nombreuses applications (réseaux de communications, de microprocesseurs, les problèmes de localisation, etc.) et aussi par ses multiples problèmes ouverts [1]. Vu la difficulté de la détermination des paramètres de domination, nous nous sommes fixés dans cette thèse les objectifs suivants :

- Etablir des bornes supérieures et inférieures simple à vérifier pour ces paramètres.
- Chercher des inégalités entre ces paramètres.
- Caractériser les graphes pour lesquels l'égalité est atteinte dans les inégalités et les bornes établies.

Le chapitre 1 contient des notions générales et des terminologies sur la théorie des graphes utilisées dans cette thèse et un aperçu général sur la domination, l'indépendance et l'irrédondance dans les graphes.

Le chapitre 2 est divisé en cinq sections. Nous commençons par la première section dont laquelle on donne des définitions et des propriétés premières sur la k -domination et la k -indépendance. Dans la deuxième section on donne l'ensemble des inégalités existantes entre les quatre paramètres de domination. Nous donnons dans la troisième section quelques bornes existants sur les trois paramètres γ_k , i_k et β_k , puis on consacre la quatrième section à l'étude de la croissance des deux suites (γ_k) et (β_k) . On termine ce chapitre par la donnée d'un ensemble de problèmes ouverts, sur lesquels on travaille.

Dans le chapitre 3, différents résultats sont obtenus en collaboration avec M. BLIDIA, M. CHELLALI et O. FAVARON.

Ce dernier chapitre est consacré à l'étude de la k -indépendance dans les graphes. On commence ce chapitre par donner des propriétés préliminaires sur les deux paramètres i_k et β_k . Ainsi on établit dans la deuxième et la troisième section des bornes supérieures et des bornes inférieures sur i_k et β_k respectivement. Une caractérisation des arbres tels que $\beta_k = kn/(k+1)$ est établie à la fin de la section trois de ce chapitre. Dans la quatrième section on établit la borne $(n+s(T))/2$ qui est supérieure et inférieure pour les paramètres i_2 et β_2 respectivement. Ainsi on caractérise les arbres T tels que $i_2 = (n+s(T))/2$ et les arbres T tels que $\beta_2 = (n+s(T))/2$. On généralise par la suite la borne $i_2 \leq (n+s(T))/2$ pour les cactus graphes avec k cycles impairs. On termine ce chapitre par une nouvelle borne inférieure sur le paramètre i_2 , ainsi on caractérise les graphes G tels que cette borne est atteinte.

La thèse s'achève par une conclusion sur l'ensemble du travail réalisé et sur les perspectives futures dans ce domaine.

CHAPITRE 1

NOTIONS GÉNÉRALES SUR LA THÉORIE DES GRAPHS

La Théorie des Graphes est un domaine faisant le lien entre les Mathématiques Discrètes et l'Informatique. Une question provenant de la modélisation de problèmes très concrets (par exemple réseaux de transports, de téléphone, de microprocesseurs etc ...) peut être étudiée par des méthodes purement abstraites et être appliquée en retour par des utilisateurs potentiels dans le domaine qui lui a donné naissance ou dans n'importe quel autre domaine [2].

Les paramètres de domination qui intéressent les chercheurs depuis plusieurs années interviennent en particulier dans des problèmes de communication dans les réseaux, par exemple pour optimiser la localisation ou la puissance d'émetteurs ou de relais intermédiaires. Dans cette thèse, nous ne considérons que l'aspect théorique de ces problèmes.

La théorie de la domination est un domaine de recherche majeur en Théorie des Graphes. A titre d'exemple, à la "28th southeastern conference on combinatory, graph theory computing" qui s'est tenue à Boca Raton, Floride, en Mars 1997, 22 des 230 communications et 2 des 11 conférences plénières avaient été consacré à ce sujet. De plus une bibliographie récente sur la domination, compilée par T.W. HAYNES et S.T. HEDET-NIEMI, comporte environ 1000 titres.

1.1 Concept théorique de base d'un graphe

Un graphe $G = (V, E)$ est défini par un ensemble non vide $V(G)$, et un ensemble $E(G)$ (peut être vide), formé de couples de $V(G)$.

Les éléments de V sont appelés *sommets*, ceux de E sont appelés *arêtes*. Le nombre de sommets dans le graphe G est appelé ordre de G , noté par $n = |V(G)|$, quant au nombre d'arêtes dans G est appelé la taille de G , noté par $m = |E(G)|$. Un graphe d'ordre n et de taille m est noté par (n, m) - graphe. Si la paire $e = \{u, v\}$ est une arête du graphe G , écrite aussi comme $e = uv$, on dit que les sommets u et v sont *adjacents* dans G et que l'arête e relie u et v . L'arête e est dite *incidente* aux deux sommets u et v .

Un graphe simple est un graphe sans *boucles* tel que tout couple de sommets est relié par au plus une arête (pour plus de détail sur la terminologie des graphes voir [3]). Dans tout ce qui suit on s'intéresse qu'à des graphes simples et finis. En effet la représentation graphique G d'ordre 7 et de taille 8 donnée par la figure 1.1 représente un graphe simple dont l'ensemble des sommets est $V(G) = \{v_1, v_2, v_3, v_4, v_5, v_6, v_7\}$ et l'ensemble d'arêtes est $E(G) = \{v_1v_6, v_1v_7, v_2v_4, v_3v_5, v_3v_6, v_3v_7, v_4v_5, v_5v_6\}$. Les sommets v_1 et v_6 sont adjacents dans G , alors que v_1 et v_2 ne le sont pas.

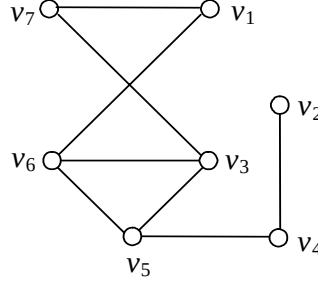


FIGURE 1.1. Représentation graphique d'un (7.8)-graphe, G .

1.1.1 Voisinages

Pour un sommet v de G , le **voisinage ouvert** est défini par l'ensemble $N_G(v) = \{u \in V(G) : uv \in E(G)\}$ et le **voisinage fermé** est défini par $N_G[v] = N_G(v) \cup \{v\}$. Pour un ensemble $S \subseteq V(G)$, le voisinage ouvert est défini par $N(S) = \cup_{v \in S} \{N(v)\}$ et le voisinage fermé de l'ensemble S est défini par $N[S] = \cup_{v \in S} \{N[v]\}$. Pour un sommet v de graphe G , le **degré** de v noté par $d_G(v)$ (aussi par $d(v)$) est le nombre de sommets adjacents à v , i.e $|N_G(v)|$. Un sommet de degré 0 est dit sommet **isolé**, et un sommet de degré 1 est dit sommet **pendant**.

Dans un graphe G le degré minimum d'un sommet est noté par $\delta(G)$ et le degré maximum est noté par $\Delta(G)$. Dans le graphe G de la figure 1.1, le voisinage ouvert du sommet v_5 , est $N_G(v_5) = \{v_3, v_4, v_6\}$, et le voisinage fermé est $N_G[v_5] = \{v_3, v_4, v_5, v_6\}$. Le graphe de la figure 1.1 n'a pas de sommets isolés, alors que v_2 est un sommet pendant. Le degré minimum de G est donc $\delta(G) = 1$ et le degré maximum est $\Delta(G) = 3$.

Le théorème suivant souvent considéré comme un théorème fondamental de la théorie des graphes, est probablement un des résultats les plus célèbres de la théorie des graphes qui relie la somme des degrés des sommets et la taille pour tout graphe.

Théorème 1.1. [3] Soit G un (n, m) -graphe, avec $V(G) = \{v_1, v_2, v_3, \dots, v_n\}$. Alors on a $\sum_{i=1}^n d_G(v_i) = 2m$.

1.1.2 Connexité

Une **chaîne** dans un graphe G est une séquence alternative de sommets et d'arêtes $v_0, e_1, v_1, e_2, v_2, \dots, v_{i-1}, e_i, v_i, \dots, v_{n-1}, e_n, v_n$ sachant que $e_i = v_{i-1}v_i$ pour $i = 1, 2, \dots, n$. Le nombre d'arêtes dans la chaîne définit sa longueur et le nombre de sommets définit son ordre. Un exemple d'une chaîne dans le graphe G de la figure 1.3(a) est $v_1, v_3, v_4, v_1, v_2, v_5$. Une chaîne dans laquelle aucune arête ne se répète est appelée **simple** et une chaîne dans laquelle aucun sommet ne se répète est appelée **élémentaire**. Un cycle est une chaîne de longueur $n \geq 1$ dans lequel les deux extrémités initiale et terminale v_0 et v_n sont confondues.

Considérons le graphe G de la figure 1.3(a), La chaîne v_1, v_3, v_4 est élémentaire d'ordre 3 et de longueur 2, et (v_1, v_3, v_4, v_1) est un cycle de longueur 3. Pour des sommets u et v du graphe G , u est dit connecté au sommet v si G contient une chaîne dont les extrémités sont u et v . Un graphe G est dit graphe **connexe**, s'il existe une chaîne reliant toute paire de sommets $u, v \in V(G)$. Un graphe qui n'est pas connexe est dit **disconnexe** (non connexe). Un sous graphe (Voir section 1.1.3) H du graphe G est appelé composante de G si H est un sous graphe connexe maximal du graphe G . Une arête e est appelée un **isthme** (arête d'articulation du graphe G) si le graphe $G - e$ possède plus de composantes connexes que G , i.e. si G est connexe alors $G - e$ n'est pas connexe. Un sommet v du graphe G est appelé un **sommet d'articulation** du graphe G si le graphe $G - v$ a plus de composantes connexes que G , i.e. si G est connexe alors $G - v$ n'est pas connexe. Le graphe G de la figure 1.2(a) admet l'arête v_3v_6 comme isthme, car $G - \{v_3v_6\}$ est non connexe (voir la figure 1.2(b)). Le sommet v_3 est un sommet d'articulation de graphe G , car $G - v_3$ est non connexe (voir la figure 1.2(c)).

Le théorème suivant donne une caractérisation pour qu'une arête d'un graphe soit un isthme.

Théorème 1.2. [4] Une arête e d'un graphe connexe G est dite un isthme du G si et seulement si e n'appartient à aucun cycle de G .

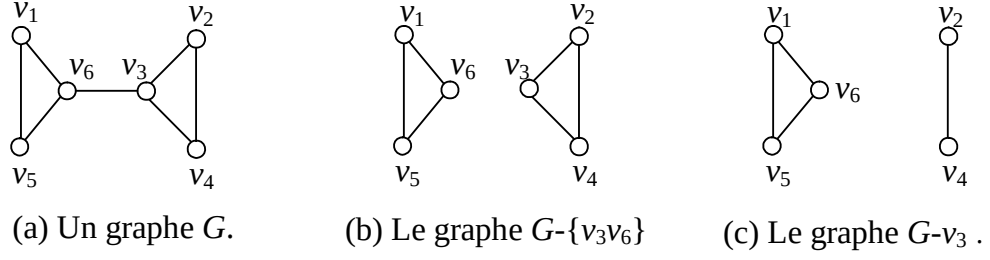


FIGURE 1.2. Illustration d'un isthme et d'un sommet d'articulation dans le graphe connexe G de la figure 1.2(a).

1.1.3 Graphes particuliers

a. Graphe partiel, sous graphe partiel et sous graphe induit

Soit $G = (V, E)$ un graphe. Le graphe H est appelé un **sous-graphe partiel** de G si $V(H) \subseteq V(G)$ et $E(H) \subseteq E(G)$ et il est appelé un **graphe partiel** du graphe G si $V(H) = V(G)$ et $E(H) \subseteq E(G)$. Pour un sous ensemble de sommets non vide $S \subseteq V(G)$ du graphe G , le **sous graphe** $H = (S, E)$ **induit** par S dans G , noté par $\langle S \rangle_G$, est le sous graphe du graphe G avec l'ensemble de sommets $V(\langle S \rangle_G) = S$ et l'ensemble d'arêtes $E(\langle S \rangle_G) = \{ uv \in E(G) : u, v \in S \}$. Le graphe de la figure 1.3(b) est un exemple d'un sous graphe du graphe G de la figure 1.3(a). Quant au graphe de la figure 1.3(c) est un graphe partiel du graphe G . Le sous graphe induit $\langle \{v_1, v_2, v_4, v_5\} \rangle_G$ est illustré dans la figure 1.3(d).

Pour un graphe F , un graphe G est appelé F -libre si G ne contient pas F comme sous graphe induit.

Un sous ensemble d'arêtes C de E dans un graphe $G = (V, E)$ est dit un **couplage**, si le graphe partiel engendré par les arêtes de C ne contient pas d'arêtes adjacentes. Si pour toute arête e de $E \setminus C$, l'ensemble $C \cup \{e\}$ n'est pas un couplage, alors C est dit couplage maximal de G . Un couplage dont les arêtes sont incidentes à tous les sommets du graphe G est dit couplage parfait. La figure 1.4(b) donne un exemple d'un couplage maximal du graphe G représenté dans la figure 1.4(a).

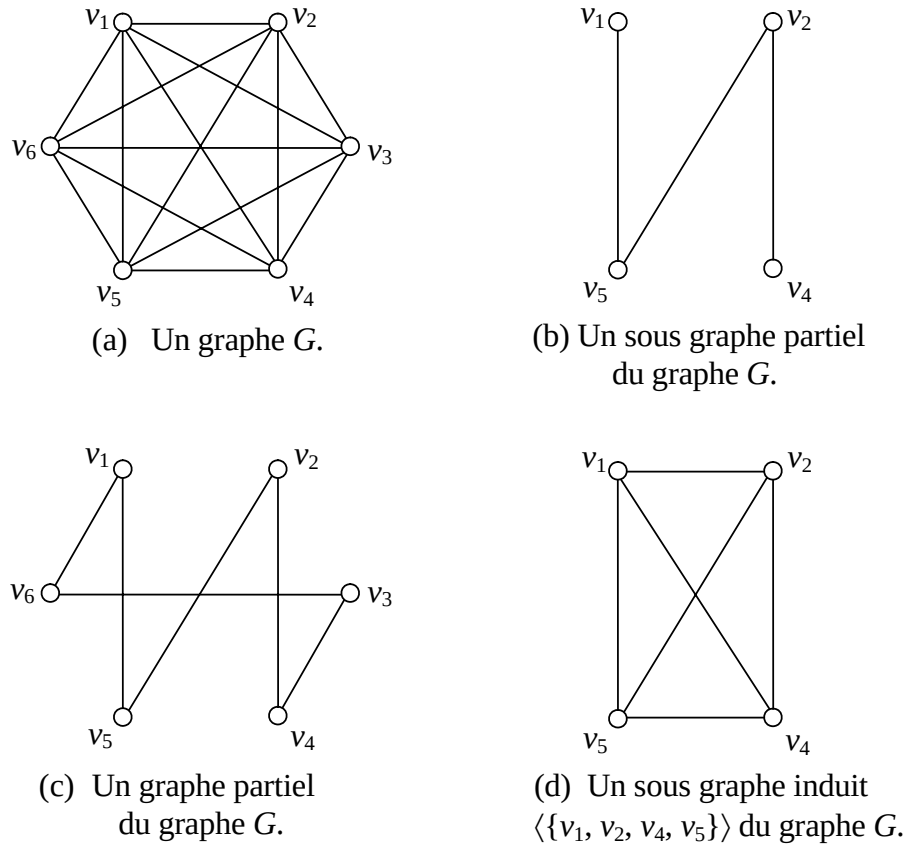


FIGURE 1.3. Illustration des concepts: graphe partiel, sous graphe partiel et sous graphe induit du graphe G .

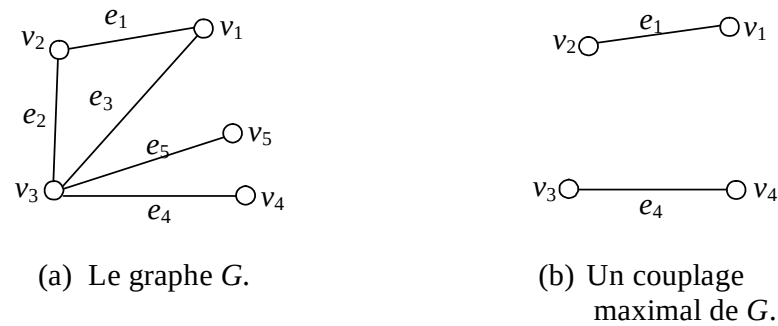
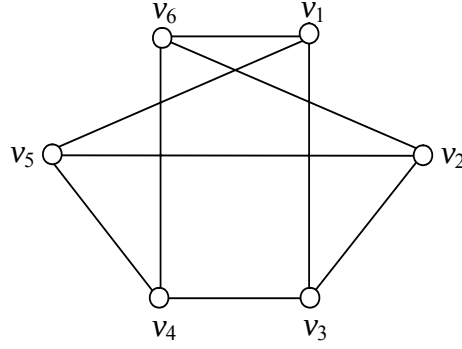


FIGURE 1.4. Illustration du concept de couplage dans un graphe G .

b. Graphe r -régulier

Un graphe G est dit **r -régulier** si chaque sommet de G a un degré r . Les arêtes d'un graphe partiel 1-régulier de G forment un couplage de G . Par exemple le graphe G de la figure 1.5 est 3-régulier.

FIGURE 1.5. Illustration d'un graphe G , 3-régulier.

c. Graphe complet

Un graphe **complet** d'ordre n , noté par K_n , est un graphe dont tous les sommets distincts sont adjacents. Un graphe complet K_n est un $(n-1)$ -régulier. Comme illustration du concept, les graphes complets K_5 , K_6 sont représentés dans la figure 1.6.

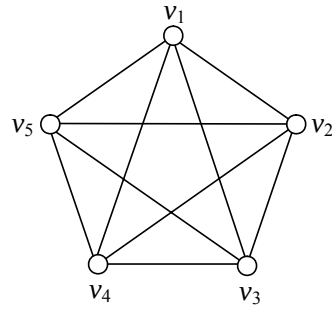
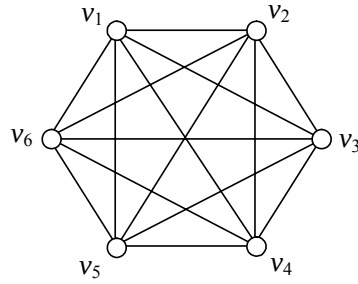
(a) Le graphe complet K_5 (b) Le graphe complet K_6

FIGURE 1.6. Illustration du concept des graphes complets.

d. Graphe multiparti

Un graphe G est dit **multiparti**, si l'ensemble de sommets peut être partitionné en q sous ensembles avec $q \geq 2$, sachant qu'aucune arête du graphe G ne joint deux sommets appartenant au même sous ensemble. Pour $q = 2$, le graphe G est appelé **biparti**. Le théorème suivant relie la notion de graphe biparti avec l'occurrence des cycles dans le graphe.

Théorème 1.3. [4]: *Un graphe non trivial G est biparti si et seulement s'il ne contient pas de cycles impairs.*

Si un sommet appartenant à un ensemble V_i de la partition d'un graphe multiparti est adjacent à tout sommet des autres ensembles $\{V_j : j \neq i\}$ pour tout sommet dans G ,

alors le graphe G est appelé multiparti complet. Un graphe multiparti avec $|V_i| = p_i, i = 1, 2, \dots, q$, est noté par $K_{p_1, p_2, \dots, p_q}$. Si $p_1 = p_2 = \dots = p_q = p$, alors le graphe G est appelé multiparti complet et est noté par $K_{q \times p}$. Ce concept est illustré dans la figure 1.7, où le graphe de la figure 1.7(a) est un graphe biparti complet $K_{2,3}$ et le graphe de la figure 1.7(b) est un graphe triparti complet $K_{3 \times 2}$, celui de la figure 1.7(c) est un graphe triparti $K_{2,3,2}$.

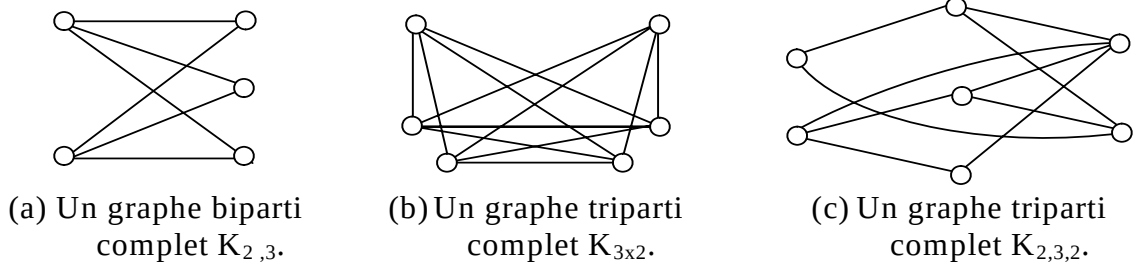


FIGURE 1.7. Illustration du concept des graphes multipartis.

e. Arbre

L'une des structures les plus simples d'un graphe connexe est connue sous le nom, d'**arbre**, qui est un graphe connexe sans cycles ou acyclique. Une **forêt** est un graphe où chaque composante connexe est un arbre. Dans un arbre T , tout sommet adjacent à un sommet pendant est appelé sommet **support**. Et tout sommet adjacent à au moins r sommets pendants est appelé sommet **r-support**.

Un exemple d'un arbre d'ordre 10 est représenté dans la figure 1.8(a), dans lequel les 5 sommets pendants sont indiqués en gras. Le sommet v_5 est un sommet support et v_8 est un sommet 2-support. Un arbre est dit **chenille** si à chaque sommet d'une chaîne on relie au moins zéro sommets pendants. Si la chaîne précédente est $P_n : v_1, v_2, \dots, v_n$, la chenille $C(p_1, p_2, \dots, p_n)$ est une chaîne dont v_1 est relié à p_1 sommets pendants, v_2 est relié à p_2 sommets pendants, et ainsi de suite. Un exemple d'une chenille $C(3, 1, 2)$ d'ordre 9 est représentée dans la figure 1.8(b). On donne ainsi un ensemble d'arbres particuliers:

Une **étoile** $K_{1,p}$ est un arbre obtenu en attachant p sommets pendants à un sommet isolé (voir l'arbre de la figure 1.9(a)).

Une **étoile double** $S_{p,q}$ est l'arbre obtenu en attachant p sommets pendants à une extrémité d'une chaîne P_2 et q sommets pendants à l'autre extrémité (voir l'arbre de la figure 1.9(b)).

Une **étoile subdivisée** SS_p est l'arbre obtenu à partir d'une étoile $K_{1,p}$ par la subdivision de chaque arête par exactement un sommet (voir l'arbre de la figure 1.9(c)).

Une **étoile double subdivisée** $S_{p,q}^*$ est l'arbre obtenu à partir d'une étoile double en subdivisant l'arête reliant les deux sommets supports par un sommet (voir l'arbre de la figure 1.9(d)).

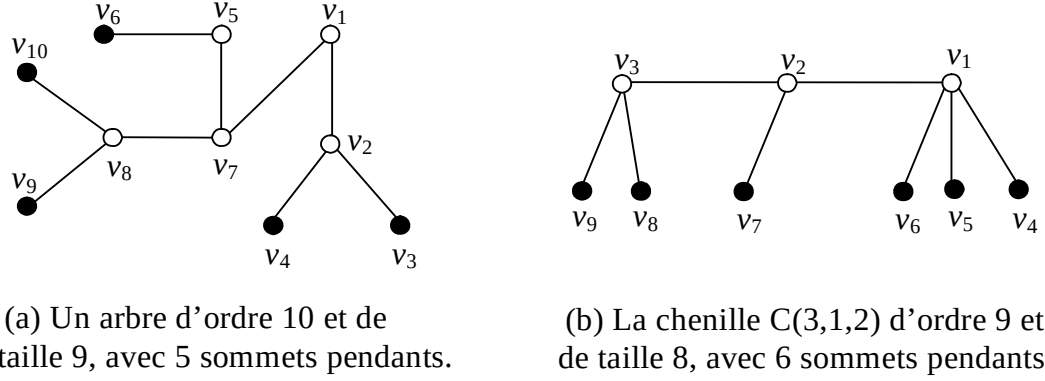


FIGURE 1.8. Illustration des arbres, dont les sommets pendants sont indiqués en noir.

