

MINISTERE DE L'ENSEIGNEMENT SUPERIEUR ET DE LA
RECHERCHE SCIENTIFIQUE
UNIVERSITE DE BLIDA
INSTITUT DE SCIENCES EXACTES

THESE DE MAGISTER

SPECIALITE : MATHEMATIQUES APPLIQUEES

OPTION: MODELISATION MATHEMATIQUE ET TECHNIQUES DE
DECISION

Maintenance Préventive Optimale De Systèmes Redondants

Par

Elias Messaoudene

Présentée devant le Jury constitué de :

| | |
|--------------------|--|
| Président: | Mr Djeddi M., MC, INELEC |
| Rapporteur: | Mr Aissani A., Prof, Univ. Blida |
| Examineurs: | Mr Ksir B., Prof, Univ. Constantine |
| | Mr Kezzouh A., MC, USTHB |
| | Mr Ould Rouis H., MC, Univ. Blida |
| | Mr El Bahi M., CC, USTHB |

UNIVERSITE DE BLIDA



32-510-134-1

SOMMAIRE

INTRODUCTION

CHAPITRE 1: NOTIONS DE LA THEORIE DE FIABILITE.

- 1.1 Introduction.
- 1.2 Indices et lois de fiabilité.
 - 1.2.1 Lien avec d'autres modèles stochastiques.
 - i) Les files d'attente.
 - ii) Ordonnancement.
- 1.3 Classes de distribution de survie.
- 1.4 Relations entre les classes de distribution d'âge.
- 1.5 Préservation des classes de distribution de survie engendrées par des opérations de fiabilité.

CHAPITRE 2: POLITIQUES DE RENOUVELLEMENT.

- 2.1 Introduction.
- 2.2 Théorie de renouvellement.
 - 2.2.1 Processus de renouvellement.
 - Théorème élémentaire de renouvellement.
- 2.3 La maintenance.
 - 2.3.1 Méthodes de maintenance.
 - 2.3.2 Stratégies de renouvellement.
 - 2.3.2.1 Remplacement préventif selon l'âge.
 - 2.3.2.2 Remplacement préventif par blocs.
 - 2.3.3 Comparaison des deux politiques précitées.

CHAPITRE 3: STRATEGIES DE REMPLACEMENT PERIODIQUE AVEC ACTIONS CORRECTIVES A LA PANNE.

- 3.1 Introduction.
- 3.2 Modèle mathématique.
- 3.3 Hypothèses.
- 3.4 Fonction objective.
- 3.5 Cas particuliers.

CHAPITRE 4: MAINTENANCE DE SYSTEMES REDONDANTS.

- 4.1 Optimisation d'un système parallèle.
 - 4.1.1 Introduction.
 - 4.1.2 Le modèle.
 - 4.1.3 Politique A: Maintenance préventive aux dates $T, 2T, \dots$
Maintenance corrective mineure en cas de panne.
 - 4.1.3.1 Nombre optimal.
 - 4.1.3.2 Temps optimal.
 - Algorithme A.
 - Organigramme A.
 - Résultats numériques et discussions.

SOMMAIRE

INTRODUCTION.

CHAPITRE 1: NOTIONS DE LA THEORIE DE FIABILITE.

- 1.1 Introduction.
- 1.2 Indices et lois de fiabilité.
 - 1.2.1 Lien avec d'autres modèles stochastiques.
 - i) Les files d'attente.
 - ii) Ordonnancement.
- 1.3 Classes de distribution de survie.
- 1.4 Relations entre les classes de distribution d'âge.
- 1.5 Préservation des classes de distribution de survie engendrées par des opérations de fiabilité.

CHAPITRE 2: POLITIQUES DE RENOUVELLEMENT.

- 2.1 Introduction.
- 2.2 Théorie de renouvellement.
 - 2.2.1 Processus de renouvellement.
 - Théorème élémentaire de renouvellement.
- 2.3 La maintenance.
 - 2.3.1 Méthodes de maintenance.
 - 2.3.2 Stratégies de renouvellement
 - 2.3.2.1 Remplacement préventif selon l'âge.
 - 2.3.2.2 Remplacement préventif par blocs.
 - 2.3.3 Comparaison des deux politiques précitées.

CHAPITRE 3: STRATEGIES DE REMPLACEMENT PERIODIQUE AVEC ACTIONS CORRECTIVES A LA PANNE.

- 3.1 Introduction.
- 3.2 Modèle mathématique.
- 3.3 Hypothèses.
- 3.4 Fonction objective.
- 3.5 Cas particuliers.

CHAPITRE 4: MAINTENANCE DE SYSTEMES REDONDANTS.

- 4.1 Optimisation d'un système parallèle.
 - 4.1.1 Introduction.
 - 4.1.2 Le modèle.
 - 4.1.3 Politique A: Maintenance préventive aux dates $T, 2.T, \dots$
Maintenance corrective mineure en cas de panne.
 - 4.1.3.1 Nombre optimal.
 - 4.1.3.2 Temps optimal.
 - Algorithme A.
 - Organigramme A.
 - Résultats numériques et discussions.

**4.1.4 Politique B: Maintenance préventive aux dates $T, 3.T, \dots$
Inactivité jusqu'à la prochaine maintenance préventive en cas de panne.**

L'une des étapes les plus importantes des études de fiabilité est l'optimisation des performances.

4.1.4.1 Nombre optimal.

4.1.4.2 Temps optimal.

– Algorithme B.

– Organigramme B.

– Résultats numériques et discussions.

4.2 Optimisation d'un système k parmi N .

4.2.1 Introduction.

4.2.2 Le modèle.

– Notations.

4.2.3 Nombre optimal.

4.2.4 Temps optimal.

4.2.5 Résultats numériques et discussions.

4.3 Optimisation d'un système parallèle – série.

4.3.1 Introduction.

4.3.2 Le modèle.

– Notations.

4.3.3 Politique A.

4.3.3.1 Procédure optimale.

4.3.4 Politique B.

4.3.4.1 Procédure optimale.

4.3.5 Résultats numériques et discussions.

CONCLUSION.

L'objet principal de cette thèse est l'étude de modèles de politiques de maintenance de type PRNMI (actions correctives mineures et périodes d'inactivité) introduite par Ait kadi & Cléroux [2] lorsqu'on tient compte simultanément des variables de décision temps entre maintenance T et nombre d'éléments redondants N . Ce type de problème a été étudié par Nakagawa [45] pour la politique classique de remplacement par blocs où le temps de maintenance T est mesuré en temps réel. Chez certains auteurs [58,59], cet intervalle est mesuré en termes de nombre de défaillances (ou de chocs).

Ce travail, se présente en quatre chapitres.

* Le chapitre 1 est consacré principalement aux notions de la théorie de fiabilité et aux principales classes de distribution de survie.

INTRODUCTION

L'une des étapes les plus importantes des études de fiabilité est l'optimisation des performances d'un système.

Plusieurs critères de performance sont envisageables, parmi lesquels [1,7,8,15]: maximiser la fiabilité (ou la disponibilité) sous la contrainte budgétaire ou minimiser les coûts d'exploitation de l'équipement sous les contraintes de fiabilité exigée, de stock de rechange (ou d'éléments redondants), de sûreté, etc... Les variables de décision peuvent être la fiabilité des éléments, le stock d'éléments redondants, les intervalles entre actions de maintenance ou d'inspection [7,9].

La politique de remplacement périodique d'un système non redondant de Barlow & Hunter [6] est intéressante pour la simplicité de sa structure et la facilité de son usage, et c'est pourquoi elle est fréquemment utilisée en pratique. Cependant, diverses extensions ont été proposées dans la littérature de fiabilité pour introduire des variables de décision autres que les temps entre maintenances et des fonctions-objectives plus réalistes. Les différentes contributions sur le sujet sont résumées notamment dans les synthèses de Nakagawa [43,44] ainsi que dans le chapitre 3.1 de ce mémoire.

L'objet principal de cette thèse est l'étude de modèles de politiques de maintenance de type PRNMI (actions correctives mineures et périodes d'inactivité) introduite par Ait kadi & Cléroux [2] lorsqu'on tient compte simultanément des variables de décision temps entre maintenance T et nombre d'éléments redondants N . Ce type de problème a été étudié par Nakagawa [45] pour la politique classique de remplacement par blocs où le temps de maintenance T est mesuré en temps réel. Chez certains auteurs [58,59], cet intervalle est mesuré en termes de nombre de défaillances (ou de chocs).

Ce travail, se présente en quatre chapitres.

- Le chapitre 1 est consacré principalement aux notions de la théorie de fiabilité et aux principales classes de distribution de survie.

- Dans le chapitre 2, on expose quelques résultats de la théorie de renouvellement et ses applications pour l'évaluation de stratégies optimales de maintenance.
- On détaille dans le chapitre 3 le modèle introduit par Ait Kadi & Cléroux [2] et fournissons les aspects pour la compréhension des modèles étudiés.
- Dans le chapitre 4, on présente nos modèles dérivés de la politique PRNMI pour les systèmes parallèles, k-sur-N et série-parallèle. Pour chaque modèle, on discutera les conditions d'existence et d'unicité de la politique optimale.

Par politique optimale, on entend le couple (N^*, T^*) qui minimise l'espérance mathématique des coûts unitaires sur un horizon infini.

La recherche de ce couple peut s'avérer compliquée, du fait que T est réel alors que N est entier et les méthodes classiques d'optimisation sont inadaptées. Cependant, nous établirons pour chaque cas des théorèmes qui conduisent à des algorithmes relativement simples et efficaces de recherche de l'optimum, lorsque la distribution du temps de panne est IFR.

L'implémentation des algorithmes a été réalisée en langage basique et cliper-5 sur Micro PC 486 D X 2 66 Mhz, 4 Mo RAM, 340 Mo HD, et testée sur divers exemples numériques.

NOTIONS DE LA THEORIE DE FIABILITE

1.1 INTRODUCTION.

Les notions introduites dans ce chapitre, sont à la base de l'élaboration des modèles d'optimisation de la fiabilité de systèmes présentés plus loin. La théorie de fiabilité, science récente, est une branche importante de la théorie des probabilités et statistiques mathématiques et de la recherche opérationnelle. Elle est d'un intérêt croissant ces dernières années. Cette science trouve ses applications en technologie industrielle et en sciences économiques. En effet, le développement de cette science ces dernières années est dû à plusieurs raisons [53].

- Le caractère essentiel et vital du bon fonctionnement des dispositifs, lorsque sont en jeu des vies humaines (centrale nucléaire, transport, aviation,...).
- La nécessité de rationaliser les activités industrielles ou autres, du fait de la taille des entreprises et la complexité des tâches.
- L'aspect économique (le coût d'exploitation du matériel étant greffé par celui des défaillances).

Les concepts fiabilistes trouvent cependant de nombreuses autres applications en sciences sociales (démographie), médicales (analyse de survie)...

Ce chapitre comporte quelques notions préliminaires concernant la théorie élémentaire de fiabilité. Nous passerons en revue les principales classes de distribution de survie recensées dans la littérature de fiabilité et par la suite, seront établies les relations entre certaines de ces classes, ainsi que leur préservation relativement aux opérations de fiabilité. Les résultats et notions décrits dans ce chapitre peuvent être trouvés dans les monographies de A.Aissani [1], Barlow & Proshan [7, 8], Stoyan [54] et Shaked & Shanthikumar[51].

1.2 INDICES ET LOIS DE FIABILITE. [1, 7, 9]

La plupart des modèles mathématiques considèrent qu'un système (matériel , composant , élément ou équipement) peut être, soit en état opérationnel, soit à l'état de panne.

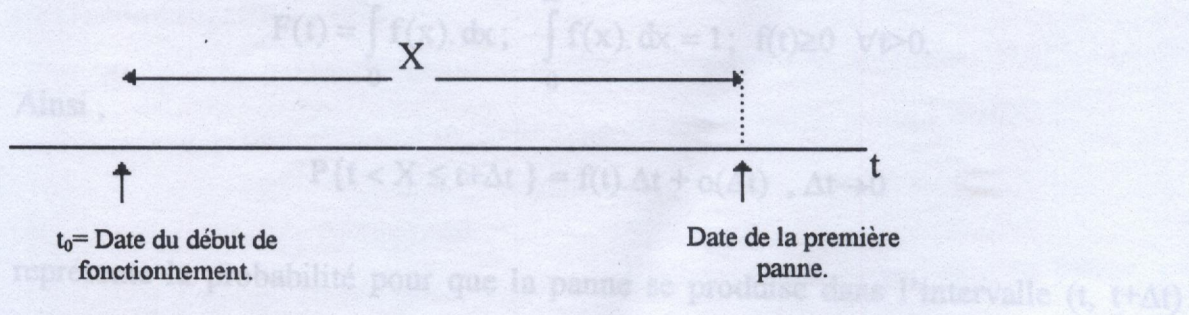
Les éléments qui le constituent sont susceptibles d'avoir des avaries soudaines ou progressives, partielles ou totales; d'où la possibilité de les réparer qu'il faille ou non arrêter le système.

Pour notre part, on s'intéressera aux défaillances soudaines des systèmes réparables. La quantité de service accomplie par le système pendant son fonctionnement est conçue en général comme le nombre d'heures pendant lequel le système a fonctionné effectivement. Elle est d'ailleurs assimilée pour les systèmes qui se détériorent à l'âge auquel il est tombé en panne et apparaît comme une mesure importante. Il est d'ailleurs évident que pour des systèmes identiques fonctionnant dans des conditions similaires, cette mesure peut être différente. On la définira par la suite comme la durée de vie du système.

Définition 1.1: On appelle durée de vie du système, l'intervalle de temps entre la mise en exploitation jusqu'à la première défaillance. Cette durée de vie X sera assimilée à une variable aléatoire non négative (l'occurrence d'une panne étant le résultat de plusieurs facteurs intrinsèques ou d'influence externe), définie sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathfrak{F}, P)$, où \mathfrak{F} est la σ algèbre des boreliens de \mathbb{R}_+ et $P(\cdot)$ une mesure de probabilité sur \mathfrak{F} .

La fiabilité peut être évaluée à l'aide de plusieurs indices, parmi lesquels on peut citer:

La probabilité de défaillance.



On suppose que le système devient opérationnel à la date $t = t_0$. A la variable aléatoire X on associe la fonction de répartition

$$F(t) = P(X \leq t) \quad , \quad t \geq 0$$

qui représente la probabilité que la défaillance du système se produise avant l'instant t , ou probabilité de défaillance.

Pour la cohérence avec les considérations physiques, on pose:

$$F(t) = 0 \quad , \quad \text{pour } t < 0 \quad \text{et} \quad F(0) = \lim_{t \rightarrow 0} F(t) = 0;$$

ceci pour exclure le cas peu réaliste du système déjà en panne à l'instant de sa mise en exploitation.

Fonction de fiabilité ou fonction de survie.

On l'exprime par la fonction du temps

$$R(t) = P(X > t) = 1 - P(X \leq t) = 1 - F(t) = \bar{F}(t).$$

En général décroissante sur \mathcal{R}_+ , elle représente la probabilité pour que le système fonctionne sans défaillance au cours de l'intervalle $[t_0, t]$. La fonction $\bar{F}(t)$, notée également $R(t)$ est appelée fonction de fiabilité.

Densité de panne.

Si F est absolument continue (donc dérivable) alors

$$f(t) = \frac{dF(t)}{dt}$$

représente la fonction de densité de panne et possède les propriétés suivantes:

$$F(t) = \int_0^t f(x). dx; \quad \int_0^{\infty} f(x). dx = 1; \quad f(t) \geq 0 \quad \forall t > 0.$$

Ainsi,

$$P\{t < X \leq t + \Delta t\} = f(t). \Delta t + o(\Delta t) \quad , \quad \Delta t \rightarrow 0$$

représente la probabilité pour que la panne se produise dans l'intervalle $(t, t + \Delta t)$ infiniment petit.

La densité, contrairement à la fiabilité, représente donc une quantification locale.

MTTF " Mean Time to Failure."

L'une des caractéristiques probabilistes moyennes est le MTTF, traduit comme le temps moyen de bon fonctionnement jusqu'à la première panne.

Si $MTTF < +\infty$ alors

$$E(X) = MTTF = \int_0^{\infty} t \cdot dF(t) = \int_0^{\infty} t \cdot f(t) \cdot dt = \int_0^{\infty} R(t) \cdot dt.$$

1.2.1 Lien avec d'autres modèles stochastiques.

Ces notions de fiabilité peuvent être utilisées dans d'autres problèmes de modélisation. Nous pouvons citer en particulier:

i) Les files d'attente. [51, 54]

- Processus d'arrivées. On le décrit souvent par les temps entre arrivées qui sont des variables aléatoires ξ indépendantes identiquement distribuées.

La fonction $\bar{A}(x) = P(\zeta > x)$ exprime la probabilité qu'une arrivée ne s'est pas produite avant l'instant x .

- Processus de service. Si X désigne la durée de service d'un client quelconque, alors

la fonction $\bar{H}(x) = P(X > x)$ exprime probabilité que le service ne s'est pas achevé avant l'instant x .

ii) Ordonnancement. [25]

Si X désigne la durée d'exécution d'une tâche, alors la fonction $\bar{G}(x) = P(X > x)$ représente la probabilité que la tâche ne s'est pas achevée avant l'instant x .

Taux de défaillance instantané.

La notion de taux de défaillance (intensité de défaillance ou risque de panne) est fondamentale en théorie de fiabilité et ne figure pas en général dans la théorie générale des probabilités.

ou encore sa fonction de fiabilité

$$\bar{F}_t(x) = \frac{\bar{F}(t+x)}{\bar{F}(t)}$$

Propriété d'absence de mémoire.

L'absence de mémoire exprime le fait que la durée de vie d'un élément utilisé est indépendante (en distribution) de son âge ; soit

$$\bar{F}_t(x) = \bar{F}(x), \quad x \geq 0.$$

En d'autres termes, un élément d'âge t a même distribution qu'un élément d'âge 0 (élément neuf) ; soit que:

$$\bar{F}_t(x) = \bar{F}_0(x) = \bar{F}(x).$$

On exprime cette propriété comme suit. Un élément utilisé est aussi bon (du point de vue de sa fiabilité) qu'un élément neuf (*as good as new*).

Cette propriété d'absence de mémoire permet, si elle a lieu, de tirer des conclusions dans certains problèmes de décision.

- Si le système est « *as good as new* », planifier une politique de remplacement (maintenance) des éléments usagés qui fonctionnent encore n'est d'aucun intérêt.
- Lorsqu'on procède aux estimations statistiques de certains indices de fiabilité comme le MTTF, la fiabilité et le risque de panne, on peut se poser la question de savoir si les âges des éléments ne sont pas importants lorsqu'on procède aux observations.

1.3 CLASSES DE DISTRIBUTION DE SURVIE (OU D'ÂGE). [1, 8, 54]

Il est souvent préférable d'utiliser les distributions non paramétriques. Une des premières applications de ces classes de distributions en fiabilité par exemple, est qu'elle nous renseigne sur la notion de jeunesse ou de vieillesse du système du point de vue de la durée de vie résiduelle connaissant l'âge (propriété qualitative).

A défaut d'information suffisante, on les utilise souvent en guise de première approximation dans les modèles de fiabilité. La connaissance de la classe « d'âge » de la loi de fiabilité d'un équipement permet une aide à la décision (dans ce qui nous intéresse, niveau du stock de pièces de rechange, maintenance préventive ou corrective, mode d'intervention, redondance, etc...).

Nous considérons ici les principales classes de distributions de survie recensées dans la littérature de fiabilité de ces dernières années.

Soient X et X_t des variables aléatoires représentant respectivement la durée de vie et la durée de vie résiduelle d'un système d'âge t . Soient F et F_t leurs distributions respectives.

Définitions 1.2.

La distribution F est

a) **IFR** (*Increasing failure rate*) [1, 7, 8, 54] si

$$\bar{F}_t(x) = \frac{\bar{F}(t+x)}{\bar{F}(t)} \text{ est décroissante en } t, \quad -\infty < t < \infty, \quad \forall x \geq 0. \quad (1)$$

La condition (1) est équivalente à

$$\lambda(t) = \frac{f(t)}{\bar{F}(t)} \text{ est décroissante en } t, \quad \forall t \geq 0 \text{ et si } f(\cdot) \text{ existe} \quad (2)$$

b) **DFR** (*Decreasing failure rate*) si

$$\bar{F}_t(x) \text{ est croissante en } t, \quad -\infty < t < \infty, \quad \forall x \geq 0. \quad (3)$$

La condition (3) est équivalente à

$$\lambda(t) \text{ est décroissante en } t, \quad \forall t \geq 0. \quad (4)$$

c) **IFRA** (*Increasing failure rate in average*) ou IFR en moyenne [1, 7, 8] si

$$\Lambda(t) = (-1/t) \cdot \log[1-F(t)] \text{ est décroissante en } t, \quad -\infty < t < \infty.$$

La vieillesse de l'équipement est dans ce cas caractérisée à l'aide du taux de défaillance cumulé (cas où le taux de panne instantané n'est pas défini).

d) **DFRA** (*Decreasing failure rate in average*) si

$\Lambda(t)$ est décroissante en t , $-\infty < t < \infty$.

Ces distributions sont utilisées comme modèles pour des éléments sujets à des chocs aléatoires.

Si par exemple la panne se produit suite à une série de chocs aléatoires, ceux ci entraînent une dégradation progressive du système, qui en s'accumulant provoque la défaillance.

e) **NBU** (*New better than used*) [1, 7, 8, 54] si

$$\bar{F}(x+y) \leq \bar{F}(x) \cdot \bar{F}(y) \quad , \quad x \geq 0, y \geq 0. \quad (5)$$

La condition (5) est équivalente à

$$\bar{F}_t(x) \leq \bar{F}(x) \quad , \quad x \geq 0, \forall t \geq 0. \quad (6)$$

Dans ce cas la fiabilité d'un système usagé d'âge t est inférieure à celle d'un système neuf.

f) **NWU** (*New worse than used*) si

$$\bar{F}_t(x) \geq \bar{F}(x) \quad , \quad t \geq 0.$$

g) **NBUE** (*New better than used in expectation*) si

$$EX_t \leq EX \quad , \quad t \geq 0.$$

En d'autres termes la durée de vie résiduelle moyenne d'un système d'âge t est inférieure à celle d'un dispositif neuf.

h) **NWUE** (*New worse than used in expectation*) si

$$EX_t \geq EX \quad , \quad t \geq 0.$$

i) **IMRL** (*Increasing mean residual life*) [14, 54] si

$$EX_t \text{ est croissante en } t \quad , \quad 0 < t < \infty.$$

j) **DMRL** (*Decreasing mean residual life*) si

$$EX_t \text{ est décroissante en } t \quad , \quad 0 < t < \infty.$$

k) **Υ -MRLA** (*Mean residual life bounded above by Υ*) [54] si

$$EX_t \leq \Upsilon, \quad t > 0 \text{ avec } \Upsilon > EX.$$

En particulier si $\Upsilon = EX$, alors F est NBUE.

l) **Υ -MRLB** (*Mean residual life bounded below by Υ*) si

$$EX_t \geq \Upsilon, \quad t > 0 \text{ avec } \Upsilon > EX.$$

En particulier si $\Upsilon = EX$, alors F est NWUE.

m) **HNBUE** (*Harmoniquement NBUE*) [50] si

$$\int_t^{\infty} \bar{F}(x) \cdot dx \leq \mu \cdot e^{-t/\mu}, \quad \mu = EX, \quad t > 0.$$

n) **IVRL** (*Increasing variance of residual life*) si

$$\sigma^2(t) = \text{var}(X_t) \text{ est décroissante en } t, \quad t > 0.$$

o) **DVRL** (*decreasing variance of residual life*) [36] si

$$\sigma^2(t) \text{ est décroissante en } t, \quad t > 0.$$

p) **NIVRL** (*Net IVRL*) si

$$\sigma^2(t) \geq \sigma^2(0) = \sigma^2, \quad t > 0.$$

q) **NDVRL** (*Net DVRL*) si

$$\sigma^2(t) \leq \sigma^2(0) = \sigma^2, \quad t > 0.$$

En particulier si F est DMRL respectivement IMRL, alors elle est aussi DVRL respectivement IVRL. Si F est NBUE (NWUE), elle est aussi NDVRL (NIVRL).

r) **NBUFR** (*New better than used in failure rate*) [20, 31, 38] si

$$\lambda(0) \leq \lambda(t), \quad 0 \leq t < \infty.$$

s) **NBUFRA** (*New better than used in failure rate in average*) [38] si

$$\lambda(0) \leq (1/t) \cdot \Lambda(t), \quad t > 0.$$

On peut aisément vérifier que $NBU \Rightarrow NBUFR \Rightarrow NBUFRA$.

t) **L-DISTRIBUTION** [30] si

$$\int_0^{\infty} \exp(-s \cdot x) \cdot \bar{F}(x) \cdot dx \geq \frac{\mu}{1+s}, \quad s \geq 0.$$

Citons brièvement quelques autres distributions de durée de vie rencontrées dans la littérature [15, 26, 27, 34, 52].