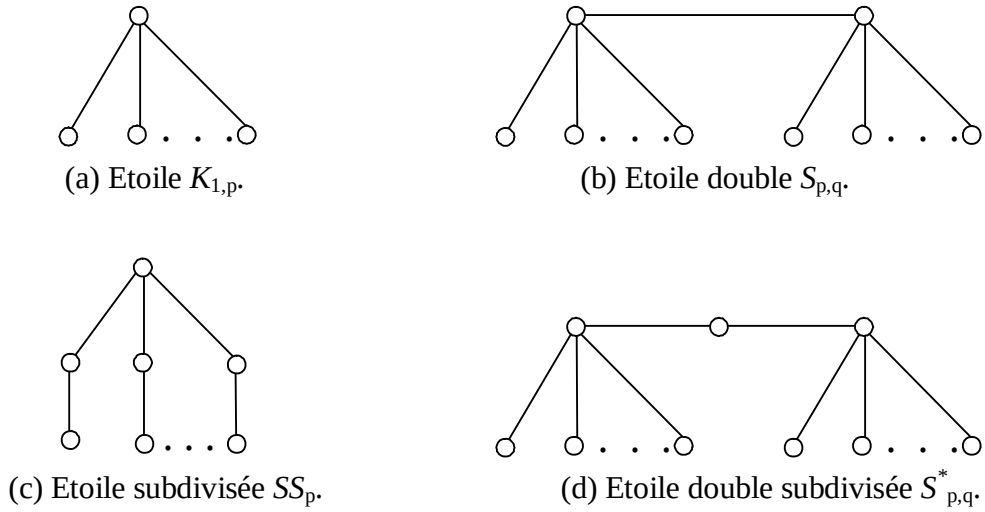


FIGURE 1.9. Quelques arbres particuliers.

f. Couronne d'un graphe

Soit G un graphe d'ordre n avec l'ensemble de sommets $V(G) = \{v_1, v_2, \dots, v_n\}$ et soit $S = \{u_1, u_2, \dots, u_n\}$ un ensemble de sommets disjoints de V . La **couronne** de G notée par $H = GoK_1$, peut être définie comme un graphe avec l'ensemble de sommets $V \cup S$ et l'ensemble d'arêtes $E(G) \cup \{v_i u_i : i = 1, 2, \dots, n\}$. Tout simplement, la couronne de G est le graphe obtenu en dupliquant tous les sommets de G et en reliant tout sommet de G à son sommet dupliqué. Donc il est évident que l'ordre de la couronne H est égal à $2n$.

Pour le cycle C_4 de la figure 1.10(a), sa couronne est représentée par le graphe de la figure 1.10(b).

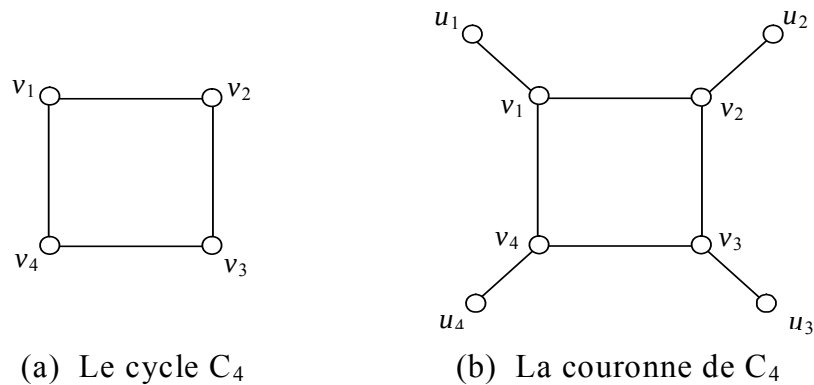


FIGURE 1.10. Illustration de la couronne du cycle C_4 .

g. Graphe complémentaire d'un graphe

Le graphe **complémentaire** $\overline{G}$ d'un graphe G est un graphe pour lequel $V(\overline{G}) = V(G)$ et $uv \in E(\overline{G})$ si et seulement si $uv \notin E(G)$. Le (5.4)-graphe G est représenté dans la figure 1.11(a), son graphe complémentaire $\overline{G}$ est le (5.6)-graphe représenté dans la figure 1.11(b).

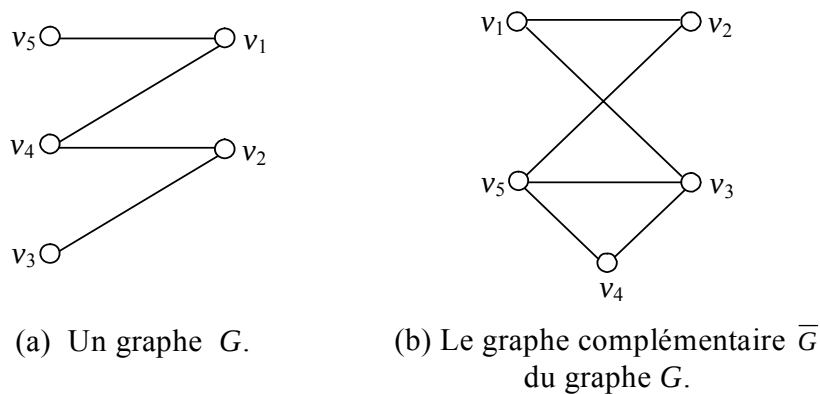


FIGURE 1.11. Représentation d'un graphe G et son graphe complémentaire $\overline{G}$.

h. Bloc graphe

Un **bloc** dans un graphe G est un sous graphe connexe maximal qui ne contient pas de sommet d'articulation.

Un **bloc final** dans un graphe G est un sous graphe connexe maximal qui admet un seul point d'articulation.

Un **bloc graphe** G est un graphe dont tous les blocs sont complets. Si G ne possède pas de sommet d'articulation, alors G est lui même un bloc. L'intersection de deux

blocs contient au plus un sommet et dans un bloc graphe un sommet est dit sommet d'articulation si et seulement si il est l'intersection de deux ou plusieurs blocs.

Ainsi on donne un théorème qui définit d'une autre manière les blocs graphes.

Théorème 1.4. *Un graphe d'intersection des blocs H d'un graphe G est un bloc graphe.*

Par exemple le graphe d'intersection H de la figure 1.12(b) est le bloc graphe associé au graphe G de la figure 1.12(a), dont les différents blocs sont $\{B_1, B_2, B_3\}$, $\{B_3, B_5\}$, $\{B_2, B_4\}$ qui sont tous complets.

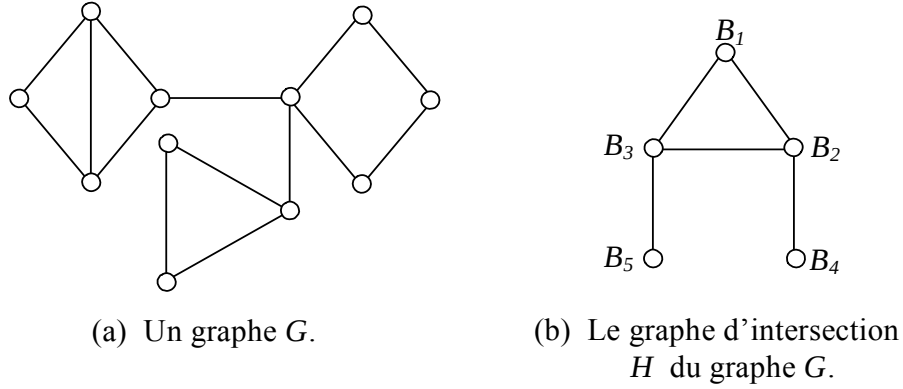


FIGURE 1.12. Illustration du concept des blocs graphes.

i. Cactus graphe

Un **cactus graphe** G est un graphe dont toute arête appartient à au plus un cycle. Un graphe contenant un seul cycle est appelé un **unicycle** graphe.

En effet le graphe de la figure 1.13 est un cactus graphe dont les différents cycles sont $\{v_1, v_2, v_3, v_4\}$, $\{v_4, v_5, v_6\}$.

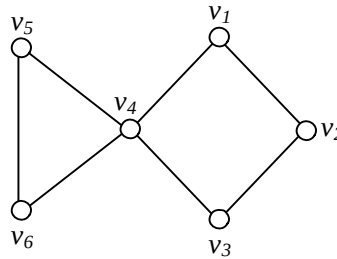


FIGURE 1.13. Illustration du concept des cactus graphes.

1.2 Les paramètres classiques de domination

La notion de domination dans les graphes tire son origine des problèmes des jeux d'échecs, introduit par D. JAENISCH [5], utilisant la reine comme pièce de jeu, ces jeux ont été étendus par la suite à d'autres pièces de jeu, par exemple, le roi. La figure 1.14(a) illustre un échiquier standard (8x8 cases) sur lequel est placé un roi (pièce de jeu). Selon les règles de déplacement du roi dans les jeux d'échecs, le roi peut se déplacer vers une case voisine suivant l'horizontale, la verticale ou la diagonale. Par conséquent, le roi peut donc bouger ou dominer toutes les cases marquées par X (voir la figure 1.14 (a)). En 1850, les échéphiles en Europe considéraient le problème de la détermination du nombre minimum de rois sur un échiquier de façon à ce que toutes les cases soient occupées ou dominées. La figure 1.14(b) montre un ensemble de rois qui peuvent dominer toutes les cases de l'échiquier.

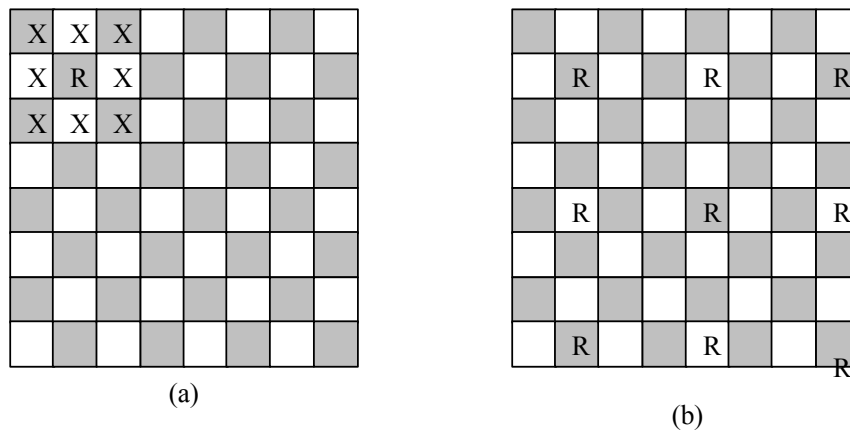


FIGURE 1.14. Les rois dans un échiquier.

En 1958, la domination est devenue un domaine théorique grâce à CLAUDE BERGE (voir [3]), ainsi il a associé un graphe aux différentes situations (graphe de déplacement du roi), dans lequel on cherche un ensemble de sommets qui domine tous les autres sommets. Dans l'exemple de déplacement du roi dans un échiquier $n \times n$, on associe le graphe suivant: Le graphe K_n possède n^2 sommets qui correspondent aux cases de l'échiquier. Les arêtes de ce graphe correspondent aux déplacements du roi dans l'échiquier suivant les règles des jeux des échecs, c'est à dire deux sommets sont adjacents dans S_n si les cases correspondantes de l'échiquier ont un côté ou un coin en commun. Plus formellement $V(K_n) = \{(i, j); i, j \in [1, n]\}$ et (i, j) est adjacent à (i', j') si et seulement si $|i - i'| \leq 1$ et $|j - j'| \leq 1$. Une

case est appelée coin (resp. case de la frontière) si ses deux (resp. au moins une de ses) coordonnées sont (resp. est) dans $\{1, n\}$.

La cardinalité minimum d'un ensemble dominant s'appelait autrefois nombre de stabilité externe (appellation de C. BERGE [3]). En 1962, ORE proposa l'appellation nombre de domination (voir [6]). Le concept de domination a connu une véritable expansion après la parution de l'article de COCKAYNE et d'HEDETNIEMI paru en 1977 (voir [7]).

1.2.1 La domination

Un sous ensemble de sommets $D \subseteq V(G)$ de G est dit ensemble **dominant** si tout sommet $v \in V(G) \setminus D$ est adjacent à au moins un sommet $u \in D$. Un dominant est ainsi un sous ensemble de sommets qui absorbe tous les autres sommets. Un ensemble dominant D est dit **dominant minimal** si aucun sous ensemble propre de D n'est un ensemble dominant. Le **nombre de domination inférieur** (souvent appelé nombre de domination), $\gamma(G)$, d'un graphe G représente la cardinalité minimum d'un ensemble dominant minimal de G . Un ensemble dominant minimum avec une telle cardinalité est appelé $\gamma(G)$ -ensemble, on note qu'un graphe G peut avoir plusieurs $\gamma(G)$ -ensembles, par exemple dans le graphe $K_{2,3}$ de la figure 1.15(b), $\gamma(G) = 2$ et $D_1 = \{v_3, v_6\}$, $D_2 = \{v_3, v_5\}$ et $D_3 = \{v_1, v_4\}$ sont des $\gamma(G)$ -ensembles. La cardinalité maximum d'un ensemble dominant minimal est appelée **nombre de domination supérieur**, et est noté par $\Gamma(G)$.

Dans la littérature, il existe d'autres définitions équivalentes aux ensembles dominants dans les graphes. En voici des exemples:

- Un ensemble $D \subseteq V$ est un dominant de G si pour tout sommet $v \in V$,
 $|N[v] \cap D| \geq 1$,
- Un ensemble $D \subseteq V$ est un dominant de G si pour tout sommet $v \in V - D$,
 $N(v) \cap D \neq \emptyset$,
- Un ensemble $D \subseteq V$ est un dominant de G si $N[D] = V$.

1.2.2 L'indépendance

Une autre notion est apparue en même temps que la notion de domination, c'est la notion d'**indépendance** (stabilité). Ainsi, un sous ensemble de sommets $S \subseteq V(G)$

du graphe G est appelé indépendant s'il n'existe pas deux sommets dans S adjacents. Cette notion est reliée à celle de domination par le fait qu'un indépendant est maximal (au sens de l'inclusion des ensembles) si et seulement si, il est dominant. De sorte qu'un indépendant maximal est un dominant minimal. La cardinalité maximum des ensembles indépendants maximaux S est appelée le **nombre d'indépendance** du graphe G , noté par $\beta(G)$. Pour le graphe biparti $K_{2,3}$, représenté dans la figure 1.14(a), les deux ensembles de sommets, $\{v_1, v_2\}$ et $\{v_3, v_4, v_5\}$ sont des ensembles indépendants maximaux. Puisque l'ensemble indépendant $\{v_3, v_4, v_5\}$ indiqué par des sommets en gras dans la figure 1.14(a), est l'ensemble indépendant maximal le plus large, il s'ensuit que $\beta(K_{2,3}) = 3$, et $\{v_1, v_2\}$ est l'ensemble indépendant maximal le plus petit, donc $\gamma(K_{2,3}) = 2$.

La notion d'indépendance est l'opposé de la notion de **clique**, qui est un sous graphe complet du graphe G . On note une clique de n sommets par K_n . L'ordre maximal d'une clique dans un graphe G est appelé le **nombre de clique** de G , noté par $w(G)$. Le nombre minimum de cliques qui partitionne les sommets du graphe G est connu sous le nom de **nombre de partition en cliques** et il est noté par $\theta(G)$. Pour le sous ensemble de sommets $\{v_1, v_2, v_3, v_6\}$, indiqué par des sommets en noire dans le graphe G , représenté dans la figure 1.15(b), le sous graphe induit $\langle v_1, v_2, v_3, v_6 \rangle_G \cong K_4$ est la clique la plus large dans le graphe G , donc on a $w(G) = 4$ et $\theta(G) = 2$.

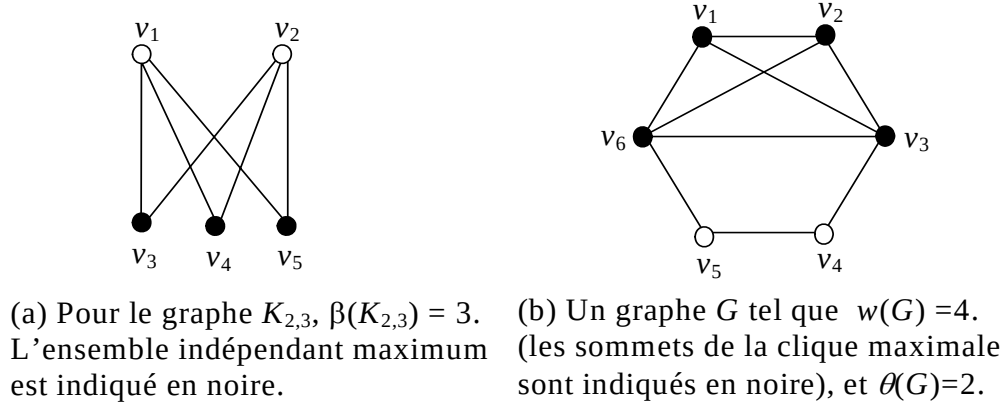


FIGURE 1.15. Illustration de la notion d'indépendance et la notion de clique.

La proposition 1.5 suivante donne un résultat intuitif, reliant l'indépendance maximale et la domination minimale dans un graphe [8], pp. 71.

Proposition 1.5. *Tout ensemble indépendant maximal dans un graphe G est un dominant minimal de G .*

indépendant de G , la cardinalité minimum d'un tel ensemble est appelée **le nombre de domination indépendante**, et est noté par $i(G)$.

Pour le graphe de PETERSEN P de la figure 1.16, l'ensemble de sommets $\{v_0, v_1, v_2, v_3, v_4\}$ est un dominant minimal de cardinalité maximum, donc on a $\Gamma(P) = 5$. Le nombre de domination de P est $\gamma(P) = 3$, avec $\{v_2, v_3, v_5\}$ l'ensemble dominant minimum de P . Cet ensemble est aussi un ensemble indépendant dominant minimum, donc $i(P) = 3$.

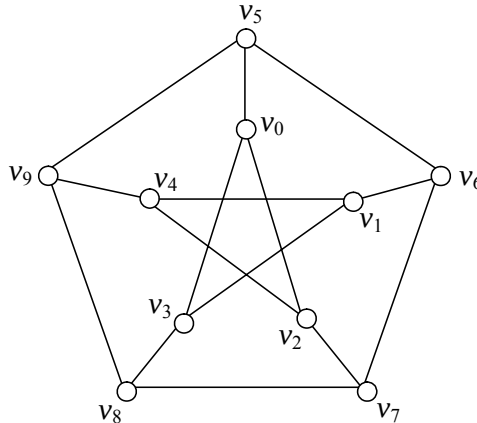


FIGURE 1.16. Le graphe de PETERSEN P .

1.2.3 L'irrédondance

La troisième notion classique liée à la domination, l'**irrédondance** [9], est apparue plus tard. Elle a été définie en 1978 par COCKAYNE, HEDETNIEMI et MILLER (voir [10]). Avant de donner la raison qui a motivé son avènement, nous commençons par une définition: si x est un sommet d'un ensemble S , un S -voisin privé extérieur de x est un sommet de $V - S$ voisin dans S au seul sommet x . Comme tout dominant minimal S est tel que tout sommet x de S non isolé dans S possède au moins un voisin privé extérieur, les trois auteurs COCKAYNE, HEDETNIEMI et MILLER [10] ont dit que S est un irrédondant s'il vérifie uniquement cette dernière propriété. On peut même montrer qu'un dominant est minimal, si et seulement si, il est un irrédondant [11]. Un irrédondant peut être ainsi vu comme un dominant partiel minimal, c'est à dire un dominant minimal de $\langle S \rangle$. Le minimum (resp le maximum) de la cardinalité d'un irrédondant maximal se note $ir(G)$ (resp $IR(G)$). Souvent dans la littérature les trois petits paramètres $ir(G)$, $\gamma(G)$ et $\beta(G)$ sont appelés respectivement nombre d'irrédondance, nombre de domination

et nombre d'indépendance. En effet dans le graphe H de la figure 1.17, l'ensemble $\{y_3, y_4, y_5, y_6\}$ est un ensemble irrédondant maximal de taille minimale, donc $ir(G) = 4$.

Ces trois notions s'articulent de façon intéressante, puisque tout indépendant maximal est un dominant minimal, et puisque d'autre part tout dominant minimal est un irrédondant maximal. Cette remarque induit la chaîne d'inégalité de COCKAYNE, HEDET-NIEMI et MILLER [10] qui relie les six paramètres pour tout graphe:

$$ir(G) \leq \gamma(G) \leq i(G) \leq \beta(G) \leq \Gamma(G) \leq IR(G).$$

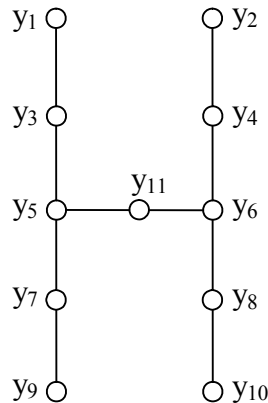


FIGURE 1.17. Le graphe H .

De nombreux paramètres de domination sont obtenus en combinant la domination avec une propriété ou une condition supplémentaire dans les graphes. Ainsi d'autres paramètres peuvent être définis en imposant une ou plusieurs conditions à l'ensemble dominant, par exemple imposer la condition que le sous graphe induit par l'ensemble dominant D soit connexe, produit la domination connexe (ou imposer la condition que $\langle D \rangle$ soit sans sommets isolés, soit une clique ou soit sans arêtes).

On peut de même imposer des conditions sur la façon de dominer, par exemple dominer au moins k fois pour chaque sommet extérieur.

Comme on peut imposer simultanément des conditions des deux types, par exemple un dominant double est un dominant sans arêtes qui domine au moins deux fois tout sommet extérieur.

A titre d'exemple considérons quelques types de domination qui nous intéressent dans les prochains chapitres.

La domination totale: Un sous ensemble D de V est dit dominant total de G si tout sommet de V possède un voisin dans D . Ceci peut s'écrire par $N(D) = V$ ou D est un

dominant et le sous graphe induit par D ne contient pas de sommets isolés. Le **nombre de domination totale**, noté par $\gamma_t(G)$, est la taille minimum d'un ensemble dominant total de G . A titre d'exemple, dans le graphe de la figure 1.17, l'ensemble $\{y_3, y_4, y_5, y_6, y_7, y_8\}$ est un dominant total minimum et donc $\gamma_t(G) = 6$.

Pour son application, on considère l'exemple de la selection d'un comité à partir d'un ensemble d'individus tels que:

i) Tout individu non membre du comité connaît au moins un membre du comité. L'ensemble des individus du comité représente un dominant.

ii) Tout membre du comité connaît au moins un autre membre du comité pour qu'il ne soit pas isolé. Ainsi l'ensemble des membres du comité représente un dominant total. Le plus petit comité en taille avec ces propriétés est un γ_t -ensemble dans le graphe des connaissances sur l'ensemble des individus.

La domination multiple: Un sous ensemble D de V est dit dominant multiple ou k -dominant de G si tout sommet de $V - D$ possède au moins k voisins dans D . Le **nombre de domination multiple (ou nombre de k -domination)**, noté par $\gamma_k(G)$, est la taille minimum d'un ensemble dominant multiple de G . A titre d'exemple, dans le graphe de la figure 1.15(a) l'ensemble $\{v_1, v_2\}$ est un 2-dominant minimum, donc $\gamma_2(G) = 2$.

Pour son application, on considère le problème d'implantation des imprimantes dans un réseau de micro-ordinateurs. En supposant qu'une imprimante ne fonctionne qu'au plus à une distance 1 dans le réseau. Alors le problème devient le choix d'un nombre minimum d'ordinateurs pour implanter à chacun une imprimante. Si on considère que la probabilité du panne des imprimantes est de $(k - 1)/k$, alors on doit relier chaque ordinateurs à k imprimantes à distance au plus 1. Le nombre d'ordinateurs dont on a implanté les imprimantes est un ensemble k -dominant du réseau.

Un autre cas de problèmes concrets est celui de la localisation des radars pour contrôler une région donnée: Un certain nombre de points stratégiques $A, B, \dots$ (les cellules) sont surveillés par des unités militaires pourvues de radars; on exige que chaque cellule soit surveiller par au moins k radars. Le problème consiste à déterminer le nombre minimum de radars à installer ainsi que leur emplacement de telle manière à contrôler toutes les cellules en respectant la contrainte de la k -domination.

Dans l'exemple du graphe suivant, il faut au moins trois radars qu'on peut placer par exemple dans les cellules A, C et E (voir la figure 1.18) pour contrôler toutes les cellules

du graphe, cet ensemble $\{A, C, E\}$ représente un ensemble 2-dominant de taille minimum.

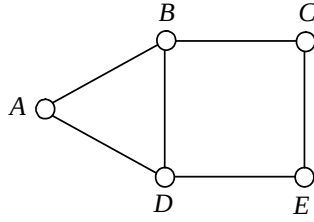


FIGURE 1.18. Le problème des radars.

Dans cette thèse nous ne considérons que l'aspect théorique de ces problèmes. Comme les paramètres de domination sont difficiles à déterminer exactement (problèmes *NP*-complets), nous recherchons des inégalités entre certains d'entre eux ainsi que des conditions permettant d'obtenir l'égalité. Une autre approche, classique dans les problèmes d'optimisation combinatoire portant sur des entiers, est d'essayer de trouver une bonne approximation sous forme d'une fonction de n , $\Delta(G)$, $\delta(G)$ ou d'une liaison entre les paramètres de domination.

CHAPITRE 2

LA k -DOMINATION ET LA k -INDÉPENDANCE DANS LES GRAPHES

Dans le chapitre introductif, nous avons défini les notions de domination et d'indépendance dans les graphes. Nous allons consacrer maintenant ce chapitre à l'étude et à la discussion des concepts de la k -domination ou de la domination multiple et de la k -indépendance dans les graphes.

2.1 Définitions et premières propriétés

2.1.1 La domination et l'indépendance

Un sous-ensemble $D \subseteq V$ est un ensemble dominant de G si tout sommet de $V \setminus D$ a au moins un voisin dans D , ou encore si $N[D] = V$. Tout sur-ensemble d'un ensemble dominant est dominant (propriété superhéritaire). On peut donc définir un ensemble dominant minimal par inclusion en disant que D est dominant dans G mais que quelque soit $x \in D$, $D \setminus \{x\}$ n'est pas dominant. Par définition les deux paramètres de domination $\gamma(G)$ et $\Gamma(G)$ sont respectivement les cardinaux minimum et maximum d'un dominant minimal de G .

Un sous-ensemble $D \subseteq V$ est indépendant (ou stable) si aucun sommet de D n'a de voisin dans D , ou encore si $\Delta(D) = 0$. Tout sous-ensemble d'un ensemble indépendant est indépendant (propriété héréditaire). On peut donc définir un ensemble indépendant maximal par inclusion en disant que D est indépendant mais que quelque soit x dans $V \setminus D$, $D \cup \{x\}$ n'est pas indépendant. Par définition les deux paramètres d'indépendance $i(G)$ et $\beta(G)$ (parfois noté α) sont respectivement les cardinaux minimum et maximum d'un indépendant maximal de G .

On peut noter que γ et β connu sous le nom de nombre de domination et de nombre d'indépendance, sont plus facile à étudier et plus couramment étudiés que les paramètres maximin et minimax Γ et i .

Théorème 2.1. [12] *Un ensemble indépendant est maximal si et seulement si il est dominant. Et un ensemble indépendant et dominant est un dominant minimal.*

Ce théorème se traduit par le schéma (S) ci-dessous.

Indépendant maximal $\iff$ indépendant et dominant $\implies$ dominant minimal (S).

(a) (c)

(b)

Les flèches (b) et (c) ont pour conséquence immédiate la célèbre chaîne d'inégalités

$$\forall G \text{ un graphe, } \gamma(G) \leq i(G) \leq \beta(G) \leq \Gamma(G) \quad (1)$$

Exprimant les six inégalités $\gamma \leq i$, $\gamma \leq \beta$, $\gamma \leq \Gamma$, $i \leq \beta$, $i \leq \Gamma$, $\beta \leq \Gamma$.

2.1.2 Généralisation à la k -domination et k -indépendance

En 1984, lors d'une conférence à Kalamazoo, FINK et JACOBSON ont introduit la généralisation de la domination et de l'indépendance. Les papiers [13], [14] parus dans les actes de la conférence contiennent les définitions des nouveaux paramètres, quelques propriétés et deux conjectures dont nous parlerons dans les section 2.2 et 2.4.

Pour un graphe $G = (V, E)$, on donne les définitions suivantes.

Définition 2.2. *Etant donné l'entier $k \geq 1$. Un sous ensemble $D \subseteq V(G)$ est un k -dominant de G si tout sommet de $V(G) \setminus D$ a au moins k voisins dans D .*

Tout sur-ensemble d'un ensemble k -dominant de G est un k -dominant. Un ensemble k -dominant de G est minimal si pour tout sommet x dans D , $D \setminus \{x\}$ n'est pas un k -dominant. Les ordres minimum et maximum d'un k -dominant minimal de graphe G sont notés $\gamma_k(G)$ et $\Gamma_k(G)$. Le **nombre de k -domination** est γ_k .

Définition 2.3. *Etant donné l'entier $k \geq 1$, un sous ensemble $D \subseteq V(G)$ est un k -indépendant si tout sommet de D a moins de k voisins dans D , ou encore si $\Delta(D) \leq k-1$.*

Tout ensemble d'un ensemble k -indépendant est un k -indépendant. Un ensemble k -indépendant de G est maximal si pour tout sommet x dans $V(G) \setminus D$, $D \cup \{x\}$ n'est pas un k -indépendant. Les ordres minimum et maximum d'un ensemble k -indépendant maximal de G sont notés $i_k(G)$ et $\beta_k(G)$. Le **nombre de k -indépendance** est β_k .

Pour $k = 1$ on retrouve les définitions de la domination et de l'indépendance usuelles. Donc pour tout graphe G , $\gamma_1(G) = \gamma(G)$, $\Gamma_1(G) = \Gamma(G)$, $i_1(G) = i(G)$, $\beta_1(G) = \beta(G)$.

2.1.3 Premières propriétés

1. Tout ensemble k -dominant contient au moins k sommets, d'où $\gamma_k(G) \geq k$ pour tout graphe G , et contient tous les sommets de degré plus petit que k .
2. Tout ensemble de k sommets est k -indépendant d'où $i_k(G) \geq k$ pour tout graphe G .
3. Par définition $i_k(G) \leq \beta_k(G)$ et $\gamma_k(G) \leq \Gamma_k(G)$ pour tout graphe G . La généralisation (ou la non-généralisation) des quatre autres inégalités de la chaîne (1) sera étudiée en section 2.2. Ce problème de la généralisation est lié à la première conjecture proposée par FINK et JACOBSON [14].
4. Tout ensemble $(k+1)$ -dominant de G est k -dominant et donc $\gamma_k(G) \leq \gamma_{k+1}(G)$ pour tout graphe G et tout entier $k \geq 1$. De plus V est le seul ensemble $(\Delta+1)$ -dominant mais n'est pas un Δ -dominant minimal. On en déduit que pour tout graphe G , $\Gamma_\Delta(G) < n$ et

$$\gamma(G) = \gamma_1(G) \leq \gamma_2(G) \leq \dots \leq \gamma_\Delta(G) < \gamma_{\Delta+1}(G) = n.$$

5. De même tout ensemble k -indépendant est $(k+1)$ -indépendant et donc $\beta_k(G) \leq \beta_{k+1}(G)$ pour tout graphe G et tout entier $k \geq 1$. De plus V est le seul $(\Delta+1)$ -indépendant maximal mais n'est pas un Δ -indépendant. On en déduit que pour tout graphe G , $i_{\Delta+1}(G) = n$ et

$$\beta(G) = \beta_1(G) \leq \beta_2(G) \leq \dots \leq \beta_\Delta(G) < \beta_{\Delta+1}(G) = n.$$

Des propriétés relatives à la rapidité de croissance de ces suites seront étudiées en section 2.4. Cette question est liée à la seconde conjecture proposée par FINK et JACOBSON (section 2.4).

2.2 Inégalités entre les quatre paramètres de domination

Rappelons que pour la domination usuelle, les inégalités de la chaîne (1) étaient une conséquence des implications (b) et (c) dans le schéma (S) de la section 2.1. Dans l'espoir de généraliser ces inégalités, nous étudions dans les trois propriétés suivantes lesquelles des implications (a), (b), (c) restent vraies lorsque $k > 1$.

Proposition 2.4. [12] *Tout ensemble S à la fois k -indépendant et k -dominant (s'il en existe) est k -indépendant maximal.*

Proposition 2.5. [12] *Tout ensemble S à la fois k -indépendant et k -dominant (s'il en existe) est k -dominant minimal.*

Proposition 2.6. [12] *Un ensemble S , k -indépendant maximal n'est pas nécessairement k -dominant.*

Le graphe de la figure 2.1 exprime une telle situation.

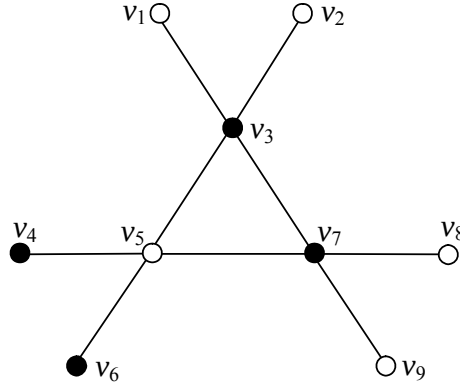


FIGURE 2.1. L'ensemble de sommets en noire est un 2-indépendant maximal mais n'est pas un 2-dominant.

Les propositions 2.4, 2.5 et 2.6 montrent que seules les implications (a) et (b) restent vraies lorsque $k > 1$ ce qui nous donne pour nouveau schéma

$$\begin{array}{ccc} k\text{-indépendant maximal} & \Longleftarrow & k\text{-indépendant et } k\text{-dominant} \Longrightarrow k\text{-dominant minimal} \\ & (a) & (b) \end{array}$$

Du fait qu'un ensemble k -indépendant maximal ne soit pas nécessairement un ensemble k -dominant, la généralisation éventuelle des inégalités $\gamma(G) \leq i(G) \leq \Gamma(G)$ et $\gamma(G) \leq \beta(G) \leq \Gamma(G)$ n'est pas évidente.

Les deux seules inégalités de la chaîne (1) que nous n'avons pas encore généralisé sont $\gamma(G) \leq i(G)$ et $\beta(G) \leq \Gamma(G)$, et ceci pour la bonne raison qu'elles ne se généralisent pas.

2.3 Bornes sur les paramètres $\gamma_k(G)$, $i_k(G)$ et $\beta_k(G)$

2.3.1 Bornes sur γ_k

Rappelons tout d'abord que $\gamma_k(G) \geq k$ pour tout graphe G et tout entier $k \leq \Delta$. Dans leur papier introduisant la k -domination et la k -indépendance, FINK et JACOBSON ont donné d'autres minorants de γ_k .

Théorème 2.7. [13] *Soit G un graphe avec $\Delta(G) \geq k \geq 2$, alors $\gamma_k(G) \geq \gamma(G) + k - 2$.*

Le résultat suivant donne une borne inférieure pour $\gamma_k(G)$ en fonction de degré maximum $\Delta(G)$.

Théorème 2.8. [13] *Pour tout graphe G , $\gamma_k(G) \geq kn/(\Delta(G) + k)$.*

Notons que pour $k = 1$, on trouve la borne de paramètre de domination $\gamma(G)$:
 $\gamma(G) \geq n/(\Delta(G) + 1)$.

COCKAYNE, GAMBLE et SHEPHERD ont prouvé une autre borne supérieure en fonction du degré minimum $\delta(G)$.

Théorème 2.9. [15] *Soit G un graphe avec $k \leq \delta(G)$, alors $\gamma_k(G) \leq kn/(k + 1)$.*

Notons que pour $k = 1$, on trouve la borne de Ore $\gamma(G) \leq n/2$. Cette borne supérieure a été prouvée par STRACKE et VOLKMANN.

FINK et JACOBSON ont trouvé une autre borne inférieure pour $\gamma_k(G)$ en fonction de l'ordre du graphe n et du nombre d'arêtes m .

Théorème 2.10. [13] *Soit G un graphe, alors $\gamma_k(G) \geq n - \frac{m}{k}$.*

Une conséquence de ce théorème devient un résultat intéressant pour le nombre de 2-domination dans les arbres.

Corollaire 2.11. [13] *Soit T un arbre avec $n \geq 2$, alors $\gamma_2(T) \geq (n + 1)/2$.*

En 1962, ORE était le premier à avoir observé que pour tout graphe G , $\gamma(G) \leq \beta(G)$.

Théorème 2.12. [13] *Pour tout graphe G , $\gamma_2(G) \leq \beta_2(G)$.*

Ce résultat de base a incité FINK et JACOBSON à conjecturer que: Pour tout entier positif k : $\gamma_k(G) \leq \beta_k(G)$ [13]. Cette conjecture a été prouvée grâce au théorème suivant de O. FAVARON:

Théorème 2.13. [16] *Tout graphe G admet un ensemble k -indépendant et k -dominant pour tout entier $k \leq \Delta$.*

Corollaire 2.14. [12] *Tout graphe G vérifie $\gamma_k(G) \leq \beta_k(G)$ pour tout $k \geq 1$.*

Théorème 2.15. [17] *Tout graphe G de degré minimum $\delta \geq 1$ vérifie,*

$$\gamma_k(G) \leq \begin{cases} \frac{kn}{k+1} & \text{si } k = \delta \\ \frac{(2k-\delta-1)n}{2k-\delta} & \text{si } \frac{\delta+3}{2} \leq k \leq \delta-1 \\ \frac{2n}{3} & \text{si } k = \frac{\delta+2}{2} \\ \frac{n}{2} & \text{si } 1 \leq k \leq \frac{\delta+1}{2}. \end{cases}$$

Enfin CARO a montré que lorsque δ tend vers l'infini où k est fixé, $\gamma_k(G) \leq \frac{(1+O(1))n \log \delta}{\delta}$, Généralisant ainsi le majorant déjà connu pour $k = 1$ [18].

On sait d'après [19] que pour un graphe G et un entier positif k , chaque ensemble k -dominant du graphe G contient tous les sommets de degré au plus $k - 1$.

On présente maintenant une borne supérieure du nombre de k -domination pour un cactus graphe en fonction de l'ordre, du nombre de cycles impairs et du nombre de sommets de degré au plus $k - 1$.

Théorème 2.16. [20] *Soit k un entier positif. Si G est un graphe biparti alors $\gamma_k(G) \leq (n + |\{x \in V(G); \deg_G(x) \leq k - 1\}|)/2$.*

On donne maintenant une borne supérieure du nombre de k -domination pour un unicycle graphe connexe.

Théorème 2.17. [19] *Soit $k \geq 2$ un entier positif. Si G est un unicycle graphe connexe, alors $\gamma_k(G) \leq (n + |\{x \in V(G); \deg_G(x) \leq k - 1\}| + 1)/2$ et cette borne est atteinte.*

Pour voir que cette borne est atteinte, on considère le graphe formé par un cycle impair C où chaque sommet sur C est adjacent à exactement $k - 2$ sommets pendants. Alors $\gamma_k(G) = [n - (|V(C)| - 1))/2] = (n(G) + |\{x \in V(G); \deg_G(x) \leq k - 1\}| + 1)/2$.

Théorème 2.18. [19] Soit $k \geq 2$ un entier positif. Si G est un cactus graphe connexe avec $c(G)$ cycles impairs alors $\gamma_k(G) \leq (n + |\{x \in V(G); \deg_G(x) \leq k - 1\}| + c(G))/2$. Et cette borne est atteinte.

Théorème 2.19. [21] Soit $k \geq 1$ un entier. Si G est un graphe avec un degré minimum $\delta(G) \geq 2k - 1$, alors $\gamma_k(G) \leq n(G)/2$.

Pour $k \geq 2$, le théorème 2.16 devient pour une classe spéciale des graphes bipartis le résultat suivant donné sous forme d'un corollaire.

Corollaire 2.20. [20] Soit $k \geq 1$ un entier. Si G est un graphe biparti avec un degré minimum $\delta(G) \geq k$, alors $\gamma_k(G) \leq n(G)/2$.

D'autre part, pour $k = 2$ on a le corollaire suivant:

Corollaire 2.21. [22] Si T est un arbre non trivial avec $\ell(T)$ sommets pendants, alors $\gamma_k(G) \leq (n(G) + \ell(T))/2$.

La borne du théorème 2.16 est atteinte pour les couronnes des graphes bipartis $K_{k-1,k-1}$, où $n = 2(2k - 2)$. Le nombre de sommets de degré au plus $k - 1$ est égal à $2k - 2$ et $\gamma_k(G) = 3(k - 1)$.

Proposition 2.22. [20] Soit $k \geq 2$ un entier positif. Si G est un graphe biparti avec $\gamma_k(G) = (n + |\{x \in V(G); \deg_G(x) \leq k - 1\}|)/2$, alors le sous graphe induit par l'ensemble des sommets $V(G) - \{x \in V(G); \deg_G(x) \leq k - 1\}$ possède un couplage parfait.

Pour voir que l'inverse de cette proposition n'est pas vrai, on considère l'arbre T formé par une chaîne P_3 où chaque sommet est attaché au centre du P_3 par une arête. Alors pour $k = 2$, le sous graphe induit par $T - \{x \in V(G); \deg_G(x) \leq k - 1\}$ est une couronne de P_3 admettant un couplage parfait mais $\gamma_2(G) = 8 < (n + |\{x \in V(G); \deg_G(x) \leq 1\}|)/2 = 9$ [20].

On s'intéresse maintenant à la caractérisation des arbres dont la borne du théorème 2.16 est atteinte. Un arbre T est appelé un $\mathcal{N}_k$ -arbre si T contient un sommet, disons w , de degré au moins $k - 1$ et pour tout sommet $x \in V(T) - \{w\}$, $\deg_T(x) \leq k - 1$. Le sommet w est appelé sommet spécial de T . Un $\mathcal{N}_k$ -arbre d'un sommet spécial w est appelé $\mathcal{N}_k$ -arbre exact si $\deg_T(w) = k - 1$. L'arbre subdivisé $K_{1,k}$ avec ($k \geq 1$) est un exemple d'un $\mathcal{N}_k$ -arbre [20].

Remarque 2.23. [20] Soient $k \geq 2$ un entier positif et T un arbre obtenu à partir de $\mathcal{N}_k$ -arbre T_0 de sommet spécial w en reliant w à un sommet v d'un arbre T' . Alors,

1. $\gamma_k(T') \leq \gamma_k(T) - (|V(T_0) - 1|)$ avec égalité si $\deg_{T_0}(w) \geq k$ ou $\deg_{T'}(w) \leq k - 1$.
2. $\beta_{k-1}(T) \leq \beta_{k-1}(T') + (|V(T_0) - 1|)$.

On introduit la famille $\mathcal{F}_k$ d'arbres T qui peuvent être obtenus à partir d'une séquence $T_1, T_2, \dots, T_p$ avec ($p \geq 1$) d'arbres où T_1 est un $\mathcal{N}_k$ -arbre exact, $T = T_p$, et, si $p \geq 2$, T_{i+1} peut être obtenu récursivement à partir de T_i par l'une des opérations suivantes.

- Opération $\mathcal{O}_1$: Attacher un $\mathcal{N}_k$ -arbre d'un sommet spécial w de degré au moins k en ajoutant une arête entre w et un sommet de l'arbre T_i de degré exactement $k - 1$.
- Opération $\mathcal{O}_2$: Attacher un $\mathcal{N}_k$ -arbre exact d'un sommet spécial w en ajoutant une arête de w à un sommet u de l'arbre T_i de degré exactement $k - 1$, et t ($t \geq 0$) nouveaux arbres de degré maximum au plus $k - 2$ chacun attaché au sommet u .

Un $\mathcal{N}_k$ -arbre T de sommet spécial w est appelé $\mathcal{N}_k$ -arbre faible si $\deg_T(x) \leq k - 2$ pour tout sommet $x \in V(T) - N[w]$. Et il est appelé $\mathcal{N}_k$ -arbre exact faible si $\deg_T(w) = k$ [20].

Théorème 2.24. [20] Soient T un arbre non trivial et $k \geq 2$ un entier positif. Alors $\gamma_k(T) = (n + |\{x \in V(G); \deg_G(x) \leq k - 1\}|)/2$ si et seulement si $\Delta(T) \leq k - 2$ où $T \in \mathcal{F}_k$.

On donne une borne inférieure reliant le nombre de p -domination et le nombre de $(p - 1)$ -indépendance .

Théorème 2.25. [20] Si T est un arbre, alors pour tout entier positif $k \geq 2$, $\gamma_k(T) \geq \beta_{k-1}(T)$.

Corollaire 2.26. [22] Si T est un arbre alors, $\gamma_2(T) \geq \beta(T)$.

Donc d'après le théorème 2.25 et le corollaire 2.14, pour tout arbre T d'ordre n on a: $\gamma_1(T) \leq \beta_1(T) \leq \gamma_2(T) \leq \beta_2(T) \leq \dots \leq \beta_{\Delta-1}(T) \leq \gamma_{\Delta}(T) \leq \beta_{\Delta}(T) \leq \gamma_{\Delta+1}(T) = \beta_{\Delta+1}(T) = n$.

Pour caractériser les arbres dont la borne du théorème 2.25 est atteinte, on introduit la famille des arbres $\mathcal{A}_k$ de tous les arbres T qui peuvent être obtenus à partir d'une séquence $T_1, T_2, \dots, T_p$ avec ($p \geq 1$) d'arbres, où T_1 est un $\mathcal{N}_k$ -arbre faible de sommet spécial w de

degré au moins k , $T = T_p$, et, si $p \geq 2$, T_{i+1} peut être obtenu récursivement à partir de T_i , par l'une des opérations définies ci-dessous. Soit $A(T_1) = V(T_1) - \{w\}$.

- Opération $\mathcal{T}_1$: Attacher un $\mathcal{N}_k$ -arbre faible T_0 de sommet spécial w de degré au moins k à un sommet quelconque de T_i . Soit $A(T_{i+1}) = A(T_i) \cup (V(T_0) - \{w\})$.
- Opération $\mathcal{T}_2$: Attacher un $\mathcal{N}_k$ -arbre exact faible T_0 de sommet spécial w à un sommet quelconque de $A(T_i)$. Soit $A(T_{i+1}) = A(T_i) \cup (V(T_0) - \{w\})$ [20].

On constate le lemme suivant:

Lemme 2.27. [20] Si $T \in \mathcal{A}_k$, alors $A(T)$ est l'unique $\gamma_k(T)$ -ensemble et l'unique $\beta_{k-1}(T)$ -ensemble.

Théorème 2.28. [20] Soient T un arbre et $k \geq 2$ un entier positif. Alors les assertions suivantes sont équivalentes:

1. $\gamma_k(T) = \beta_{k-1}(T)$.
1. $\Delta(T) \leq k - 2$ où $T \in \mathcal{A}_k$.
2. T possède un $\gamma_k(T)$ -ensemble unique et de même un $\beta_{k-1}(T)$ -ensemble unique.

Théorème 2.29. [6] Si G est un graphe avec $\delta(G) \geq 1$, alors $\gamma(G) \leq n/2$.

Théorème 2.30. [23] Si G est un bloc graphe, alors $\gamma_2(G) \geq \beta(G)$.

Théorème 2.31. [23] Si G est un graphe avec au plus un cycle, alors $\gamma_2(G) \geq \beta(G)$.

On considère l'exemple d'un cactus graphe contenant $k \geq 2$ cycles pour montrer que ce résultat n'est pas vrai d'une façon générale pour un cactus graphe (voir la figure 2.2). Soit G un cactus graphe avec k cycles C_i pour $1 \leq i \leq k$ de longueur 4 et dont tous les cycles possèdent un sommet en commun. Il est facile de vérifier que $\beta(G) = 2k > k + 1 = \gamma_2(G)$ [23].

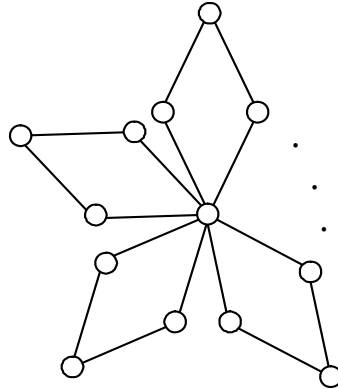


FIGURE 2.2. Un cactus graphe G tel que $\gamma_2(G) < \beta(G)$.

Théorème 2.32. [23] Si G est un cactus graphe connexe avec $c(G)$ cycles, alors $\gamma_2(G) \geq \beta(G) - c(G) + 1$.

Remarque 2.33. [23] Si G est un graphe avec $\delta(G) \geq 2$, alors $\gamma_2(G) + \beta(G) \leq n$.

Exemple: Cette dernière inégalité est atteinte pour le cactus graphe G de la figure 2.3, qui consiste en un cactus avec $k \geq 2$ cycles C_5 possédants un sommet en commun. Alors on peut vérifier facilement que $n(G) = 4k + 1$, $\beta(G) = 2k$ et $\gamma_2(G) = 2k + 1$, donc $\beta(G) + \gamma_2(G) = 4k + 1$.

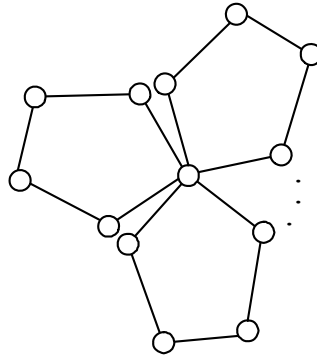


FIGURE 2.3. Un cactus graphe G tel que $\gamma_2(G) + \beta(G) = n$.

Remarque 2.34. [23] Si G est un graphe avec un ensemble indépendant maximum unique, alors $\gamma_2(G) \leq \beta(G)$.

Corollaire 2.35. [23] Si G est un bloc graphe ou un unicycle graphe avec un ensemble indépendant maximum unique, alors $\gamma_2(G) = \beta(G)$.

Théorème 2.36. [23] Si G est un graphe de degré minimum $\delta(G) \geq 2$, alors $\gamma_2(G) \leq (n(G) + \gamma(G))/2$.

Exemple: Cette dernière inégalité est atteinte pour le cactus graphe de la figure 2.4, qui contient $k \geq 2$ cycles C_3 , dont tous les k cycles possèdent un sommet en commun. Alors on peut vérifier facilement que $n(G) = 2k + 1$, $\gamma(G) = 1$ et $\gamma_2(G) = (2k + 1 + 1)/2 = k + 1$, donc $(n(G) + \gamma(G))/2 = \gamma_2(G)$.

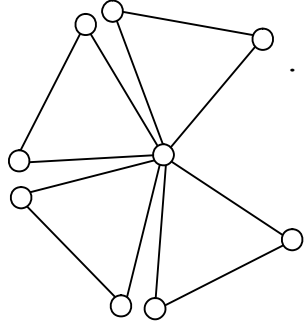


FIGURE 2.4. Un cactus graphe G tel que $\gamma_2(G) = (n(G) + \gamma(G))/2$.