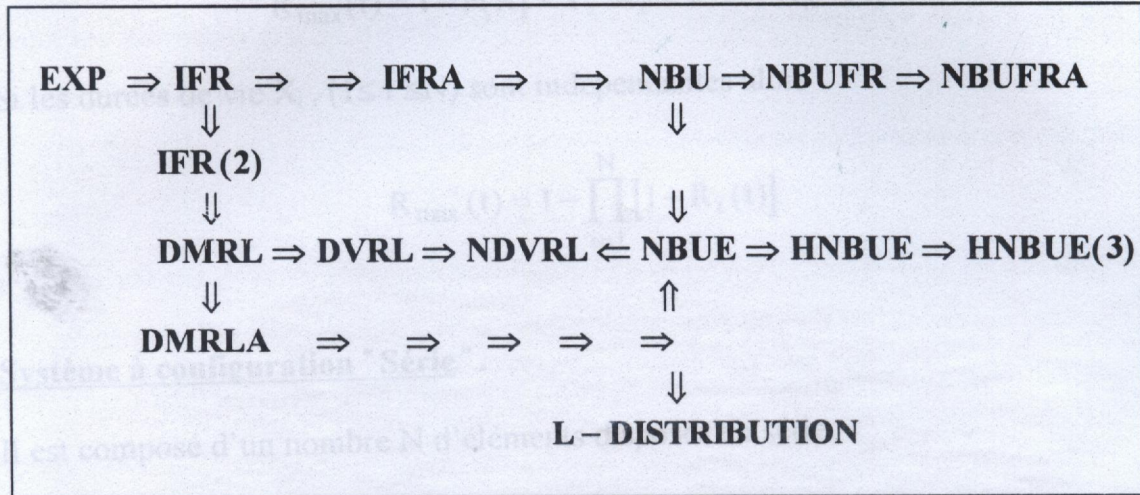
- Distribution **DMRLHA** (*Decreasing mean residual life in harmonic average*).
- Distribution **SNBU** (*Stochastically NBU*).
- Distribution **NBUC** (*NBU in convex ordering*).
- Distribution **NBU d'âge t_0** .
- Distribution **BMRL- t_0** (*Better mean residual life at t_0*).
- Distribution **DPRL- α** (*Decreasing 100 α percentile residual life*).
- Distribution **NBUP- α** (*New better than used with respect to the 100 α percentile*).
- Distribution **BFR** (*Bathtub shaped failure rate*).

Le taux de défaillance d'une telle distribution est une fonction convexe).

Il existe une relation entre les **ordres stochastiques** [8, 17, 29, 47, 51, 54] qui jouent un rôle très important dans l'analyse des problèmes complexes de files d'attente et trouvent leurs applications en télécommunication, systèmes de production etc....et les **dominances stochastiques d'ordre 1,2,3** utilisées en théorie de l'économie [17, 20, 39, 51]. Par exemple, **IFR(2)**, est la distribution IFR au sens de la dominance stochastique d'ordre 2.

1.4 RELATIONS ENTRE LES CLASSES DE DISTRIBUTIONS D'AGE .

Actuellement on connaît la chaîne d'implication suivante.

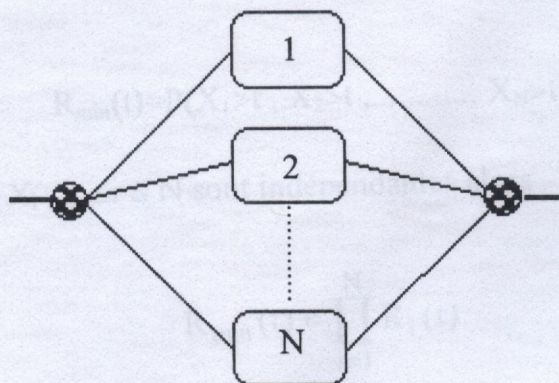


Fiabilité des systèmes..

En général, il est nécessaire de connaître la configuration d'un système. Dans ce qui va suivre, on s'intéressera à la fiabilité d'un système, connaissant sa structure et la fiabilité de ses composants.

Système à configuration "Parallèle".

Il est composé d'un nombre N d'éléments disposés en parallèle.



Le dernier élément qui tombe en panne détermine la défaillance du système. Si chaque élément considéré a une durée de vie X_i aléatoire à laquelle on associe la fonction de fiabilité $R_i(t)$, $t > 0$ alors la durée de vie du système est

Systèmes redondants par $X_{\max} = \max(X_1, X_2, \dots, X_N)$,

et sa fiabilité est

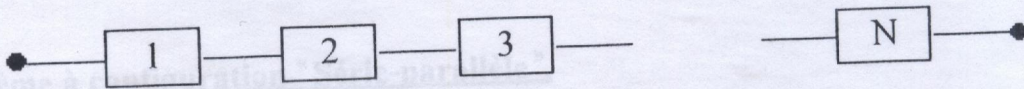
$$R_{\max}(t) = 1 - P(X_1 < t, X_2 < t, \dots, X_N < t).$$

Si les durées de vie X_i , ($1 \leq i \leq N$) sont indépendantes alors

$$R_{\max}(t) = 1 - \prod_{i=1}^N [1 - R_i(t)].$$

Système à configuration "Série".

Il est composé d'un nombre N d'éléments disposés en série.



Un tel système tombe en panne lorsque l'un des N éléments qui le composent est défaillant. Dans ce cas la durée de vie du système est définie par

$$X_{\min} = \min(X_1, X_2, \dots, X_N).$$

La fiabilité d'un tel système est alors

$$R_{\min}(t) = 1 - P(X_{\min} \leq t) = P(X_{\min} > t)$$

soit

$$R_{\min}(t) = P(X_1 > t, X_2 > t, \dots, X_N > t).$$

Si les durées de vie X_i , $1 \leq i \leq N$ sont indépendantes alors

$$R_{\min}(t) = \prod_{i=1}^N R_i(t)$$

- les notions "série" et "parallèle" doivent être comprises au sens fiabiliste, et non pas au sens physique.

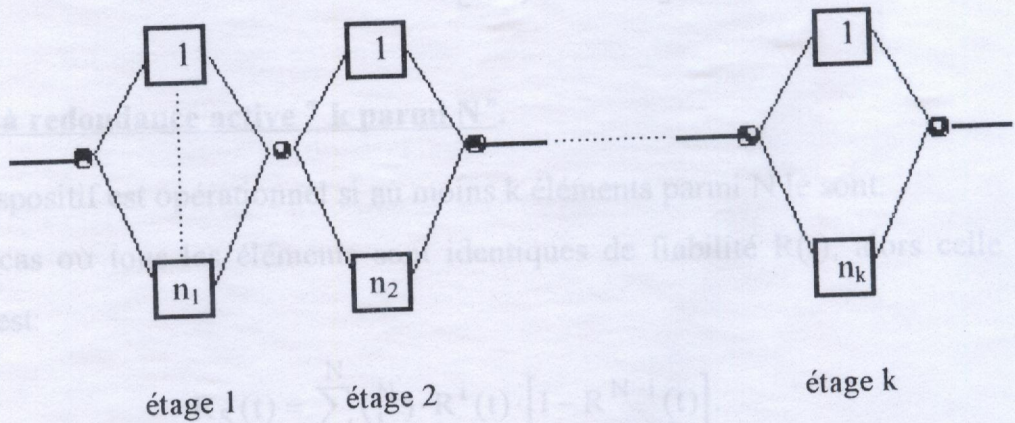
Systèmes redondants parallèle.

La configuration "parallèle" est la forme la plus simple de redondance qui est l'une des méthodes principales pour augmenter la fiabilité d'un système.

Tous les éléments ont le même fonctionnement et l'un remplace l'autre en cas de panne. Cette redondance est de trois types.

- Redondance active (réserve chargée): Tous les éléments fonctionnent en même temps.
- Redondance passive (réserve non chargée): A chaque instant seul un élément (le principal) fonctionne, les autres pouvant être mis en "stand by".
- Redondance allégée: Les éléments de réserve fonctionnent, mais avec un régime moindre.

Système à configuration "Série-parallèle".

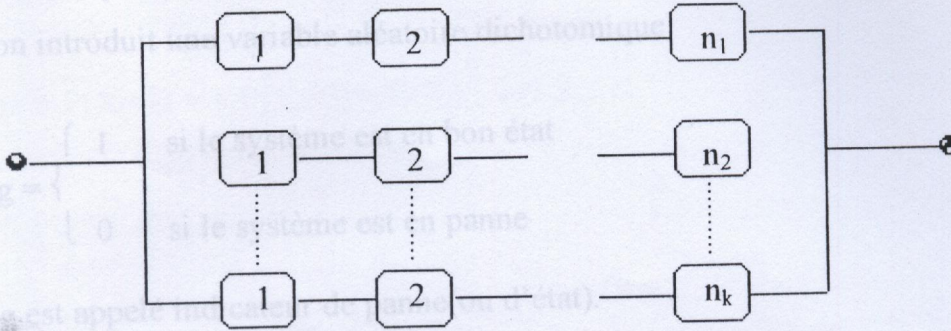


Chaque étage i , (1 ≤ i ≤ k) a n_i éléments en redondance active. La fiabilité d'un tel système est le produit des fiabilités de chaque étage, soit

$$R_S(t) = \prod_{i=1}^k \left[1 - \prod_{j=1}^{n_i} (1 - R_{ij}(t)) \right]$$

où R_{ij}(t) représente la fiabilité du j^{ème} élément de l'étage i.

Système à configuration "Parallèle-série".



Chacune des k branches est composée de n_i éléments en redondance active disposés en série. Si R_{ij}(t) représente la fiabilité du j^{ème} élément de la branche i, alors la fiabilité de ce système est:

$$R_S(t) = 1 - \prod_{i=1}^k \left[1 - \prod_{j=1}^{n_i} R_{ij}(t) \right].$$

Système à redondance active "k parmi N".

Un tel dispositif est opérationnel si au moins k éléments parmi N le sont. Dans le cas où tous les éléments sont identiques de fiabilité R(t), alors celle du système est:

$$R_S(t) = \sum_{i=k}^N \binom{N}{i} \cdot R^i(t) \cdot [1 - R^{N-i}(t)].$$

1.5 PRESERVATION DES CLASSES DE DISTRIBUTION DE SURVIE ENGENDREES PAR DES OPERATIONS DE FIABILITE. [8]

La configuration C d'un système S définit une opération de fiabilité,

$$\bar{F}_S = \bar{F}_1 \oplus \bar{F}_2 \oplus \dots \oplus \bar{F}_N$$

où, $\bar{F}_1, \bar{F}_2, \dots, \bar{F}_N$ désignent les fiabilités des éléments S₁, S₂, ..., S_N constituant ce dispositif.

Admettons que le dispositif et ses éléments soient caractérisés sans ambiguïté aucune par deux états: "état de bon fonctionnement" et "état de panne". pour cela on introduit une variable aléatoire dichotomique

$$g = \begin{cases} 1 & \text{si le système est en bon état} \\ 0 & \text{si le système est en panne} \end{cases}$$

g est appelé indicateur de panne(ou d'état).

Définition 1.3. Soit un système d'indicateur de panne f , constitué de N éléments d'indicateurs x_1, x_2, \dots, x_N . La fonction $g = g(x) = g(x_1, x_2, \dots, x_N)$ est dite fonction de structure de ce système, où:

$$x_i = \begin{cases} 1 & \text{si l'élément } N^{\circ}i \text{ fonctionne} \\ 0 & \text{si l'élément } N^{\circ}i \text{ est en panne.} \end{cases}$$

Remarque. Toutes ces définitions et éventuellement celles qui pourraient suivre considèrent l'état du système à un instant fixé (notion statique).

Exemples.

a) Système série: $g(x) = \min(x_1, x_2, \dots, x_N)$.

b) Système parallèle: $g(x) = \max(x_1, x_2, \dots, x_N)$.

c) Système k-parmi-N: $g(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } \sum_{i=1}^k x_i \geq k \\ 0 & \text{si } \sum_{i=1}^k x_i < k. \end{cases}$

Contexte probabiliste.

Nous supposons que x_i est une variable aléatoire que nous noterons X_i , ceci pour la différencier de la variable déterministe x_i ; la fonction

$$h_g(p) = E[g(X_S)] = E[g(X_1, X_2, \dots, X_N)] = h(p_1, p_2, \dots, p_N)$$

est appelée alors fiabilité du système S, où

$$p_i = P(X_i=1) = 1 - P(X_i=0) = E(X_i), \quad i=1, 2, \dots, N.$$

Contexte dynamique.

$$Z(t) = \begin{cases} 1 & \text{si } X_S > t \\ 0 & \text{si } X_S \leq t \end{cases} \quad Z_i(t) = \begin{cases} 1 & \text{si } X_i > t \\ 0 & \text{si } X_i \leq t \end{cases}$$

Par conséquent la fonction de survie, comme définie plus haut, s'écrira sous la forme

$$\bar{F}_S(t) = P\{Z(t)=1\} = E\{Z(t)\}.$$

Il est évident que

$$\bar{F}_S(t) = h_g[\bar{F}_1(t), \bar{F}_2(t), \dots, \bar{F}_N(t)].$$

A partir de là, on retrouve la fonction de fiabilité des différentes structures précitées.

D'autres opérations de fiabilité peuvent être définies; parmi elles

d) Convolution: (ou addition des durées de vie).

$$\text{Pour } N=2, \quad F_S(t) = \int_0^t F_1(t-x) \cdot dF_2(x) = \int_0^t F_2(t-x) \cdot dF_1(x).$$

e) Mélange de distributions.

Si F_α désigne la distribution de survie d'un élément dépendant d'un paramètre α aléatoire de distribution G , on appelle alors distribution de mélange, la fonction

$$F(x) = \int_{\mathcal{R}} F_\alpha(x) \cdot dG(\alpha).$$

Exemple.

Si F_α désigne la fiabilité d'un élément usiné par la machine N^α , par conséquent

$$F(x) = \sum_{\alpha=1}^m G(\alpha) \cdot F_\alpha(x)$$

où $G(\alpha)$ est la probabilité pour qu'un élément donné soit usiné par la machine N^α et m le nombre de machines.

Définition 1.4. On dit que le i ème élément est non essentiel pour la structure g , si g ne dépend pas de la valeur de x_i , soit

$$g(x_1, x_2, \dots, x_{i-1}, 0, x_{i+1}, \dots, x_{N-1}, x_N) = g(x_1, x_2, \dots, x_{i-1}, 1, x_{i+1}, \dots, x_{N-1}, x_N).$$

Dans le cas contraire on dit qu'il est essentiel.

Définition 1.5. Un système est dit cohérent si:

- (i) Sa fonction de structure g est croissante.
- (ii) tout élément de la structure est essentiel.

Remarque.

- Si la structure g est cohérente, alors

$$g(0, \dots, 0) = 0 \quad \text{et} \quad g(1, \dots, 1) = 1$$

- Un système est cohérent si

1. le fonctionnement normal de tous les éléments entraîne celui du dispositif.
2. la défaillance de tous les composants conduit à la panne du système.

A titre d'exemple on peut citer comme systèmes cohérents les structures (a), (b) et (c).

Définition 1.6. Soit A une classe de distribution de survie. La classe A est préservée pour l'opération g si

$$\bar{F}_1, \bar{F}_2, \dots, \bar{F}_N \in A \Rightarrow h_g(\bar{F}_1, \bar{F}_2, \dots, \bar{F}_N) \in A.$$

Le tableau suivant indique les classes de distributions de survie qui sont préservées pour l'opération de fiabilité; le point d'interrogation signifie qu'actuellement aucune preuve n'est donnée quant à la préservation ou non de la classe citée.

| Classe de distribution de survie | Formation de système cohérent | Convolution | Mélange de distributions |
|----------------------------------|-------------------------------|-------------|--------------------------|
| IFR | non préservé | oui | Non |
| IFRA | oui (préservé) | ? | Non |
| DFR | non | non | Oui |
| DFRA | non | non | Oui |
| NBU | oui | oui | Non |
| NBUE | non | oui | Non |
| NWU | non | non | Non |
| NWUE | non | non | ? |
| Autres | ? | ? | ? |

POLITIQUES DE RENOUVELLEMENT

2.1 INTRODUCTION.

De nombreuses contributions ont été apportées pour l'évaluation des politiques de remplacement, depuis les premiers travaux de Lotka [40]. G. Weiss [61] de par ses nombreux travaux, y a contribué fortement ; il prouve qu'un remplacement selon l'âge est avantageux si le temps moyen entre deux pannes est une fonction croissante de T . Il montre d'autre part que si la moyenne de vie résiduelle d'un élément d'âge t est décroissante en t , la politique selon l'âge est appropriée.

B. J. Flehinger [22] a étudié la loi de probabilité du nombre de pannes et le nombre moyen de remplacements planifiés sur un intervalle donné. Certains auteurs se sont intéressés aux distributions du temps de panne pour lesquelles une politique de remplacement est avantageuse. Parmi eux, G. R. Herd [23] s'est aperçu que lorsque le taux de panne croît, il y a lieu de faire un remplacement. Dans une série de travaux, G. Weiss [61, 62, 63, 64] considère les effets sur la fiabilité et les coûts de maintenance d'un système, lorsqu'on effectue un remplacement selon l'âge qu'il soit ou non aléatoire. N. R. Campbell [16] a introduit la stratégie de remplacements par blocs et procédé à une étude comparative entre le renouvellement périodique des lampadaires d'une avenue, par blocs ou seulement après défaillance. Il s'est aperçu que bien qu'un grand nombre de lampes soit substitué, le coût unitaire lors d'un remplacement collectif était inférieur à celui occasionné par un remplacement individuel. Toutes les lampes sont remplacées dans ce cas, suivant une période T quel que soit l'âge.

Ces stratégies de remplacement et bien d'autres encore peuvent être évaluées par les techniques de la théorie de renouvellement. Nous présenterons dans la première partie de ce chapitre certains résultats que nous jugeons importants pour l'élaboration de nos modèles.

Certains systèmes comme les chaînes de production, sont surtout sujets au vieillissement (usure) et les dépenses occasionnées par ces éventuelles avaries peuvent être aisément incluses dans les coûts d'entretien.

Malheureusement ceci n'est pas toujours le cas lorsqu'on est en présence de dispositifs exposés à des défaillances soudaines engendrant la plupart du temps des coûts très élevés; nous pouvons citer en exemple les composants électroniques, les moteurs d'avions, les systèmes aérospatiaux, etc... Ces coûts de défaillance peuvent être quasi-infini (détérioration des systèmes militaires de défense, mise en danger de vie humaine...).

Nous allons nous attacher au cours de la seconde partie de ce chapitre à définir des politiques de renouvellement de matériels indépendants qui tiennent compte explicitement de ce phénomène de défaillance et que pour cette raison, on appelle « renouvellement préventif ». On distinguera les méthodes classiques, méthodes permettant de déterminer la meilleure politique dans chacune des familles suivantes:

- Renouvellement à l'âge T , c'est à dire au bout d'un certain temps pris comme limite de fonctionnement.
- Renouvellement périodique, c'est à dire à des dates périodiques préalablement fixées.

Nous avons groupé l'étude de cette seconde partie sous le titre de « maintenance ».

2.2 THEORIE DE RENOUVELLEMENT.

On désigne ainsi l'étude du nombre de renouvellements auxquels donne lieu un système qui ne subit aucun renouvellement préventif et qui n'est renouvelé qu'au moment de l'avarie [1, 8].

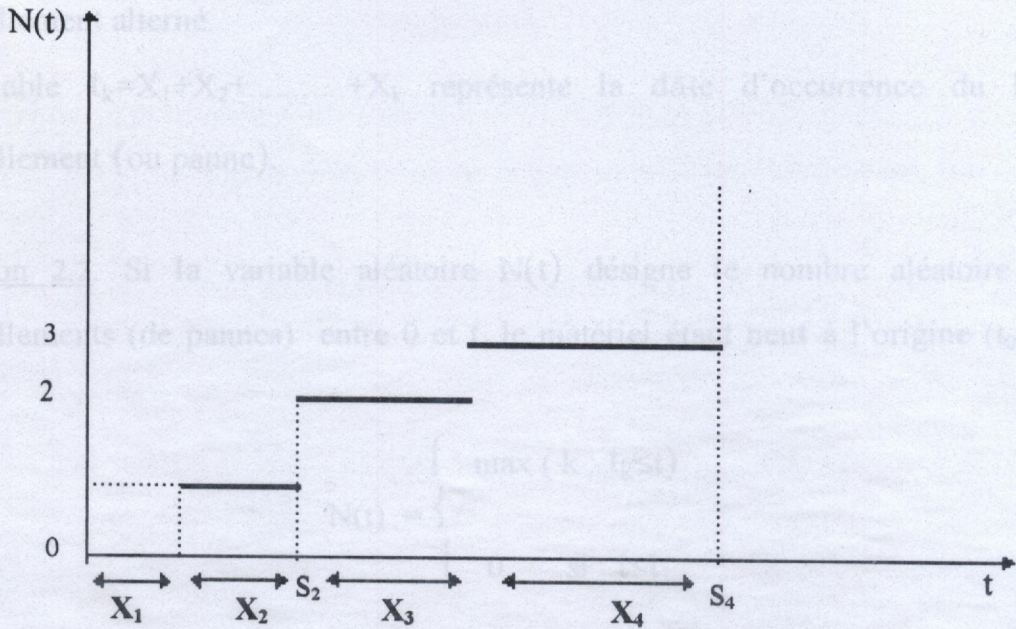
$$F(t) = P(X_1 \geq t)$$

Le flot $\{X_n = t_n - t_{n-1}, n > 1\}$ est appelé processus de renouvellement.

Si l'observation du fonctionnement du système commence au moment d'un renouvellement, alors $F_1(t) = P(X_1 \leq t) = F(t)$, et le processus de renouvellement est ordinaire.

En général, X_1 représente une durée de vie résiduelle du moment qu'à $t=0$, l'âge du système n'est pas connu; dans ce cas, $F_1(t) \neq F(t)$, et le processus de renouvellement est retardé.

2.2.1 Processus de renouvellement.



Définition 2.1. Soit un flot d'événements aléatoires $\{t_n, n \geq 1\}$

$$t_1 = X_1, t_2 = X_1 + X_2, \dots, t_n = X_1 + X_2 + \dots + X_n, \text{ tel que:}$$

- i) Les variables aléatoires $\{X_1, X_2, \dots\}$ forment une suite de variables aléatoires indépendantes non toutes nulles avec une probabilité égale à 1.
- ii) Les variables aléatoires $(X_i) i \geq 1$ sont identiquement distribuées de loi F telle que:

$$F(t) = P(X_i \geq t).$$

Le flot $\{X_n = t_n - t_{n-1}, n > 1\}$ est appelé processus de renouvellement.

Si l'observation du fonctionnement du système commence au moment d'un renouvellement, alors $F_1(t) = P(X_1 \leq t) = F(t)$, et le processus de renouvellement est ordinaire.

En général, X_1 représente une durée de vie résiduelle du moment qu'à $t=0$, l'âge du système n'est pas connu; dans ce cas, $F_1(t) \neq F(t)$, et le processus de renouvellement est retardé.

Notons que dans notre interprétation, le temps de renouvellement est supposé négligeable. Dans le cas contraire, on est en présence d'un processus de renouvellement alterné.

La variable $t_k = X_1 + X_2 + \dots + X_k$ représente la date d'occurrence du k^{eme} renouvellement (ou panne).