Théorème 2.37. [23] Soit G un graphe connexe d'ordre $n(G) \geq 2$, sachant que tous les blocs B de G avec $|V(B)| \geq 4$ sont aussi bipartis où $\delta(B) \geq 3$. Si $c'(G)$ est le nombre de blocs finaux d'ordre 3, alors $\gamma_2(G) \leq (n(G) + c'(G) + \ell(G))/2$.

Corollaire 2.38. [23] Si G est un graphe de degré minimum $\delta(G) \geq 2$ sans bloc final d'ordre 3 sachant que tous les blocs B de G avec $|V(B)| \geq 4$ sont aussi bipartis ou $\delta(B) \geq 3$, alors $\gamma_2(G) \leq n/2$.

Corollaire 2.39. ([24], [21]) Si G est un graphe de degré minimum $\delta(G) \geq 3$, alors $\gamma_2(G) \leq n/2$.

Corollaire 2.40. [23] Si G est un bloc graphe d'ordre $n(G) \geq 2$ avec $c'(G)$ blocs finaux d'ordre 3, alors $\gamma_2(G) \leq (n(G) + c'(G) + \ell(G))/2$.

Théorème 2.41. [23] Si G est un cactus graphe connexe d'ordre $n(G) \geq 3$ avec $c_0(G)$ cycles impairs, alors $\gamma_2(G) \leq (n(G) + c_0(G) + \ell(G))/2$.

L'exemple suivant montre que les bornes du corollaire 2.40 et du théorème 2.41 sont atteintes.

Exemple: Soit G un graphe contenant $k \geq 2$ cycles disjoints C_i de longueur 3 pour $1 \leq i \leq k$, reliés par une chaîne P_k . On observe que G est un cactus graphe connexe qui est un bloc graphe connexe d'ordre $3k$ (voir la figure 2.5) sachant que:

$$\gamma_2(G) = 2k = (3k + k + 0)/2 = (n(G) + c'_3(G) + \ell(G))/2,$$

$$\gamma_2(G) = 2k = (3k + k + 0)/2 = (n(G) + c_0(G) + \ell(G))/2.$$

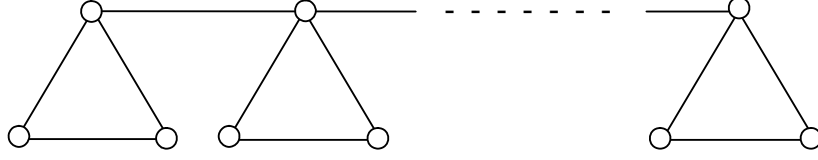


FIGURE 2.5. Un cactus graphe G tel que

$$\gamma_2(G) = 2k = (n(G) + c'_3(G) + \ell(G))/2 = (n(G) + c_0(G) + \ell(G))/2$$

2.3.2 Bornes sur i_k

Rappelons d'abord que $i_k(G) \geq k$ pour tout graphe G et tout $k \leq \Delta$.

On a déjà vu dans le théorème 2.13 qu'un graphe G admet un ensemble k -indépendant et k -dominant pour tout entier $k \leq \Delta$. Une des conséquences de ce théorème est le corollaire suivant:

Corollaire 2.42. [12] *Tout graphe G vérifie $i_k(G) \leq \Gamma_k(G)$ pour tout entier $k \geq 1$.*

Remarque 2.43. [12] *On peut considérer des ensembles à la fois k -indépendants et j -dominants dont les ordres minimum et maximum sont notés respectivement par i_j^k et I_j^k . Le fait qu'il existe pour tout k des ensembles k -indépendants et k -dominants montre que i_j^k et I_j^k existe pour tout j avec $1 \leq j \leq k$ et que*

$$\gamma_k \leq i_k^\Delta \leq i_k^{\Delta-1} \leq \dots \leq i_k^{k+1} \leq i_k^k \leq I_k^k \leq I_{k-1}^k \leq \dots \leq I_2^k \leq I_1^k \leq \beta_k.$$

Des résultats relatifs aux paramètres i_j^k et I_j^k se trouvent dans [14], [25]. D'autres résultats concernant le paramètre $i_k(G)$ dans les graphes en générale et d'autres dans des classes particulières des graphes seront exposés dans le chapitre 3 de cette thèse.

2.3.3 Bornes sur β_k

Différents minorants sur β_k ont été établis, essentiellement avec l'idée de généraliser des bornes connues sur β comme $\beta(G) \geq \sum_{v \in V} \frac{1}{1+d(v)} \geq \frac{n}{\Delta+1}$ ou $\beta \geq R$ où R est le résidu du graphe (voir APPENDICE A). Le premier minorant obtenu, $\beta_k(G) \geq \sum_{v \in V} \frac{k}{1+kd(v)}$ [25] n'était pas bon et a été amélioré par les suivants. Nous donnons le second, dû à CARO et TUZA, sous une forme un peu affaiblie portant sur le degré moyen et légèrement remaniée par JELEN. La troisième est donnée par HOPKINS et STATON. Nous ne faisons que citer

le quatrième minorant, dû à JELEN, car la définition même du k -résidu $R_k(G)$, calculé à partir de la suite des degrés de G , est un peu longue à appréhender (pour la définition complète du k -résidu $R_k(G)$, voir [26]).

Théorème 2.44. ([27], [26]) Pour tout graphe G de degré moyen $d^* = 2m/n \geq 1$ et tout k ,

$$\beta_k(G) \geq \begin{cases} (1 - \frac{d^*}{2k})n & \text{si } k \geq d^*, \\ \frac{k+1}{2(d^*+1)} n & \text{si } k < d^*. \end{cases}$$

Théorème 2.45. [28] Pour tout graphe G et tout $k \leq \Delta(G)$, $\beta_k(G) \geq n/(1 + \lfloor \frac{\Delta}{k} \rfloor)$.

Notons que lorsque la valeur de k divise Δ , ce résultat est une conséquence directe des deux théorèmes 2.8 et 2.9.

Théorème 2.46. [12] Pour tout graphe G et tout entier $k \leq \delta$, $\beta_k(G) \leq n\Delta/(\Delta + \delta - k + 1)$.

Une autre borne en fonction du résidu $R_k(G)$ du graphe G est ainsi présentée.

Théorème 2.47. [26] Pour tout graphe G et tout k , $\beta_k(G) \geq R_k(G)$ où $R_k(G)$ est le résidu d'ordre k du graphe G (voir APPENDICE A).

On présente maintenant deux autres bornes en fonction de l'ordre du graphe et de paramètre de domination, n et γ respectivement.

Proposition 2.48. [12] Soit G un graphe, alors $\beta_k(G) \leq n - \gamma_{\delta+1-k}(G)$ pour tout k , avec $1 \leq k \leq \delta$.

Proposition 2.49. [12] Soit G un graphe, alors $\beta_k(G) \geq n - \gamma_{\Delta+1-k}(G)$ pour tout k , avec $1 \leq k \leq \Delta$.

En particulier pour un graphe G , d -régulier, on a $\gamma_{d+1-k}(G) + \beta_k(G) = n$.

Proposition 2.50. [12] Soient G un graphe et S un Δ -dominant, alors S est un Δ -indépendant i.e. $\Gamma_\Delta(G) \leq \beta_\Delta(G)$.

On donne un exemple d'un graphe d'inégalité stricte de la proposition 2.50, attacher deux feuilles à chacune des deux extrémités d'une chaîne de longueur 3 (voir la figure 2.6).

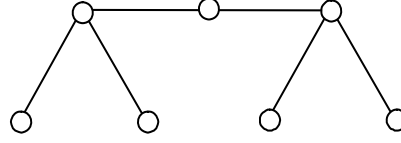


FIGURE 2.6. Un graphe G pour lequel $\Delta = 3$, $\beta_\Delta(G) = 6$ et $\Gamma_\Delta(G) = 5$ donc $\Gamma_\Delta(G) < \beta_\Delta(G)$.

Remarque 2.51. [12] D'après le corollaire 2.42, $i_k(G) \leq \Gamma_k(G)$ pour tout entier $k \geq 1$. Ce n'est pas le cas d'une façon générale pour $\beta_k(G)$, car on peut trouver des graphes et des valeurs de k tels que $\beta_k(G)$ soit plus petit ou plus grand que $\Gamma_k(G)$, comme le montre l'arbre T de la figure 2.7 qui possède k supports et dont chaque support possède k sommets pendants.

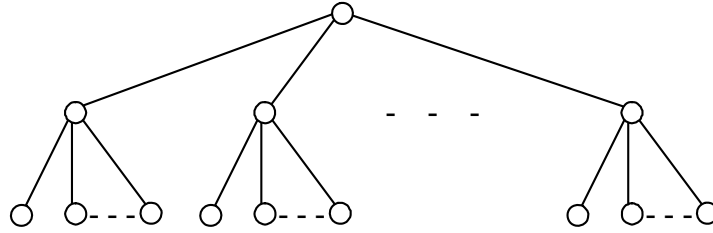


FIGURE 2.7. Un arbre T pour lequel $\beta_k(T) < \Gamma_k(T)$ et $\Gamma_{k+1}(T) < \beta_{k+1}(T)$.

Pour cet arbre on a: $\Gamma_k(T) = \beta_{k+1}(T) = (k+1)^2$ et $\Gamma_{k+1}(T) = \beta_k(T) = k^2 + 1$.

2.4 Croissance des suites (γ_k) et (β_k)

Nous étudions ici la rapidité de croissance des suites:

$$\begin{aligned} \gamma(G) = \gamma_1(G) &\leq \gamma_2(G) \leq \dots \leq \gamma_\Delta(G) < \gamma_{\Delta+1}(G) = n. \\ \beta(G) = \beta_1(G) &\leq \beta_2(G) \leq \dots \leq \beta_\Delta(G) < \beta_{\Delta+1}(G) = n. \end{aligned}$$

2.4.1 Graphes généraux

Dés les premiers papiers sur la domination. FINK et JACOBSON ont cherché à obtenir des inégalités strictes entre deux termes des suites (γ_k) ou (β_k).

Théorème 2.52. [13] *Tout graphe G vérifie $\gamma_3(G) > \gamma(G)$ dès que $\Delta \geq 1$, c'est à dire G est non vide, $\gamma_k(G) \geq \gamma(G) + k - 2$ pour tout k tel que $2 \leq k \leq \Delta$.*

Dans [14], FINK et JACOBSON ont proposé une conjecture généralisant la propriété $\gamma(G) < \gamma_3(G)$ sous la forme " $\gamma_k(G) \leq \gamma_{2k+1}(G)$ pour tout graphe G et tout entier $k \leq \delta$ ". Pour $k = 2$. CHEN et JACOBSON [29] ont montré que tout graphe G tel que $\delta \geq 2$ vérifie bien $\gamma_2(G) < \gamma_5(G)$. Mais SCHELP [12] a construit la famille suivante de graphes contredisant la conjecture pour k pair ≥ 8 . Pour p entier ≥ 4 , le graphe G_p de degré minimum $\delta = 2p$, s'obtient à partir d'un indépendant B d'ordre $p + 1$ et de $p + 1$ cliques A_i d'ordre p par addition de toutes les arêtes entre B et les A_i . L'ensemble $\cup_{1 \leq i \leq p+1} A_i$ est $p(p + 1)$ -dominant, et comme tout ensemble $p(p + 1)$ -dominant contient tous les sommets des A_i (de degré plus petit que $p(p + 1)$), $\gamma_{p(p+1)}(G) = p(p + 1)$. D'autre part, tout ensemble $(2p)$ -dominant S contient soit tous les A_i , soit B et au moins $p - 1$ sommets de chaque A_i . Par conséquent $\gamma_{2p}(G) = \gamma_{p(p+1)}(G) = p(p + 1)$, ce qui contredit la conjecture puisque $2p = \delta$ et $p(p + 1) > 2(2p) + 1$. La construction peut s'adapter à k impair. La conjecture a donc été modifiée et reste ouverte sous la forme suivante.

Conjecture 2.53. (FINK et JACOBSON) *Il existe une application $f : N \longrightarrow N$ telle que $\gamma_k(G) \leq \gamma_{f(k)}(G)$ pour tout graphe G tel que $\delta \geq k$.*

D'après l'exemple de SCHELP, si la conjecture est vraie alors $f(k) > (k^2 + 2k)/4$. Nous donnons ci-dessous quelques autres résultats relatifs à ce sujet .

Théorème 2.54. [12] *Si pour un entier k , $\gamma_k(G) = \gamma_{k+1}(G)$, alors $\gamma_k(G) \geq i_k(G)$.*

En particulier, si $\gamma_2(G) = \gamma(G)$ alors $i(G) = \gamma(G)$.

Théorème 2.55. ([23] pour $k=1$, [12]) *Pour tout graphe G et tout entier $k \leq \delta - 1$, on a $\gamma_{k+1}(G) \leq (n + \gamma_k(G))/2$.*

Un exemple de graphe extrémal pour le théorème 2.55 est le graphe obtenu à partir d'une clique B d'ordre k et $q \geq k$ cliques A_i d'ordre 2 en ajoutant toutes les arêtes entre B et les A_i . On peut vérifier facilement que $n = k + 2q$, $\delta = k + 1$, $\gamma_k(G) = k$ et $\gamma_{k+1}(G) = k + q = (n + \gamma_k(G))/2$.

2.4.2 Classes particulières de graphes

Les résultats suivants établissent la conjecture de FINK et JACOBSON avec la détermination de $f(k)$ dans la classe des graphes sans $K_{1,3}$ ou dans des sous-classes de cette classe, ainsi que des propriétés de même nature portant sur la suite (β_k) .

Théorème 2.56. [14] *Si G est un graphe $K_{1,3}$ -libre et $2 \leq k \leq \Delta$, alors $\gamma_k(G) < \gamma_{2k}(G)$.*

Théorème 2.57. [25]

- (i) *Si G est $\{K_{1,3}, K_{1,3} + e\}$ -libre et $k \leq \Delta$, alors $\gamma_k(G) < \gamma_{k+2}(G)$.*
- (ii) *Si G est $\{K_{1,3}, K_{1,3} + e, h\}$ -libre et $2 \leq k \leq \Delta$, alors $\gamma_k(G) < \gamma_{k+1}(G)$.*

Comme exemple de l'assertion (ii) du théorème 2.57, Le graphe h de la figure 2.8 vérifie $\gamma_3(h) = \gamma_4(h)$. Il est donc naturel de l'interdire comme sous graphe induit pour espérer avoir la propriété plus forte $\gamma_k(G) < \gamma_{k+1}(G)$.

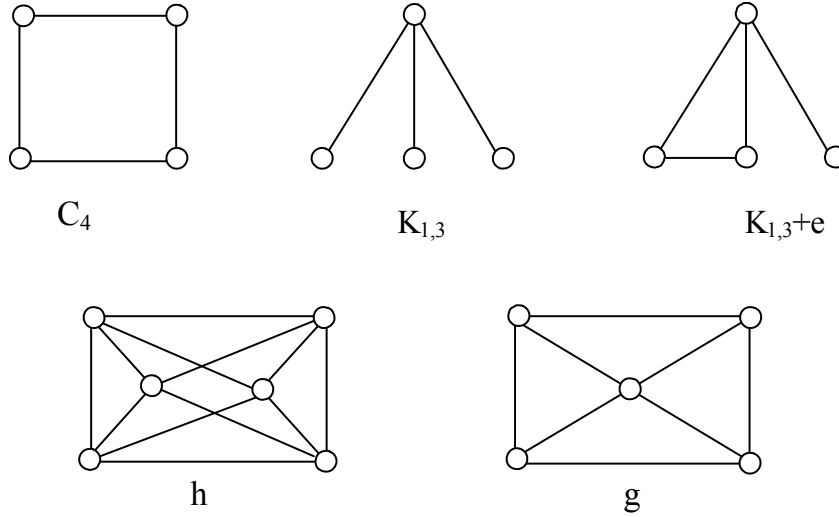


FIGURE 2.8. Les graphes interdits pour avoir quelques propriétés sur γ_k .

Théorème 2.58. [25]

- (i) *Si G est $K_{1,3}$ -libre et $k \leq \Delta$, alors $\beta_k(G) < \beta_{2k+1}(G)$.*
- (ii) *Si G est $\{K_{1,3}, K_{1,3} + e\}$ -libre et $k \leq \Delta$, alors $\beta_k(G) < \beta_{k+2}(G)$.*
- (iii) *Si G est $\{K_{1,3}, K_{1,3} + e, g\}$ -libre et $2 \leq k \leq \Delta$, alors $\beta_k(G) < \beta_{k+1}(G)$.*

Pour l'assertion (i) de ce théorème, on donne comme exemple le graphe formé de deux cliques d'ordre $k+1$ ayant exactement un sommet commun, cet exemple montre que $\beta_k(G)$ peut être égal à $\beta_{2k}(G)$ dans un graphe sans $K_{1,3}$.

Et pour l'assertion (iii), le graphe g de la figure 2.8 vérifie $\beta_3(g) = \beta_4(g)$. Il est donc naturel de l'interdire comme sous-graphe induit pour espérer avoir la propriété $\beta_k(G) < \beta_{k+1}(G)$.

2.5 Problèmes ouverts

Après la présentation des différents concepts et des différents résultats concernant les paramètres de k -domination et de k -indépendance dans les graphes, on présente maintenant un ensemble de problèmes ouverts sur lesquels on est entrain de travailler. En voici quelques uns:

1. Pour tout arbre T , $i_2(T) \leq \gamma(T) + i(T)$.
2. Caractérisation des arbres G tels que $i_2(G) = 2i(G)$.
3. Caractérisation des arbres T tels que $i_2(T) = \gamma_t(T)$.
4. Caractériser les arbres qui admettent un i_2 -ensemble unique.
5. Caractériser les arbres qui admettent un β_2 -ensemble unique.
6. Caractériser les arbres qui admettent un i -ensemble unique.

Le problème 1 a été montré récemment dans [30] et même plus, on montre que tout graphe G contenant au plus un cycle vérifie $i_2(G) \leq \gamma(G) + i(G)$.

CHAPITRE 3

CONTRIBUTION À L'ÉTUDE DE LA k -INDÉPENDANCE DANS LES GRAPHS

Jusqu'à présent, la littérature ne compte pas plus d'une dizaine de travaux sur la k -indépendance dans les graphes, nous citons les travaux de O. FAVARON (voir [25]), F. JELEN (voir [26]) et R.B. MADDOX (voir [31]). Ces résultats sont importants, mais ne sont pas suffisant pour répondre à l'ensemble des problèmes ouverts posés dans ce domaine. On exposera dans ce chapitre quelques nouveaux résultats obtenus en collaboration avec M. BLIDIA, M. CHELLALI et O. FAVARON, relatifs au comportement des deux paramètres quand on applique quelques opérations de graphes.

3.1 Propriétés préliminaires sur i_k et β_k

Pour tout graphe G et tout entier $k \geq 1$, chaque ensemble d'au plus k sommets, induit un ensemble k -indépendant et ainsi $k \leq i_k(G) \leq \beta_k(G)$. La séquence (β_k) est faiblement croissante car chaque ensemble k -indépendant est $(k+1)$ -indépendant et la séquence (i_k) est non nécessairement monotone comme on va voir dans la remarque 3.13 de ce chapitre. Finalement, $i_{\Delta+1}(G) = \beta_{\Delta+1}(G) = n$ pour tout graphe G et dorénavant on suppose que $k \leq \Delta$.

Pour préparer les sections suivantes, on donne les valeurs de i_k et β_k pour quelques familles d'arbres, et trois lemmes relatifs au comportement des deux paramètres moyennant quelques opérations de graphes.

Remarque 3.1. [32] Si $S_{p,q}$ est une étoile double avec $p \geq q \geq 1$, alors pour tout k avec $2 \leq k \leq p+1 (= \Delta(S_{p,q}))$ on a :

- $\beta_k(S_{p,q}) = p + q$ et $i_k(S_{p,q}) = 2k - 2$ si $k \leq q$.
- $\beta_k(S_{p,q}) = p + q + 1$ et $i_k(S_{p,q}) = 2k - 2$ si $k = q + 1$.
- $\beta_k(S_{p,q}) = p + q + 1$ et $i_k(S_{p,q}) = q + k$ si $q + 2 \leq k \leq p + 1$.
- $i_2(S_{p,2}^*) = 4 = n - \Delta(S_{p,2}^*)$.

En particulier $\beta_2(S_{p,q}) \geq (n+s)/2$ avec égalité si et seulement si $p = q = 1$ où $p = q = 2$, et $i_2(S_{p,q}) = 2 < (n+s)/2$ pour tout p et q .

Remarque 3.2. [32] Si SS_q est une étoile subdivisée, alors pour tout k avec $2 \leq k \leq q$, $\beta_k(SS_q) = n - 1$, $i_2(SS_q) = q + 1$ et $i_k(SS_q) = q + k$ pour $3 \leq k \leq q$. En particulier $i_2(SS_q)$ et $\beta_2(SS_q)$ sont différents de $(n+s)/2$ pour tout $q \geq 2$.

La structure des étoiles et des étoiles subdivisées peut être généraliser comme suit :

Définition 3.3. [32] Pour $r + 1$ entiers $p_i \geq 0$ sachant que $\sum_{i=0}^r p_i \geq 1$, l'étoile généralisée $GS_{p_0, p_1, \dots, p_r}$ est l'arbre d'ordre $n = 1 + \sum_{i=0}^r (i+1)p_i$ et du degré maximum $\Delta = \sum_{i=0}^r p_i$ obtenu à partir de l'étoile $K_{1, p_0 + p_1 + \dots + p_r}$ en subdivisant les p_1 arêtes une fois, les p_2 arêtes 2 fois, ..., les p_r arêtes r fois comme il est représenté dans la figure 3.1.

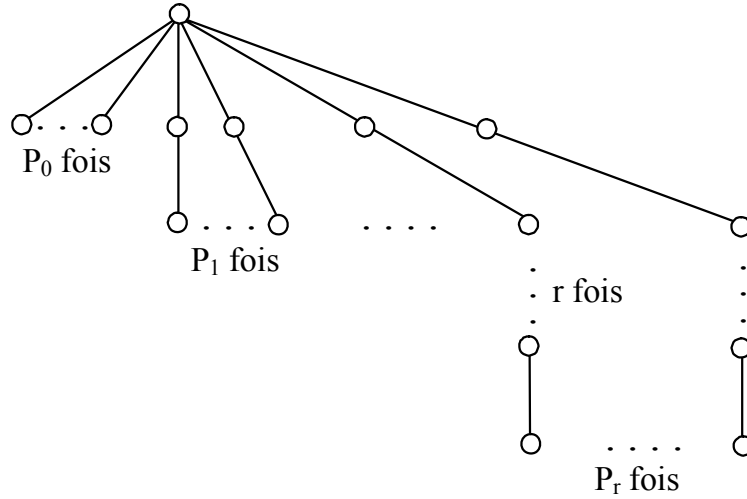


FIGURE 3.1. L'étoile généralisée $GS_{p_0, p_1, \dots, p_r}$.

Remarque 3.4. [32]

- Si T est une étoile $K_{1, p_0} = GS_{p_0}$ avec $p_0 \geq 2$, alors $i_2(T) = \beta_2(T) = (n+s)/2$ si $p_0 = 2$ et $i_2(T) < (n+s)/2 < \beta_2(T)$ sinon.
- Si $T = GS_{p_0, p_1, p_2}$ n'est pas une étoile, alors $i_2(T) = p_1 + 2p_2 + 1 = n - \Delta$ si $p_0 + p_1 \geq 1$ et $i_2(T) = 2p_2 = n - \Delta - 1$ si $p_0 = p_1 = 0$.
- Si $T = GS_{p_0, 0, 0, 1}$ avec $p_0 \geq 1$, alors $i_2(T) = 4 = n - \Delta$.
- Si $T = GS_{p_0, p_1}$ avec $p_1 \geq 2$, alors $\beta_2(T) = p_0 + 2p_1 > (n+s)/2$.
- Si $T = GS_{p_0, p_1, \dots, p_r}$ et $3 \leq k \leq \Delta$, alors $\beta_k(T) = n - 1$ et $i_k(T) = n + k - \Delta - 1$.

Lemme 3.5. [32] *Pour $k \geq 1$, soit w un sommet du graphe G'' sachant que chaque voisin de w a un degré au plus k , au moins w ou un de ses voisins a un degré au moins k et chaque sommet dans $V(G'') \setminus N[w]$, s'il existe, a un degré inférieur à k dans G'' . Soit G' un graphe et G le graphe construit à partir de G' et G'' en reliant par une arête le sommet w à un sommet quelconque de G' . Alors $\beta_k(G) = \beta_k(G') + |V(G'')| - 1$.*

Preuve. L'ensemble $V(G'')$ n'est pas un k -indépendant mais il existe un $\beta_k(G)$ -ensemble S contenant $V(G'') - \{w\}$. Ainsi $S - (V(G'') - \{w\})$ est un ensemble k -indépendant de G' . Par conséquent $\beta_k(G') \geq \beta_k(G) - (|V(G'')| - 1)$.

Réciproquement, tout $\beta_k(G')$ -ensemble peut être étendu en un ensemble k -indépendant de G en ajoutant l'ensemble de sommets $V(G'') - \{w\}$ et ainsi $\beta_k(G) \geq \beta_k(G') + (|V(G'')| - 1)$, ce qui implique l'égalité. $\square$

Lemme 3.6. [32] *Soient $dcba$ et def ou $defg$ deux chaînes pendantes d'un graphe G , et soit H le graphe $G - \{a, b, c\}$. Alors $i_2(G) = i_2(H) + 2$.*

Preuve. Soit S un $i_2(H)$ -ensemble. Alors $S \cup \{a, b\}$ est un ensemble 2-indépendant maximal du graphe G et donc $i_2(G) \leq i_2(H) + 2$.

Réciproquement, soit S un $i_2(G)$ -ensemble. Alors $|S \cap \{a, b, c\}| = 2$ et $S' = S \cap V(H)$ est un ensemble 2-indépendant du graphe H d'ordre $i_2(G) - 2$. Si S' est maximal dans H , alors $i_2(H) \leq |S'| = i_2(G) - 2$. On suppose maintenant que S' n'est pas maximal.

Cas 1. *La seconde chaîne pendante en d est def de longueur 2.*

Si $d \notin S'$, alors nécessairement $\{e, f\} \subset S'$, ce qui implique que S' est maximal. Par conséquent $d \in S'$ et la seule possibilité pour que S' ne soit pas maximal et que $S \cap \{a, b, c\} = \{a, c\}$, $S \cap \{e, f\} = \{f\}$, et d admet un voisin d' qui n'est pas dans S' tel que $N_{S'}(d') = \{d\}$. Dans ce cas, l'ensemble $(S' \setminus \{f\}) \cup \{e\}$ est un 2-indépendant maximal de H d'ordre $|S'| = i_2(G) - 2$.

Cas 2. *La seconde chaîne pendante en d est $defg$ de longueur 3.*

Comme pour la chaîne abc , $|S \cap \{e, f, g\}| = 2$. Si $d \notin S'$ et S' n'est pas maximal dans H , nécessairement $c \in S$ et $S \cap \{e, f, g\} = \{f, g\}$ ou $\{e, g\}$. Alors $(S' \setminus \{g\}) \cup \{e\}$ ou $(S' \setminus \{g\}) \cup \{f\}$ est un ensemble 2-indépendant maximal de H d'ordre $|S'| = i_2(G) - 2$.

Si $d \in S'$ et S' n'est pas maximal dans H , alors d a un voisin d' qui n'est pas dans S sachant que $N_{S'}(d') = \{d\}$. Nécessairement $S \cap \{a, b, c\} = \{a, c\}$ et $S \cap \{e, f, g\} = \{f, g\}$. Donc $(S' \setminus \{f\}) \cup \{e\}$ est un ensemble 2-indépendant maximal du graphe H , d'ordre $|S'| = i_2(G) - 2$.

Dans les deux cas, $i_2(H) \leq i_2(G) - 2$, ce qui donne l'égalité. $\square$

Lemme 3.7. [32] Soit $abcdef$ une chaîne pendante du graphe G , avec $d(a) = 1$ et soit H le graphe $G - \{a, b, c, d\}$, alors $i_2(G) = i_2(H) + 2$.

Preuve. Soit S un $i_2(H)$ -ensemble, alors $S \cup \{b, c\}$ est un ensemble 2-indépendant maximal de G . Par conséquent $i_2(G) \leq i_2(H) + 2$. Réciproquement, soit S un $i_2(G)$ -ensemble. L'ensemble S admet deux ou trois sommets dans $\{a, b, c, d\}$, et si $d \in S$, alors $|S \cap \{a, b, c, d\}| = 3$. L'ensemble $S' = S \cap V(H)$ est un 2-indépendant de H , non nécessairement maximal.

Si S' est maximal dans H , alors $i_2(H) \leq |S'| \leq |S| - 2 = i_2(G) - 2$.

Si S' n'est pas maximal, il existe trois possibilités.

1. $e \in S'$, $f \notin S'$, $N(f) \cap S' = \{e\}$ et $d \in S$, dans un tel cas $S' \cup \{f\}$ est un ensemble 2-indépendant maximal de H .

2. $e \notin S'$, $f \in S'$ et $N(f) \cap S' = \emptyset$, dans un tel cas $d \in S$ et $S' \cup \{e\}$ est un ensemble 2-indépendant maximal de H .

3. $e \notin S'$, $f \notin S'$, et f est adjacent à un sommet de l'ensemble S' de degré un dans S' , dans ce cas $\{c, d\} \subset S$, et $S' \cup \{e\}$ est un ensemble 2-indépendant maximal de H .

Dans tous les cas $|S'| = |S| - 3$. Par conséquent S contient d , ainsi exactement trois sommets de l'ensemble $\{a, b, c, d\}$. Donc $i_2(H) \leq |S'| + 1 = (|S| - 3) + 1 = i_2(G) - 2$, ce qui justifie la preuve. $\square$

3.2 Bornes supérieures sur i_k

Dans cette section on généralise pour $k \geq 2$ l'inégalité de C. BERGE à savoir : $i(G) \leq n - \Delta$.

Théorème 3.8. [32] Pour un entier k avec $2 \leq k \leq \Delta$, tout graphe G d'ordre n et de degré maximum Δ satisfait $i_k(G) \leq n - \Delta + k - 1$. Si en plus G est connexe et $\Delta < n - 1$, alors $i_2(G) \leq n - \Delta$. Les deux bornes sont atteintes.

Preuve. Soient x un sommet de degré Δ et A un ensemble de $k - 1$ sommets voisins de x . L'ensemble $A \cup \{x\}$ est un k -indépendant.

Si $\Delta = n - 1$, alors $A \cup \{x\}$ est un ensemble k -indépendant maximal de G d'ordre k et puisque $i_k \geq k$ pour tout graphe G et tout k , $i_k(G) = k = n - \Delta + k - 1$ pour tout $k \geq 2$.

Si $\Delta < n - 1$, soit S un ensemble k -indépendant de G contenant $A \cup \{x\}$. Puisque $d_S(x) \leq k - 1$, $S \cap (N(x) \setminus A) = \emptyset$, alors $|S| + |N(x) \setminus A| \leq n$. Ceci implique que $i_k(G) \leq |S| \leq n - (\Delta - (k - 1)) = n - \Delta + k - 1$. $\square$

Pour $k \geq 3$, les étoiles généralisées forment des exemples des arbres extrémaux d'après la remarque 3.4. Dans le cas particulier $k = 2$, l'ensemble A consiste en un voisin a de x . Si en plus G est connexe, alors a peut être choisi avec un voisin a' dans $V \setminus N[x]$. Alors S ne peut contenir a' et $i_2 \leq |S| \leq n - |N(x) \setminus \{a\}| - 1 = n - \Delta$. Une caractérisation des graphes extrémaux de cette dernière borne sera donnée dans le théorème 3.38 présenté dans le paragraphe 3.4.1.

Définition 3.9. Soit G un graphe. Si $i(G) = \beta(G)$ alors G est dit un graphe bien couvert et si $i_k(G) = \beta_k(G)$ alors G est dit un graphe k -bien couvert.

Théorème 3.10. [30] Pour tout graphe G et tout entier $k \geq 1$, $i_k(G) \leq ki(G)$.

Preuve. Soit S un $i(G)$ -ensemble, I un ensemble k -indépendant maximal du graphe G contenant S et soit $T = I \setminus S$. Tout sommet de T admet au moins un voisin dans S et tout sommet de S admet au plus $k - 1$ voisins dans T . Donc $|T| \leq (k - 1)|S|$ et $i_k(G) \leq |I| = |S| + |T| \leq |S| + (k - 1)|S| = k|S| = ki(G)$, ce qui implique que $i_k(G) \leq ki(G)$. $\square$

Remarque 3.11. [30] En utilisant le même raisonnement vu pour montrer que $i_k(G) \leq ki(G)$, on peut montrer que $\beta_k(G) \leq k\beta(G)$. Soient S un $\beta(G)$ -ensemble, I un $\beta_k(G)$ -ensemble contenant S et soit $T = I \setminus S$. Tout sommet de T admet au moins un voisin dans S et tout sommet de S admet au plus $(k - 1)$ voisins dans T . Donc $|T| \leq (k - 1)|S|$ et $\beta_k(G) = |I| = |S| + |T| \leq |S| + (k - 1)|S| = k|S| = k\beta(G)$, ce qui implique que $\beta_k(G) \leq k\beta(G)$.

On peut noter que ce résultat peut être déduit facilement à partir du théorème 3.17.

Une conséquence de théorème 3.10 devient un résultat intéressant pour le nombre i_k dans les graphes.

Corollaire 3.12. [30] Pour tout entier $k \geq 2$, $i_k(G) \leq (k - 1)i(G) + \beta(G)$ et si $i_k(G) = (k - 1)i(G) + \beta(G)$, alors G est bien couvert et k -bien couvert.

Preuve. A partir du théorème 3.10, $i_k(G) \leq ki(G) \leq (k - 1)i(G) + \beta(G) \dots (a)$. Si $i_k(G) = (k - 1)i(G) + \beta(G)$, alors on a l'égalité le long de la chaîne d'inégalité (a). Par

conséquent $i(G) = \beta(G)$, donc G est bien couvert et $i_k(G) = k\beta(G)$. D'après la remarque précédente, $\beta_k(G) \leq k\beta(G)$ et comme $i_k(G) \leq \beta_k(G)$ alors $i_k(G) \leq \beta_k(G) \leq k\beta(G) = i_k(G)$, ce qui implique que $i_k(G) = \beta_k(G)$ et donc le graphe G est k -bien-couvert. $\square$

On donne maintenant un ensemble des remarques qui servent à faire une comparaison entre le paramètre i_k et les deux paramètres γ_k et γ_t

Remarque 3.13. D'après le corollaire 2.14 on sait que $\beta_k(G) \geq \gamma_k(G)$. Ce n'est pas le cas d'une façon générale pour $i_k(G)$, car on peut trouver des valeurs de k tels que $\gamma_k(G)$ soit plus petit que $i_k(G)$ et la différence $i_k(G) - \gamma_k(G)$ peut être aussi large que l'on veut. Ceci peut être vu en considérant l'arbre T de la figure 3.2 pour $k = 2$.

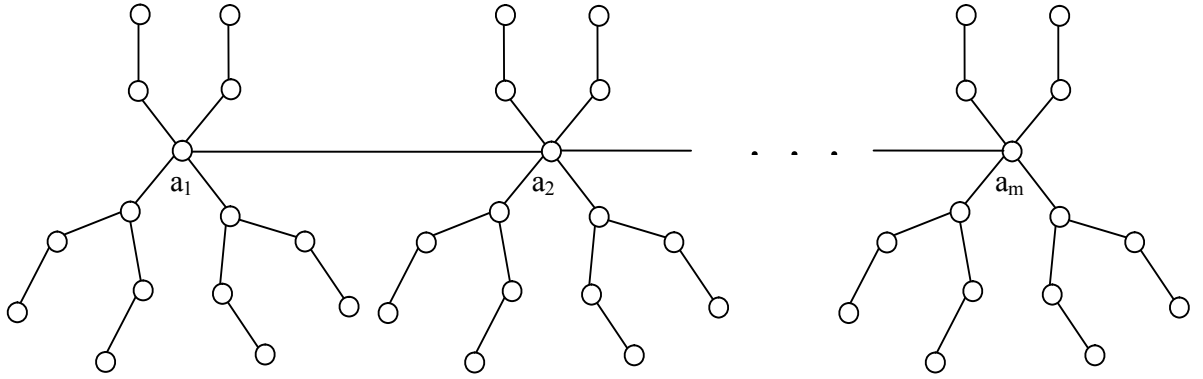


FIGURE 3.2. Un graphe T tel que $i_2(T) = 10m$ et $\gamma_2(T) = 9m$, i.e $i_2(T) > \gamma_2(T)$ et $i_2(T) - \gamma_2(T) = m \longrightarrow \infty$ si $m \rightarrow \infty$.

On peut aussi trouver des graphes et des valeurs de k tels que $\gamma_k(G)$ soit plus grand ou plus petit que $i_k(G)$ comme le montre le graphe de la figure 2.1 pour lequel on a les résultats suivants.

k	1	2	3	4	5
γ_k	3	6	7	8	9
i_k	5	4	3	6	9

Tableau 3.1. Variation des valeurs de γ_k et i_k en fonction de k .

Les résultats de la troisième ligne montrent bien que la suite (i_k) n'est pas monotone.

La différence $\gamma_k(G) - i_k(G)$ peut être aussi large que l'on veut. Ceci peut être vu en considérant l'étoile double $S_{p,q} : p, q \geq 2$ représentée dans la figure 3.3 pour $k = 2$. Dans cet exemple l'ensemble $\{a, e\}$ est un $i_2(G)$ -ensemble donc $i_2(G) = 2$, l'ensemble $\{b, c, d, f, g\}$ est un $\gamma_2(G)$ -ensemble donc $\gamma_2(G) = p + q$. La différence $\gamma_2(G) - i_2(G) = p + q - 2$ peut être aussi large que l'on veut, en augmentant la (les) valeur (s) de p et/ou q .

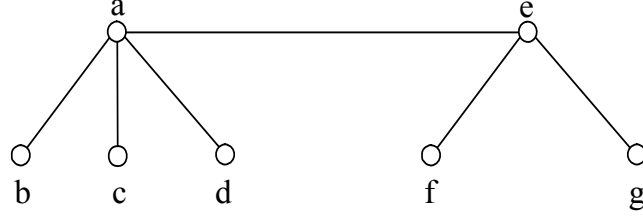


FIGURE 3.3. Un arbre T pour lequel $\gamma_2(T) > i_2(T)$.

Remarque 3.14. *Il existe des graphes G tels que $i_2(G) > \gamma_t(G)$, en effet l'arbre T de la figure 3.4 pour lequel l'ensemble $\{a, b, c\}$ est un $\gamma_t(T)$ -ensemble et l'ensemble $\{b, d, c, e\}$ est un $i_2(T)$ -ensemble;*

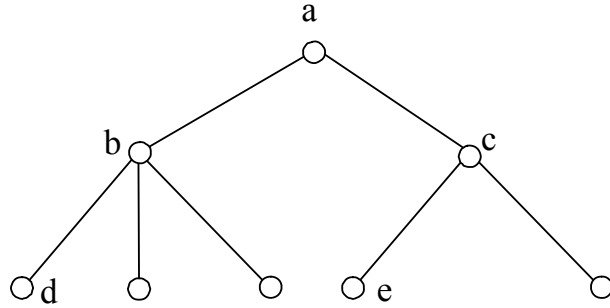


FIGURE 3.4. Un arbre T tel que $i_2(T) > \gamma_t(T)$.

Comme il existe d'autres graphes G tels que $i_2(G) = \gamma_t(G) = \gamma_2(G)$. Ceci peut être vu en considérant l'arbre T_k de la figure 3.5 pour lequel on a:

L'ensemble $\{b_1, c_1, d_1, \dots, b_k, c_k, d_k\}$ est un $\gamma_t(T_k)$ -ensemble, $\gamma_t(T_k) = 3k$,

L'ensemble $\{b_1, c_1, e_1, \dots, b_k, c_k, e_k\}$ est un $i_2(T_k)$ -ensemble, $i_2(T_k) = 3k$,

L'ensemble $\{a_1, c_1, e_1, \dots, a_k, c_k, e_k\}$ est un $\gamma_2(T_k)$ -ensemble, $\gamma_2(T_k) = 3k$.

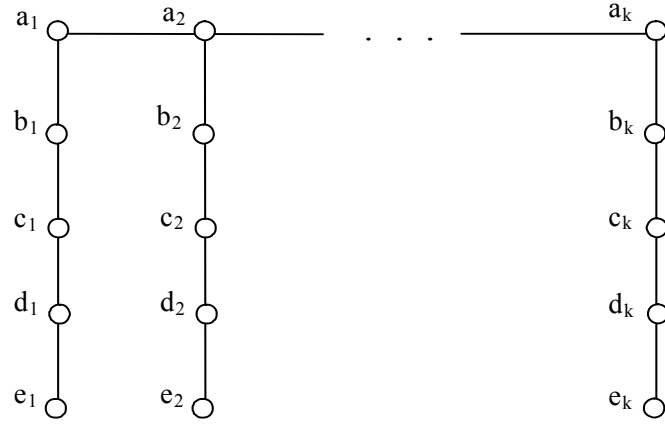


FIGURE 3.5. Un arbre T_k tel que $i_2(T_k) = \gamma_t(T_k) = \gamma_2(T_k)$.

Remarque 3.15. Soit G un graphe. Un $i_2(G)$ -ensemble peut ne pas être un dominant total et vice versa.

En effet l'arbre T de la figure 3.6, pour lequel les ensembles $\{b, c, e\}$ et $\{a, c, d\}$ sont des $i_2(T)$ -ensembles mais ils ne sont plus des dominants totaux. Inversement, l'ensemble $\{a, c, e\}$ est un dominant total mais il n'est plus un $i_2(T)$ -ensemble.

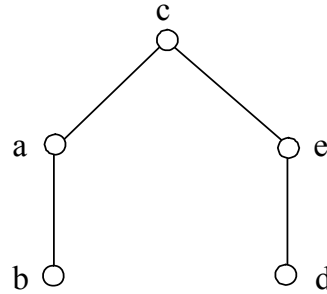


FIGURE 3.6. Un arbre T tel que un $i_2(T)$ -ensemble n'est pas un dominant total et inversement

3.3 Bornes inférieures sur β_k

La première borne $\beta_k(T) \geq kn/(k+1)$ généralise pour les arbres la borne triviale $\beta(T) \geq n/2$. On donne dans le théorème 3.17 la preuve qui également détermine la famille d'arbres extrémaux.

3.3.1 Caractérisation des arbres T avec $\beta_k = kn/(k+1)$

Nous commençons tout d'abord par donner la définition de la famille d'arbres suivante:

Définition 3.16. [32] *La famille $\mathcal{F}(k)$ est l'ensemble d'arbres qui peuvent être construits récursivement à partir de $T_1 = K_{1,k}$ par l'utilisation de l'opération F_1 décrite ci dessous. Soit H l'étoile $K_{1,k}$.*

- Opération F_1 : Ajouter une copie de H en reliant par une arête un sommet quelconque de H à un sommet quelconque de T_i .

Théorème 3.17. [32] *Soit T un arbre d'ordre n et de degré maximum Δ . Alors pour tout entier k avec $2 \leq k \leq \Delta$, $\beta_k(T) \geq kn/(k+1)$, avec égalité si et seulement si $T \in \mathcal{F}(k)$.*

Preuve. Soit $Y(T)$ l'ensemble des sommets de degré au moins k dans l'arbre T . On procède par induction sur $|Y(T)|$.

Si $Y(T) = \emptyset$, alors $\beta_k(T) = n > kn/(k+1)$.

Si $|Y(T)| = 1$, alors $\beta_k(T) = n - 1 = (nk + (n - k - 1))/(k + 1) \geq kn/(k + 1)$ puisque $k \leq \Delta \leq n - 1$. De plus $\beta_k(T) = kn/(k + 1)$ si et seulement si $k = \Delta = n - 1$, et que $T = K_{1,k} \in \mathcal{F}(k)$. On suppose que la propriété du théorème 3.17 est vraie pour tous les arbres avec $|Y(T)| < p$ et $p \geq 2$ et soit T l'arbre d'ordre n sachant que $|Y(T)| = p$. Enracinons T en un sommet pendant r . Soit u le sommet de degré au moins k maximum le plus loin possible de r . Comme $|Y(T)| \geq 2$, u est à distance au moins 2 de r . Soit v et t le père et le père du père du sommet u dans l'arbre enraciné.

1. Si $d_T(u) > k$, soit T' et T'' les composantes de $T - uv$ respectivement contenant v et u . Alors $d_{T''}(u) \geq k$ et vu la première condition du choix de u , tous les sommets de $V(T'') \setminus \{u\}$ ont un degré inférieur à k , par conséquent u vérifie les conditions du sommet ω dans le lemme 3.5.

2. Si $d_T(u) = k$, soit T' et T'' les composants de $T - vt$ respectivement contenant t et v . Alors à partir des deux conditions du choix de u , $d_{T''}(u) = k$, les sommets de $N_{T''}(v) \setminus \{u\}$ ont un degré au plus k et tous les sommets de $V(T'') \setminus N_{T''}[v]$ ont un degré inférieur à k . Par conséquent le sommet v vérifie les conditions du sommet ω dans le lemme 3.5.

Dans les deux cas, 1 et 2, on peut appliquer l'hypothèse d'induction du lemme 3.5 sur l'arbre T' puisqu'on a $|Y(T')| < |Y(T)|$. De plus $|V(T'')| \geq k + 1$ et ainsi $\beta_k(T) = \beta_k(T') + |V(T'')| - 1 \geq k(n - |V(T'')|)/(k + 1) + |V(T'')| - 1 \geq (kn + |V(T'')| - k - 1)/(k + 1) \geq kn/(k + 1)$ Donc $\beta_k(T) \geq kn/(k + 1)$.

Finalement $\beta_k(T) = kn/(k+1)$ si et seulement si on a l'égalité le long de cette chaîne d'inégalité, ceci est vraie si et seulement si $\beta_k(T') = kn(T')/(k+1)$ et $|V(T'')| = k+1$. Ainsi par hypothèse d'induction, $T' \in \mathcal{F}(k)$, et T'' est une étoile $K_{1,k}$ attachée par son centre u dans le premier cas, par un sommet pendant v dans le second cas. Puisque T est obtenu à partir de T' en utilisant l'opération F_1 , il s'ensuit que $T \in \mathcal{F}(k)$. Donc la propriété est vraie pour T , ceci justifie la preuve. $\square$

Notons que le théorème 3.17 est valable même pour $k = 1$. Dans ce cas $Y(T) = V$ et on peut faire une preuve semblable par induction sur n .

Pour savoir l'intérêt de la borne $\mathbf{B}_k = nk/(k+1)$ sur β_k dans les arbres, on la compare au meilleure sur les deux bornes inférieures sur β_k qui sont connues dans les graphes généraux. La première due à HOPKINS et STATON [28], est $HS_k = n/(1 + \lfloor \Delta/k \rfloor)$. Si $\Delta/2 < k \leq \Delta$ alors $HS_k = n/2 \leq nk/(k+1)$.

Si $k \leq \Delta/2$, soit $\Delta = kq + r$ avec $0 \leq r < k$. Alors $HS_k = nk/(\Delta + k - r) < nk/(k+1)$. De toute façon, $\mathbf{B}_k \geq HS_k$.

La seconde borne, due à JELEN, est le k -résidu R_k construit à partir de la séquence des degrés π du graphe par un processus de réductions successives mener à une séquence d'élimination $E(\pi)$ (voir [26] pour la définition complète de R_k).

Les bornes $\mathbf{B}_k$ et R_k ne sont pas comparables pour l'instant. Pour $q \geq 5$ l'étoile subdivisée SS_q d'ordre $n = 2q + 1$ satisfait $\pi = (q^1, 2^q, 1^q)$, $E(\pi) = (q^1, 1^q, 0^q)$ et $R_3 = 5q/3 > 3(2q+1)/4 = \mathbf{B}_3$.

D'autre part, soit t un entier non négatif et soit $T(t)$ un arbre de $\mathcal{F}(4)$ qui consiste en une chaîne de $p = 15t + 10$ étoiles $K_{1,4}$ comme le montre l'arbre T_t de la figure 3.7 pour $t = 0$. Il est facile de vérifier que $\pi(T_t) = (4^p, 2^{2p-2}, 1^{2p+2})$, $E(\pi) = (4^{3t+2}, 3^{3t+2}, 2^{13t+8}, 1^{28t+19}, 0^{28t+19})$ et $R_4(T) = (3n+1)/4 < 4n/5 = \mathbf{B}_4(T)$. Alors qu'on a $\mathbf{B}_4(T) - R_4(T) = (n-5)/20$. Cette construction qui peut être généraliser pour toute valeur de k , montre que la borne $\mathbf{B}_k$ peut être aussi large que R_k .

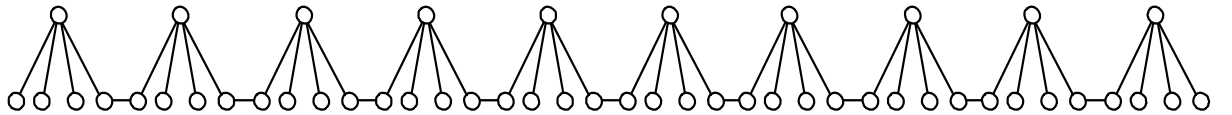


FIGURE 3.7. L'arbre T_t pour $t = 0$.

La seconde borne de cette section est actuellement une borne inférieure sur le nombre d'indépendance usuel pour un graphe biparti, mais le nombre de la k -indépendance peut atteindre cette borne pour toute valeur de k .

Théorème 3.18. [32] Soit G un graphe biparti connexe d'ordre $n \geq 2$, avec $\ell(G)$ sommets pendants et $s(G)$ sommets supports, alors $\beta_k(G) \geq \beta(G) \geq (n + \ell(G) - s(G))/2$ et cette borne est atteinte pour β_k .