Définition 2.2. Si la variable aléatoire $N(t)$ désigne le nombre aléatoire de renouvellements (de pannes) entre 0 et t , le matériel étant neuf à l'origine ($t_0=0$) alors

$$N(t) = \begin{cases} \max (k : t_k \leq t) & \text{si } t \geq t_1 \\ 0 & \text{si } t < t_1 \end{cases}$$

Le processus $N(t)$ s'appelle aussi processus de comptage de renouvellement ou processus de dénombrement.

Définition 2.3. On appelle fonction de renouvellement, le nombre moyen de renouvellements (de pannes) effectués entre 0 et t . On la désigne par

$$M(t) = E[N(t)] = \sum_{n \geq 0} n \cdot P[N(t) = n]$$

Théorème 2.1. [7] La fonction de renouvellement $M(t)$ est solution de l'équation fondamentale

$$M(t) = \int_0^t (1 + M(t-x)) \cdot dF(x)$$

Démonstration. La probabilité de n renouvellements dans l'intervalle $(0, t)$, s'écrit

$$P[N(t) = n] = P[N(t) \geq n] - P[N(t) \geq n+1] = P[t_n \leq t] - P[t_{n+1} \leq t]$$

$$P[N(t) = n] = P\{ X_1 + X_2 + \dots + X_n \leq t \} - P\{ X_1 + X_2 + \dots + X_{n+1} \leq t \}$$

c'est à dire:

$$P[N(t) = n] = F^{(n)}(t) - F^{(n+1)}(t),$$

où, $F^{(n)}(t)$ est le produit de convolution d'ordre n pour la fonction $F(t)$.

Elle représente la fonction de répartition de la date du n^{eme} renouvellement, soit

$$F^{(n)}(t) = \int_0^t F^{(n)}(t-u) \cdot dF(u).$$

On obtient ainsi

$$M(t) = \sum_{n \geq 0} n \cdot \{F^{(n)}(t) - F^{(n+1)}(t)\} = \sum_{n \geq 1} F^{(n)}(t),$$

ou encore

$$M(t) = \int_0^t \sum_{n \geq 1} F^{(n-1)}(t-x) \cdot dF(x)$$

$$= \int_0^t F^{(0)}(t-x) \cdot dF(x) + \int_0^t \sum_{n \geq 2} F^{(n-1)}(t-x) \cdot dF(x)F.$$

Après un calcul élémentaire et le fait que $F^{(0)}(t) = 1$, on trouve

$$M(t) = \int_0^t [1 + M(t-x)] \cdot dF(x).$$

Si M a pour dérivée m , alors

$$m(t) = \frac{dM(t)}{dt} = f(t) + \int_0^t m(t-x) \cdot f(x) \cdot dx$$

qui représente le taux de renouvellement du processus (qui n'est pas forcément une densité sur \mathfrak{R}^+).

Théorème 2.2. [7] Soit un processus de renouvellement de fonction de répartition $F(t)$, alors:

Théorème 2.3 Si $\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{N(t)}{t} = \frac{1}{T_0}$ alors $T_0 = \int_0^{\infty} \bar{F}(t) \cdot dt$

$$\frac{N(t)}{t} \xrightarrow{P.S} \frac{1}{T_0} \quad \text{où} \quad T_0 = \int_0^{\infty} \bar{F}(t) \cdot dt$$

$$\frac{1}{T_0} = 0 \quad \text{lorsque} \quad T_0 = \infty$$

Preuve. Pour établir ce résultat on utilise l'identité de Wald généralisée [7], démontrée par N.L. Johnson [27].

Supposons que $T_0 < +\infty$, et soit $t_{N(t)} \leq t \leq t_{N(t)+1}$, alors

$$\frac{t_{N(t)}}{N(t)} \leq \frac{t}{N(t)} \leq \frac{t_{N(t)+1}}{[N(t)+1]} \cdot \frac{N(t)}{[N(t)+1]}$$

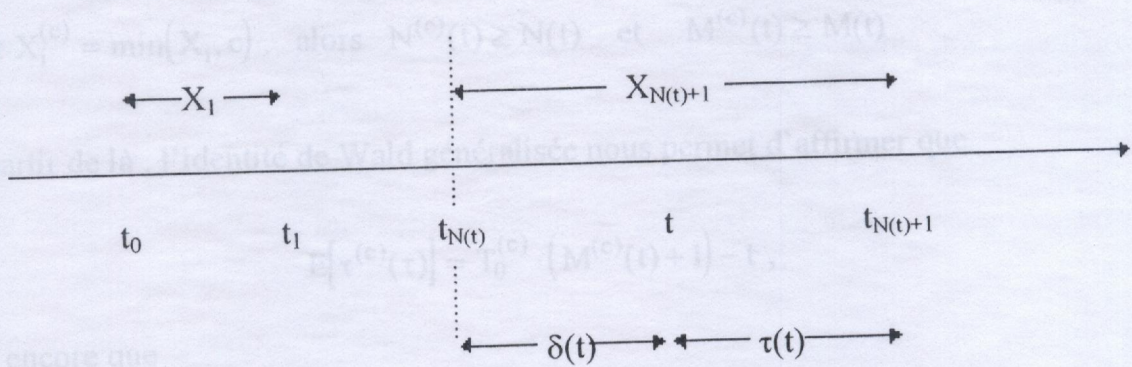
A partir de là, nous pouvons affirmer que

Etant donné que $N(t) \rightarrow \infty$, $\frac{t_{N(t)}}{N(t)} \xrightarrow{P.S} T_0$, d'après la loi forte des grands nombres.

Par conséquent

$$\frac{t}{N(t)} \xrightarrow{P.S} T_0$$

Théorème élémentaire de renouvellement .



Soient,

$\delta(t) = t - t_{N(t)}$, l'âge de l'élément, c'est à dire le temps qui s'est écoulé depuis le dernier renouvellement et ,

$\tau(t) = t_{N(t)+1} - t$, la durée de vie résiduelle de l'élément qui a bien fonctionné jusqu'à l'instant t , ou encore le temps d'attente du prochain renouvellement.

Théorème 2.3 : Si $\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{M(t)}{t} = \frac{1}{T_0}$ et $\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{M(t)}{t} = \frac{1}{T_0}$, alors

$$\frac{N(t)}{t} \xrightarrow{P.s} \frac{1}{T_0} \quad \text{où} \quad T_0 = \int_0^{\infty} \bar{F}(t) \cdot dt$$

$$\frac{1}{T_0} = 0 \quad \text{lorsque} \quad T_0 = \infty$$

Preuve. Pour établir ce résultat, on utilise l'identité de Wald généralisée [7], démontrée par N.L. Johnson [27].

Supposons que $T_0 < +\infty$, et soit $t_{N(t)} \leq t \leq t_{N(t)+1}$, alors

$$\frac{t_{N(t)}}{N(t)} \leq \frac{t}{N(t)} \leq \frac{t_{N(t)+1}}{[N(t)+1]} \cdot \frac{N(t)}{[N(t)+1]}$$

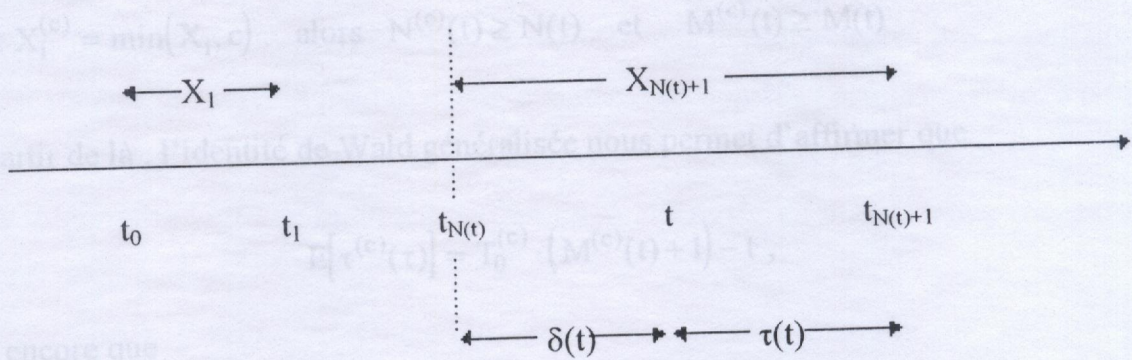
A partir de là, nous pouvons affirmer que

Etant donné que $N(t) \rightarrow \infty$, $\frac{t_{N(t)}}{N(t)} \xrightarrow{P.S} T_0$, d'après la loi forte des grands nombres.

Par conséquent

$$\frac{t}{N(t)} \xrightarrow{P.S} T_0$$

Théorème élémentaire de renouvellement .



Soient,

$\delta(t) = t - t_{N(t)}$, l'âge de l'élément, c'est à dire le temps qui s'est écoulé depuis le dernier renouvellement et ,

$\tau(t) = t_{N(t)+1} - t$, la durée de vie résiduelle de l'élément qui a bien fonctionné jusqu'à l'instant t, ou encore le temps d'attente du prochain renouvellement.

Théorème 2.3. [7] Si T_0 est la moyenne de la durée de vie de l'élément, alors

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{M(t)}{t} = \frac{1}{T_0}.$$

Preuve. Pour établir ce résultat, on utilise l'identité de Wald généralisée [7], démontrée par N.L. Johnson [27],

$$E[t_{N(t)+1}] = T_0 \cdot (M(t) + 1).$$

A partir de là, nous pouvons affirmer que

$$E[\tau(t)] = T_0 \cdot (M(t) + 1) - t \geq 0,$$

soit

$$M(t) \geq \frac{t}{T_0} - 1 \quad \forall t \geq 0;$$

et par suite,

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{M(t)}{t} \geq \frac{1}{T_0}.$$

Soit $X_i^{(c)} = \min(X_i, c)$. alors $N^{(c)}(t) \geq N(t)$ et $M^{(c)}(t) \geq M(t)$

A partir de là, l'identité de Wald généralisée nous permet d'affirmer que

$$E[\tau^{(c)}(\tau)] = T_0^{(c)} \cdot (M^{(c)}(t) + 1) - t,$$

ou encore que

$$\frac{M^{(c)}(t) + 1}{t} = \frac{1}{T_0^{(c)}} + \frac{E[\tau^{(c)}(t)]}{t \cdot T_0^{(c)}} \leq \frac{1}{T_0^{(c)}} + \frac{c}{t \cdot T_0^{(c)}}$$

car $\tau(t) \leq c$. De plus,

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{M(t)}{t} \leq \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{M^{(c)}(t)}{t} = \frac{1}{T_0^{(c)}}, \quad \text{pour tout } c > 0.$$

Quand $c \rightarrow \infty$, $T_0^{(c)} \rightarrow T_0$. Par conséquent, $\overline{\lim}_{t \rightarrow \infty} \frac{M(t)}{t} \leq \frac{1}{T_0}$, ce qui complète la démonstration, lorsque $T_0 < \infty$.

Si $T_0 = +\infty$, alors $\overline{\lim}_{t \rightarrow \infty} \frac{M(t)}{t} \leq \frac{1}{T_0^{(c)}} \rightarrow 0$, quand $c \rightarrow \infty$.

Ainsi,

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{M(t)}{t} = 0.$$

2.3 LA MAINTENANCE.

2.3.1 Méthodes de maintenance.

Le choix entre les méthodes de maintenance (comment introduire une stratégie de maintenance efficace) nous impose de connaître le fonctionnement et les caractéristiques des matériels en exploitation, les conditions d'application de chaque méthode, les coûts de maintenance et les coûts de perte de production. Les spécialistes distinguent divers types de maintenances.

Maintenance corrective: Opérations de maintenance effectuée après une défaillance pour rétablir la fonction perdue. Cette maintenance appelée parfois curative, a pour objet de redonner au matériel des qualités perdues nécessaires à son utilisation.

La "réparation" est une intervention définitive et limitée de maintenance corrective après défaillance.

Maintenance préventive: Opérations effectuées dans l'intention de réduire la probabilité de défaillance. Elle permet ainsi d'éviter les défaillances des systèmes en cours d'exploitation.

Cette liste n'étant pas exhaustive, mais simplement indicative.

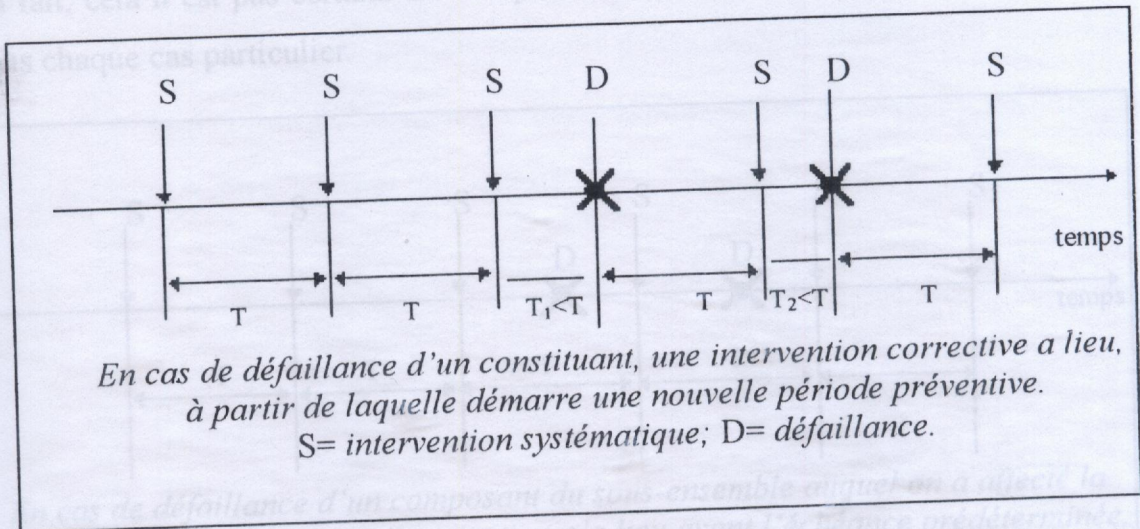
2.3.2 Stratégies de renouvellement.

Lorsque les matériels sont indépendants, c'est à dire observés et renouvelés indépendamment les uns les autres, de nombreux types de politiques de renouvellement sont concevables, toutes optimales dans leur catégorie.

2.3.2.1 Remplacement préventif selon l'âge.

Cette politique prévoit le remplacement de l'élément, T unités de temps après sa mise en opération (son installation dans l'équipement), ou bien après sa panne selon lequel des événements a lieu le premier.

T est une constante positive préalablement spécifiée. Nous nous proposons de déterminer la "meilleure" valeur de T .



Dans ce cas, pour un certain intervalle donné, il est important de connaître la distribution du temps de panne, le temps moyen de remplacement préventif ainsi que celui de panne; cette information étant nécessaire pour comparer les différents régimes d'exécution des renouvellements préventifs d'une part, et d'autre part pour déterminer le nombre de composants à garder en stock pour une maintenance normale de l'équipement.

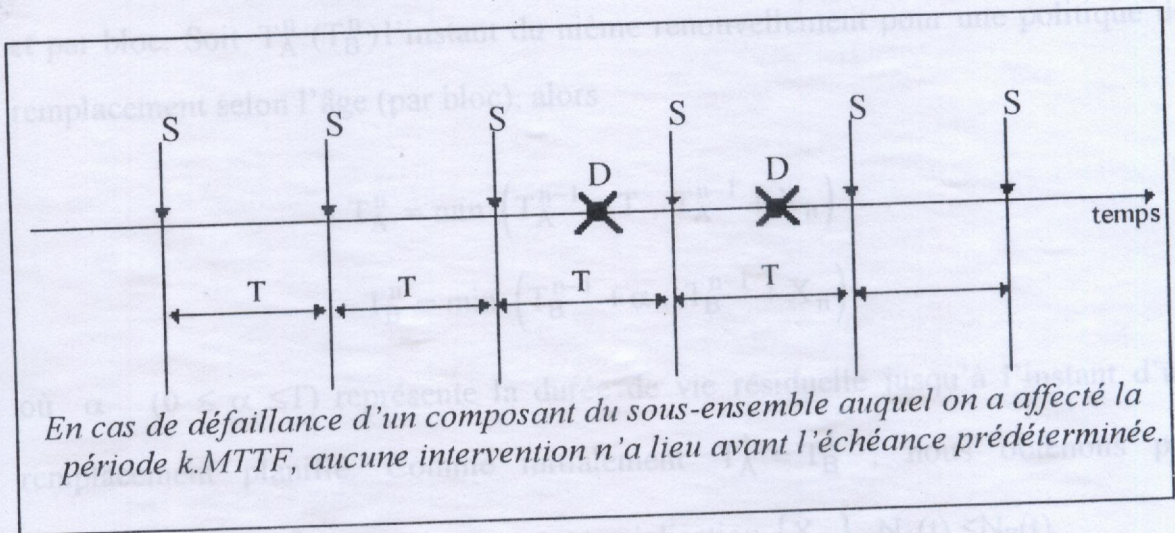
Dans la majorité des cas, différentes raisons nous laissent supposer que les avaries proviennent ou résultent de phénomènes d'usure (vieillesse, fatigue), d'où la nécessité de supposer la distribution du temps de panne **IFR**.

2.3.2.2 Remplacement préventif par blocs.

Dans cette situation, tous les éléments d'un type donné sont remplacés simultanément à la date $k.t$ ($k=1,2,\dots$) indépendamment de leur histoire (En plus des renouvellements au moment de l'avarie). E. L. Welber [65], R. F. Drenick [21] et B. J. Flehinger [22] furent parmi les premiers à étudier ces règles de remplacem.

De telles stratégies sont commodes en pratique, car dans ce cas là, tenir compte de la durée de vie courante de chaque élément n'est pas exigé. Cette politique est généralement utilisée pour l'exploitation de systèmes informatiques, électroniques, aéronautiques complexes,...

Il peut sembler à priori que l'on obtiendra des résultats moins bons que lorsque l'on effectue un remplacement à l'âge T puisque l'on néglige une partie de l'information. En fait, cela n'est pas certain. La comparaison entre les deux politiques est à faire dans chaque cas particulier.



2.3.3 Comparaison des deux politiques précitées.

Il est intéressant de comparer ces deux règles dans le cas où l'une ou l'autre utilise la même période T. Par exemple, les renouvellements par bloc sont liés à des coûts importants puisque comme il sera montré, on remplace un plus grand nombre d'éléments qu'il ne fallait pas substituer. D'autre part, le nombre total de remplacements préventifs ou d'avaries sont plus fréquents.

Cependant, on peut supposer que pour les éléments **IFR** le nombre moyen de pannes lors de remplacements par bloc est moindre.

En effet, on peut dans un intervalle de temps $[0, t]$ effectuer exactement $[t/T]$ remplacements préventifs et dans les mêmes conditions, le nombre de renouvellements selon l'âge peut être moindre.

$$\frac{\sum N_A(t)}{k} = M(T) \tag{2.1}$$

Théorème 2.4. [7] Si $N_A(t)$ représente le nombre de remplacements selon l'âge, $N_B(t)$ celui par bloc et que la période choisie dans les deux cas est T , alors :

$$P(N_A(t) \geq n) \leq P(N_B(t) \geq n) \quad \text{pour } n=0,1,2,\dots$$

Preuve. Soit $\{X_k\}_{k=1}^\infty$ une réalisation des durées de vie des éléments ayant réussi à fonctionner.

Étudions à présent ce qui se produit pour une politique de remplacement selon l'âge et par bloc. Soit T_A^n (T_B^n) l'instant du n ème renouvellement pour une politique de remplacement selon l'âge (par bloc), alors

$$T_A^n = \min (T_A^{n-1} + T, T_A^{n-1} + X_n)$$

$$T_B^n = \min (T_B^{n-1} + \alpha, T_B^{n-1} + X_n)$$

où α ($0 \leq \alpha \leq T$) représente la durée de vie résiduelle jusqu'à l'instant d'un remplacement planifié. Comme initialement $T_A^1 = T_B^1$, nous obtenons par récurrence $T_A^n \geq T_B^n$. Par suite pour toute réalisation $\{X_k\}$, $N_A(t) \leq N_B(t)$.

Théorème 2.5. [7] Si $N_B^*(t)$ désigne le nombre de pannes dans l'intervalle de temps $[0, t]$ pour une stratégie de remplacements par bloc, alors

$$P \left\{ \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{N_B^*(t)}{t} = \frac{M(T)}{T} \right\} = 1 .$$

Preuve. Si $N_{B_i}^*(T)$ représente le nombre de pannes dans l'intervalle de temps $[(i-1)T, iT]$, il est clair que les variables aléatoires $N_{B_i}^*(T)$ sont indépendantes et identiquement distribuées. D'après la loi des grands nombres,

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \frac{\sum_{i=1}^k N_{B_i}^*(T)}{k} = M(T) \tag{2.1}$$

Si $k.T \leq t < (k+1).T$, alors

$$\frac{\sum_{i=1}^k N_{B_i}^*(T)}{(k+1).T} \leq \frac{N_B^*(t)}{t} \leq \frac{\sum_{i=1}^{k+1} N_{B_i}^*(T)}{k.T}$$

ou encore

$$\frac{\sum_{i=1}^k N_{B_i}^*(T)}{k \cdot \frac{(k+1).T}{k}} \leq \frac{N_B^*(t)}{t} \leq \frac{\sum_{i=1}^{k+1} N_{B_i}^*(T)}{(k+1) \cdot \frac{k.T}{(k+1)}} \quad (2.2)$$

En passant à la limite et du fait que $t \rightarrow \infty$ lorsque $k \rightarrow \infty$, nous obtenons à partir de (2.1) et (2.2)

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{N_B^*(t)}{t} \stackrel{P.S}{=} M(T).$$

Remarque: On peut voir également que

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{E[N_B^*(t)]}{t} \stackrel{P.S}{=} M(T).$$

Pour obtenir le temps moyen entre pannes pour une politique de remplacements par bloc, nous montrerons le théorème suivant.

Théorème 2.6. [7]

Si $\{X_i\}$ désigne les intervalles entre pannes pour une politique de remplacements par bloc avec une période T , alors:

$$P \left\{ \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{X_1 + X_2 + \dots + X_{N_B^*(t)}}{N_B^*(t)} = \frac{T}{M(T)} \right\} = 1.$$

Preuve. Il suffit de voir que

$$\frac{X_1 + X_2 + \dots + X_{N_B^*(t)}}{N_B^*(t)} \leq \frac{t}{N_B^*(t)} \leq \frac{X_1 + X_2 + \dots + X_{N_B^*(t)+1}}{\frac{N_B^*(t)}{N_B^*(t)+1} \cdot (N_B^*(t)+1)}$$

Lorsque $t \rightarrow \infty$, le résultat est établi à partir du théorème 2.4.

Théorème 2.7. [7] Si F est **IFR (DFR)**, alors

$$P(N(t) \geq n) \geq P(N_A^*(t) \geq n) > P(N_B^*(t) \geq n)$$

où $N_A^*(t)$ désigne le nombre de pannes pour une politique selon l'âge.

Démonstration. Voir [7].

- Barlow & Hunter [6] ont introduit en premier la BRP basée sur des réparations mineures.
- Cox [18] et Crookes [19] considèrent une BRP tout en permettant une période d'inactivité.
- Bhar [11] suggère de remplacer un équipement en panne par un autre déjà utilisé.
- Tango [55] introduit une BRP où il remplace l'équipement défaillant par un neuf ou déjà utilisé lorsque la panne survient sur un intervalle de temps bien précis.
- Monimura [41] propose une stratégie où l'élément est remplacé à la $i^{\text{ème}}$ panne et des réparations mineures sont apportées aux $i-1$ premières pannes.
- Tilquin & Cleroux [56] étudient une BRP basée sur des réparations mineures et des coûts d'ajustement qui croissent avec l'âge de l'élément.
- Boland & Proshan [13] considèrent le cas où les frais occasionnés par les réparations mineures dépendent de l'ordre de la panne dans un cycle.

- Berg & Cleroux [10] considèrent une BRP où la décision de remplacer l'équipement ou d'effectuer des réparations mineures dépend du coût aléatoire de ces dernières.
- Nakagawa [43, 44] considère une BRP basée sur des réparations mineures et un remplacement de l'équipement hors service par un équipement déjà utilisé, ou (dans une autre politique) par un équipement neuf.
- Nakagawa [43] combine la réparation mineure et l'inactivité comme des actions correctives à la panne.