Preuve. Soit G un graphe biparti connexe d'ordre n , il est facile de voir que ce résultat est vrai si le $\text{diam}(G) \in \{0, 1, 2\}$. Ainsi supposons que le $\text{diam}(G) \geq 3$. Soit $L(G)$ l'ensemble de tous les sommets pendants de G avec $|L(G)| = \ell(G)$. Le graphe biparti G' engendré par l'ensemble des sommets $V(G) - L(G)$ est connexe, son ordre est au moins 2, il admet une bipartition A et B .

Soient : $A' = S(G) \cap A$ et $B' = S(G) \cap B$, il est clair qu'aucun sommet de l'ensemble $A - A'$ (resp. de $B - B'$) n'est adjacent à un sommet de l'ensemble $L(G)$, et donc il est 2-dominé par B (resp. par A). On peut donc supposer sans perte de généralité que :

$$|A - A'| \geq |B - B'| \text{ et donc } |A - A'| \geq (n - \ell(G) - s(G))/2.$$

Considérons l'ensemble $L(G) \cup (A - A')$, alors ce dernier est un ensemble indépendant. Ainsi : $\beta_k(G) \geq \beta(G) \geq |L(G) \cup (A - A')| \geq \ell(G) + (n - \ell(G) - s(G))/2$. Par conséquent $\beta_k(G) \geq (n + \ell(G) - s(G))/2$. $\square$

Cette borne est atteinte pour les chenilles formées par une chaîne P_q où chaque sommet de la chaîne est adjacent à exactement k sommets pendants, donc $n = (k+1)q$, $\ell(G) = kq$, $s(G) = q$ et $\beta_k(G) = kq = [n + \ell(G) - s(G)]/2$.

Théorème 3.19. [30] Pour tout graphe G , $\beta_{k+1}(G) \leq \beta_j(G) + \beta_{k-j+1}(G)$ avec $1 \leq j \leq k$.

Preuve. Soit T un ensemble $(k+1)$ -indépendant maximum du graphe G et X un ensemble j -indépendant et j -dominant du sous graphe induit par l'ensemble des sommets de T . Sachant que l'ensemble X existe par un résultat de FAVARON [16]. Soit $Y = T - X$. Donc $\beta_j(G) \geq |X|$.

Il est clair que le degré maximum dans le sous graphe induit $\langle Y \rangle$ est $k - j$. Donc Y est un ensemble $(k - j + 1)$ -indépendant et alors $\beta_{k-j+1}(G) \geq |Y| \geq \beta_{k+1}(G) - \beta_j(G)$. Donc $\beta_{k+1}(G) \leq \beta_j(G) + \beta_{k-j+1}(G)$. $\square$

Corollaire 3.20. [30] Pour tout graphe G et tout entier k ,

1. $\beta_{k+1}(G) \leq \beta_k(G) + \beta(G)$,
2. $\beta_{k+1}(G) \leq (k+1)\beta(G)$,

$$3. \beta_{k+1}(G) \leq 2\beta_{\lceil k+1/2 \rceil}(G).$$

En effet d'après le théorème 3.19, pour avoir $\beta_{k+1}(G) \leq \beta_k(G) + \beta(G)$ il suffit de poser $j = k$ et en utilisant une récurrence on a $\beta_{k+1}(G) \leq (k+1)\beta(G)$. Le résultat 3. du corollaire 3.20 peut être obtenu en posant $j = (k+1)/2$.

3.4 Etude des nombres i_2 et β_2

3.4.1 Etude du nombre i_2

Théorème 3.21. [30] Soit G un graphe avec $\delta \geq 2$, alors $i_2(G) + \gamma(G) \leq n$.

Preuve. Soient M un couplage induit maximal du graphe G et A un ensemble de sommets dans M . Soit $B = N(A)$ et $C = V - (A \cup B)$. Alors C est un ensemble indépendant, sinon $M \cup \{e\}$ est un couplage induit où e est une arête de $\langle C \rangle$, ce qui contredit la maximalité de M . Ainsi $A \cup C$ est un ensemble 2-indépendant du graphe G , et puisque $\delta \geq 2$, B domine G . Alors $|B| \geq \gamma(G)$ et $i_2(G) \leq |A \cup C| = n - |B| \leq n - \gamma(G)$. $\square$

Théorème 3.22. [32] Soit G un graphe biparti connexe d'ordre $n \geq 2$ avec $\ell(G)$ sommets pendants et $s(G)$ sommets supports, alors $i_2(G) \leq (n + s(G))/2 \leq \beta_2(G)$ et ces bornes sont atteintes.

Preuve. Ce résultat peut être vérifié facilement si le $\text{diam}(G) \in \{1, 2\}$. Sinon supposons que le $\text{diam}(G) \geq 3$ et soit C le sous ensemble de sommets pendants qui contient pour chaque sommet support un seul sommet pendent, il est clair que $|C| = s(G)$. Soient A et B la bipartition de l'ensemble de sommets du sous graphe engendré par l'ensemble de sommets $V(G) - C$, on peut supposer sans perte de généralité que $|A| \leq |B|$.

Pour un $\text{diam}(G) \geq 3$, $A \neq \emptyset, B \neq \emptyset$ et $|B| \geq (n - s(G))/2 \geq |A|$. Aussi chaque sommet support de A (resp. B) admet au moins un voisin dans B (resp. A).

Le reste des sommets de A (resp. de B) qui ne sont ni des sommets supports ni des sommets pendants sont 2-dominés par B (resp. par A) ; ainsi $A \cup C$ et $B \cup C$ sont deux ensembles 2-indépendants maximaux de G et alors:

$$i_2(G) \leq |A \cup C| \leq s(G) + (n - s(G))/2 = (n + s(G))/2$$

et

$$\beta_2(G) \geq |B \cup C| \geq s(G) + (n - s(G))/2 = (n + s(G))/2.$$

Et donc on a $\beta_2(G) \geq (n + s(G))/2 \geq i_2(G)$. $\square$

Deux familles d'arbres extrémaux sont données dans les deux sous sections 3.4.1(a) et 3.4.2(a) suivantes. Ainsi des graphes bipartis $G_k (k \geq 1)$ différents des arbres, obtenus à partir d'une chaîne P_k et k cycles C_4 par identification d'un sommet de chaque cycle avec un sommet de la chaîne de sorte que les cycles résultants ont des sommets disjoints. Alors $n = 4k$, $s(G_k) = 0$ et $i_2(G_k) = \beta_2(G_k) = (n + s(G_k))/2 = 2k$. (voir la figure 3.8).

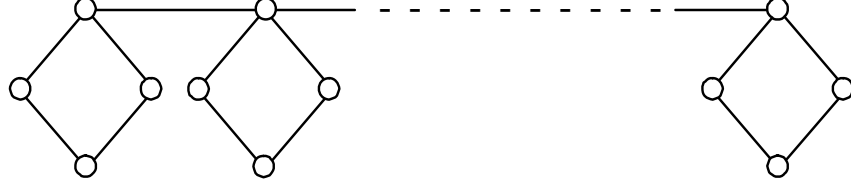


FIGURE 3.8. Un graphe G_k pour lequel $i_2(G_k) = \beta_2(G_k) = (n + s(G_k))/2$.

Corollaire 3.23. [32] *Si G est un graphe biparti connexe, avec des sommets de degré au moins deux, alors $i_2(G) \leq n/2$.*

On s'intéresse maintenant à la caractérisation des arbres qui atteignent la borne trouvée dans le théorème 3.22 pour les deux paramètres i_2 et β_2 .

a) Caractérisation des arbres T avec $i_2(T) = (n + s(T))/2$

Pour cela on définit la famille d'arbres suivante:

Définition 3.24. [32] *La famille Ω des arbres qu'on peut les construire à partir de $T_0 = P_2$, et $T'_0 = P_3$ en utilisant récursivement les opérations O_1 , O_2 ou O_3 définies ci-dessous.*

- Opération O_1 : attacher une chaîne pendante abc de longueur 2 par une arête (cd) à un sommet d du graphe contenant une chaîne pendante def de longueur 2.
- Opération O_2 : attacher une chaîne pendante abc de longueur 2 par une arête (cd) à un sommet d du graphe contenant une chaîne pendante $defg$ de longueur 3.
- Opération O_3 : attacher une chaîne pendante $abcd$ de longueur 3 par une arête (de) à un sommet e tel que e est le seul pendant de son support.

Notons que quelque soit le graphe initial, T_0 ou T'_0 , à l'étape 1, $T_1 = P_6$, obtenu à partir d'une chaîne P_2 par O_3 ou à partir d'une chaîne P_3 par O_1 .

Lemme 3.25. [32] Soit T un arbre de Ω , alors $i_2(T) = (n + s(T))/2$.

Preuve. On procède par induction sur le nombre total d'opérations O_i établies pour construire T . La propriété est vraie pour $T_0 = P_2$ et $T'_0 = P_3$.

On suppose que la propriété est vraie pour tous les arbres de Ω construit par $k-1 \geq 0$ opérations et soit T un arbre de Ω construit par k opérations.

Si la dernière opération effectuée sur l'arbre T' obtenu par les $k-1$ opérations, est O_1 ou O_2 , alors $n(T) = n(T') + 3$. S'il est obtenu par O_1 , alors par la notation des définitions des opérations, e est un sommet support dans T' et dans T . S'il est obtenu par O_2 , alors T' ne peut pas être réduit au *defg* car $P_4 \notin \Omega$, et e n'est pas un sommet support dans T' ni dans T .

Dans les deux cas, b est un nouveau sommet support dans T et $s(T) = s(T') + 1$. Par conséquent $(n(T) + s(T))/2 = (n(T') + s(T'))/2 + 2$. Par l'hypothèse d'induction $i_2(T') = (n(T') + s(T'))/2$ et d'après le lemme 3.6, $i_2(T) = i_2(T') + 2$. Donc $i_2(T) = (n(T) + s(T))/2$.

Si la dernière opération effectuée sur T' est O_3 , alors $n(T) = n(T') + 4$, $s(T) = s(T')$, ainsi on a encore $(n(T) + s(T))/2 = (n(T') + s(T'))/2 + 2$. En appliquant l'hypothèse d'induction sur T' , le lemme 3.7 donne même que précédemment $i_2(T) = (n(T) + s(T))/2$.

□

On donne maintenant la caractéristion des arbres qui satisfont $i_2(T) = (n + s(T))/2$.

Théorème 3.26. [32] Soit T un arbre non trivial, alors $i_2(T) = (n(T) + s(T))/2$ si et seulement si T est un arbre de Ω .

Preuve. La suffisance est prouvée par le lemme 3.25.

La nécessité: On procède par induction sur l'ordre d'arbre T . La propriété est vraie pour un arbre d'ordre 2 ou 3. On suppose que la propriété est vraie pour les arbres d'ordre inférieur à n avec $n \geq 4$ et soit T un arbre d'ordre n qui satisfait $i_2(T) = (n + s(T))/2$. Alors $\text{diam}(T) \geq 4$ puisque toutes les étoiles et les doubles étoiles satisfaisant la propriété sont P_2 et P_3 d'après les remarques 3.1 et 3.4.

Comme dans la preuve de théorème 3.22, Soit L l'ensemble des $s(T)$ sommets pendants contenant exactement un sommet pendant de chaque support. Et soit $A \cup B$, avec $|A| \leq |B|$, la bipartition de l'arbre $T' = T - L$. Alors $L \cup A$ et $L \cup B$ sont deux ensembles 2-indépendants maximaux de l'arbre T et $|A| \leq (n - s(T))/2 \leq |B|$.

De ceci on peut voir que $i_2(T) \leq |A| + |L| \leq (n - s(T))/2 + s(T) = (n + s(T))/2$.

Si $i_2(T) = (n + s(T))/2$, Alors $|A| = (n(T) - s(T))/2 = |B|$ et ainsi $A \cup L$ et $B \cup L$ sont deux $i_2(T)$ -ensembles. Pour chaque sommet pendant dans A ou dans B , son support admet un autre sommet pendant dans L , par conséquent il existe une chaîne la plus longue dans T , dont les deux extrémités sont dans L .

Soit v_1 une extrémité de cette chaîne et v son support, par symétrie entre $A \cup L$ et $B \cup L$, on peut supposer sans perte de généralité que v est dans B . Les autres sommets pendants $v_2, v_3, \dots, v_p$ de v s'ils existent, sont tous dans A et le sommet v admet exactement un voisin non pendant u .

Cas 1. u n'est pas un sommet support et $d(v) = 2$.

Preuve du cas 1 Si u est un support, soit u_1 son sommet pendant dans L . l'ensemble $((A \cup L) \setminus \{u_1, v_1, v_2, \dots, v_p\}) \cup \{v\}$ est un autre ensemble 2-indépendant maximal de T qui doit être aussi large que $A \cup L$. Par conséquent $u_1, v_2, \dots, v_p$ n'existe pas. Donc u n'est pas un sommet support et v_1 est le seul sommet pendant de v .

Cas 2. $d(u) = 2$ et le voisin w de u différent de v n'est pas un sommet support.

Preuve du cas 2. Puisque le $\text{diam}(T) \geq 4$, $d(u) > 1$, alors à partir du cas 1, il n'existe pas de voisin de u qui est pendant et puisque v_1 est une extrémité de la plus longue chaîne, v et tous les sommets de même distance que v possèdent au plus un seul voisin pendant.

Soit $N(u) = \{v, w, w^1, \dots, w^p\}$ où pour $1 \leq i \leq p$, tous les voisins de w^i différents de u sont des sommets pendants, parmi eux un, disons w_1^i , est dans L . Un tel sommet w_1^i est comme v_1 , une extrémité de la plus longue chaîne et d'après le cas 1, $d(w^i) = 2$ pour $1 \leq i \leq p$. Puisqu'une étoile subdivisée différente de P_3 ne satisfait pas $i_2 = (n + s)/2$ d'après la remarque 3.2, w possède au moins un voisin dans $A \setminus \{u\}$, et possible un sommet pendant w_1 dans L . Alors $((B \cup L) \setminus \{w_1, w^1, w^2, \dots, w^p, v\}) \cup \{u\}$ est un ensemble 2-indépendant maximal de T . Par conséquent $\{w_1, w^1, w^2, \dots, w^p\} = \emptyset$, ceci implique que le seul voisin de u différent de v est w et que w n'est pas un sommet support. Ceci justifie la preuve du cas 2.

Soit H l'arbre $T - \{u, v, v_1\}$ enraciné en w . Par l'argument plus longue chaîne, au plus une arête incidente à w est le début d'une chaîne plus longue que 3 dans H . Puisque w n'est pas un sommet support, les autres arêtes de H incidentes à w appartiennent à des chaînes de longueur 2 ou 3 à partir de w .

On suppose que w a un voisin e dont tous ses voisins $f_1, \dots, f_p$ sont des sommets pendants. Alors $((B \cup L) \setminus \{f_1, \dots, f_p\}) \cup \{e\}$ est un ensemble 2-indépendant maximal

de T . Par conséquent $p = 1$, $d(e) = 2$ et wef_1 est une chaîne pendante de H . De plus $s(T) = s(H) + 1$ et ainsi $(n(T) + s(T))/2 = (n(H) + s(H))/2 + 2$.

D'après le lemme 3.6, $i_2(H) = i_2(T) - 2 = (n(T) + s(T))/2 - 2 = (n(H) + s(H))/2$. Par hypothèse d'induction le graphe H est dans Ω . Donc T , qui est obtenu à partir de H en utilisant l'opération O_1 , est aussi dans Ω . Supposons que ω admet un voisin e sachant que chaque chaîne de H commençant par ωe a une longueur au plus 3 et qu'au moins une de ces chaînes, disant $wefg$, a une longueur 3. Alors g est une extrémité terminale d'une autre plus longue chaîne de T . Par analogie avec v_1 , $d(e) = d(f) = 2$ et $wefg$ est une chaîne pendante de H . Et puisque P_7 ne satisfait pas $i_2 = (n + s)/2$, T ne se réduit pas à une chaîne v_1vwefg et $d(w) > 2$. Ceci implique que $s(T) = s(H) + 1$. D'après ce qui précède et en utilisant le lemme 3.6, $i_2(H) = i_2(T) - 2 = (n(T) + s(T))/2 - 2 = (n(H) + s(H))/2$. Par hypothèse d'induction, le graphe H est dans Ω . Donc T , qui est obtenu à partir de H , en utilisant l'opération O_2 , est aussi dans Ω .

On peut maintenant supposer que $d(w) = 2$ et le diamètre de T est au moins 7. Soit $N(w) = \{u, t\}$. Si $d(t) > 2$, ou $N(t) = \{\omega, x\}$ et x est un sommet support, alors $((B \cup L) \setminus \{w, v_1\}) \cup \{u\}$ est un ensemble 2-indépendant maximal de T de cardinal inférieur à $i_2(T)$, contradiction. Par conséquent $d(t) = 2$ et x n'est pas un sommet support dans T . Ainsi dans le graphe $H' = T - \{v_1, v, u, \omega\}$, t est le seul sommet pendant attaché à x . Il résulte que $s(T) = s(H')$, $n(T) = n(H') + 4$ et $(n(T) + s(T))/2 = (n(H') + s(H'))/2 + 2$. D'après le lemme 3.7, $i_2(H') = i_2(T) - 2 = (n(T) + s(T))/2 - 2 = (n(H') + s(H'))/2$. Par hypothèse d'induction l'arbre H' est dans Ω . Donc l'arbre T obtenu à partir de H' en utilisant l'opération O_3 , est aussi dans Ω . $\square$

Une conséquence de théorème 3.10 devient un résultat intéressant pour le nombre i_2 dans les graphes.

Corollaire 3.27. [30] *Soit G un graphe, alors $i_2(G) \leq 2i(G)$.*

Proposition 3.28. [30] *Si G est un graphe d'ordre $n \geq 2$ satisfait $i_2(G) = 2i(G)$, alors G contient un couplage induit de taille $i(G)$.*

Preuve. Soit S un $i(G)$ -ensemble. Il est clair que S domine $V - S$. Soit A le plus grand sous ensemble de S dont chaque sommet possède un voisin privé dans $V - S$ et soit $N_p(A)$ l'ensemble de ces voisins privés. On considère le plus grand couplage induit, disons M , dans le sous graphe induit par l'ensemble des sommets $A \cup N_p(A)$. Soient B

l'ensemble des sommets incidents aux arêtes du couplage induit M et $C = S - B$. Notons que $S \subset B \cup C$ et que chaque sommet de $V - (B \cup C)$ est adjacent à un sommet de B ou aux deux sommets de C . Ainsi $B \cup C$ est un ensemble 2-indépendant maximal de G de taille $|B \cup C| \leq |S| + |M| \leq 2|S| = 2i(G)$. Et puisque $i_2(G) = 2i(G)$, alors $|M| = i(G)$. $\square$

Notons que l'implication dans le sens inverse est fausse, ceci est illustré par l'arbre T de la figure 3.9 ci-dessous, dont on a : $i_2(T) = 3$; $i(T) = 2$.

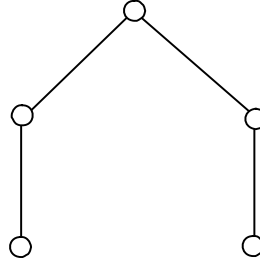


FIGURE 3.9. Un arbre T tel que $i_2(T) < 2i(T)$.

Dans cet exemple, à chaque $i(T)$ -ensemble on peut associer un couplage induit alors que $i_2(T) < 2i(T)$.

Remarque 3.29. *Il n'est pas vrai qu'un arbre T tel que $i_2(T) = 2i(T)$, admet un $i(T)$ -ensemble unique. Par exemple pour l'arbre T de la figure 3.10 on a : $i_2(T) = 2i(T) = 6$, mais T admet deux $i(T)$ -ensembles distincts;*

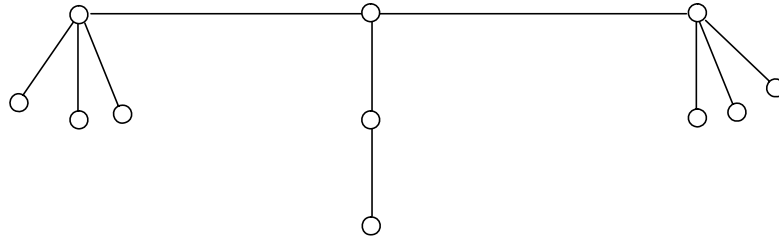


FIGURE 3.10. Un arbre T pour lequel $i_2(T) = 2i(T)$.

Remarque 3.30. $i_2(T) \leq 2\gamma(T)$ n'est pas vrai d'une façon générale pour les arbres. En effet l'exemple de chenille de la figure 3.11 suivante dont on a : $\gamma(T) = 3$; $i_2(T) = 2 + \ell/3 = 7$.

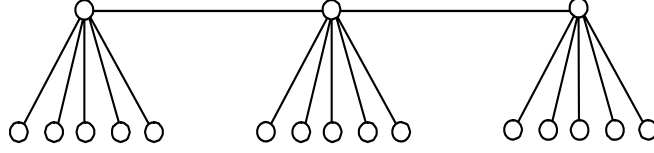


FIGURE 3.11. Un arbre T pour lequel $i_2(T) > 2\gamma(T)$.

Un autre résultat qui s'avère intéressant pour une classe particulière du graphe est donné par le théorème suivant:

Théorème 3.31. [30] *Soit G un graphe contenant au plus un cycle, alors $i_2(G) \leq \gamma(G) + i(G)$.*

Preuve. Soient S un $i(G)$ -ensemble et I un ensemble 2-indépendant maximal de G contenant S . Soit l'ensemble $A = N_I(S) = I \setminus S$ et les arêtes de $\langle I \rangle$ forment un couplage induit M entre A et un sous ensemble A' de S . Soient Z un $\gamma(G)$ -ensemble, M_1 les arêtes de M qui ne possèdent pas d'extrémités dans Z et A_1 (resp A'_1) l'ensemble des extrémités d'arêtes de M_1 dans A (resp A').

Si $\gamma(G) < |M|$, alors il existe des arêtes de M qui ne possèdent pas d'extrémités dans Z , i.e $M_1 \neq \emptyset$ et puisque M est un couplage induit, alors les sommets de $A_1 \cup A'_1$ ne peuvent pas être dominés par des sommets dans $Z \cap (A \cup A')$. Par conséquent l'ensemble $W = Z \setminus (A \cup A')$ est non vide et domine $A_1 \cup A'_1$. Donc le sous graphe induit $\langle W \cup A_1 \cup A'_1 \rangle$ d'ordre $|W| + 2|M_1|$ contient au moins $3|M_1|$ arêtes. D'autre part, puisque Z contient au moins une extrémité de chaque arête dans $M \setminus M_1$, $|W| \leq |Z| - |M \setminus M_1| = (\gamma(G) - |M|) + |M_1| < |M_1|$. Ainsi $3|M_1| > |W| + 2|M_1|$, ce qui contredit la supposition que G contient au plus un cycle. Donc $\gamma(G) \geq |M| = |A|$ et $i_2(G) \leq |S| + |A| \leq \gamma(G) + i(G)$. $\square$

Ce résultat n'est pas vrai d'une façon générale pour tout graphe G . Par exemple le bloc graphe de la figure 3.12 dont on a: $\gamma(G) = 4$; $i(G) = 5$; $i_2(G) = 10$ et donc $i_2(G) = 10 \not\leq \gamma(G) + i(G) = 9$.

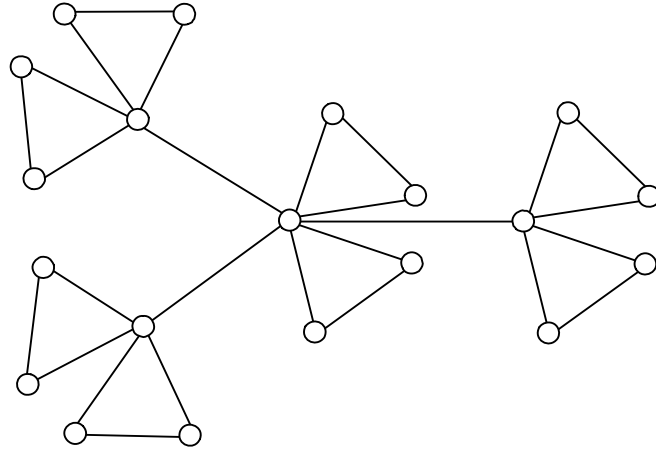


FIGURE 3.12. Un graphe G pour lequel $i_2(G) > \gamma(G) + i(G)$.

b) Caractérisation des graphes G avec $i_2(G) = i(G) + \beta(G)$

Dans cette partie on s'intéresse à l'étude de la classe des graphes satisfaisant $i_2(G) = i(G) + \beta(G)$, et ainsi $i_2(G) = \beta_2(G)$, et on décrit deux sous classes particulières définies par des sous graphes de cette classe de graphes.

Définition 3.32. [30]

- Les graphes F de la famille $\mathcal{F}$ sont définis par cinq cliques disjointes X_i de cardinalité au minimum 2 avec toutes les arêtes entre X_i et X_{i+1} pour $1 \leq i \leq 5(\text{mod}5)$.
- Les graphes C_4 et g_1 sont illustrés dans la figure 3.13.

Il est clair que toute clique non triviale et tout graphe de la famille $\mathcal{F}$ satisfait $i_2(G) = i(G) + \beta(G)$ avec $i(G) = \beta(G) = 1$ pour une clique, $i(G) = \beta(G) = 2$ pour un graphe de $\mathcal{F}$.