Dans ce chapitre, nous introduisons le modèle élaboré par Ait Cadi & Cleroux [2] qui est à la base de notre travail.

La politique de remplacement périodique (PRP) considérée, est celle où l'élément en opération est préventivement remplacé aux temps $k.T$, $k = 1, 2, \dots$ indépendamment de la nature de la panne ainsi que de l'âge et de l'état de l'élément. Cette politique, présente un intérêt particulier vu sa structure simple et la facilité de son utilisation.

A la panne, l'unité est soit remplacée par une nouvelle, soit subit des réparations mineures, ou reste inactive jusqu'à la prochaine action préventive. Cette stratégie fait partie des politiques de remplacement par bloc (BRP) définies au chapitre précédent (2.3.2.2). La notion de réparation mineure doit être comprise au sens de Barlow & Hunter [6]; (voir chapitre 4.1.3).

Après avoir établi le modèle mathématique de cette politique, nous identifierons les hypothèses du modèle général, définirons la fonction objective et pour terminer, des cas particuliers seront considérés.

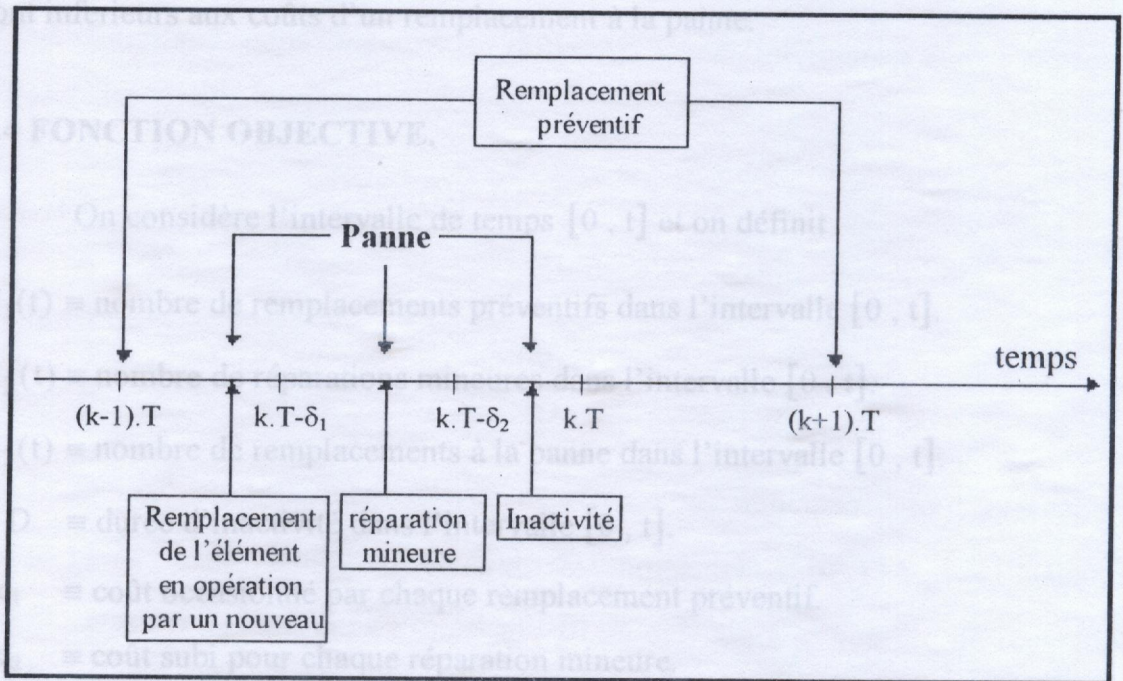
3.3 HYPOTHESES

3.2 MODELE MATHEMATIQUE DE LA STRATEGIE.

Nous considérons la stratégie de remplacement suivante.

- (i) Des remplacements préventifs par de nouveaux éléments sont planifiés aux temps kT ($k = 1, 2, \dots$) indépendamment de la nature de la panne.

- (ii) Si la panne survient dans l'intervalle $[(k-1).T, k.T-\delta_1)$ tel que $0 \leq \delta_1 \leq T < \infty$, l'élément est remplacé par un nouveau.
- (iii) Si la panne intervient dans l'intervalle $[k.T-\delta_1, k.T-\delta_2)$ tel que $0 \leq \delta_2 \leq \delta_1 \leq T < \infty$, des réparations mineures sont exécutées.
- (iv) Et si enfin la défaillance apparaît dans l'intervalle $[k.T-\delta_2, k.T)$, l'élément reste inactif jusqu'au prochain remplacement planifié au temps $k.T$.



Cette stratégie est appelée **PRNMRI** (*periodic replacement by new units, minimal repair or idle time*).

Les paramètres T, δ_1 et δ_2 sont inconnus, ils déterminent la stratégie de remplacement.

3.3 HYPOTHESES .

Nous adopterons les hypothèses suivantes.

- Les durées de vie successives sont i.i.d, où la distribution du temps de panne $F(.)$ est connue, ainsi que sa densité $f(.)$ et son taux de panne instantané $\lambda(.)$.
- Les pannes sont détectées instantanément.

- Les remplacements préventifs et ceux à la panne sont instantanément adaptés.
- Les remplacements n'affectent pas les caractéristiques des éléments.
- Des réparations mineures sont parfaitement menées dans le sens où $\lambda(.)$ reste invariant.
- Le nombre d'éléments destinés à effectuer les remplacements est suffisant pour éviter les pénuries.
- Les coûts ou frais de remplacement préventifs et ceux des réparations mineures sont inférieurs aux coûts d'un remplacement à la panne.

3.4 FONCTION OBJECTIVE.

On considère l'intervalle de temps $[0, t]$ et on définit

$N_1(t) \equiv$ nombre de remplacements préventifs dans l'intervalle $[0, t]$.

$N_2(t) \equiv$ nombre de réparations mineures dans l'intervalle $[0, t]$.

$N_3(t) \equiv$ nombre de remplacements à la panne dans l'intervalle $[0, t]$.

$D \equiv$ durée d'inactivité dans l'intervalle $[0, t]$.

$c_1 \equiv$ coût occasionné par chaque remplacement préventif.

$c_2 \equiv$ coût subi pour chaque réparation mineure.

$c_3 \equiv$ coût occasionné par chaque remplacement à la panne.

$c_4 \equiv$ coût subi par chaque unité de temps d'oisiveté.

La stratégie optimale $(T, \delta_1^*, \delta_2^*)$ est celle qui minimise le temps moyen d'exploitation par unité de temps au delà d'un horizon infini; soit la stratégie qui minimise

$$C(T, \delta_1, \delta_2) = \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{c_1 \cdot E[N_1(t)] + c_2 \cdot E[N_2(t)] + c_3 \cdot E[N_3(t)] + c_4 \cdot E[D]}{t} \quad (3.1)$$

A partir des résultats classiques de la théorie de renouvellement (théorèmes 2.3 et 2.5 chapitre 2), nous avons les estimations premières:

Ce résultat nous est donné par le lemme suivant.

Lemme 3.1. Si $N(t)$ représente le nombre de réparations mineures dans l'intervalle $[0, t]$ alors

$$E[N(t)] = \int_0^T \lambda(u) \cdot du .$$

Preuve. Pour établir ce résultat, remarquons que la probabilité d'occurrence d'au moins une panne dans l'intervalle $(u, u+h)$ est $h \cdot \lambda(u) + o(h)$ et que celle de deux pannes ou plus est $o(h)$. De là il résulte que le nombre de pannes $E[N(u+h)] - E[N(u)]$ dans l'intervalle $(u, u+h)$ est $\lambda(u) + o(h)$. ainsi, $E[N(t)] = E[N(h)] - E[N(0)] + E[N(2h)] - E[N(h)] + \dots + E[N(t)] - E[N(kh)]$; $k = [t/h]$.
Ce qui nous permet de conclure.

3.4.1.2 $\omega(T-\delta_1) < T-\delta_1$ et $\alpha > 0$.

A ce moment là, le renouvellement de l'élément s'opère entre α et $\alpha + d\alpha$ et l'élément installé à cette date survit jusqu'au temps $T - \delta_1$ avec une probabilité $1 - F(T - \delta_1 - \alpha) \cdot m(\alpha) \cdot d\alpha$. En effet ,

$$P(X > T - \delta_1 - t_{N(T-\delta_1)}) = P(X > T - \delta_1 - t_{N(T-\delta_1)} \cap N(T-\delta_1) = n),$$

avec $n \neq 0$, puisque $\alpha > 0$ et $N(T-\delta_1)$ représentent le nombre de renouvellements dans l'intervalle $[0, T-\delta_1]$; or:

$$P(X > T - \delta_1 - t_{N(T-\delta_1)}) = \sum_{n=1}^{\infty} P(X > T - \delta_1 - t_n) ;$$

soit:

$$P(X > T - \delta_1 - t_{N(T-\delta_1)}) = \sum_{n=1}^{\infty} \int_0^{T-\delta_1} P(\alpha < t_n < \alpha + d\alpha) \cdot P(X > T - \delta_1 - \alpha) .$$

De plus , $t_n = X_1 + X_2 + \dots + X_n \Rightarrow P(t_n \leq t) = F^{(n)}(t) = \int_0^t F^{(n-1)}(t-x) \cdot dF(x) .$

Ainsi,

$$P(X > T - \delta_1 - t_{N(T-\delta_1)}) = \sum_{n=1}^{\infty} \int_0^{T-\delta_1} \bar{F}(T-\delta_1-\alpha) \cdot dF^{(n)}(\alpha) = \int_0^{T-\delta_1} \bar{F}(T-\delta_1-\alpha) \cdot d\left(\sum_{n=1}^{\infty} F^{(n)}(\alpha)\right),$$

ou encore :

$$P(X > T - \delta_1 - T_{N(T-\delta_1)}) = \int_0^{T-\delta_1} \bar{F}(T-\delta_1-\alpha) \cdot m(\alpha) \cdot d\alpha.$$

D'après le lemme 3.1, le nombre moyen de réparations mineures dans l'intervalle $[T-\delta_1, T-\delta_2]$ pour un élément installé au temps α est égal à

$$\int_{T-\delta_1}^{T-\delta_2} \lambda(t-\alpha) \cdot dt \quad \text{où } 0 < \alpha < T-\delta_1.$$

Finalement, on obtient

$$G(T, \delta_1, \delta_2) = \bar{F}(T-\delta_1) \cdot \int_{T-\delta_1}^{T-\delta_2} \lambda(t) \cdot dt + \int_0^{T-\delta_1} \int_{T-\delta_1}^{T-\delta_2} \lambda(t-\alpha) \cdot \bar{F}(T-\delta_1-\alpha) \cdot m(\alpha) \cdot dt \cdot d\alpha \quad (3.5)$$

3.4.2 Estimation de $\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{E[D]}{t}$

Rappelons que $E[D]$ est le temps moyen d'inactivité pour un élément en panne dans l'intervalle de temps $[T-\delta_2, T]$. Si cette panne survient au temps z tel que, $T-\delta_2 \leq z < T$ alors ce temps d'oisiveté est égal à $T-z$. Nous aurons ainsi:

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{E[D]}{t} = \frac{I(T, \delta_1, \delta_2)}{T} \quad (3.6)$$

où,

$$I(T, \delta_1, \delta_2) = \int_{T-\delta_2}^T (T-z) \cdot q(z) \cdot dz \quad (3.7)$$

$q(z)$ désignant la probabilité conditionnelle d'une panne comprise entre z et $z+dz$ sachant que l'élément installé dans l'intervalle de temps $[0, T-\delta_1]$ est remplacé dans l'intervalle de temps $[T-\delta_1, T-\delta_2]$.

Pour obtenir une expression explicite de $q(z)$, deux situations encore sont à considérer.

3.4.2.1 La panne ne survient pas dans l'intervalle de temps $[0, T-\delta_1]$.

Ceci a lieu avec une probabilité $\bar{F}(T-\delta_1)$. Dans ce cas, l'élément installé au temps $t=0$ tombe en panne entre z et $z+dz$ où $T-\delta_2 \leq z \leq T$.

Ainsi, aucune réparation mineure pouvant être effectuée dans l'intervalle de temps $[T-\delta_1, T-\delta_2]$ ne peut affecter le taux de panne.

A partir de là, la probabilité conditionnelle d'une défaillance comprise entre z et $z+dz$ et citée plus haut est donnée par

$$\frac{f(z).dz}{1 - F(T-\delta_2) + F(T-\delta_1)}$$

qui représente tout simplement la probabilité de panne entre z et $z+dz$ sachant qu'il n'y a pas eu de panne entre $T-\delta_1$ et $T-\delta_2$.

3.4.2.2 La dernière panne survient dans l'intervalle de temps $[0, T-\delta_1]$.

Dans ce cas, l'élément installé au temps y , temps de la dernière panne sur l'intervalle $[0, T-\delta_1]$ et survit jusqu'au temps $T-\delta_1$ avec une probabilité $\bar{F}(T-\delta_1-y).m(y).dy$. Ainsi, comme précédemment, la probabilité conditionnelle que l'élément installé au temps y tombe en panne entre z et $z+dz$ sachant qu'il n'est pas remplacé dans l'intervalle de temps $[T-\delta_1, T-\delta_2]$ est donnée par

$$\frac{f(z-y).dz}{1 - F(T-\delta_2-y) + F(T-\delta_1-y)}$$

A partir de ces résultats,

$$I(T, \delta_1, \delta_2) = \frac{\bar{F}(T - \delta_1)}{1 - F(T - \delta_2) + F(T - \delta_1)} \cdot \int_{T - \delta_2}^T (T - z) \cdot f(z) \cdot dz$$

• Cas C: $\delta_1 = T, \delta_2 = 0$.

$$+ \int_0^{T - \delta_1} \int_{T - \delta_2}^{T - \delta_1} \frac{(T - z) \cdot m(y) \cdot \bar{F}(T - \delta_1 - y) \cdot f(z - y)}{1 - F(T - \delta_2 - y) + F(T - \delta_1 - y)} \cdot dz \cdot dy \quad (3.8)$$

Le problème revient donc à minimiser

$$C(t, \delta_1, \delta_2) = \frac{c_1 + c_2 \cdot G(T, \delta_1, \delta_2) + c_3 \cdot M(T - \delta_1) + c_4 \cdot I(T, \delta_1, \delta_2)}{T} \quad (3.9)$$

avec $\delta_1 \geq 0, \delta_2 \geq 0, 0 \leq T < \infty, T - \delta_1 \geq 0, \delta_1 - \delta_2 \geq 0$ et où $G(T, \delta_1, \delta_2)$ est donnée par (3.5) et $I(T, \delta_1, \delta_2)$ par (3.8).

3.5 Cas particuliers.

• Cas A: $\delta_1 = \delta_2 = 0$.

A partir de (3.5) et (3.7) nous obtenons ; $I(T, 0, 0) = G(T, 0, 0) = 0$ et (3.9) devient

$$C(T, 0, 0) = \frac{c_1 + c_3 \cdot M(T)}{T}$$

Ceci correspond à la fonction-coût du modèle de remplacement classique étudié par Barlow & Hunter [6].

• Cas B: $\delta_1 = \delta_2 = T$.

A partir de (4.3), (4.5), (4.8) et (4.9), nous obtenons

$$C(T, T, T) = \frac{c_1 + c_4 \cdot \int_0^T (T - z) \cdot f(z) \cdot dz}{T}$$

Dans ce modèle, les remplacements préventifs sont planifiés aux instants $k.T$, $k=1,2,\dots$ et si la panne survient, le système reste inactif jusqu'au prochain remplacement. Ce modèle correspond à celui élaboré par T. Nakagawa [43].

- Cas C: $\delta_1 = T, \delta_2 = 0$.

A partir de (3.3), (3.5) et (3.7), (3.9) devient

$$C(T, T, 0) = \frac{c_1 + c_2 \cdot \int_0^T \lambda(t) \cdot dt}{T}$$

Nous reconnaissons ici la fonction-coût du modèle de remplacement périodique avec réparations mineures à la panne introduit par Barlow & Hunter [6].

- Cas D: $\delta_2 = 0$ et $0 < \delta_1 < T$.

A partir de (4.5) et (4.7), (4.9) devient:

$$C(T, \delta_1, 0) = \frac{1}{T} \cdot \left\{ c_1 + c_3 \cdot M(T - \delta_1) + c_2 \cdot \bar{F}(T - \delta_1) \cdot \int_{T - \delta_1}^T \lambda(t) \cdot dt + c_2 \cdot \int_0^{T - \delta_1} \int_{T - \delta_1}^T \lambda(t - \alpha) \cdot \bar{F}(T - \delta_1 - \alpha) \cdot m(\alpha) \cdot dt \cdot d\alpha \right\}$$

Dans cette situation, l'élément est préventivement remplacé aux instants $k.T$, $k=1,2,\dots$. Il est remplacé si la panne survient dans l'intervalle de temps $[(k-1).T, k.T - \delta_1)$ et il subit des réparations mineures si la défaillance apparaît dans l'intervalle de temps $[k.T - \delta_1, k.T]$. C'est le modèle introduit par Nakagawa [43] et (5.4) est la fonction-coût correspondant à ce modèle.

- Cas E: $\delta_1 = T$ et $\delta_2 < \delta_1$.

En substituant $\delta_1 = T$ dans (3.3), (3.5) et (3.8), (3.9) s'écrit

$$C(T, T, \delta_2) = \frac{1}{T} \cdot \left\{ c_1 + c_2 \cdot \int_0^T \lambda(t) \cdot dt + \frac{c_4}{F(T - \delta_2)} \cdot \int_{T - \delta_2}^T (T - z) \cdot f(z) \cdot dz \right\}$$

On considère un équipement susceptible d'accomplir sa fonction même lorsque Cette fonction coût correspond au modèle introduit par Nakagawa [43]. Dans ce cas, l'élément est préventivement remplacé aux instants $k.T$, $k=1,2,\dots$. Si la panne survient dans l'intervalle de temps $[(k-1).T, k.T - \delta_2)$ il subit des réparations mineures, par contre si cette défaillance intervient dans l'intervalle de temps $[k.T - \delta_2, k.T)$, une période d'inactivité suit jusqu'à élaboration d'un nouveau remplacement.

- Cas F: $\delta_1 = \delta_2 < T < \infty$.

Il est aisé de voir dans ce cas que (3.5) se réduit à zéro; à partir de (3.8), (3.9) aura pour expression

$$C(T, \delta_1, \delta_1) = \frac{1}{T} \cdot \left\{ c_1 + c_3 \cdot M(T - \delta_1) + c_4 \cdot \int_{T - \delta_1}^T (T - z) \cdot f(z) \cdot dz + c_4 \cdot \int_{T - \delta_1}^T \int_0^{T - \delta_1} (T - z) \cdot m(y) \cdot f(z - y) \cdot dy \cdot dz \right\},$$

qui représente la fonction coût obtenue par Blanning [12] relative à la politique de remplacement qui consiste à remplacer préventivement l'article par un nouveau aux temps $k.T$, de remplacer l'élément à la panne par un nouveau si la défaillance survient dans l'intervalle de temps $[(k-1).T, k.T - \delta_1)$ et de supposer le système inactif jusqu'à $k.T$ si la panne survient dans l'intervalle de temps $[k.T - \delta_1, k.T)$ pour $k=1,2,\dots$ comme suit.

- La détermination du nombre d'éléments redondants le plus économique sous des conditions concurrentes de haute fiabilité en termes de facilité d'entretien et de réparation.
- La détermination du temps optimal de remplacement ou du nombre optimal de réparation.

MAINTENANCE DE SYSTEMES REDONDANTS

On considère un équipement susceptible d'accomplir sa fonction même lorsque certains de ses constituants sont avariés, c'est à dire un équipement possédant au moins une possibilité de redondance que celle ci soit matérielle ou logicielle.

Il est important en pratique pour ce système, de considérer une politique de remplacement par blocs où ce système est remplacé aux instants $k.T$ et en cas de panne. En effet, en l'absence de maintenance préventive, les modes de fonctionnement en redondance s'épuisent au fur et à mesure des défaillances jusqu'à arrêt de l'équipement.

4.1 OPTIMISATION D'UN SYSTEME PARALLELE.

4.1.1 Introduction.

L'amélioration de la fiabilité d'un équipement peut être réalisée au stade de la conception, moyennant un procédé de redondance qui consiste à faire fonctionner en parallèle des éléments statistiquement identiques.

En cours d'exploitation, lorsque la distribution de la durée de vie est IFR, la fiabilité peut être améliorée en planifiant des actions de maintenance préventive à des intervalles périodiques $T, 2T, \dots k.T$.

Barlow & Proschan [7] montrent à partir d'un graphe, que le système peut opérer pour une durée moyenne spécifiée, soit en changeant le temps de remplacement, soit en faisant croître le nombre d'éléments.

Les problèmes fondamentaux de remplacement ou d'entretien rencontrés actuellement dans la littérature concernant les systèmes parallèles peuvent être énumérés comme suit.

- La détermination du nombre d'éléments redondants le plus économique sous des conditions concurrentes de haute fiabilité en termes de facilité d'entretien et de réparation.
- La détermination du temps optimal de remplacement ou du nombre optimal de réparation.

- Nakagawa [42] considère un tel système dans un environnement aléatoire. Il étudie le problème de remplacement, lorsque chaque élément tombe en panne suite à un choc; l'équipement étant renouvelé préventivement avant la panne si le nombre total d'éléments défectueux est $k, k+1, \dots, N-1$.
 - Nakagawa [45] s'intéresse dans un premier temps au nombre N^* d'éléments le plus économique. Il poursuit ses travaux et obtient pour un système remplacé au temps T ou à la panne, le couple optimal (N^*, T^*) .
 - K. Yasui & T. Nakagawa [66] déterminent le temps optimum de remplacement, lorsque le système est: (i) remplacé à la panne ou à la date T ; (ii) seulement au temps T . Ils obtiennent également le nombre optimum d'éléments constituant le système, lorsque celui ci est: (iii) remplacé à la panne ou à la date $(j+1).T$; (iv) uniquement à la date $(j+1).T$, sous la condition que le nombre d'éléments défectueux dépasse un nombre préfixé à la date $(j+1).T$.
 - Venugopal & Al [57] obtiennent le nombre optimal d'éléments redondants sous la condition que le système subit tout au plus un nombre préfixé de réparations avant d'être remplacé. Ils poursuivent leurs travaux dans l'article [58] en supposant cette fois ci que le nombre préfixé de réparations est aussi une variable aléatoire et obtiennent la paire optimale (N^*, n^*) , où n désigne le nombre de réparations.
- Dans de tels modèles et beaucoup d'autres encore, ne sont pris en compte que les défaillances aléatoires des constituants ; par exemple des composants qui tombent en panne indépendamment l'un de l'autre. Cependant, dans les situations réelles, une telle hypothèse est plutôt idéaliste. En effet, les systèmes sont parfois affectés par des facteurs liés directement au milieu expérimental (erreurs humaines et autres). De même, les composants de même type, soumis à l'entretien, peuvent présenter des variations de source électrique ordinaire (électricité, air,...). ainsi, les défaillances de cause commune ou usuelle (CCF) doivent être prises en considération dans l'étude des problèmes de remplacement des systèmes complexes. Apostolakis [3] et Bank [5] analysent l'effet des CCF sur la fiabilité d'un système parallèle. Yun & Bai [67] déterminent le nombre optimal d'éléments redondants d'un système parallèle sujet à des CCF. Lai et Yuan [35] obtiennent pour un tel

système le couple (N^*, n^*) , (n désignant le nombre de réparations) lorsque les temps de réparation constituent un processus géométrique non décroissant.

Comme il a été souligné précédemment, il est important en pratique de considérer une BRP où l'élément est remplacé aux instants $k.T$ ($k=1,2,\dots$) et en panne.

Dans notre travail, nous proposons deux politiques de remplacement par bloc dans lesquelles le système est remplacé aux temps $k.T$, ou s'il tombe en panne: (i) subit une réparation mineure; (ii) demeure en panne.

Nous développons d'abord une procédure pour obtenir le nombre optimal N^* d'éléments redondants pour T fixé, qui conduit au coût d'exploitation optimal. Ensuite, d'une manière similaire, nous évaluons le temps de remplacement optimal T^* pour N fixé minimisant ce même coût d'exploitation. En combinant ces deux procédures, nous développons un algorithme pour obtenir la paire optimale (N^*, T^*) minimisant l'espérance des coûts unitaire pour un horizon infini. Cet aspect sera illustré numériquement lorsque le temps de panne suit une loi gamma d'ordre 2 ou une loi exponentielle.

4.1.2 Le Modèle.

Considérons un système parallèle constitué par un nombre quelconque N d'éléments statistiquement identiques caractérisés chacun par un taux de panne $\lambda(.)$ croissant. Ces éléments sont redondants au sens où le système fonctionne si et seulement si l'un au moins de ses éléments fonctionne.

Les éléments destinés à servir de "relais" sont supposés ne pas vieillir lorsqu'ils sont en attente et la fiabilité de leur dispositif de mise en action est supposée égale à 1.

De plus, ce système est pourvu de facilité de réparation au sens où son MTTF reste le même après chaque réparation.

Pour ce système, on définit la probabilité de survie entre 0 et t ; t étant fixé, instant compté à partir d'une origine où l'élément fonctionne effectivement.

$$R_S(t) = 1 - F_S(t) = 1 - F^N(t),$$

où $F(t)$ représente la fonction de panne d'un élément de ce système et N le nombre de ses éléments.

Le taux de panne d'un tel système est alors

$$\lambda(N, t) = - \frac{R'_S(t)}{R_S(t)}$$

$R'_S(t)$ est conformément aux notations usuelles la dérivée de $R_S(t)$ par rapport à t .

La question qui se pose à nous maintenant est la suivante:

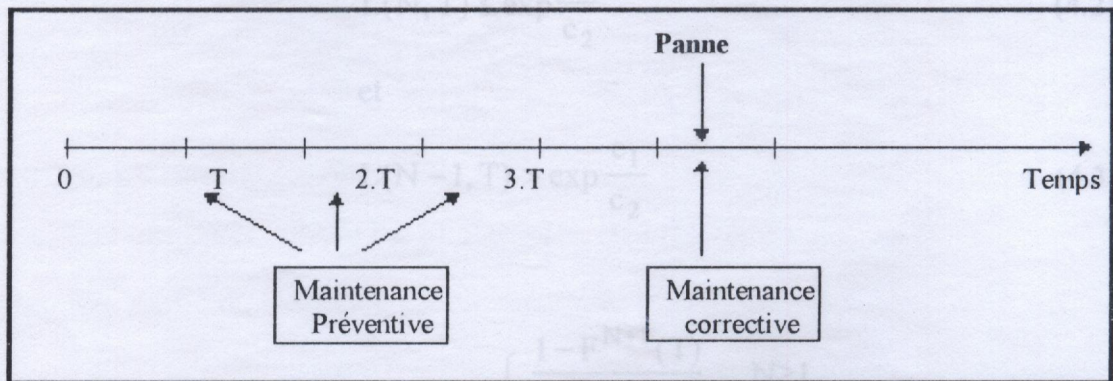
Quels seraient le temps d'intervention T^* et le nombre N^* d'éléments pour que le coût moyen d'exploitation par unité de temps pour un horizon infini soit optimal.

4.1.3 Politique A. Maintenance préventive aux dates $T, 2.T, \dots$

Maintenance corrective mineure en cas de panne.

Définition. Une maintenance corrective à la date t est mineure si la durée de vie X de l'élément coïncide (en distribution) avec la durée de vie résiduelle, soit:

$$P(X < x) = \frac{P(X < x+t) - P(X < t)}{P(X > t)}, \quad x \geq 0, t \geq 0.$$



Cette stratégie correspond à celle élaborée par Ait kadi et Cléroux [2] dans le cas particulier $\delta_1=T, \delta_2=0$. Ce modèle a été introduit par Barlow & [6] dans le cas $N=1$.

L'espérance des coûts unitaires pour un horizon infini a pour expression:

$$C(N, T) = \frac{N \cdot c_1 + c_2 \cdot \int_0^T \lambda(N, t) \cdot dt}{T} \tag{4.1}$$

où c_2 désigne les frais occasionnés par l'avarie du système. Cette dépense qui est difficile à évaluer, est composée d'une part, du manque à gagner entraîné par l'interruption du service et d'autre part du coût des dégâts causés par l'avarie; c_1 est le coût du remplacement préventif d'un élément. Ce coût est par contre bien connu et ne ménage pas de surprise. Dans ces conditions, on conçoit que les dépenses dues à un remplacement préventif, soient inférieures à celles d'un remplacement consécutif à une panne.

4.1.3.1 Nombre optimal.

Théorème 4.1. Pour T fixé, le nombre N^* minimisant la fonction "objective" $C(N, T)$ donnée en (4.1) satisfait la paire d'inéquations

$$L(N, T) \leq \exp \frac{c_1}{c_2} \tag{4.2}$$

et

$$L(N-1, T) > \exp \frac{c_1}{c_2} \tag{4.3}$$

où:

$$L(N, T) = \begin{cases} \frac{1 - F^{N+1}(T)}{1 - F^N(T)} & N \geq 1 \\ \infty & N = 0 \end{cases} \tag{4.4}$$

De plus N^* est fini et unique.

Preuve. Puisque N est une variable discrète, la valeur N minimisant $C(N, T)$ donnée en (4.1) doit vérifier

$$\left\{ \begin{array}{l} C(N+1, T) \geq C(N, T) \end{array} \right. \quad (4.5)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{et} \\ C(N-1, T) > C(N, T) \end{array} \right. \quad (4.6).$$

En substituant l'équation (4.1) dans (4.5), nous obtenons

$$(N+1) \cdot c_1 + c_2 \cdot \int_0^T \lambda(N+1, t) \cdot dt \geq N \cdot c_1 + c_2 \cdot \int_0^T \lambda(N, t) \cdot dt ,$$

soit après simplification ,

$$\int_0^T (\lambda(N, t) - \lambda(N+1, t)) \cdot dt \leq \frac{c_1}{c_2} .$$

Comme , $\int_0^T \lambda(N, t) \cdot dt = -\log(1-F^N(T))$, nous obtenons finalement

$$L(N, T) \leq \exp \frac{c_1}{c_2} .$$

En remplaçant l'équation (4.1) dans (4.6) et en procédant de la même manière nous montrons que:

$$L(N-1, T) > \exp \frac{c_1}{c_2} .$$

Remarque: Ce résultat est réaliste du fait que:

$$c_2 > c_1 \quad \text{et que} \quad \forall N \geq 1 , \forall T \in]0 , +\infty[\quad 1 < L(N, T) < 2 .$$

La première partie du théorème est ainsi établie.

Pour prouver la seconde partie, remarquons tout d'abord que:

$$\lim_{N \rightarrow \infty} L(N, T) = 1$$

et montrons que $\{L(N, T)\}_{N \geq 0}$ est strictement décroissante en N. Pour cela, étudions le signe de $L(N+1, T) - L(N, T)$.

En utilisant (4.4), on vérifie que pour $N \geq 1$,

$$L(N+1, T) - L(N, T) = -\frac{F^N(T)(1-F(T))^2}{(1-F^N(T))(1-F^{N+1}(T))} < 0.$$

Ainsi lorsque N parcourt \mathbb{N} $L(N, T)$ prend des valeurs de ∞ à 1; et comme $\exp \frac{c_1}{c_2} > 1$, $L(N, T)$ atteint la valeur $\exp \frac{c_1}{c_2}$ une seule fois.

La démonstration du théorème est ainsi terminée.

4.1.3.2 Temps optimal.

Lemme 4.1. Si F est de classe **IFR**, alors F^N est aussi de classe **IFR**.

Démonstration. $\lambda(N, t)$ et $\lambda(t)$ étant des fonctions différentiables en t , pour prouver ce résultat, il suffit de montrer que :

$$\frac{d\lambda(N, t)}{dt} > 0, \quad \forall t > 0.$$

Puisque $\lambda(N, t) = \frac{N \cdot \lambda(t) \cdot F^{N-1}(t)}{\sum_{i=0}^{N-1} F^i(t)}$, on obtient après quelques artifices de calcul

$$\frac{d\lambda(N, t)}{dt} = \frac{N \cdot \frac{d\lambda(t)}{dt} \cdot F^{N-1}(t) \cdot \sum_{i=0}^{N-1} F^i(t) + N \cdot \lambda^2(t) \cdot \bar{F}(t) \cdot F^{N-2}(t) \cdot \sum_{i=0}^{N-1} F^i(t) \cdot (N-1-i)}{\left(\sum_{i=0}^{N-1} F^i(t)\right)^2}$$

Comme F est de classe **IFR** et $0 \leq i \leq N-1$, nous déduisons que:

$$\frac{d\lambda(N, t)}{dt} > 0 \Rightarrow F^N \text{ est de classe IFR.}$$

Théorème 4.2. Pour N fixé, le temps T^* minimisant la fonction "objective $C(N, T)$ donnée en (4.1) satisfait l'équation

$$H(N, T) = \frac{N \cdot c_1}{c_2} \tag{4.7}$$

où

$$H(N, T) = T \cdot \lambda(N, T) - \int_0^T \lambda(N, t) \cdot dt \tag{4.8}$$

Si de plus, il existe un intervalle $[a, b)$ pour lequel $\lambda(N, t)$ est continue et non bornée, alors la solution satisfaisant (4.7) existe et est unique.

Démonstration. Pour N fixé, la condition d'extremum par rapport à la variable T positive s'écrit

$$\frac{dC(N, T)}{dT} = 0 \tag{4.9}$$

En remplaçant l'équation (4.1) dans (4.9) nous obtenons

$$\frac{T \cdot c_2 \cdot \lambda(N, T) - N \cdot c_1 - c_2 \cdot \int_0^T \lambda(N, t) \cdot dt}{T} = 0$$

ce qui est équivalent à

$$T \cdot \lambda(N, T) - \int_0^T \lambda(N, t) \cdot dt = \frac{N \cdot c_1}{c_2}$$

Conséquences.

Voyons maintenant si (4.7) possède une solution en T .

La fonction $H(N, \cdot)$ est continue sur l'intervalle $[0, +\infty[$ et vérifie $H(N, 0) = 0$.

Soit $H(N, T_i)$ une suite vérifiant $0 < T_1 < T_2 < \dots$, $\lambda(N, T_i) \geq \lambda(N, T)$ pour $T \leq T_i$, $i=1, 2, \dots$ et $\lim_{i \rightarrow +\infty} \lambda(N, T_i) = +\infty$. Une telle suite existe du fait que $\lambda(N, \cdot)$ n'est pas bornée pour

toute valeur de t .

Remarquons que: $H(N, T_i) = \int_0^{T_i} g(t) \cdot dt$,

où , $g(t) = \lambda(N, T_i) - \lambda(N, t) \tag{4.10}$

Puisque g est une fonction positive, alors pour $T_i > T_1$, $i=1,2,\dots$

$$\int_0^{T_i} g(t) \cdot dt \geq \int_0^{T_1} g(t) \cdot dt. \quad (4.11)$$

En substituant (4.10) dans (4.11), on aura:

$$\int_0^{T_i} \{\lambda(N, T_i) - \lambda(N, t)\} \cdot dt \geq \int_0^{T_1} \{\lambda(N, T_i) - \lambda(N, t)\} \cdot dt,$$

soit:

$$H(N, T_i) \geq T_1 \cdot \lambda(N, T_i) + \log(1 - F^N(T_1)).$$

A partir de là, on déduit que $H(N, T_i) \rightarrow +\infty$ quand $i \rightarrow +\infty$. Ainsi, lorsque T parcourt \mathcal{R}^* , $H(N, T)$ prend des valeurs de 0 à $+\infty$.

De plus $H(N, \cdot)$ est dérivable et sa fonction dérivée vaut:

$$\frac{dH(N, T)}{dT} = T \cdot \frac{d\lambda(N, T)}{dT} \quad (4.12).$$

Puisque l'expression (4.12) est tout le temps positive ou nulle du fait que F^N est IFR, on en déduit que $H(N, T)$ est une fonction non décroissante.

Conséquences.

$H(N, T) \rightarrow +\infty$ quand $T \rightarrow +\infty$ et par suite, $H(N, T)$ croise une seule fois la valeur $\frac{N \cdot c_1}{c_2}$.

L'existence d'une limite de fonctionnement T^* est donc possible.

Remarque 4.1. Si par contre $\lambda(N, t)$ est bornée, alors dans ce cas l'existence d'une limite de fonctionnement devient possible si $\int_0^{\infty} t \cdot d\lambda(N, t) > \frac{N \cdot c_1}{c_2}$.

Remarque 4.2. Si la solution (7) existe, elle doit garantir le minimum pour $C(N, T)$ car lorsque $T \rightarrow 0$, $C(N, T) \rightarrow +\infty$.

Le coût résultant est alors

$$C(N^*, T^*) = c_2 \cdot \lambda(N^*, T^*).$$

A partir de ces résultats, nous devons résoudre des équations à deux variables pour calculer T^* et N^* . Ceci pourrait être difficile du fait que l'une des variables est continue alors que l'autre est discrète.

Pour estimer la paire optimale (N^*, T^*) , nous développerons l'algorithme de calcul itératif suivant basé sur les théorèmes (4.1) et (4.2).

Algorithme A.

Etape 1. Poser $N_1=1$, puis calculer T_1 (si il existe) satisfaisant l'égalité (4.7). La solution est unique en vertu du théorème 4.2.

Etape 2. Poser $T=T_1$, puis calculer N_2 satisfaisant les inégalités (4.2) et (4.3). La solution est unique en vertu du théorème 4.1.

Etape 3. Poser $N=N_2$, puis calculer de nouveau T_2 (si il existe) satisfaisant l'égalité (4.7).

Etape 4. Continuer jusqu'à ce que $N_J = N_{J+1}$, où J représente la $J^{\text{ème}}$ itération et à cette étape-ci, (N^*, T^*) est la paire optimale.

Etape 5. A l'étape 1, si T_1 n'existe pas, alors poser $N_1=2$; si de nouveau T_1 (pour $N_1=2$) n'existe pas, poser $N_1=3$ à l'étape 1 ; et ainsi de suite. Pour continuer suivre les étapes 1...4 décrites ci dessus.

Ainsi, quand finalement les itérations s'arrêtent, le couple (N^*, T^*) représente la paire optimale (dans notre conception) pour la fonction objective.

Cette procédure de calcul est commode, pratique et aussi rapide; ce qui est nécessaire pour assurer une maintenance du système redondant.

Organigramme A.

- Procédure $A(T_{N_j})$: Calculer T_{N_j} vérifiant

$$T_{N_j} \cdot \lambda(N_j, T_{N_j}) + \text{LN} [1 - F^{N_j}(T_{N_j})] > \frac{c_1}{c_2}$$

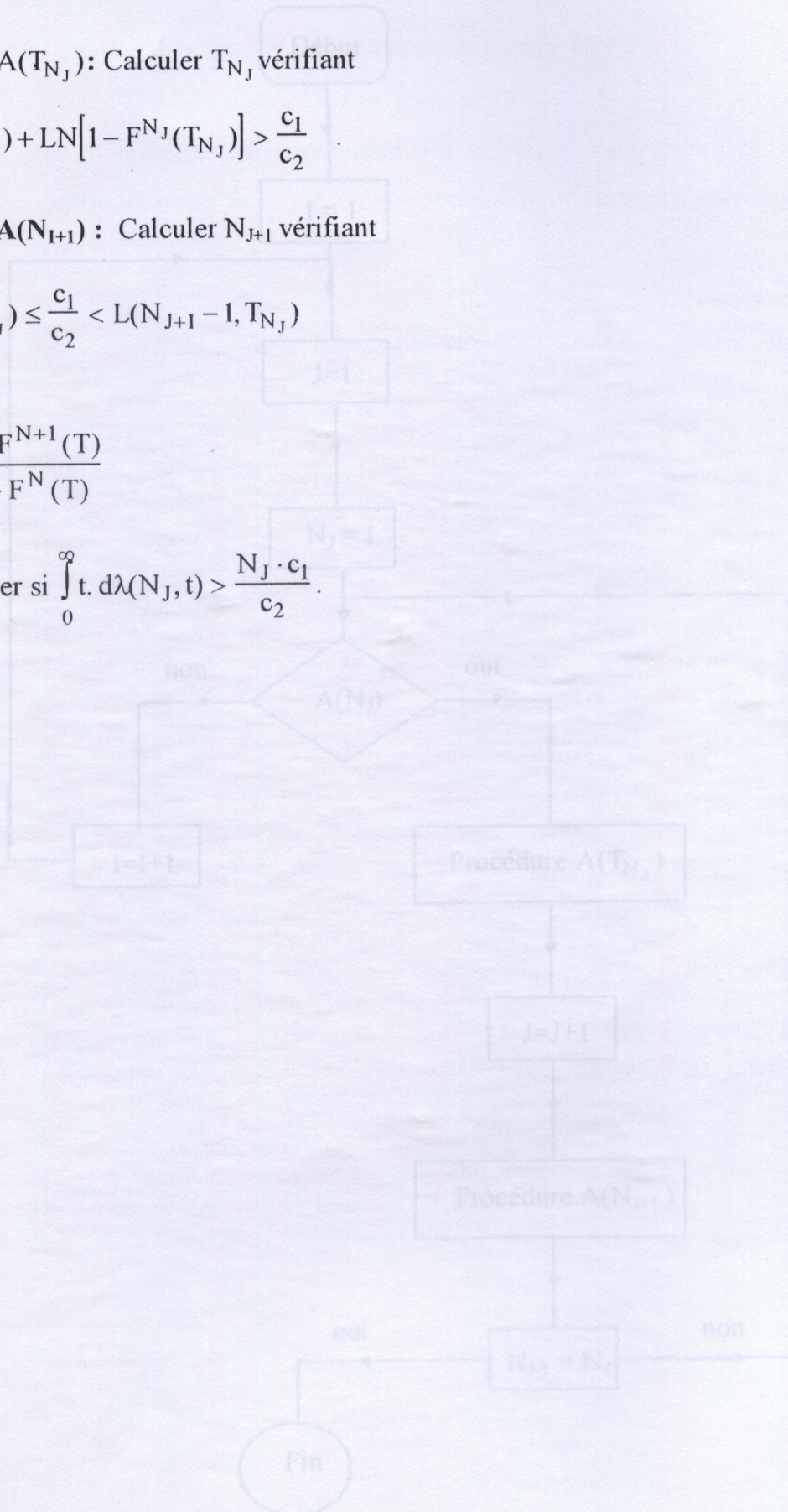
- Procédure $A(N_{j+1})$: Calculer N_{j+1} vérifiant

$$L(N_{j+1} + 1, T_{N_j}) \leq \frac{c_1}{c_2} < L(N_{j+1} - 1, T_{N_j})$$

où ,

$$L(N, T) = \frac{1 - F^{N+1}(T)}{1 - F^N(T)}$$

- $A(N_j)$: Tester si $\int_0^{\infty} t \cdot d\lambda(N_j, t) > \frac{N_j \cdot c_1}{c_2}$.



Résultats numériques et discussions.

Le problème est résolu lorsque la distribution du temps de panne d'un élément du système est une loi gamma d'ordre λ et de paramètre λ , c'est à dire:

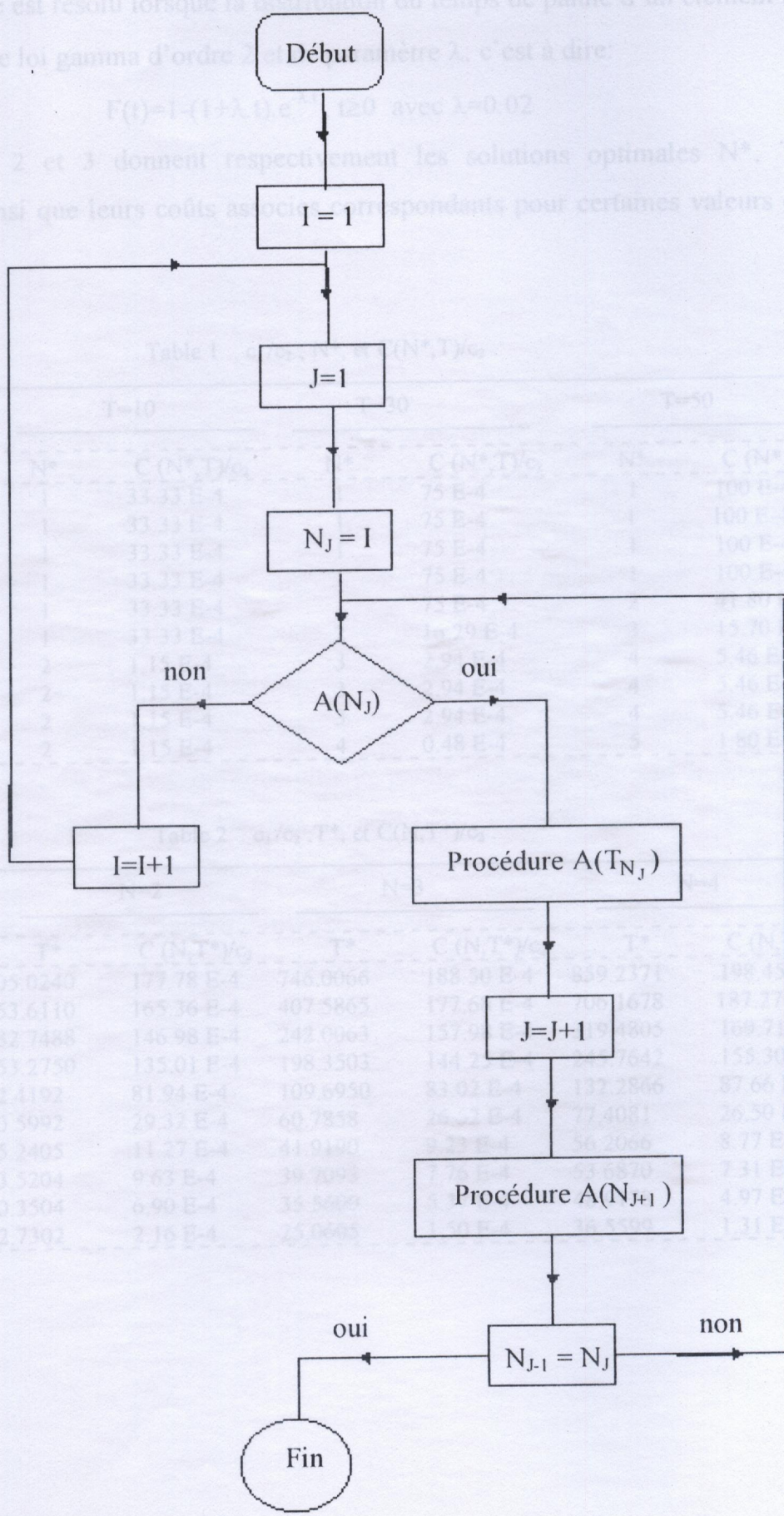
$$F(t) = 1 - (1 + \lambda t) e^{-\lambda t} \quad t \geq 0 \text{ avec } \lambda = 0.02$$

Les tables 1, 2 et 3 donnent respectivement les solutions optimales N^* , T^* et (N^*, T^*) ainsi que leurs coûts associés correspondants pour certaines valeurs du

Table 1

| c_1/c_2 | $T=10$ | | $T=50$ | |
|-----------|--------|-------------|--------|-------------|
| | N^* | $C(N^*, T)$ | N^* | $C(N^*, T)$ |
| 1 | 1 | 33.33 E-4 | 1 | 100 E-4 |
| 0.8 | 1 | 33.33 E-4 | 1 | 100 E-4 |
| 0.6 | 1 | 33.33 E-4 | 1 | 100 E-4 |
| 0.5 | 1 | 33.33 E-4 | 1 | 100 E-4 |
| 0.2 | 1 | 33.33 E-4 | 1 | 100 E-4 |
| 0.04 | 1 | 33.33 E-4 | 1 | 100 E-4 |
| 0.01 | 2 | 15 E-4 | 2 | 15.70 E-4 |
| 0.008 | 2 | 15 E-4 | 2 | 14.46 E-4 |
| 0.005 | 2 | 15 E-4 | 2 | 14.46 E-4 |
| 0.001 | 2 | 15 E-4 | 2 | 15.02 E-4 |

| c_1/c_2 | $T=10$ | | $T=50$ | |
|-----------|----------|-------------|----------|-------------|
| | T^* | $C(N^*, T)$ | T^* | $C(N^*, T)$ |
| 1 | 405.0240 | 177.78 E-4 | 746.0066 | 188.90 E-4 |
| 0.8 | 263.6110 | 165.36 E-4 | 407.5865 | 177.6 E-4 |
| 0.6 | 182.7488 | 146.98 E-4 | 242.0963 | 157.9 E-4 |
| 0.5 | 153.2750 | 135.01 E-4 | 198.3503 | 144.2 E-4 |
| 0.2 | 82.4192 | 81.94 E-4 | 109.6950 | 83.02 E-4 |
| 0.04 | 40.5992 | 29.37 E-4 | 60.7858 | 26.2 E-4 |
| 0.01 | 25.2405 | 11.27 E-4 | 41.9400 | 8.78 E-4 |
| 0.008 | 23.5204 | 9.83 E-4 | 39.7093 | 7.74081 E-4 |
| 0.005 | 20.3504 | 6.90 E-4 | 35.5009 | 7.31 E-4 |
| 0.001 | 12.7302 | 2.76 E-4 | 25.0605 | 1.50 E-4 |



- Résultats numériques et discussions.