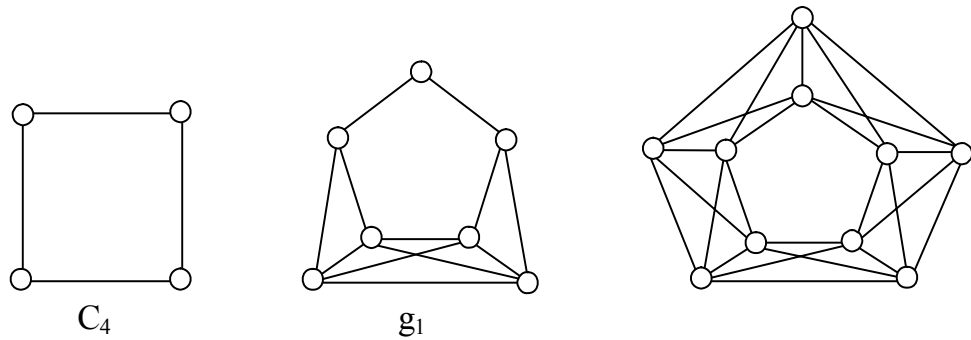


FIGURE 3.13. Les graphes C_4 , g_1 et le plus petit graphe de la famille $\mathcal{F}$.

Théorème 3.33. [30] Soit G un graphe g_1 -libre ou C_4 -libre sachant que $i_2(G) = i(G) + \beta(G)$ alors:

1. Si G est g_1 -libre, les composantes de G sont λ_1 cliques non triviales avec $\lambda_1 = i(G)$.
2. Si G est C_4 -libre, les composantes de G sont $\lambda_1 \geq 0$ cliques non triviales et $\lambda_2 \geq 0$ graphes de $\mathcal{F}$ avec $\lambda_1 + 2\lambda_2 = i(G)$.

Preuve. A partir de corollaire 3.12, $i(G) = \beta(G)$ et $i_2(G) = \beta_2(G)$, les ensembles indépendants maximaux de G ont tous la même cardinalité et chaque ensemble 2-indépendant maximal induit un couplage contenant $i(G)$ arêtes. En particulier, G n'a pas de sommets isolés. On procède par induction sur la valeur commune λ de $i(G)$ et $\beta(G)$. Si $\lambda = 1$, alors G est une clique de cardinalité au minimum 2. Pour $\lambda > 1$, on suppose que la propriété est vraie lorsque $i_2(G) = i(G) + \beta(G) < 2\lambda$ et soit G un graphe g_1 -libre ou C_4 -libre sachant que $i_2(G) = i(G) + \beta(G) = \beta_2(G) = 2\lambda$. Soit a un sommet de G tel que $\beta(N[a])$ est maximum et soit $G' = G - N[a]$. Tout ensemble indépendant maximal de G' peut être étendu en un ensemble indépendant maximal de G en ajoutant a . Par conséquent $i(G') = \beta(G') = \lambda - 1$. Si S' est un $i_2(G')$ -ensemble, alors d'après le corollaire 3.27 $|S'| = i_2(G') \leq 2i(G') = 2\lambda - 2$. L'ensemble 2-indépendant $S' \cup \{a\}$ de G peut être étendu en un ensemble 2-indépendant maximal de G en ajoutant au plus un sommet de $N(a)$. Par conséquent $i_2(G) \leq |S'| + 2 = i_2(G') + 2 \leq 2\lambda$. Puisque $i_2(G) = 2\lambda$, alors $i_2(G) = 2\lambda = i_2(G') + 2$ et donc $i_2(G') = 2\lambda - 2 = 2(\lambda - 1) = i(G') + \beta(G')$. En appliquant l'hypothèse d'induction sur G' qui est g_1 -libre ou C_4 -libre comme G , les composantes de G' sont μ_1 cliques non triviales si G est g_1 -libre, μ_1 cliques non triviales et μ_2 graphes de $\mathcal{F}$ si G est C_4 -libre, avec $\mu_1 + 2\mu_2 = \lambda - 1$. Pour continuer on distingue deux cas.

Cas 1 $N[a]$ est une clique de G . Par hypothèse du choix de a , $N[x]$ est une clique pour tout sommet x de G . Donc les composantes de G sont λ cliques non-triviales, i.e le graphe G est C_4 -libre.

Cas 2. $N[a]$ n'est pas une clique.

Soient b et c deux sommets non adjacents de $N(a)$. Si pour toute composante H de G' , $H \setminus (N(b) \cup N(c)) \neq \emptyset$ si H est une clique et $\beta(H \setminus N(b) \cup N(c)) = 2$ si $H \in \mathcal{F}$, alors $\beta(G) \geq \beta(G') + 2 = \lambda + 1$ ce qui est impossible. Donc il existe une composante H de G' sachant que H est une clique non triviale et $H \subseteq N(b) \cup N(c)$ ou $H \in \mathcal{F}$ et $\beta(H \setminus N(b) \cup N(c)) < 2$.

Sous cas 2.1 En premier on suppose que $H \in \mathcal{F}$, ce qui implique que G est C_4 -libre puisqu'il n'est pas un g_1 -libre et $\beta(H \setminus (N(b) \cup N(c))) \leq 1$. Soit X_i avec $1 \leq i \leq 5$ les cinq cliques de H comme il est indiqué dans la définition 3.32 de $\mathcal{F}$. Alors $H \setminus (N(b) \cup N(c))$ est une clique U (possible vide) et puisque G est C_4 -libre, alors $N(b) \cap N(c) \cap H = \emptyset$. Si $H \subseteq N(b)$, alors un ensemble 2-indépendant maximal I de G contenant $\{a, b\}$ ne contient pas d'autre sommet dans $N[a] \cup H$ et au plus $2\mu_1 + 4(\mu_2 - 1) = 2\lambda - 6$ sommets dans $G' - H$ i.e $G' - H$ contient μ_1 cliques non triviales $\mu_2 - 1$ graphes de $\mathcal{F}$, ce qui signifie que $|I| \leq 2 + 2\lambda - 6 = 2\lambda - 4$ et ceci est impossible (contradiction avec $i_2(G) = 2\lambda$). Donc H n'est pas dans $N(b)$, ni dans $N(c)$ par symétrie. On peut donc distinguer trois possibilités:

- Si $H \cap N(c)$ et $H \cap N(b)$ sont des cliques, alors $U \neq \emptyset$ et H contient une arête uv avec $u \in U$ et $v \in N(c)$. L'ensemble $S = \{u, v, a, b\}$ domine $H \cup N[a]$.

- Si $N(b) \cap H$ n'est pas une clique, disons le sommet b est adjacent à un sommet $x_1 \in X_1$ et à un sommet $x_3 \in X_3$, alors, et puisque G est C_4 -libre, le sommet b est adjacent à tout sommet x_2 de X_2 et à aucun sommet de $X_4 \cup X_5$ sinon $H \subseteq N(b)$, ce qui est impossible. De même, si $H \cap N(c)$ n'est pas une clique, alors $N(c)$ contient entièrement X_4 ou X_5 , disons et sans perte de généralité que $N(c)$ contient des sommets dans X_3 et dans X_5 et contient entièrement X_4 .

- 1) Si $U \neq \emptyset$, alors U contient un sommet u adjacent à un sommet v dans X_2 ou dans X_4 , disons $v \in X_4$. L'ensemble $S = \{u, v, a, b\}$ domine $H \cup N[a]$.

- 2) Si $U = \emptyset$, soit u et v deux sommets dans X_4 . Par conséquent $S = \{u, v, a, b\}$ domine $H \cup N[a]$.

- Finalement, si $H \cap N[b]$ n'est pas une clique et $H \cap N[c]$ est une clique (Par symétrie, on peut supposer que $H \cap N[c]$ n'est pas une clique et $H \cap N[b]$ est une clique), alors on peut trouver deux sommets adjacents u et v avec u dans $C = H \cap N[c]$ ou dans U , ça dépend de U s'il est égal ou non égal à $\emptyset$, et v dans C .

- 1) Si $U = \emptyset$, alors X_1, X_2 et X_3 sont entièrement dans $N(b)$ et $X_4 \cup X_5 \subseteq N(c)$.

- 2) Si $U \neq \emptyset$, alors $U \subseteq X_4 \cup X_5$ ou $U \subseteq X_1 \cup X_5$ ou $U \subseteq X_3 \cup X_4$. Dans les deux cas on a l'ensemble $S = \{u, v, a, b\}$ domine $H \cup N[a]$.

Dans tous les cas, un ensemble 2-indépendant maximal de G contenant S ne contient pas d'autre sommet dans $H \cup N[a]$ et au plus $2\mu_1 + 4(\mu_2 - 1) = 2\lambda - 6$ sommets dans $G' - H$. Donc $i_2 \leq 2\lambda - 2$, contradiction avec $i_2(G) = 2\lambda$. Donc le sous cas 2.1 est impossible.

Sous cas 2.2 H est une clique non triviale dans $N(b) \cup N(c)$. Tout ensemble 2-indépendant maximal S de G contenant $\{a, c\}$ ne contient pas d'autre sommet dans $N[a]$ et au plus deux sommets dans chaque composante clique et quatre sommets dans chaque $\mathcal{F}$ -composante de G' . Cependant S contient deux sommets x et x' dans $H \setminus N(c) \subseteq H \cap N(b)$. De même, $H \setminus N(b)$ contient au moins deux sommets y et y' adjacents à c . Le sous graphe induit $G[\{a, b, c, x, x', y, y'\}]$ est égal à g_1 . Par conséquent G est C_4 -libre et H est partitionné en $H \cap N(b)$ et $H \cap N(c)$.

Si $\beta(N[a]) > 2$, soit $\{a_1, a_2, \dots, a_\ell\}$ un $\beta(N[a])$ -ensemble avec $\ell \geq 3$. Par l'impossibilité du sous cas 2.1, il existe comme précédemment des composantes cliques H_{ij} , $1 \leq i < j \leq \ell$, de G' sachant que $H_{ij} \cap N(a_i)$ et $H_{ij} \cap N(a_j)$ partitions H_{ij} . Les $\ell(\ell-1)/2$ cliques H_{ij} sont toutes différentes sinon G doit contenir un C_4 induit. Alors tout ensemble indépendant maximal I de G contenant $\{a_1, a_2, \dots, a_\ell\}$ satisfait $\beta(G) - |I| \geq \ell(\ell-1)/2 + 1 - \ell > 0$, contradiction $i(G) = \beta(G)$. Donc $\beta(N[a]) = 2$.

Soit u un sommet de $N(a)$ adjacent à c et non adjacent à b , s'il existe. Comme précédemment, soit H' la composante clique de G' contenant dans $N(b) \cup N(u)$. Si $H' \neq H$, alors $N(b)$ contient au moins un sommet dans H , un sommet dans H' et a , et que $\beta(N[b]) \geq 3$, contradiction avec le choix de a . Donc $H' = H$ et $N(u) \cap H = N(c) \cap H$. De même, $N(v) \cap H = N(b) \cap H$ pour tout sommet v de $N(a)$ adjacent à b mais non à c . Par conséquent tout sommet z dans $N(a) \cup H$ satisfait $\beta(N[z] \cap (H \cup N[a])) = 2$ et par le choix de a , $N[a] \cup H$ est une composante L du graphe G . Les sommets de L non adjacents au sommet z de L forme une clique. La clique $L \setminus N[a]$ est la clique H . Soient $\mathcal{B}$, $\mathcal{C}$, $\mathcal{X}$ et $\mathcal{Y}$ respectivement les cliques $L \setminus N[b]$, $L \setminus N[c]$, $L \setminus N[x]$ et $L \setminus N[y]$. Soient $B = \mathcal{C} \cap \mathcal{Y}$, $A = \mathcal{Y} \cap \mathcal{X}$, $C = \mathcal{X} \cap \mathcal{B}$, $Y = \mathcal{B} \cap H$, $X = H \cap \mathcal{C}$. Puisque G est C_4 -libre, $\mathcal{Y} \setminus (A \cup B) \neq \emptyset$, $\mathcal{X} \setminus (A \cup C) \neq \emptyset$, $\mathcal{B} \setminus (C \cup Y) \neq \emptyset$, $H \setminus (X \cup Y) \neq \emptyset$, $\mathcal{C} \setminus (X \cup B) \neq \emptyset$. Finalement si, disons, $|A| = 1$, alors tout ensemble 2-indépendant maximal de G contenant $\{x, y, a\}$ ne contient pas d'autre sommet dans L et ainsi au plus $2(\mu_1 - 1) + 4\mu_2 + 3 = 2(\lambda - 1) + 1$ sommets, contradiction avec $i_2(G) = 2\lambda$. Donc chacune des cinq cliques A , B , X , Y , C a au moins deux sommets et $\langle L \rangle$ est un graphe de $\mathcal{F}$. Les composantes de G' sont μ_1 cliques non triviales et μ_2 graphes de $\mathcal{F}$. Donc les composantes du graphe G sont $\lambda_1 = \mu_1 - 1$ cliques non triviales et $\lambda_2 = \mu_2 + 1$ graphes de $\mathcal{F}$ avec $\lambda_1 + 2\lambda_2 = \mu_1 + 2\mu_2 + 1 = \lambda + 1$. Ceci justifie la preuve. $\square$

On donne maintenant une borne similaire à $i_2(G) \leq (n + s(G))/2$ de théorème 3.22 pour les cactus graphes avec k cycles impairs. Pour cela, nous introduisons une définition

supplémentaire.

Définition 3.34. *Un k -cactus graphe est un cactus graphe avec k cycles impairs.*

Avant de présenter le résultat établi sur le paramètre i_2 pour les k -cactus graphes, il est utile de faire la remarque suivante:

Remarque 3.35. *Soit G un k -cactus graphe, alors on peut choisir k arêtes indépendantes (ou non incidentes deux à deux) dont tout cycle impair contient exactement une arête.*

Preuve. On procède par induction sur le nombre k de cycles impairs d'un k -cactus graphe G .

Si $k = 1$ alors G admet une arête indépendante, supposons que $k \geq 2$ et que pour un cactus graphe avec au moins $k - 1$ cycles impairs, on a $k - 1$ arêtes indépendantes dont tout cycle impair contient exactement une arête. Soit G un k -cactus graphe, on considère le $(k - 1)$ -cactus graphe $G' = G|_{\text{cycle impair}}$ obtenu à partir du graphe G en contractant un cycle impair du graphe G en un sommet ($G|_{\text{cycle impair}}$ est le graphe contracté par rapport à un cycle impair), donc par hypothèse d'induction, le graphe G' admet $k - 1$ arêtes indépendantes dont tout cycle impair de G' contient exactement une arête.

Il est facile de voir qu'après la remise des arêtes contractées dans le graphe G' , on peut choisir une arête indépendante avec les $k - 1$ arêtes indépendantes de G' .

Vu que le sommet représentant du cycle impair contracté est une extrémité d'au plus une arête des $k - 1$ arêtes indépendantes de G' et qu'il existe au moins une arête dans le cycle contracté dont les deux extrémités sont différentes du sommet représentant la contraction, alors le graphe G admet k arêtes indépendantes dont tout cycle impair de G contient exactement une arête. $\square$

Théorème 3.36. [30] *Soit G un k -cactus graphe connexe non trivial d'ordre n avec $s(G)$ sommets supports, alors $i_2(G) \leq (n + s(G) + k)/2$.*

Preuve. Soit G un k -cactus graphe connexe non trivial avec $s(G)$ sommets supports.

Si $k = 0$ alors G est biparti et donc d'après le théorème 3.22, on a $i_2(G) \leq (n + s(G))/2$.

Supposons que G contient au moins un cycle impair i.e. $k \geq 1$, alors d'après la remarque 3.35, on peut choisir un ensemble M de k arêtes indépendantes dont tout cycle impair contient exactement une arête. En subdivisant chaque arête de M par un sommet en deux arêtes. Soit D l'ensemble des sommets ajoutés au graphe G et $G' = (V', E')$ le

graphe résultant. Tout sommet de D a un degré deux et ainsi G' est un graphe biparti connexe d'ordre $n + k$ avec $s(G') = s(G)$. Si $\text{diam}(G') = 2$, alors G est un cycle C_3 , donc G vérifie le résultat. Ainsi on suppose que $\text{diam}(G') \geq 3$. Soit C un sous ensemble des sommets pendants, tel que chaque sommet support a exactement un sommet pendant dans C . Il est clair que $|C| = s(G)$. Soient A et B la bipartition du sous graphe induit par l'ensemble des sommets $V(G') - C$, avec $|A| \leq |B|$. Puisque $\text{diam}(G') \geq 3$, $A \neq \emptyset, B \neq \emptyset$ donc $|B| \leq (n + k - s(G'))/2 \leq |A|$. Soient S_A et C_A l'ensemble des sommets supports et l'ensemble des sommets pendants de A , respectivement et soit $A' = A - (S_A \cup C_A)$. De même, on définit S_B, C_B et B' pour l'ensemble B . Alors $S' = A \cup C$ est un ensemble 2-indépendant maximal de G' puisque tout sommet pendant de B est adjacent à un sommet support de A , tout sommet support de B est adjacent à un sommet de A et un sommet de B' a au moins deux voisins dans A . Il s'ensuit que

$$|S'| = |A \cup C| \leq (n + k - s(G'))/2 + |C| \leq (n + k + s(G))/2.$$

Maintenant, il faut construire un ensemble 2-indépendant maximal S de G avec $|S| \leq (n + k + s(G))/2$. Soient $D_A = A \cap D$ et $D_B = B \cap D$. Soit F_B (resp. F_A) l'ensemble des sommets (extrémités des arêtes de M) pour lesquels la subdivision produit D_A (resp. D_B). Alors, $F_B \subset B - (C_B \cup D_B)$, $F_A \subset A - (C_A \cup D_A)$. Ainsi chaque composante dans le sous graphe induit par $A - D_A$ est un sommet isolé ou une chaîne P_2 . L'ensemble $A - D_A$ est un 2-indépendant mais $(A - D_A) \cup C$ peut ne pas être un ensemble 2-indépendant. Ceci résulte si $F_A \cap S_A \neq \emptyset$. Dans un tel cas, on supprime de C tous les sommets pendants adjacents à $F_A \cap S_A$ et soit $C' \subseteq C$ l'ensemble résultant après cette suppression. Ainsi $(A - D_A) \cup C'$ est un ensemble 2-indépendant. Pour étendre l'ensemble $(A - D_A) \cup C'$ dans S pour être un ensemble 2-indépendant maximal de G , on ajoute au plus un sommet de chaque arête du sous graphe $\langle F_B \rangle$. Ainsi il faut ajouter au plus $|D_A|$ sommets. Donc $|S| = |(A - D_A) \cup C'| + |D_A| \leq |A \cup C| = |S'|$. Ainsi on a $i_2(G) \leq |S| \leq |S'| \leq (n + s(G) + k)/2$ et ceci justifie la preuve. $\square$

c) Caractérisation des graphes G avec $i_2(G) = (n + 2)/(\Delta + 1)$

Théorème 3.37. [30] *Soit G un graphe connexe d'ordre $n \geq 2$, alors $i_2(G) \geq (n + 2)/(\Delta + 1)$, avec égalité si et seulement si $G = P_2$ ou G est obtenu à partir de $S_{\Delta-1, \Delta-1}$ en ajoutant zéro arêtes ou plus entre ses sommets pendants.*

Preuve. La nécessité: Si $n = 2$ alors $i_2(P_2) = 2 = (n + 2)/(\Delta + 1)$. Si $n = 3$ alors $G = P_3$ ou C_3 et $i_2(P_3) = 2 > (n + 2)/(\Delta + 1)$. Supposons que $n \geq 4$ et soit S un

$i_2(G)$ –ensemble. Soit p le nombre d'arêtes dans $\langle S \rangle$, et t le nombre d'arêtes entre les deux ensembles S et $V - S$.

Supposons en premier que $p \geq 1$. Alors $t \leq 2p(\Delta - 1) + (|S| - 2p)\Delta$. Et comme l'ensemble S domine l'ensemble $V - S$, donc $t \geq |V - S|$. Il s'ensuit que $|V - S| \leq t \leq 2p(\Delta - 1) + (|S| - 2p)\Delta$. Alors $i_2(G) = |S| \geq (n + 2p)/(\Delta + 1) \geq (n + 2)/(\Delta + 1)$. Donc $i_2(G) \geq (n + 2)/(\Delta + 1)$. Si en plus $i_2(G) = (n + 2)/(\Delta + 1)$, alors on aura l'égalité sur toute la chaîne d'inégalité précédente, en particulier on a $p = 1$. Chaque sommet de S a un degré maximum et chaque sommet de $V - S$ est adjacent à exactement un voisin dans S . Ce qui implique qu'aucun couple de sommets de S a un voisin en commun dans $V - S$. Maintenant si S contient un sommet isolé disons u , alors puisque G est connexe, $S \cup \{v\}$ est un ensemble 2-indépendant de G , où $v \in V - S$ est un voisin de u , ce qui contredirait la maximalité de S . Donc S contient exactement deux sommets adjacents de degré maximum avec une possibilité des arêtes dans $V - S$. Donc G est obtenu à partir d'une double étoile $S_{\Delta-1, \Delta-1}$ par l'adjonction d'au moins zéro arêtes entre les sommets de $V - S$.

Maintenant supposons que $p = 0$. Alors $t \leq \Delta |S|$. Si $V - S$ contient un sommet disons w qui possède seulement un voisin dans S alors $S \cup \{w\}$ est un ensemble 2-indépendant de G (contradiction avec la maximalité de S). Donc chaque sommet de $V - S$ a au moins deux voisins dans S et donc $t \geq 2(|V - S|)$. Il s'ensuit que $\Delta |S| \geq t \geq 2(|V - S|)$ et donc $i_2(G) \geq 2n/(\Delta + 2)$. Notons que $2n/(\Delta + 2) \geq (n + 2)/(\Delta + 1)$ pour $n \geq 4$ avec égalité si $n = 4$ et $\Delta = 2$. Et si en plus $i_2(G) = (n + 2)/(\Delta + 1)$, alors comme il est mentionné la dessus $n = 4$ et $\Delta = 2$ et chaque sommet de $V - S$ a exactement deux voisins dans S . Donc G ne peut pas être une chaîne P_4 et donc G est un cycle C_4 qui peut être obtenu à partir d'une double étoile $S_{1,1}$ par l'adjonction d'une arête entre les deux sommets pendants. $\square$

d) Caractérisation des arbres T avec $i_2(T) = n - \Delta$

Théorème 3.38. [32] *Un arbre T d'ordre $n \geq 4$ et de degré maximum $\Delta < n - 1$ satisfait $i_2(T) = n - \Delta$ si et seulement si T est une étoile généralisée GS_{p_0, p_1, p_2} avec $p_0 + p_1 \geq 1$ et $p_1 + p_2 \geq 1$ ou $GS_{p_0, 0, 0, 1}$ avec $p_0 \geq 1$, ou est égal à $S_{p, 2}^*$ avec $p \geq 2$.*

Preuve. Il est clair d'après les remarques 3.1 et 3.4 que si $p_0 + p_1 \geq 1$ et $p_1 + p_2 \geq 1$ alors $i_2(GS_{p_0, p_1, p_2}) = p_1 + 2p_2 + 1 = n - \Delta$ et si $p_0 \geq 1$ alors $i_2(GS_{p_0, 0, 0, 1}) = 4 = n - \Delta$

et si $p \geq 2$ alors $i_2(S_{p,2}^*) = 4 = n - \Delta$. Réciproquement considérons l'arbre T enraciné en un sommet x de degré maximum. Pour chaque voisin u de x , soit $h(u)$ la distance de u au plus loin descendant. Soit y un voisin de x de degré maximum telle que $h(y)$ soit minimum. Soit S un ensemble 2-indépendant maximal de T contenant $\{x, y\}$. Alors $S \cap ((N(x) \cup N(y)) \setminus \{x, y\}) = \emptyset$ et ainsi $|S| + \Delta + d(y) - 2 \leq n$ avec $d(y) \geq 2$ puisque T n'est pas une étoile. Donc $i_2(T) \leq |S| \leq n - \Delta - d(y) + 2 \leq n - \Delta$.

Si $i_2(T) = n - \Delta$, alors $d(y) = 2$ et $V(T) \setminus (N(x) \cup N(y))$ est un ensemble 2-indépendant I de T . Ainsi $d(z) \leq 2$ pour chaque voisin z de x à partir du choix de y , et I consiste en un ensemble des sommets isolés et des chaînes P_2 . Soit $N(y) = \{x, y'\}$.

Si quelque sommets de $N(x) \setminus \{y\}$ ont un degré égal à 2, soit z un de ces sommets avec $h(z)$ maximum et soit $N(z) = \{x, z'\}$. Si $h(z) = 1$, ce qu'exprime que z' est un sommet isolé dans I , alors $h(y) = 1$ et $h(t) = 0$ ou 1 pour tout $t \in N(x) \setminus \{y, z\}$. L'arbre T est une étoile généralisée GS_{p_0, p_1} avec $p_1 \geq 2$ qui est de type GS_{p_0, p_1, p_2} avec $p_0 + p_1 \geq 1$ et $p_2 = 0$. Si $h(z) = 2$, ce qu'exprime que z est adjacent à la chaîne $z'z''$ de I , alors $h(y) = 1$ ou 2 et $h(t) = 0, 1$ ou 2 pour tout $t \in N(x) \setminus \{y, z\}$. Chaque sommet t est un sommet pendant, ou est adjacent à un sommet isolé t' ou à une chaîne $t't''$ de I .

Finalement, si $h(y) = 2$, alors y' est adjacent aux sommets isolés $\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_r$ de I . Si $r \geq 2$, alors $(S \setminus \{\omega_2, \dots, \omega_r, z', y\}) \cup \{y', z\}$ est un ensemble 2-indépendant maximal de T de taille inférieure à celle de S (une contradiction).

Donc $r = 1$ et T est une étoile généralisée GS_{p_0, p_1, p_2} . D'après la remarque 3.4, $p_0 + p_1 \geq 1$ puisque $i_2 = n - \Delta$.

Si tous les sommets de $N(x) \setminus \{y\}$ ont un degré 1, alors y' est un sommet pendant ou y' est adjacent à chaque composante de I , disons aux r sommets isolés $\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_r$ et à une extrémité u_i de q chaînes $u_1v_1, \dots, u_qv_q$.

Dans le premier cas, $T = GS_{p_0, 1}$ qui est de type GS_{p_0, p_1, p_2} avec $p_0 + p_1 \geq 1$. Dans le second cas, $r + q \geq 1$ et $\Delta \geq r + q + 1 \geq 2$. Soit $z \in N(x) \setminus \{y\}$ et $I' = (I \setminus \{\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_r, v_1, u_2, \dots, u_q, y\}) \cup \{y', z\}$ si $q \neq 0$, $I' = (I \setminus \{\omega_2, \omega_3, \dots, \omega_r, y\}) \cup \{y', z\}$ si $q = 0$. L'ensemble I' est un 2-indépendant maximal de T . Ce qui implique que $1 \leq r \leq 2$ et $q = 0$, ou $r = 0$ et $q = 1$. Ainsi T est une étoile généralisée $GS_{p_0, 0, 1}$ (de type GS_{p_0, p_1, p_2} avec $p_0 + p_1 \geq 1$) ou $GS_{p_0, 0, 0, 1}$, ou $S_{p, 2}^*$ avec $p = \Delta - 1 \geq 2$. $\square$

3.4.2 Etude du nombre β_2

On s'intéresse maintenant à l'étude du nombre β_2 . On commence par la caractérisation des arbres réalisant l'égalité pour la borne inférieure du nombre de 2-indépendance β_2 établi dans le théorème 3.22.

a) Caractérisation des arbres T tels que $\beta_2(T) = (n + s(T))/2$

Pour cela on définit la famille d'arbres suivante:

Définition 3.39. [32] *La famille $\mathcal{G}$ est l'ensemble des arbres qui peuvent être construits à partir de T_1 qui consiste en une chaîne P_3 ou P_4 en utilisant récursivement les opérations $\mathcal{G}_1$ ou $\mathcal{G}_2$. Soit le graphe H représentant la chaîne P_3 .*

- Opération $\mathcal{G}_1$: *Ajouter une copie de H attachée par une arête entre un sommet de H et un sommet r de T_i , avec la condition que si r est un sommet pendant de T_i , alors il doit être adjacent à un sommet support fort.*
- Opération $\mathcal{G}_2$: *Ajouter une chaîne P_4 dont les sommets supports sont u, v attachée par une arête uz à un sommet z de T_i , avec la condition que si z est un sommet pendant de T_i , alors z est adjacent à un sommet support fort.*

Lemme 3.40. [32] *Si $T = P_2$ ou $T \in \mathcal{G}$, alors $\beta_2(T) = (n + s(T))/2$.*

Preuve. Il est clair que si $T = P_2$, $\beta_2(T) = (n + s(T))/2 = 2$. Ainsi soit T un arbre quelconque de $\mathcal{G}$. On procède par induction sur le nombre des opérations $\mathcal{G}_i$ réalisées pour construire T . La propriété est vraie pour $T_1 = P_3$ ou P_4 . Supposons que la propriété est vraie pour tous les arbres de $\mathcal{G}$ construits avec $k - 1 \geq 0$ opérations et soit T l'arbre de $\mathcal{G}$ construit avec k opérations. Considérons les deux cas suivants selon si la dernière opération effectuée pour obtenir T est $\mathcal{G}_1$ ou $\mathcal{G}_2$.

Si la dernière opération, effectuée sur l'arbre T' obtenu par $k - 1$ opérations, est $\mathcal{G}_1$, alors $n(T) = n(T') + 3$ et $s(T) = s(T') + 1$. D'après le lemme 3.5 et par application de l'hypothèse d'induction à T' , $\beta_2(T) = \beta_2(T') + 2 = (n(T') + s(T'))/2 + 2 = (n(T) + s(T))/2$.

Si la dernière opération effectuée sur l'arbre T' obtenu par $k - 1$ opérations, est $\mathcal{G}_2$, alors $n(T) = n(T') + 4$ et $s(T) = s(T') + 2$. D'après le lemme 3.5 et par application de l'hypothèse d'induction à T' , $\beta_2(T) = \beta_2(T') + 3 = (n(T') + s(T'))/2 + 3 = (n(T) + s(T))/2$. $\square$

Théorème 3.41. [32] *Soit T un arbre non trivial. Alors $\beta_2(T) = (n(T) + s(T))/2$ si et seulement si $T = P_2$ ou $T \in \mathcal{G}$.*

Preuve. La suffisance est donnée par le lemme 3.41.

La nécessité: Si $n = 2$ alors $T = P_2$. Supposons que $n \geq 3$. On procède par induction sur l'ordre n de l'arbre T . Si $n = 3$, alors $T = P_3$ et ainsi $T \in \mathcal{G}$, ce qui établit le cas de base.

Supposons que chaque arbre T' d'ordre n' avec $3 \leq n' < n$, satisfait $\beta_2(T') = (n(T') + s(T'))/2$ est dans $\mathcal{G}$. Soit T un arbre d'ordre n sachant que $\beta_2(T) = (n(T) + s(T))/2$, ce qui implique que T n'est pas une étoile par la remarque 3.4. Si T est une étoile double, alors $T = P_4$ ou $T = S_{2,2}$ d'après la remarque 3.1 et ainsi T appartient à $\mathcal{G}$. Supposons maintenant que $\text{diam}(T) \geq 4$ et enracinons T en un sommet r . Soit v un sommet support le plus loin de r , et u son père. On distingue deux cas:

Cas 1. $|L_v| \geq 2$.

Soit $T' = T - T_v$. Alors $n' = n - |L_v| - 1 \geq 3$ et $s(T) \geq s(T') \geq s(T) - 1$. De plus, $s(T') = s(T)$ si et seulement si u est l'unique sommet pendant du son support dans T' . D'après le lemme 3.5 on a, $\beta_2(T) = \beta_2(T') + |L_v|$, et d'après le théorème 3.22, on a:

$$\begin{aligned} (n(T) + s(T))/2 = \beta_2(T) &= \beta_2(T') + |L_v| \geq (n(T') + s(T'))/2 + |L_v| \\ &\geq (n(T) + s(T) + |L_v| - 2)/2 \geq (n(T) + s(T))/2. \end{aligned}$$

L'égalité entre les seconds membres extrêmes implique que $\beta_2(T') = (n(T') + s(T'))/2$, $|L_v| = 2$ et $s(T') = s(T) - 1$. Ainsi u est soit un sommet pendant d'un sommet support fort dans T' , soit différent du sommet pendant dans T' .

Maintenant par induction sur T' , $T' \in \mathcal{G}$, et puisque T est obtenu à partir de T' par l'utilisation de l'opération $\mathcal{G}_1$, alors $T \in \mathcal{G}$.

Cas 2. $|L_v| = 1$. Soit $T' = T - T_u$.

Voyons le cas ci dessus. Nous pouvons supposer que chaque descendant de u a un degré au plus 2. Alors $n(T') \geq 3$ d'après la remarque 3.4. Supposons que u est adjacent à $q \geq 0$ sommets pendants et $p \geq 1$ fils comme sommets supports. En utilisant le lemme 3.5 et le théorème 3.22 on aura: $(n(T) + s(T))/2 = \beta_2(T) = \beta_2(T') + 2p + q \geq (n(T') + s(T'))/2 + 2p + q$.

Maintenant $n' = n - 2p - q - 1$ et en regardant les différentes situations reliées à la valeur de q et la position du père ω de u dans T' , on peut vérifier que $s(T) - p \geq s(T') \geq s(T) - p - 1$ si $q \geq 1$, $s(T) - p + 1 \geq s(T') \geq s(T) - p$ si $q = 0$. De plus si on écrit $s(T') \geq s(T) - p - i$ où $i = 1$ si $q \geq 1$, $i = 0$ si $q = 0$, alors $s(T') = s(T) - p - i$ si et seulement si, ω n'est pas un sommet pendant de T' ou ω est un sommet pendant d'un support fort de T' . Puisque $p \geq 1$ et $q \geq i$ nous obtenons $(n(T) + s(T))/2 \geq (n(T) + s(T) + p + q - 1 - i)/2 \geq (n(T) + s(T))/2$.

L'égalité entre les deux membres extrêmes implique que $\beta_2(T') = (n(T') + s(T'))/2$, et ainsi $T' \in \mathcal{G}$ par hypothèse d'induction, $p + q - 1 - i = 0$ et $s(T') = s(T) - p - i$. Il s'ensuit à partir de $p + q - 1 - i = 0$ que $p = 1$ et $q = i$, ce qui donne $p = q = 1$ ou $p = 1$ et $q = 0$. De plus, on considère que ω est ou bien un sommet de degré au moins 2 dans T' ou bien est un sommet pendant adjacent à un support fort.

Dans les deux cas, T peut être obtenu à partir de T' par l'utilisation de l'opération $\mathcal{G}_2$ si $p = q = 1$, ou l'opération $\mathcal{G}_1$ si $p = 1$ et $q = 0$. Donc $T \in \mathcal{G}$. Ceci justifie la preuve. $\square$

Remarque 3.42. [32] *Différentes bornes sur i_2 et β_2 ont été obtenues dans le théorème 3.22 du chapitre 3 et dans les sections 3.2 et 3.3 du chapitre 3 en prenant $k = 2$. Une de ces bornes est meilleure que l'autre, dépend de la structure du graphe ou de l'arbre considéré.*

Remarque 3.43. [32] *Revenons à la définition des deux familles Ω et $\mathcal{G}$ dans les sous sections 3.4.1(a) et 3.4.2(a), on peut observer que les arbres de $\Omega \cap \mathcal{G}$ différents de P_2 sont récursivement obtenus à partir d'une chaîne P_3 par l'ajout d'une chaîne pendante P_3 à un sommet quelconque admettant déjà une chaîne pendante P_2 . Ce qui montre que les arbres non triviaux satisfaisant $i_2 = \beta_2$ sont les 2-couronnes des arbres et ceci est déjà connu dans [33].*

On donne maintenant une conséquence de théorème 3.19 qui devient un résultat intéressant pour le nombre de 2-indépendance β_2 dans les graphes.

Corollaire 3.44. [30] *Si G est un graphe C_3 -libre, alors $\beta_2(G) < 2\beta(G)$.*

Proposition 3.45. [30] *Soit G un graphe avec $\beta_2(G) = 2\beta(G)$ et soit T un $\beta_2(G)$ -ensemble. Alors.*

1. *Le sous graphe induit par T est 1-régulier,*
2. *Le graphe G possède deux $\beta(G)$ -ensembles disjoints,*
3. *Tout sommet qui n'est pas dans T , est dans un triangle admettant deux sommets adjacents de T .*

Preuve. En utilisant la notation introduite dans le théorème 3.19, on a X et Y sont deux ensembles indépendants disjoints du graphe G de cardinalité maximum. Puisque

tout sommet de X possède un voisin dans Y et vice versa, le sous graphe induit par T est 1-régulier.

Maintenant soit v un sommet de $V - T$ qui ne vérifie pas la troisième condition et on suppose sans perte de généralité que v est adjacent à un sous ensemble de X , disons X_1 . Soit $N_T(X_1) = Y_1 \subseteq Y$. Il est clair que $|X_1| = |Y_1|$. Alors $S = \{v\} \cup (X \setminus X_1) \cup Y_1$ est un ensemble indépendant de taille $1 + \beta_2(G)/2$, contradiction. $\square$

CONCLUSION

L'étude de la k -domination et la k -indépendance a été le but de notre thèse. On s'est intéressée en premier à l'état d'art dans ce domaine, puis on s'est orientée vers les objectifs principaux concernant cette étude à savoir:

1. Trouver des bornes en fonction de l'ordre du graphe.
2. Etablir des conditions nécessaires et suffisantes permettant d'avoir l'égalité.
3. Trouver la comparaison si elle en existe entre les paramètres de la k -domination, la k -indépendance et d'autres paramètres de domination.

Concernant le premier et le deuxième objectif, on a établi des bornes offrant une amélioration de celle connue pour les paramètres de la k -indépendance inférieur et de la k -indépendance supérieur. Par la suite, on a caractérisé les arbres vérifiant l'égalité pour les deux paramètres de la k -indépendance. Le problème de caractérisation reste ouvert pour un graphe quelconque. Pour le troisième objectif, on est arrivé à trouver des inégalités entre quelques paramètres de la k -indépendance et d'autres paramètres comme la 1-indépendance et la 2-indépendance, la 1-indépendance et la domination classique.

Les différents résultats obtenus sur ces deux paramètres de domination s'étalent sur les trois objectifs cités plus haut. Cette contribution a ouvert plus de perspectives de recherche comme la caractérisation de classes particulières de graphes extrémaux relatifs à ces paramètres de domination.

Comme perspectives à ces travaux, on cite le problème de FINK et JACOBSON à savoir: déterminer l'application $f : N \longrightarrow N$ telle que $\gamma_k(G) \leq \gamma_{f(k)}(G)$ pour tout graphe G , avec $\delta \geq k$, entre les termes des suites γ_k et pourquoi pas pour la suite β_k .

Un autre problème sur les deux nombres i_k et β_k s'avère intéressant et peut être posé sous la forme suivante: Existe-t-il des ensembles k -indépendants de cardinal k avec $i_k \leq k \leq \beta_k$.

APPENDICE A

Définition de résidu d'un graphe

Soit G un graphe et π une séquence des degrés, $\pi(d_1 \geq d_2 \geq \dots \geq d_n)$ avec $d_1 + 1 \leq n$. La séquence des degrés à $(n - 1)$ termes $(d_2 - 1, \dots, d_{d_1+1} - 1, d_{d_1+2}, \dots, d_n)$ est notée par $H(\pi) = (d_2^1 \geq d_3^1 \geq \dots \geq d_n^1)$ et H est appelé opérateur de HAVEL-HAKIMI [26].

HAVEL et HAKIMI ([34], [35]) ont montré que $\pi = (d_1 \geq d_2 \geq \dots \geq d_n)$ est graphique (représente un graphe) si et seulement si H est applicable i.e $(d_1 + 1) \leq n$ et $H(\pi)$ est graphique. Donc $\pi = (d_1 \geq d_2 \geq \dots \geq d_n)$ est graphique si et seulement si l'opérateur H peut être appliqué i fois, $i \in \{0, 1, \dots, n - 1\}$ tel que $H^i(\pi) = (d_{i+1}^i \geq \dots \geq d_n^i)$ est une séquence de $(n - i)$ zéros et la séquence $E(\pi) = (d_1^0 \geq d_2^1 \geq \dots \geq d_n^{n-1})$ est la séquence d'élimination de π .

$\tau(\pi)$ est le dernier i donnant une séquence $H^i(\pi)$ formée de zéros et la différence $(n - \tau(\pi))$ est dit le résidu de π et on le note par $R(\pi)$ ou $R(G)$.

Exemple Etant donné un graphe 6-régulier G à 12 sommets. Soit $E(\pi)$ la séquence des degrés d_{i+1}^i maximum qu'on supprime quand on applique l'opérateur H . Soit la séquence $\pi = (d_1 \geq d_2 \geq \dots \geq d_n)$, on considère d'après TRIESCH [36] le terme d_{i+1}^i de la séquence $H^i(\pi)$, $i = 0, 1, 2, \dots, n - 1$. $E(\pi) = (d_1^0 \geq d_2^1 \geq \dots \geq d_n^{n-1})$ est la séquence d'élimination de π , le résidu $R(\pi)$ est évidemment égal au nombre de zéros dans $E(\pi)$.

Le graphe G est 6-régulier à 12 sommets alors $\pi = (6, 6, 6, 6, 6, 6, 6, 6, 6, 6, 6, 6)$. On applique l'opérateur H on aura:

$$H^0(\pi) = (6, 6, 6, 6, 6, 6, 6, 6, 6, 6, 6, 6); d_1^0 = 6,$$

$$H^1(\pi) = (6, 6, 6, 6, 6, 5, 5, 5, 5, 5, 5, 5); d_2^1 = 6,$$

$$H^2(\pi) = (5, 5, 5, 5, 5, 5, 5, 5, 4, 4, 4, 4); d_3^2 = 5,$$

$$H^3(\pi) = (5, 5, 4, 4, 4, 4, 4, 4, 4, 4, 4, 4); d_4^3 = 5,$$

$$H^4(\pi) = (4, 4, 4, 4, 3, 3, 3, 3, 3, 3, 3, 3); d_5^4 = 4,$$

$$H^5(\pi) = (3, 3, 3, 3, 3, 3, 2, 2, 2, 2, 2, 2); d_6^5 = 3,$$

$$H^6(\pi) = (3, 3, 2, 2, 2, 2, 2, 2, 2, 2, 2, 2); d_7^6 = 3,$$

$$H^7(\pi) = (2, 2, 2, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1); d_8^7 = 2,$$

$$H^8(\pi) = (1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1); d_9^8 = 1,$$

$$H^9(\pi) = (1, 1, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0); d_{10}^9 = 1,$$

$$H^{10}(\pi) = (0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0).$$

Donc $E(\pi) = (6, 6, 5, 5, 4, 3, 3, 2, 1, 1, 0, 0)$ et $R(\pi) = R(G) = 2$.

Définition de k-résidu d'un graphe

Soit G un graphe avec une séquence des degré π . On note par $b_j(\pi)$ le nombre de termes de valeur j dans $E(\pi)$.

Pour $k \in \mathbb{N}$ on appelle $R_k(G) = R_k(\pi) = \frac{1}{k} \sum_{j=0}^{k-1} (k-j)b_j(\pi)$ le k-résidu de G .

Considérons l'exemple précédent, où on a $\beta_4(G) = 6$ et $R_4(\pi) = \frac{1}{4}[(4-0)2 + (4-1)2 + (4-2)1 + (4-3)2] = \frac{9}{2}$. Donc $\beta_4(G) \geq \lceil R_4(\pi) \rceil = 5$.

APPENDICE B

LISTE DES SYMBOLES

$\beta(G)$	Le nombre d'indépendance.
$d_G(v)$	Le degré du sommet v dans le graphe G .
G	Le graphe $G=(V, E)$, avec V l'ensemble des sommets et E l'ensemble d'arêtes
$\Delta(G)$	Le degré maximum dans le graphe G .
$\delta(G)$	Le degré minimum dans le graphe G .
$V(G)$	L'ensemble des sommets du graphe G .
$E(G)$	L'ensemble d'arêtes du graphe G .
$\overline{G}$	Le graphe complémentaire du graphe G .
$\Gamma(G)$	Le nombre de domination supérieur.
$\gamma(G)$	Le nombre de domination inférieur.
P_n	Une chaîne d'ordre n .
$N_G(v)$	Le voisinage ouvert du sommet v dans le graphe G .
$N_G[v]$	Le voisinage fermé du sommet v dans le graphe G .
$N_G(S)$	Le voisinage ouvert d'un ensemble $S \subseteq V(G)$ dans G .
$N_G[S]$	Le voisinage fermé d'un ensemble $S \subseteq V(G)$ dans G .
C_n	Un cycle d'ordre n .

RÉFÉRENCES

- [1] Chellali M., "Etude de quelques invariants de graphes", Thèse de doctorat Université des sciences et de la technologie Houari Boumedienne, Février 2005.
- [2] Khelifi S., "Contribution à l'étude des graphes μ -excellents ", Thèse de magister Université de Blida, Décembre 2004.
- [3] Berge C., "Graphes et hypergraphes", Dunod, deuxième édition, 1970.
- [4] Chartrand G and Oellermann O. R., "Applied and Algorithmic Graph Theory", McGraw-Hill, New York, 1993.
- [5] De Jaenisch C. F., "Applications de l'analyse mathématiques au jeu d'échecs", Petrograd, 1962.
- [6] Ore O., "Theory of graphs", Amer. Math. Soc. colloq. Publ., 38 (1962).
- [7] Cockayne E. J et Hedetniemi S. T., "Towards a theory of domination in graphs", Networks, 7 (1977) 247-261.
- [8] Haynes T.W, Hedetniemi S.T and Slater P.J., "Fundamental of domination in graphs", Marcel Dekker, New York, 1998.
- [9] Jacobson M. S and Peters K., "Complexity questions for n-domination and related parameters", Congressus Numerantium 68 (1989) 7-22.
- [10] Cockayne E. J, Hedetniemi S. T and Miller D. J., "Properties of hereditary hypergraphs and middle Graphs", Canad . Math . Bull . 21 (1978) 461-468.
- [11] Puech J., "Paramètres de domination dans les graphes", Thèse de doctorat Université paris sud orsay 1997.
- [12] Favaron O., "La k-domination et la k-indépendance", Séminaire à l'université de Blida, Avril 2005.
- [13] Fink J. F and Jacobson M. S., "n - domination in graphs in: Graph Theory with applications to Algorithms and Computer", (Kalamazoo , Mich .. 1984) eds .Alavi , Chartrand , Lesniak , Lick and wall , Wiley , New - York (1985) 283 - 300.

- [14] Fink J. F and Jacobson M.S., " n -domination, n -dependence and forbidden subgraphs", in: Graph Theory with applications to Algorithms and Computer, (Kalamazoo, Mich. 1984) eds. Alavi, Chartrand, Lesniak, Lick and Wall, Wiley, New York (1985) 301- 311.
- [15] Cockayne E. J, Gamble B, and Shepherd B., "An upper bound for the k -domination number of a graph", J. Graph Theory, 9:533-534, 1985.
- [16] Favaron O., "On a conjecture of Fink and Jacobson concerning k -domination and k -dependence", J. Combin. Theory Series B 39 n°1 (1985) 101 - 102.
- [17] Chen B and Zhou S., "Upper bounds for f -domination number of graphs", Discrete Math. 185 (1998) 239 - 243 .
- [18] Caro Y., "On the k -domination and k -transversal numbers of graphs and hypergraphs", Ars combinatoria 29C(1990) 49 - 55.
- [19] Blidia M et Chellali M and Volkmann L., "On the p -domination number of cactus graphs". *discussiones mathematicae Graph Theory* 25(3)(2005) 355-361.
- [20] Blidia M et Chellali M and Volkmann L., "Some bounds on the p -domination number in trees". *Soumis. Accepté dans Discrete Maths* Avril 2006.
- [21] Stracke C and Volkmann L., "A new domination conception", J. Graph Theory 17 (1993) 315 - 323.
- [22] Blidia M, Chellali M and Favaron O., "Independence and 2-domination in trees". *Australas. J. Comb.* 33, 317-327 (2005).
- [23] Blidia, Chellali M and Volkmann L., "Bounds on the 2-domination number of graphs". *A paraître dans Utilitas Math.*
- [24] Caro Y and Roditty Y., "A note on the k -domination number of a graph", *Internat. J. Math. & Math. Sci.* 13 (1990) 205 - 206.
- [25] Favaron O., " k -domination and k -independence in graphs", *Ars Combin.* 25 C (1988) 159 - 167.
- [26] Jelen F., " k -independence and the k -residue of a graph", *J. Graph Theory* 32 (3) (1999) 241 - 249.

- [27] Caro Y and Tuza Z., "Improved lower bounds on k - indépendance", J. Graph Theory 15 (1991) 99 -107.
- [28] Hopkins G and Staton W., "Vertex partition and k - small subsets of graphs", Ars Combin . 22 (1986) 19 -24
- [29] Chen G and Jacobson M. S., "On a relationship between 2 - dominating and 5 - dominating sets in graphs", J . Combin . Math. Combin . Comput .39(2001) 139 - 145.
- [30] Blidia M, Chellali M, Favaron O and Meddah N., " Titre à préciser ", en préparation.
- [31] Maddox R. B., "On k -dependant subsets and k -degenerate graphs", Congressus Numerantium 68 (1989) 11-14.
- [32] Blidia M, Chellali M, Favaron O and Meddah N., "On k -independence in graphs with emphasis on trees". A paraître dans Discrete Maths.
- [33] Favaron O and Hartnell B. L., "On well - k - Covered graphs", JCMCC 6 (1989) 199 - 205.
- [34] Hakimi S. L., "On the realizability of a set of integers as degrees of the vertices of a linear graph", I., SIAM J Appl Math 10 (1962), 496-506.
- [35] Havel V., "A remark on the existence of finite graphs (Czech)", Časopis Pěst Mat 80 (1955), 477-480.
- [36] Triesch E., "Degree sequences of graphs and dominance order", J Graph Theory 22 (1996), 89-93.