Ici le problème est résolu lorsque la distribution du temps de panne d'un élément du système est une loi gamma d'ordre 2 et de paramètre λ ; c'est à dire:

$$F(t) = 1 - (1 + \lambda.t).e^{-\lambda.t}, t \geq 0 \text{ avec } \lambda = 0.02$$

Les tables 1, 2 et 3 donnent respectivement les solutions optimales N^* , T^* et (N^*, T^*) ainsi que leurs coûts associés correspondants pour certaines valeurs du

rapport $\frac{c_1}{c_2}$.

Table 1 . c_1/c_2 , N^* , et $C(N^*, T)/c_2$.

| $c=c_1/c_2$ | T=10 | | T=30 | | T=50 | |
|-------------|-------|-----------------|-------|-----------------|-------|-----------------|
| | N^* | $C(N^*, T)/c_2$ | N^* | $C(N^*, T)/c_2$ | N^* | $C(N^*, T)/c_2$ |
| 1 | 1 | 33.33 E-4 | 1 | 75 E-4 | 1 | 100 E-4 |
| 0.8 | 1 | 33.33 E-4 | 1 | 75 E-4 | 1 | 100 E-4 |
| 0.6 | 1 | 33.33 E-4 | 1 | 75 E-4 | 1 | 100 E-4 |
| 0.5 | 1 | 33.33 E-4 | 1 | 75 E-4 | 1 | 100 E-4 |
| 0.2 | 1 | 33.33 E-4 | 1 | 75 E-4 | 2 | 41.80 E-4 |
| 0.04 | 1 | 33.33 E-4 | 2 | 16.29 E-4 | 3 | 15.70 E-4 |
| 0.01 | 2 | 1.15 E-4 | 3 | 2.94 E-4 | 4 | 5.46 E-4 |
| 0.008 | 2 | 1.15 E-4 | 3 | 2.94 E-4 | 4 | 5.46 E-4 |
| 0.005 | 2 | 1.15 E-4 | 3 | 2.94 E-4 | 4 | 5.46 E-4 |
| 0.001 | 2 | 1.15 E-4 | 4 | 0.48 E-4 | 5 | 1.80 E-4 |

Table 2 . c_1/c_2 , T^* , et $C(N, T^*)/c_2$.

| $c=c_1/c_2$ | N=2 | | N=3 | | N=4 | |
|-------------|----------|-----------------|----------|-----------------|----------|-----------------|
| | T^* | $C(N, T^*)/c_2$ | T^* | $C(N, T^*)/c_2$ | T^* | $C(N, T^*)/c_2$ |
| 1 | 405.0240 | 177.78 E-4 | 746.0066 | 188.50 E-4 | 859.2371 | 198.45 E-4 |
| 0.8 | 263.6110 | 165.36 E-4 | 407.5865 | 177.68 E-4 | 706.1678 | 187.27 E-4 |
| 0.6 | 182.7488 | 146.98 E-4 | 242.0063 | 157.98 E-4 | 319.4805 | 169.71 E-4 |
| 0.5 | 153.2750 | 135.01 E-4 | 198.3503 | 144.25 E-4 | 245.7642 | 155.30 E-4 |
| 0.2 | 82.4192 | 81.94 E-4 | 109.6950 | 83.02 E-4 | 132.2866 | 87.66 E-4 |
| 0.04 | 40.5992 | 29.32 E-4 | 60.7858 | 26.52 E-4 | 77.4081 | 26.50 E-4 |
| 0.01 | 25.2405 | 11.27 E-4 | 41.9190 | 9.23 E-4 | 56.2066 | 8.77 E-4 |
| 0.008 | 23.5204 | 9.63 E-4 | 39.7093 | 7.76 E-4 | 53.6870 | 7.31 E-4 |
| 0.005 | 20.3504 | 6.90 E-4 | 35.5600 | 5.37 E-4 | 48.9178 | 4.97 E-4 |
| 0.001 | 12.7302 | 2.16 E-4 | 25.0605 | 1.50 E-4 | 36.5599 | 1.31 E-4 |

Table 3 c_1/c_2 , N^* , T^* et $C(N^*, T^*)/c_2$.

| $c=c_1/c_2$ | N^* | T^* | $C(N^*, T^*)/c_2$ |
|-------------|-------|----------|-------------------|
| 1 | 1 | 265.2776 | 0.0168 |
| 0.8 | 1 | 197.0710 | 0.0160 |
| 0.6 | 1 | 140.4821 | 0.0148 |
| 0.5 | 2 | 153.2750 | 0.0135 |
| 0.2 | 2 | 82.4192 | 0.0082 |
| 0.04 | 2 | 40.5992 | 0.0030 |
| 0.01 | 2 | 25.2405 | 0.0011 |
| 0.008 | 2 | 23.5204 | 0.0010 |
| 0.005 | 2 | 20.3504 | 0.0007 |
| 0.001 | 2 | 12.7302 | 0.0002 |

Interprétation.

A partir de la table 1, on observe que le nombre optimal N^* augmente lorsque c_1/c_2 diminue et lorsque T augmente. En effet, un plus grand nombre de pannes diminue la fiabilité du système. Donc accroître la probabilité de survie d'un tel dispositif, revient à augmenter le nombre d'éléments redondants. De plus, lorsque les temps d'intervention deviennent moins fréquents, les modes de redondance s'épuisent au fur et à mesure jusqu'à l'arrêt complet du système. Il suffit donc de les augmenter.

De la table 2, on remarque que lorsque c_1/c_2 décroît, le temps d'intervention diminue. En effet, dans ce cas la probabilité de panne augmente. Pour la diminuer, il suffit d'intervenir plus souvent. De plus, lorsqu'on augmente le nombre d'éléments N , T^* croît. Ceci s'explique par le fait que les interventions deviennent moins fréquentes pour une plus grande fiabilité du système.

Il est clair à partir de là que les coûts résultants $C(N^*, T)/c_2$ et $C(N, T^*)/c_2$ décroissent avec le rapport c_1/c_2 , ce qui théoriquement est confirmé.

Les résultats affichés dans la table 3 montrent que l'utilisation opérationnelle tient équitablement bien ici, et reste conforme avec l'expérience physique.

De plus, si $\mu_T = \int_0^T \bar{F}(z). dz > \frac{c_1}{c_4}$, alors N^* est fini et unique.

Preuve: Faisons une intégration par parties.

$$\int_0^T (T-z). dF^N(z) = (T-z). F^N(z) \Big|_0^T + \int_0^T F^N(z). dz .$$

Comme $F^N(0^+) = 0$ et que F^N est continue, la fonction objective donnée en (4.13) s'écrit alors

$$C(N, T) = \frac{N.c_1 + c_4. \int_0^T F^N(z). dz}{T} \tag{4.17}$$

A partir de là, la valeur N^* minimisant $C(N, T)$ donné en (4.13) vérifie

$$\frac{(N+1).c_1 + c_4. \int_0^T F^{N+1}(z). dz}{T} \geq \frac{N.c_1 + c_4. \int_0^T F^N(z). dz}{T} \tag{4.18}$$

et

$$\frac{N.c_1 + c_4. \int_0^T F^N(z). dz}{T} < \frac{(N-1).c_1 + c_4. \int_0^T F^{N-1}(z). dz}{T} \tag{4.19}$$

De (4.18) et (4.19), on déduit aisément à partir d'un calcul élémentaire que

$$\int_0^T F^N(z). (1-F(z)). dz \leq \frac{c_1}{c_4}$$

et

$$\int_0^T F^{N-1}(z). (1-F(z)). dz > \frac{c_1}{c_4} .$$

A présent, prouvons que N^* existe et est unique. Pour cela étudions le signe de

$$W_N = G(N+1, T) - G(N, T).$$

$$W_N = - \int_0^T \bar{F}^2(z) \cdot F^N(z) \cdot dz < 0 \quad , \quad \text{d'où:}$$

$\{G(N,T)\}_{N \geq 0}$ est une suite strictement décroissante en N.

De plus , $G(N,T) \rightarrow 0$ lorsque $N \rightarrow \infty$.

Ainsi, lorsque N parcourt \mathbb{N} , $G(N,T)$ prend des valeurs de $\int_0^T R(z) \cdot dz$ à 0 .

Comme $0 < \frac{c_1}{c_4} < \int_0^T R(z) \cdot dz$ alors, $G(N,T)$ atteint la valeur $\frac{c_1}{c_4}$ une seule fois ; ce qui complète la démonstration du théorème.

Remarque: Si $\mu_T < \frac{c_1}{c_4}$, alors la politique optimale consiste à ne pas faire de maintenance préventive.

4.1.4.2 Temps optimal.

Théorème 4.4. Supposons que μ_N , le MTTF du système, existe sous les conditions classiques $T \cdot (1-F^N(T)) \rightarrow 0$ quand $T \rightarrow \infty$.

Alors pour N fixé , le temps T^* minimisant la fonction " objective " $C(N,T)$ donnée en (4.13) satisfait l'équation

$$A(N, T) = \frac{N \cdot c_1}{c_4} \tag{4.20}$$

où ,

$$A(N, T) = T \cdot F^N(T) - \int_0^T F^N(t) \cdot dt \tag{4.21}$$

De plus, si $\mu_N > \frac{N \cdot c_1}{c_2}$, alors T^* est unique.

Preuve. Puisque $C(N,.)$ est une fonction dérivable en T, alors pour N fixé, la condition d'extremum par rapport à la variable T s'écrit;

$$\frac{dC(N, T)}{dT} = 0 \tag{4.22}$$

En remplaçant l'équation (4.17) dans (4.22), nous obtenons

$$T \cdot F^N(T) - \int_0^T F^N(z) \cdot dz = \frac{N \cdot c_1}{c_4} \tag{4.23}$$

Nous allons prouver à présent que (4.23) possède une solution en T et que cette solution est unique.

Remarquons tout d'abord que: $A(N,0)=0$.

Puisque $A(N, \cdot)$ est continue sur \mathfrak{R}_+ , on en déduit que: $\forall T \in \mathfrak{R}_+$,

$$A(N, T) = \int_0^T (1 - F^N(z)) \cdot dz - T(1 - F^N(T)).$$

A partir de là ,

$$\lim_{T \rightarrow \infty} A(N, T) = \int_0^{\infty} (1 - F^N(z)) \cdot dz = \mu_N .$$

La fonction A est de plus dérivable en T et sa fonction dérivée vaut

$$\frac{dA(T)}{dT} = N \cdot T \cdot \lambda(T) \cdot F^{N-1}(T) \cdot \bar{F}(T) > 0 ;$$

ce qui prouve que A est strictement croissante en T.

Ainsi, lorsque T parcourt \mathfrak{R}^+ , $A(N,T)$ prend des valeurs de 0 à μ_N .

Cependant, en vertu du théorème 4.4 , la politique optimale est la suivante:

si $\mu_N > \frac{N \cdot c_1}{c_4}$ alors il existe une solution finie et unique T^* vérifiant (4.20);

par conséquent , $A(N,T)$ rencontrera une seule fois la valeur $\frac{N \cdot c_1}{c_4}$.

Sinon, $T^* = \infty$ (système indéfiniment en panne), ce qui ne correspond à aucun cas réel.

Remarque: Notons que dans ce cas aussi, l'existence de la solution de (4.20) garantit le minimum pour $C(T,N)$ donné en (4.13), car quand $T \rightarrow 0$, on a $C(N,T) \rightarrow \infty$.

Le coût résultant est alors

$$C(N^*, T^*) = c_4 \cdot F^{N^*}(T^*) .$$

De la même manière que précédemment, pour estimer la paire optimale (N^*, T^*) , nous développerons l'algorithme de calcul suivant basé sur les théorèmes 4.3 et 4.4

Algorithme B.

- (i) Poser $N_1=1$, puis calculer T_1 (si il existe) satisfaisant l'égalité (4.20). La solution est unique en vertu du théorème 4.4.
- (ii) Poser $T=T_1$, puis calculer N_2 (si il existe) satisfaisant les inégalités (4.14) et (4.15). La solution est unique en vertu du théorème 4.3.
- (iii) Poser $N=N_2$, puis calculer T_2 (si il existe) satisfaisant l'égalité (4.20). La solution est unique en vertu du théorème 4.4.
- (iv) Continuer jusqu'à ce que $N_j = N_{j+1}$, où j représente la $J^{\text{ème}}$ itération et à cette étape-ci, (N^*, T^*) est la paire optimale.
- (v) En (i), si T_1 n'existe pas, alors poser $N_1=2$; si de nouveau T_1 (pour $N_1=2$) n'existe pas, poser $N_1=3$ en (i); et ainsi de suite; pour continuer suivre les étapes décrites ci dessus par (i)-(iv).
- (vi) De même en (ii), si N_2 n'existe pas, alors poser $N_1=2$ en (i); continuer suivant le schéma décrit si dessus par (i)-(v).

On peut remarquer qu'il n'y a aucune preuve mathématique rigoureuse garantissant une finition bien déterminée de la procédure itérative. La plupart du temps en pratique, la procédure marche avec succès et très souvent produit la paire optimale (N^*, T^*) au bout d'un petit nombre d'itérations.

Remarque: Notons que dans ce cas aussi, l'existence de la solution de (4.20) garantit le minimum pour $C(T,N)$ donné en (4.13), car quand $T \rightarrow 0$, on a $C(N,T) \rightarrow \infty$.

Le coût résultant est alors

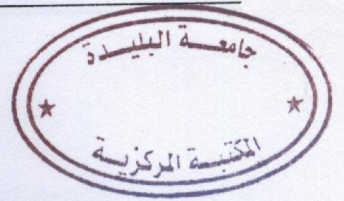
$$C(N^*, T^*) = c_4 \cdot F^{N^*}(T^*) .$$

De la même manière que précédemment, pour estimer la paire optimale (N^*, T^*) , nous développerons l'algorithme de calcul suivant basé sur les théorèmes 4.3 et 4.4

Algorithme B.

- (i) Poser $N_1=1$, puis calculer T_1 (si il existe) satisfaisant l'égalité (4.20). La solution est unique en vertu du théorème 4.4.
- (ii) Poser $T=T_1$, puis calculer N_2 (si il existe) satisfaisant les inégalités (4.14) et (4.15). La solution est unique en vertu du théorème 4.3.
- (iii) Poser $N=N_2$, puis calculer T_2 (si il existe) satisfaisant l'égalité (4.20). La solution est unique en vertu du théorème 4.4.
- (iv) Continuer jusqu'à ce que $N_j = N_{j+1}$, où j représente la J^{eme} itération et à cette étape-ci, (N^*, T^*) est la paire optimale.
- (v) En (i), si T_1 n'existe pas, alors poser $N_1=2$; si de nouveau T_1 (pour $N_1=2$) n'existe pas, poser $N_1=3$ en (i); et ainsi de suite; pour continuer suivre les étapes décrites ci dessus par (i)-(iv).
- (vi) De même en (ii), si N_2 n'existe pas, alors poser $N_1=2$ en (i); continuer suivant le schéma décrit ci dessus par (i)-(v).

On peut remarquer qu'il n'ya aucune preuve mathématique rigoureuse garantissant une finition bien déterminée de la procédure itérative. La plupart du temps en pratique, la procédure marche avec succès et très souvent produit la paire optimale (N^*, T^*) au bout d'un petit nombre d'itérations.



Organigramme B.

- **Procédure A(T_{N_J}):** Calculer T_{N_J}, solution de

$$T_{N_J} \cdot F^{N_J}(T_{N_J}) - \int_0^{T_{N_J}} F^{N_J}(z) \cdot dz .$$

- **Procédure B(N_{J+1}):** Calculer N_{J+1}, vérifiant

$$G(N_{J+1}, T_{N_J}) \leq \frac{c_1}{c_4} < G(N_{J+1} - 1, T_{N_J})$$

où ,

$$G(N, T) = \int_0^T F^N(z) \cdot \bar{F}(z) \cdot dz ,$$

A(N_J): Tester si $\mu_{N_J} > \frac{N_J \cdot c_1}{c_4}$

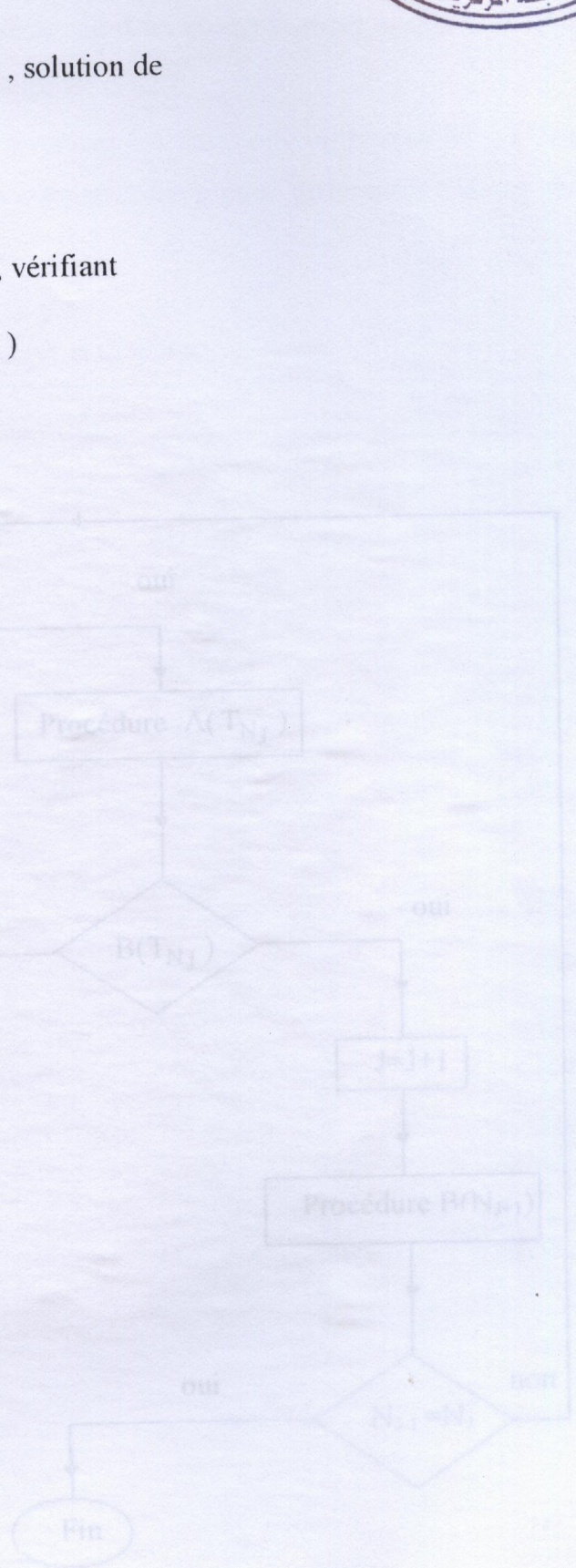
où ,

$$\mu_N = \int_0^\infty (1 - F^N(z)) \cdot dz .$$

B(T_{N_J}): Tester si $\mu_{T_{N_J}} > \frac{c_1}{c_4}$

où ,

$$\mu_T = \int_0^T (1 - F(z)) \cdot dz .$$



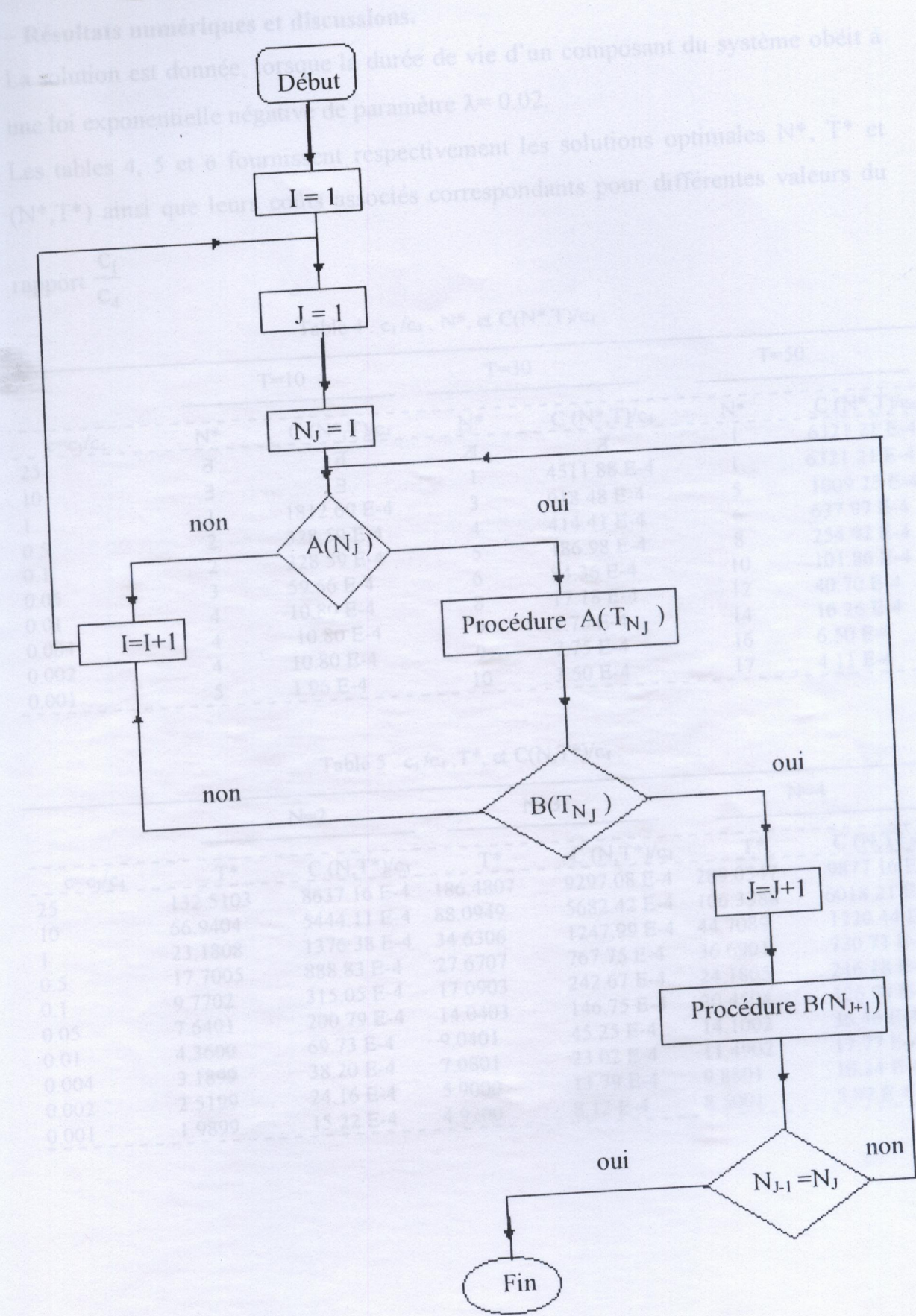


Table 6 . c_1/c_4 , N^* , T^* et $C(N^*, T^*)/c_4$.

| c_1/c_4 | N^* | T^* | $C(N^*, T^*)/c_4$ |
|-----------|-------|---------|-------------------|
| 25 | 1 | 83.9234 | 0.8133 |
| 10 | 1 | 41.2236 | 0.5615 |
| 1 | 1 | 10.7406 | 0.1933 |
| 0.5 | 1 | 7.4303 | 0.1381 |
| 0.1 | 1 | 3.2400 | 0.0627 |
| 0.05 | 1 | 2.2800 | 0.0446 |
| 0.01 | 1 | 1.0100 | 0.0200 |
| 0.004 | 2 | 3.1899 | 0.0038 |
| 0.002 | 2 | 2.5199 | 0.0024 |
| 0.001 | 2 | 1.9899 | 0.0015 |

Interprétation.

Les conclusions qui en découlent, sont analogues à celles de la politique A. Dans ce cas, réduire le temps d'oisiveté revient à intervenir plus souvent ou (et) accroître la fiabilité du système en augmentant le nombre d'éléments redondants

N. Venugopal & Al [60] ont développé une procédure théorique aboutissant à des remplacements optimaux, basés sur l'étape de réparation et observent que cette approche de politique de remplacement optimale, est meilleure en exploitation.

L'optimisation de tels systèmes de fiabilité, sujets à des pannes aléatoires, (la panne du système résulte uniquement des pannes aléatoires de ses composantes) a été largement étudiée. Toutefois comme pour les systèmes à configuration parallèle, des pannes de cause communes (CCF) peuvent surgir. Ces défaillances sont dues en grande partie en pratique, aux effets de chaleur, d'humidité, de vibrations, ... De tels phénomènes sont très courants dans les systèmes de fiabilité complexes.

Récemment, D. S. Bai & Al [4] ont considéré un système k sur N sujet à ce genre de pannes alors que C.Rami.Reddy [49] étudia ce même système lorsqu'il est exposé en plus des défaillances de causes communes, à des pannes aléatoires. Ils développent par la suite une procédure théorique basée sur plusieurs considérations pour déterminer le nombre d'éléments optimal.

4.2 OPTIMISATION D'UN SYSTEME k SUR N .

4.2.1 Introduction.

La partie qui va suivre, sera consacrée à l'étude de l'optimisation d'un système k sur N qui a fait l'objet de nombreuses études.

Un système k sur N est optimal parmi les systèmes complexes sous certaines conditions [7, 48].

Barlow & Proschan [7] ont obtenu plusieurs résultats de fiabilité d'un système k sur N et ont étudié, la relation entre le taux de panne du système et celui de ses éléments. Les caractéristiques de fiabilité du système, ont été traitées dans [24, 37] ; en particulier lorsque $k=N-1$.

Ksir & Bousbaha [32, 33] ont proposé des bornes et des calculs directs pour un système k - consécutif sur N dans le cas où la séquence d'états est une chaîne de Markov. T. Nakagawa [46] s'est intéressé au nombre d'éléments N le plus économique. Une fois ce nombre déterminé, le système est remplacé au temps T ou à la panne selon lequel des deux événements a lieu le premier (politique selon l'âge). IL obtient par la suite ce temps optimal de remplacement.

N. Venugopal & Al [60] ont développé une procédure théorique aboutissant à des remplacements optimaux, basés sur l'étape de réparation et observent que cette approche de politique de remplacement optimale, est meilleure en exploitation.

L'optimisation de tels systèmes de fiabilité, sujets à des pannes aléatoires, (la panne du système résulte uniquement des pannes aléatoires de ses composantes) a été largement étudiée . Toutefois comme pour les systèmes à configuration parallèle , des pannes de cause communes (CCF) peuvent surgir. Ces défaillances sont dûes en grande partie en pratique, aux effets de chaleur, d'humidité, de vibrations,... De tels phénomènes sont très courants dans les systèmes de fiabilité complexes.

Récemment, D. S. Bai & Al [4] ont considéré un système k sur N sujet à ce genre de pannes alors que C.Rami.Reddy [49] étudie ce même système lorsqu'il est exposé en plus des défaillances de causes communes, à des pannes aléatoires. Ils développent par la suite une procédure théorique basée sur plusieurs considérations pour déterminer le nombre d'éléments optimal.

Dans cette section , nous allons étudier un système complexe k sur N. Nous développerons une procédure d'optimisation pour identifier facilement d'une part le temps de remplacement optimal et d'autre part le nombre d'éléments le plus économique composant ce système sous certaines conditions. Un travail empirique est fourni pour illustrer l'utilisation opérationnelle de cette approche.

4.2.2 Le modèle.

Considérons un système redondant k sur N composé d'éléments statistiquement identiques. Le fonctionnement d'un tel système nécessite la disponibilité d'au moins k éléments pour l'opération. Le système est remplacé préventivement au temps m.T m=1,2, . . . et si une défaillance survient (lorsque N-k+1 composants font défaut), le système reste inactif jusqu'au prochain remplacement préventif.

Notations.

- $\lambda(.)$ taux de panne de chaque élément .
- $\lambda_k(N,.)$ taux de panne du système.
- $R(.)=1-F(.)$ fiabilité de chaque élément .
- Nnombre d'éléments composant ce système.
- knombre minimal d'éléments d'exploitation pour chaque opération du système.
- $\mu_{k,N}$MTTF du système.
- $R_k(N,.) = 1 - F_k(N,.)$fiabilité du système.

Alors, l'espérance des coûts unitaires pour un horizon infini a pour expression

$$C_k(N, T) = \frac{N \cdot c_1 + c_4 \cdot \int_0^T \sum_{i=0}^{k-1} \binom{i}{N} \cdot R^i(t) \cdot F^{N-i}(t) \cdot dt}{T} \tag{4.24};$$

ce qui est en bon accord avec (4.17) lorsque k=1.

La recherche du couple optimal (N*,T*) peut s'avérer assez compliquée pour des distributions de temps de panne F(.) quelconques et pour k>4.

On se limitera dans un premier temps à traiter ce problème spécialement dans le cas d'une loi négative exponentielle à titre d'illustration.

4.2.3 Nombre optimal.

Lemme 4.2. Pour toute distribution $F(\cdot)$ et pour T fixé, la valeur de N^* minimisant $C_k(N, T)$ donné en (4.24) vérifie

$$L_N(k, T) \leq \frac{c_1}{c_4} \tag{4.25}$$

et

$$L_{N-1}(k, T) > \frac{c_1}{c_4} \tag{4.26}$$

où:

$$L_N(k, T) = \begin{cases} \int_0^T \binom{k-1}{N} \cdot R^k(t) \cdot F^{N+1-k}(t) \cdot dt & \text{si } N \geq k \\ \int_0^T R^k(t) \cdot dt & \text{si } N = k-1 \end{cases} \tag{4.27}$$

Preuve. En procédant de la même manière qu'antérieurement et après quelques simplifications, on obtient:

$$\int_0^T \sum_{i=0}^{k-1} R^i(t) \cdot F^{N-i}(t) \cdot \left(\binom{i}{N} - \binom{i}{N+1} \right) \cdot F(t) \cdot dt \leq \frac{c_1}{c_4} \tag{4.28}$$

et

$$\int_0^T \sum_{i=0}^{k-1} R^i(t) \cdot F^{N-1-i}(t) \cdot \left(\binom{i}{N-1} - \binom{i}{N} \right) \cdot F(t) \cdot dt > \frac{c_1}{c_4} \tag{4.29}$$

$$\text{Soit } H_k(N, t) = \sum_{i=0}^{k-1} R^i(t) \cdot F^{N-i}(t) \cdot \left(\binom{i}{N} - \binom{i}{N+1} \right) \cdot F(t) \tag{4.30}$$

montrons que pour tout k tel que, $2 \leq k \leq N$, on a $H_k(N, t) = \binom{k-1}{N} \cdot R^k(t) \cdot F^{N+1-k}(t)$.
 Pour cela, faisons une démonstration par récurrence.

Pour $k=2$, l'expression (4.30) s'écrit

$$\begin{aligned} H_2(N, t) &= F^N(t) \cdot R(t) + R(t) \cdot F^{N-1}(t) \cdot (1 - (N+1) \cdot F(t)) \\ &= N \cdot R^2(t) \cdot F^{N-1}(t) = \binom{2-1}{N} \cdot R^2(t) \cdot F^{N+1-2}(t) \end{aligned}$$

Supposons que pour tout k tel que, $2 \leq k \leq N$,

$$H_k(N, t) = \binom{k-1}{N} \cdot R^k(t) \cdot F^{N+1-k}(t) \tag{4.31}$$

Montrons que dans ce cas, $H_{k+1}(N, t) = \binom{k}{N} \cdot R^{k+1}(t) \cdot F^{N-k}(t)$

On a:
$$H_{k+1}(N, t) = \sum_{i=0}^k R^i(t) \cdot F^{N-i}(t) \cdot \left(\binom{i}{N} - \binom{i}{N+1} \cdot F(t) \right)$$

soit:
$$H_{k+1}(N, t) = H_k(N, t) + R^k(t) \cdot F^{N-k}(t) \cdot \left(\binom{k}{N} - \binom{k}{N+1} \cdot F(t) \right) \tag{4.32}$$

En substituant (4.31) dans (4.32), nous obtenons:

$$H_{k+1}(N, t) = R^k(t) \cdot F^{N-k}(t) \cdot \left(\binom{k-1}{N} \cdot F(t) - \binom{k}{N+1} \cdot F(t) + \binom{k}{N} \right) \tag{4.33}$$

Or,
$$\binom{k-1}{N} = \frac{k}{N+1-k} \cdot \binom{k}{N} \quad \text{et} \quad \binom{k}{N+1} = \frac{N+1}{N+1-k} \cdot \binom{k}{N} \tag{4.34}$$

En remplaçant (4.34) dans (4.33), on a

$$H_{k+1}(N, t) = \binom{k}{N} \cdot R^k(t) \cdot F^{N-k}(t) \cdot \left(\frac{k}{N+1-k} \cdot F(t) - \frac{N+1}{N+1-k} \cdot F(t) + 1 \right)$$

Soit après simplification,

$$H_{k+1}(N, t) = \binom{k}{N} \cdot R^k(t) \cdot F^{N-k}(t) \cdot (1 - F(t)) = \binom{k}{N} \cdot R^{k+1}(t) \cdot F^{N-k}(t)$$

Ainsi, pour tout k tel que, $2 \leq k \leq N$,

$$H_k(N, t) = \binom{k-1}{N} \cdot R^k(t) \cdot F^{N+1-k}(t)$$

Théorème 4.5. Supposons que $F(t) = 1 - \exp(-\lambda t)$. Si $\nu_T = \frac{1 - F(T)}{\lambda} > \frac{c_1}{c_4}$ ($k = 1, 2$ et 3),

alors la valeur N^* optimisant $C_k(N, T)$ donné en (4.24) et satisfaisant (4.25) et (4.26) existe et est unique.

Preuve. Etudions tout d'abord la limite de la suite $(W_N)_{N \geq k}$ définie par:

$$W_N = \binom{k-1}{N} \cdot R^k(t) \cdot F^{N+1-k}(t).$$

Pour cela, étudions la série $\sum_{N > 0} W_N$. En utilisant la règle de d'Alembert, nous avons

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \frac{W_{N+1}}{W_N} = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{N+1}{N+2-k} \cdot F(t) = F(t).$$

Si $0 < F(t) < 1$, alors le terme général de la série converge vers 0 (critère nécessaire de convergence).

Si $F(t) = 0$ ou $F(t) = 1$, on a $\lim_{N \rightarrow \infty} L_N(k, t) = 0$

d'où: $\forall k$ tel que $2 \leq k \leq N$ $\lim_{N \rightarrow \infty} L_N(k, t) = 0$ (4.35).

Soit maintenant $F(t) = 1 - \exp(-\lambda t)$. Posons $y = 1 - \exp(-\lambda t)$; l'expression (4.27) s'écrit alors:

$$L_N(k, T) = \frac{1}{\lambda} \cdot \int_0^{F(T)} \binom{k-1}{N} \cdot (1-y)^{k-1} \cdot y^{N+1-k} \cdot dy \quad (4.36).$$

De là, il est aisé de voir que

$$L_{k-1}(k, T) = \frac{1}{k \cdot \lambda} (1 - e^{-k \cdot \lambda}) \quad (4.37)$$

A partir d'une intégration par parties, (4.37) devient

$$L_N(k, T) = \frac{\binom{k-1}{N} \cdot (1-y)^{k-1} \cdot y^{N+2-k}}{\lambda \cdot (N+2-k)} \Bigg|_0^{F(T)} + \int_0^{F(T)} \frac{\binom{k-1}{N} \cdot y^{N+2-k} \cdot (1-y)^{k-2}}{\lambda \cdot (N+2-k)} \cdot dy \quad (4.38)$$

$$\text{Or: } \frac{\binom{k-1}{N}}{N+2-k} = \frac{\binom{k-2}{N}}{k-1} \quad (4.39).$$

En substituant (4.39) dans (4.38), on aura

$$L_N(k, T) = \frac{1}{\lambda} \cdot \left\{ \frac{\binom{k-2}{N}}{k-1} \cdot R^{k-1}(T) \cdot F^{N+2-k}(T) \right\} + L_N(k-1, T) \quad (4.40).$$

En procédant d'une manière similaire,

$$L_{N-1}(k, T) = \frac{1}{\lambda} \cdot \left\{ \frac{\binom{k-2}{N-1}}{k-1} \cdot R^{k-1}(T) \cdot F^{N+1-k}(T) \right\} + L_{N-1}(k-1, T) \quad (4.41)$$

avec:

$$\begin{cases} L_N(1, T) = \frac{F^{N+1}(T)}{\lambda \cdot (N+1)} \\ \text{et} \\ L_{N-1}(1, T) = \frac{F^N(T)}{\lambda \cdot N} \end{cases} \quad (4.42).$$

Vérifions à présent que $(L_N(k, T))_{N \geq k}$ est une suite strictement décroissante en N pour $k=2,3$ et 4.

• A partir de (4.42), nous avons:

$$L_N(1, T) - L_{N-1}(1, T) = \frac{F^N(T)}{\lambda} \left\{ \frac{F(T)}{N+1} - \frac{1}{N} \right\} < 0 \quad (4.43).$$

Les formules de récurrence (4.40) et (4.41) nous permettent d'affirmer que

$$L_N(2, T) - L_{N-1}(2, T) = -\frac{R^2(T) \cdot F^{N-1}(T)}{\lambda} + L_N(1, T) - L_{N-1}(1, T) \quad (4.44).$$

En substituant (4.43) dans (4.44), on en déduit que

$$L_N(2, T) - L_{N-1}(2, T) < 0 \Leftrightarrow (L_N(2, T))_{N \geq 2} \text{ est une suite strictement décroissante.}$$

• Pour $k=3$, à partir de (4.40) et (4.41) nous aurons

$$\begin{aligned} L_N(3, T) - L_{N-1}(3, T) &= \frac{1}{2 \cdot \lambda} \cdot R^2(T) \cdot F^{N-2}(T) \cdot \{N \cdot F(T) - (N-1)\} \\ &\quad + L_N(2, T) - L_{N-1}(2, T) \end{aligned} \quad (4.45).$$

En reportant (4.44) dans (4.45) on obtient

$$L_N(3, T) - L_{N-1}(3, T) = \frac{1}{2 \cdot \lambda} \cdot R^2(T) \cdot F^{N-2}(T) \cdot \{(N-2) \cdot F(T) - (N-1)\} \\ + L_N(1, T) - L_{N-1}(1, T) \quad (4.46).$$

En remplaçant (4.43) dans (4.46), on vérifie aisément que

$$L_N(3, T) - L_{N-1}(3, T) < 0 \Leftrightarrow (L_N(3, T))_{N \geq 3} \text{ est une suite strictement décroissante.}$$

• En substituant $k=4$ dans (4.40) et (4.41), on obtient:

$$L_N(4, T) - L_{N-1}(4, T) = \frac{R^3(T) \cdot F^{N-3}(T)}{6 \cdot \lambda} \cdot \{N \cdot (N-1) \cdot F(T) - (N-1) \cdot (N-2)\} \\ + L_N(3, T) - L_{N-1}(3, T) \quad (4.47).$$

De la même manière que précédemment, en reportant (4.46) dans (4.47) on aboutit à l'égalité

$$L_N(4, T) - L_{N-1}(4, T) = \frac{R^2(T) \cdot F^{N-3}(T)}{6 \cdot \lambda} \cdot \{N \cdot (N-1) \cdot F(T) \cdot R(T) \\ - (N-1) \cdot (N-2) \cdot R(T) + 3 \cdot N \cdot F^2(T) - 3 \cdot (N-1) \cdot F(T)\} + L_N(1, T) - L_{N-1}(1, T),$$

soit encore:

$$L_N(4, T) - L_{N-1}(4, T) = \frac{R^2(T) \cdot F^{N-3}(T)}{6 \cdot \lambda} \cdot \{(-N^2 + 4 \cdot N - 6) \cdot F^2(T) \\ + (N-1) \cdot (2 \cdot N - 5) \cdot F(T) - (N-1) \cdot (N-2)\} \\ + L_N(1, T) - L_{N-1}(1, T) \quad (4.48).$$

Posons à présent $s = F(T)$ et étudions le signe de A défini par:

$$A(s) = (-N^2 + 4 \cdot N - 6) \cdot s^2 + (N-1) \cdot (2 \cdot N - 5) \cdot s - (N-1) \cdot (N-2)$$

Si Δ est le discriminant de $A(s)$, alors:

$$\Delta = (-11.N + 23) < 0 \quad \forall N \geq 4.$$

De plus, $(-N^2 + 4.N - 6) < 0 \quad \forall N \geq 4;$

ce qui prouve à partir de (4.43) que $L_N(4, T) - L_{N-1}(4, T)$ donné en (4.48) est strictement négative.

Conclusion: $\forall k; 2 \leq k \leq 4, L_N(k, T)$ est strictement décroissante.

Ainsi lorsque N parcourt l'intervalle discret $[k-1, +\infty[$, $L_N(k, T)$ décroît de 0 à v_T et par conséquent coïncide une seule fois avec la valeur $\frac{c_1}{c_4}$; ce qui clôture la démonstration du théorème.

4.2.4 Temps optimal.

Lemme 4.3. Si F est de classe IFR, alors $F_k(N, .)$ est aussi de classe IFR.

Preuve. Evaluons tout d'abord $\lambda_k(N, t), \forall t > 0.$

Par définition:

$$\lambda_k(N, t) = - \frac{R'_k(N, t)}{R_k(N, t)} \tag{4.49}$$

où,

$$R_k(N, t) = \sum_{i=k}^N \binom{N}{i} . R^i(t) . F^{N-i}(t) \tag{4.50}$$

et $R'_k(N, t)$ conformément aux notations usuelles, la dérivée de $R_k(N, t)$ par rapport à t .

Après un calcul élémentaire, nous obtenons

$$R'_k(N, t) = \lambda(t) . F^N(t) . \psi(t) \tag{4.51}$$

où ψ est définie par:

$$\psi(t) = \sum_{i=k}^N \binom{N}{i} . \left(\frac{R(t)}{F(t)} \right)^i . \left\{ (N-i) . \frac{R(t)}{F(t)} - i \right\} \tag{4.52}$$

L'équation (4.52) est équivalente à

$$\begin{aligned} \psi(t) = & \left[\frac{R(t)}{F(t)} \right]^N \cdot \left(\binom{N-1}{N-1} - N \cdot \binom{N}{N} \right) + \left[\frac{R(t)}{F(t)} \right]^{N-1} \cdot \left(2 \cdot \binom{N-2}{N-2} - (N-1) \cdot \binom{N}{N-1} \right) + \dots \\ & + \left[\frac{R(t)}{F(t)} \right]^{k+1} \cdot \left((N-k) \cdot \binom{N}{k} - (k+1) \cdot \binom{N}{k+1} \right) - k \cdot \binom{N}{k} \cdot \left(\frac{R(t)}{F(t)} \right)^k \end{aligned} \quad (4.53).$$

De plus, $\forall (p,q) \in \mathbb{N}^2$, $\frac{\binom{N}{p}}{\binom{N}{p+1}} = \frac{p+1}{N-p}$ (4.54).

En reportant (4.54) dans (4.53), nous obtenons

$$\psi(t) = -k \cdot \binom{N}{k} \cdot \left[\frac{R(t)}{F(t)} \right]^k \quad (4.55).$$

A partir de (4.50), (4.51) et (4.55), (4.49) s'écrira

$$\lambda_k(N, t) = \frac{k \cdot \binom{N}{k} \cdot \lambda(t)}{\sum_{i=k}^N \binom{N}{i} \cdot \left[\frac{R(t)}{F(t)} \right]^{i-k}} \quad (4.56).$$

$\lambda_k(N, t)$ et $\lambda(t)$ étant des fonctions différentiables en t , pour établir le lemme, il suffit de montrer que

$$\frac{d\lambda_k(N, t)}{dt} > 0 \quad \forall t > 0.$$

A partir de (4.56), on a:

$$\frac{d\lambda_k(N, t)}{dt} = \frac{k \cdot \binom{N}{k} \cdot \sum_{i=k}^N \binom{N}{i} \cdot \left[\frac{R(t)}{F(t)} \right]^{i-k} \cdot \left\{ \frac{d\lambda(t)}{dt} + (i-k) \cdot \frac{\lambda^2(t)}{F(t)} \right\}}{\left\{ \sum_{i=k}^N \binom{N}{i} \cdot \left[\frac{R(t)}{F(t)} \right]^{i-k} \right\}^2} \quad (4.57).$$

Or par hypothèse, $\frac{d\lambda(t)}{dt} > 0 \quad \forall t > 0$.

Donc: $\frac{d\lambda_k(N, t)}{dt} > 0$.

Cela signifie que $F_k(N, \cdot)$ est une distribution IFR.

• Si $F(t) = 1 - \exp(-\lambda.t)$, alors l'équation (4.57) s'écrit

$$q(t) = \frac{k \cdot \binom{N}{k} \cdot \lambda}{\sum_{i=k}^N \binom{N}{i} \cdot \left[\frac{e^{-\lambda.t}}{1 - e^{-\lambda.t}} \right]^{i-k}} \quad (4.58)$$

Dans ce cas, l'équation (4.58) croît de 0 jusqu'à $k \cdot \lambda$ pour $N > k$ et est égale à $k \cdot \lambda$ pour $N = k$.

Théorème 4.6. Supposons que $\mu_{k,N}$, le MTTF du système, existe sous les conditions classiques $t \cdot R_k(N, T) \rightarrow 0$ quand $T \rightarrow \infty$.

Alors pour N fixé, le temps T^* minimisant $C_k(N, T)$ donné en (4.24) satisfait l'équation

$$T \cdot F_K(N, T) - \int_0^T F_k(N, t) \cdot dt = \frac{N \cdot c_1}{c_4} \quad (4.59)$$

De plus si $\mu_{k,N} > \frac{N \cdot c_1}{c_4}$, alors T^* est unique.

Démonstration. La preuve de ce théorème découle de celle du théorème 4.1, en remplaçant $F^N(T)$ par $F_k(N, T)$.

• Si $F(T) = 1 - \exp(-\lambda.T)$, après un changement de variable, l'équation (4.59) s'écrit:

$$T \cdot \sum_{i=0}^{k-1} \binom{N}{i} \cdot F^{N-i}(T) \cdot R^i(T) - \frac{1}{\lambda} \cdot \sum_{i=0}^{k-1} \binom{N}{i} \cdot \int_0^{F(T)} (1-x)^{i-1} \cdot x^{N-i} \cdot dx.$$

Posons:

$$I(k) = \frac{1}{\lambda} \cdot \sum_{i=0}^{k-1} \binom{N}{i} \cdot \int_0^{F(T)} (1-x)^{i-1} \cdot x^{N-i} \cdot dx,$$

alors,

$$I(k) = I(k-1) + J(k) \tag{4.60}$$

où,

$$J(k) = \frac{1}{\lambda} \cdot \binom{N}{k-1} \cdot \int_0^{F(T)} (1-x)^{k-2} \cdot x^{N+1-k} \cdot dx \tag{4.61}$$

Une intégration par parties nous permet d'affirmer à partir de (4.61) que

$$J(k) = \frac{\binom{N}{k-1}}{\lambda \cdot (N+2-k)} \cdot \left\{ R^{k-2}(T) \cdot F^{N+2-k}(T) + (k-2) \cdot \int_0^{F(T)} (1-x)^{k-3} \cdot x^{N+2-k} \cdot dx \right\};$$

ou encore, que

$$J(k) = \frac{\binom{N}{k-2}}{\lambda \cdot (k-1)} \cdot R^{k-2}(T) \cdot F^{N+2-k}(T) + \frac{k-2}{k-1} \cdot J(k-1) \tag{4.62}$$

Ainsi pour une distribution exponentielle négative, le T^* minimisant $C_k(N, T)$ donné en (4.24) vérifie:

$$T \cdot \sum_{i=0}^{k-1} \binom{N}{i} \cdot (1 - e^{-\lambda \cdot T})^{N-i} \cdot e^{-i \cdot \lambda \cdot T} - I(k) = \frac{N \cdot c_1}{c_4} \tag{4.63}$$

où,

$$\left\{ \begin{array}{l} I(k) = I(k-1) + J(k) \\ \text{et} \end{array} \right. \tag{4.64}$$

$$\left\{ \begin{array}{l} I(1) = J(1) = T - \frac{1}{\lambda} \cdot \sum_{i=1}^N \frac{(1 - e^{-\lambda \cdot T})^i}{i} \end{array} \right.$$

De plus si , $\frac{1}{\lambda} \cdot \sum_{i=k}^N \frac{1}{i} > \frac{c_1}{c_4}$ alors (4.71) possède une solution unique en T.

Dans ce cas, en combinant les deux procédures de calcul, le coût résultant d'une telle politique aura pour expression ,

$$C_k(N^*, T^*) = c_4 \cdot \sum_{i=0}^{k-1} \binom{i}{N^*} \cdot \left(1 - e^{-\lambda \cdot T^*}\right)^{N^*-i} \cdot e^{-i \cdot \lambda \cdot T^*}$$

| k=c ₁ /c ₂ | T=30 | | | T=50 | | |
|----------------------------------|------|---------------------------------------|----|---------------------------------------|----|---------------------------------------|
| | N* | C _k (N*, T)/c ₄ | N* | C _k (N*, T)/c ₄ | N* | C _k (N*, T)/c ₄ |
| 5 | 9 | 0.0184 | 14 | 0.0177 | | |
| 10 | 9 | 0.0184 | 15 | 0.0175 | | |
| 20 | 9 | 0.0093 | 16 | 0.0149 | | |
| 30 | 9 | 0.0093 | 17 | 0.01 | | |
| 50 | 10 | 0.0046 | 18 | 0.0067 | | |
| 100 | 11 | 0.0023 | 19 | 0.0045 | | |
| 200 | 11 | 0.0023 | 20 | 0.0030 | | |
| 300 | 12 | 0.0001 | 21 | 0.0020 | | |
| 500 | 13 | 0.0005 | 22 | 0.0009 | | |
| 1000 | 13 | 0.0005 | 22 | 0.0009 | | |

Table 8. c₂/c₁, N* et C_k(N*, T)/c₄, k=3

| k=c ₁ /c ₂ | T=10 | | | T=30 | | | T=50 | | |
|----------------------------------|------|---------------------------------------|----|---------------------------------------|----|---------------------------------------|------|---------------------------------------|--|
| | N* | C _k (N*, T)/c ₄ | N* | C _k (N*, T)/c ₄ | N* | C _k (N*, T)/c ₄ | N* | C _k (N*, T)/c ₄ | |
| 5 | 5 | 0.0445 | 9 | 0.0305 | 14 | 0.0209 | | | |
| 10 | 5 | 0.0445 | 10 | 0.0279 | 15 | 0.0144 | | | |
| 20 | 6 | 0.0119 | 11 | 0.0151 | 17 | 0.0234 | | | |
| 30 | 6 | 0.0119 | 12 | 0.0081 | 18 | 0.0104 | | | |
| 50 | 7 | 0.0030 | 12 | 0.0081 | 19 | 0.0115 | | | |
| 100 | 7 | 0.0030 | 13 | 0.0042 | 21 | 0.0055 | | | |
| 200 | 7 | 0.0030 | 14 | 0.0022 | 23 | 0.0026 | | | |
| 300 | 8 | 0.0007 | 15 | 0.0011 | 24 | 0.0018 | | | |
| 500 | 8 | 0.0007 | 15 | 0.0011 | 25 | 0.0012 | | | |
| 1000 | 8 | 0.0007 | 16 | 0.0006 | 27 | 0.0009 | | | |

Table 9. c₂/c₁, N* et C_k(N*, T)/c₄, k=4

| k=c ₁ /c ₂ | T=10 | | | T=30 | | | T=50 | | |
|----------------------------------|------|---------------------------------------|----|---------------------------------------|----|---------------------------------------|------|---------------------------------------|--|
| | N* | C _k (N*, T)/c ₄ | N* | C _k (N*, T)/c ₄ | N* | C _k (N*, T)/c ₄ | N* | C _k (N*, T)/c ₄ | |
| 5 | 6 | 0.0772 | 11 | 0.0619 | 17 | 0.0733 | | | |
| 10 | 7 | 0.0237 | 12 | 0.0362 | 19 | 0.0428 | | | |
| 20 | 7 | 0.0237 | 13 | 0.0208 | 21 | 0.0237 | | | |
| 30 | 8 | 0.0067 | 14 | 0.0117 | 22 | 0.0164 | | | |
| 50 | 8 | 0.0067 | 15 | 0.0065 | 23 | 0.0118 | | | |
| 100 | 8 | 0.0067 | 16 | 0.0036 | 25 | 0.0068 | | | |
| 200 | 9 | 0.0018 | 17 | 0.0019 | 27 | 0.0030 | | | |
| 300 | 9 | 0.0018 | 17 | 0.0019 | 28 | 0.0021 | | | |
| 500 | 10 | 0.0005 | 18 | 0.0010 | 29 | 0.0015 | | | |
| 1000 | 10 | 0.0005 | 19 | 0.0005 | 31 | 0.0007 | | | |

4.2.5 Résultats numériques et discussions.

Soit $F(t)=1-e^{-\lambda t}$, $t \geq 0$ avec $\lambda=1$

Table 7 . c_4/c_1 , N^* , et $C_k(N^*,T)/c_4$, $k=2$.

| $1/c=c_4/c_1$ | T=10 | | T=30 | | T=50 | |
|---------------|-------|------------------|-------|------------------|-------|------------------|
| | N^* | $C_k(N^*,T)/c_4$ | N^* | $C_k(N^*,T)/c_4$ | N^* | $C_k(N^*,T)/c_4$ |
| 5 | 4 | 0.0206 | 7 | 0.0362 | 11 | 0.0477 |
| 10 | 4 | 0.0206 | 8 | 0.0184 | 12 | 0.0325 |
| 20 | 4 | 0.0206 | 9 | 0.0093 | 14 | 0.0149 |
| 30 | 5 | 0.0046 | 9 | 0.0093 | 15 | 0.01.. |
| 50 | 5 | 0.0046 | 10 | 0.0046 | 16 | 0.0067 |
| 100 | 5 | 0.0046 | 11 | 0.0023 | 17 | 0.0045 |
| 200 | 6 | 0.0010 | 11 | 0.0023 | 19 | 0.0020 |
| 300 | 6 | 0.0010 | 12 | 0.0001 | 19 | 0.0020 |
| 500 | 6 | 0.0010 | 13 | 0.0005 | 21 | 0.0009 |
| 1000 | 7 | 0.0002 | 13 | 0.0005 | 22 | 0.0006 |

Table 8 . c_4/c_1 , N^* , et $C_k(N^*,T)/c_4$, $k=3$.

| $1/c=c_4/c_1$ | T=10 | | T=30 | | T=50 | |
|---------------|-------|------------------|-------|------------------|-------|------------------|
| | N^* | $C_k(N^*,T)/c_4$ | N^* | $C_k(N^*,T)/c_4$ | N^* | $C_k(N^*,T)/c_4$ |
| 5 | 5 | 0.0445 | 9 | 0.0505 | 14 | 0.0605 |
| 10 | 5 | 0.0445 | 10 | 0.0279 | 16 | 0.0331 |
| 20 | 6 | 0.0119 | 11 | 0.0151 | 17 | 0.0234 |
| 30 | 6 | 0.0119 | 12 | 0.0081 | 18 | 0.0164 |
| 50 | 7 | 0.0030 | 12 | 0.0081 | 19 | 0.0115 |
| 100 | 7 | 0.0030 | 13 | 0.0042 | 21 | 0.0055 |
| 200 | 7 | 0.0030 | 14 | 0.0022 | 23 | 0.0026 |
| 300 | 8 | 0.0007 | 15 | 0.0011 | 24 | 0.0018 |
| 500 | 8 | 0.0007 | 15 | 0.0011 | 25 | 0.0012 |
| 1000 | 8 | 0.0007 | 16 | 0.0006 | 27 | 0.0006 |

Table 9 . c_4/c_1 , N^* , et $C_k(N^*,T)/c_4$, $k=4$.

| $1/c=c_4/c_1$ | T=10 | | T=30 | | T=50 | |
|---------------|-------|------------------|-------|------------------|-------|------------------|
| | N^* | $C_k(N^*,T)/c_4$ | N^* | $C_k(N^*,T)/c_4$ | N^* | $C_k(N^*,T)/c_4$ |
| 5 | 6 | 0.0772 | 11 | 0.0619 | 17 | 0.0785 |
| 10 | 7 | 0.0237 | 12 | 0.0362 | 19 | 0.0428 |
| 20 | 7 | 0.0237 | 13 | 0.0208 | 21 | 0.0227 |
| 30 | 8 | 0.0067 | 14 | 0.0117 | 22 | 0.0164 |
| 50 | 8 | 0.0067 | 15 | 0.0065 | 23 | 0.0118 |
| 100 | 8 | 0.0067 | 16 | 0.0036 | 25 | 0.0060 |
| 200 | 9 | 0.0018 | 17 | 0.0019 | 27 | 0.0030 |
| 300 | 9 | 0.0018 | 17 | 0.0019 | 28 | 0.0021 |
| 500 | 10 | 0.0005 | 18 | 0.0010 | 29 | 0.0015 |
| 1000 | 10 | 0.0005 | 19 | 0.0005 | 31 | 0.0007 |

Table 10 . $c_4/c_1, T^*$, et $C_k(N, T^*)/c_4, k=2$.

| $1/c=c_4/c_1$ | N=4 | | N=5 | | N=6 | |
|---------------|---------|-------------------|---------|-------------------|---------|-------------------|
| | T^* | $C_k(N, T^*)/c_4$ | T^* | $C_k(N, T^*)/c_4$ | T^* | $C_k(N, T^*)/c_4$ |
| 5 | 16.4001 | 0.0691 | 22.3001 | 0.0597 | 27.9002 | 0.0552 |
| 10 | 13.3001 | 0.0420 | 18.7008 | 0.0356 | 23.8001 | 0.0320 |
| 20 | 10.9000 | 0.0256 | 15.8001 | 0.0211 | 20.5001 | 0.0186 |
| 30 | 9.7000 | 0.0190 | 14.3000 | 0.0153 | 18.8001 | 0.0134 |
| 50 | 8.4000 | 0.0131 | 12.7000 | 0.0104 | 16.9000 | 0.0089 |
| 100 | 7.0000 | 0.0080 | 10.8000 | 0.0060 | 14.7000 | 0.0051 |
| 200 | 5.7999 | 0.0048 | 9.3000 | 0.0036 | 12.9000 | 0.0030 |
| 300 | 5.1999 | 0.0036 | 8.4999 | 0.0026 | 11.9000 | 0.0021 |
| 500 | 4.5999 | 0.0025 | 7.5999 | 0.0018 | 10.8000 | 0.0014 |
| 1000 | 3.7999 | 0.0015 | 6.4999 | 0.0010 | 9.5000 | 0.0008 |

Table 11 . $c_4/c_1, T^*$, et $C_k(N, T^*)/c_4, k=3$.

| $1/c=c_4/c_1$ | N=4 | | N=5 | | N=6 | |
|---------------|--------|-------------------|---------|-------------------|---------|-------------------|
| | T^* | $C_k(N, T^*)/c_4$ | T^* | $C_k(N, T^*)/c_4$ | T^* | $C_k(N, T^*)/c_4$ |
| 5 | 9.3202 | 0.1367 | 14.1803 | 0.1003 | 19.0304 | 0.0844 |
| 10 | 7.1301 | 0.0881 | 11.4402 | 0.0614 | 15.8303 | 0.0500 |
| 20 | 5.5001 | 0.0564 | 9.3101 | 0.0374 | 13.2902 | 0.0295 |
| 30 | 4.7500 | 0.0435 | 8.2801 | 0.0279 | 12.0402 | 0.0216 |
| 50 | 3.9500 | 0.0312 | 7.1601 | 0.0193 | 10.6602 | 0.0146 |
| 100 | 3.0900 | 0.0199 | 5.9000 | 0.0116 | 9.0701 | 0.0086 |
| 200 | 2.4300 | 0.0127 | 4.8900 | 0.0070 | 7.7401 | 0.0050 |
| 300 | 2.1100 | 0.0097 | 4.3800 | 0.0052 | 7.0701 | 0.0066 |
| 500 | 1.7699 | 0.0069 | 3.8199 | 0.0036 | 6.3101 | 0.0024 |
| 1000 | 1.3999 | 0.0044 | 3.1799 | 0.0021 | 5.4200 | 0.0014 |

Table 12 . $c_4/c_1, T^*$, et $C_k(N, T^*)/c_4, k=4$.

| $1/c=c_4/c_1$ | N=4 | | N=5 | | N=6 | |
|---------------|--------|-------------------|--------|-------------------|---------|-------------------|
| | T^* | $C_k(N, T^*)/c_4$ | T^* | $C_k(N, T^*)/c_4$ | T^* | $C_k(N, T^*)/c_4$ |
| 5 | 5.1201 | 0.3361 | 8.7502 | 0.1845 | 12.8503 | 0.1343 |
| 10 | 3.4700 | 0.2424 | 6.6301 | 0.1194 | 10.2902 | 0.0824 |
| 20 | 2.3900 | 0.1740 | 5.0900 | 0.0768 | 8.3301 | 0.0503 |
| 30 | 1.9300 | 0.1431 | 4.3800 | 0.0593 | 7.4001 | 0.0377 |
| 50 | 1.4800 | 0.1117 | 3.6300 | 0.0425 | 6.3801 | 0.0260 |
| 100 | 1.0300 | 0.0791 | 2.8400 | 0.0273 | 5.2500 | 0.0157 |
| 200 | 0.7300 | 0.0567 | 2.2200 | 0.0173 | 4.3400 | 0.0095 |
| 300 | 0.5900 | 0.0461 | 1.9300 | 0.0133 | 3.8899 | 0.0071 |
| 500 | 0.4600 | 0.0361 | 1.6200 | 0.00953 | 3.3899 | 0.0048 |
| 1000 | 0.3200 | 0.0253 | 1.2700 | 0.0060 | 2.8199 | 0.0029 |

Table 13 . c_4/c_1 , N^* , T^* et $C_k(N^*, T^*)/c_4$, $k=2$.

| $1/c=c_4/c_1$ | N^* | T^* | $C_k(N^*, T^*)/c_4$ |
|---------------|-------|---------|---------------------|
| 5 | 6 | 27.9002 | 0.0552 |
| 10 | 6 | 23.8001 | 0.0320 |
| 20 | 7 | 25.0001 | 0.0172 |
| 30 | 7 | 23.2001 | 0.0125 |
| 50 | 8 | 25.0001 | 0.0077 |
| 100 | 8 | 22.3001 | 0.0043 |
| 200 | 8 | 20.0000 | 0.0024 |
| 300 | 9 | 22.0001 | 0.0016 |
| 500 | 8 | 17.3000 | 0.0011 |
| 1000 | 9 | 18.6000 | 0.0006 |

Table 14 . c_4/c_1 , N^* , T^* et $C_k(N^*, T^*)/c_4$, $k=3$.

| $1/c=c_4/c_1$ | N^* | T^* | $C_k(N^*, T^*)/c_4$ |
|---------------|-------|---------|---------------------|
| 5 | 9 | 32.3207 | 0.0685 |
| 10 | 10 | 31.9207 | 0.0375 |
| 20 | 10 | 28.3206 | 0.0210 |
| 30 | 11 | 29.7506 | 0.01440 |
| 50 | 11 | 27.5505 | 0.0093 |
| 100 | 11 | 24.9205 | 0.0051 |
| 200 | 12 | 25.3905 | 0.0027 |
| 300 | 12 | 24.1103 | 0.0019 |
| 500 | 12 | 22.6204 | 0.0012 |
| 1000 | 13 | 23.2104 | 0.0006 |

Table 15 . c_4/c_1 , N^* , T^* et $C_k(N^*, T^*)/c_4$, $k=4$.

| $1/c=c_4/c_1$ | N^* | T^* | $C_k(N^*, T^*)/c_4$ |
|---------------|-------|---------|---------------------|
| 5 | 13 | 38.6596 | 0.0798 |
| 10 | 13 | 34.4003 | 0.0444 |
| 20 | 14 | 33.6404 | 0.0240 |
| 30 | 14 | 31.7707 | 0.0169 |
| 50 | 14 | 29.6406 | 0.0108 |
| 100 | 15 | 29.5006 | 0.0057 |
| 200 | 15 | 27.1705 | 0.0031 |
| 300 | 16 | 28.1406 | 0.0021 |
| 500 | 16 | 26.6305 | 0.0013 |
| 1000 | 16 | 24.7705 | 0.0007 |

Interprétation.

Sans perte de généralités, pour k fixé, les commentaires que l'on peut faire à partir des tables ci dessus, présentent une similitude avec ceux faits dans le cas d'un système parallèle.

Lorsque k augmente, on observe à partir des tables 7-9 que N^* augmente et à partir des tables 10-12 que T^* diminue. En effet, la croissance de k diminue la fiabilité du système; il suffit donc d'augmenter le nombre d'éléments redondants ou encore de faire le plus souvent des remplacements préventifs. De là, il nous apparaît clairement que les coûts résultants associés à N^* et T^* diminuent lorsque k augmente.

En remarquant que l'augmentation de la fiabilité (accomplie d'une manière simple à travers l'augmentation du nombre d'unités) et de sa décroissance dans le temps, les résultats présentés dans les tables 13-15 sont encore une fois conformes avec l'expérience physique courante.

(équipement à une connexion en série) peut se présenter et pour assurer un niveau désiré de performance (MTTF), la fourniture de lignes "tampon" (équivalent à un dispositif parallèle) peut être indispensable.

N. Venugopal, Y. K. Reddy & M. M. Bai [59] ont déjà considéré de tels systèmes et ont développé une méthodologie qui aboutit au système optimal améliorant ainsi les précédents travaux concernant les systèmes parallèles.

Ainsi, cette section sera consacrée à l'étude de cette classe importante de modèles. La présente ligne de travail suggérée ici est la même que celle décrite préalablement, à savoir les politiques considérées et la méthodologie développées pour aboutir au système optimal. Les résultats qui en découlent, ne sont pas seulement des généralisations mathématiques (les systèmes parallèles pouvant être considérés comme des cas particuliers de notre présent travail), mais ont, comme il a été souligné avant, une étendue importante en termes de traitements avec des systèmes complexes réels.

4.3.2 Le modèle.

Considérons un système à configuration "parallèle - série" d'ordre (N, M) , c'est à dire un dispositif composé de N branches disposées en parallèle comportant chacune M éléments connectés en série. Nous supposons la redondance active. Les éléments de ce système ($N \times M$ unités) sont statistiquement identiques.

Notations.

- $\lambda(.)$ taux de panne de chaque élément .
- $\lambda_M(N,.)$ taux de panne du système .
- $R(.)=1-F(.)$ fiabilité de chaque élément .
- $\mu_N(M)$ MTTF du système .
- $R_M(N,.) = 1 - F_M(N,.)$ fiabilité du système.

Pour ce modèle, nous développerons également la même procédure pour obtenir le nombre optimal N^* de branches et le temps d'intervention préventif T^* minimisant le coût moyen unitaire d'exploitation d'un tel système, lorsque nous adoptons les politiques A et B déjà élaborées dans le cas $M=1$.

4.3.3 Politique A.

L'espérance des coûts unitaires pour un horizon infini a pour expression:

$$C_M(N, T) = \frac{N \cdot M \cdot c_1 - c_2 \cdot \int_0^T \lambda_M(N, T) \cdot dt}{T} \tag{4.65}$$

où ,

$$\lambda_M(N, T) = -\frac{R'_M(N, T)}{R_M(N, T)} = \frac{N \cdot M \cdot \lambda(T) \cdot R^M(T) \cdot [1 - R^M(T)]^{N-1}}{1 - [1 - R^M(T)]^N} \tag{4.66}$$

Ceci est en bon accord avec (4.1) lorsque $M=1$.

4.3.3.1 Procédure optimale.

Théorème 4.7. Pour M et T fixés le nombre N^* minimisant $C_M(N, T)$ donné en (4.65) vérifie la double inégalité

$$D(M, N, T) \leq \exp\left[\frac{M \cdot c_1}{c_2}\right] < D(M, N - 1, T) \tag{4.67}$$

où ,

$$D(M,N,T) = \begin{cases} \frac{1 - [1 - R^M(T)]^{N+1}}{1 - [1 - R^M(T)]^N} & \text{si } N \geq 1 \\ +\infty & \text{sinon} \end{cases} \quad (4.68).$$

De plus, N^* est fini et unique.

Théorème 4.8. Si F est IFR, alors F_M est IFR.

Preuve. $\lambda_M(N, T)$ est une fonction dérivable en T , et sa fonction dérivée vaut

$$\lambda'_M(N, T) = \lambda_M(N, T) \cdot \left[\frac{\lambda(T)}{\lambda(T)} + \frac{M \cdot (N-1) \cdot R^M(T) \cdot \lambda(T)}{1 - R^M(T)} - M \cdot \lambda(T) + \lambda_M(N, T) \right] \quad (4.69).$$

En substituant (4.66) dans (4.69), nous obtenons:

$$\lambda'_M(N, T) = \lambda_M(N, T) \cdot \left[\frac{\lambda(T)}{\lambda(T)} + M \cdot \lambda(T) \cdot \left\{ \frac{(N-1) \cdot R^M(T)}{1 - R^M(T)} - 1 + \frac{N \cdot R^M(T) \cdot (1 - R^M(T))^{N-1}}{1 - (1 - R^M(T))^N} \right\} \right] \quad (4.70).$$

$$\text{Soit: } \Phi_M(N, T) = \frac{(N-1) \cdot R^M(T)}{1 - R^M(T)} + \frac{N \cdot R^M(T) \cdot (1 - R^M(T))^{N-1}}{1 - (1 - R^M(T))^N} - 1 \quad (4.71).$$

En posant $\varepsilon = 1 - R^M(T)$, (4.71) devient

$$\Lambda(N, \varepsilon) = \frac{(1 - \varepsilon)}{\varepsilon \cdot (1 - \varepsilon)^N} \cdot \left[N - 1 + \varepsilon^N - \sum_{i=1}^{N-1} \varepsilon^i \right] \quad (4.75)$$

qui est équivalent à

$$\Lambda(N, \varepsilon) = \frac{(1-\varepsilon)}{\varepsilon \cdot (1-\varepsilon)^N} \cdot \left[N - \sum_{i=0}^{N-1} \varepsilon^i \right] \quad (4.72).$$

Or $\varepsilon^i \leq 1, \forall i \in \{0, 1, \dots, N-1\}$ d'où, $N - \sum_{i=0}^{N-1} \varepsilon^i \geq 0$;

ce qui nous permet d'établir le théorème.

Théorème 4.9. Pour M et N fixés, la valeur T^* minimisant $C_M(N, T)$ donné en (4.65) vérifie

$$T \cdot \lambda_M(N, T) - \int_0^T \lambda_M(N, t) \cdot dt = \frac{N \cdot M \cdot c_1}{c_2} \quad (4.73).$$

Si de plus, il existe un intervalle $[a, b)$ pour lequel $\lambda_M(N, T)$ est continue et non bornée, alors la solution de (4.80) existe et est unique; sinon, l'existence d'une limite de fonctionnement T^* devient possible si $\int_0^\infty t \cdot d\lambda_M(N, t) > \frac{N \cdot c_1}{c_4}$.

4.3.4 Politique B.

Dans ce cas, la fonction objective a pour expression

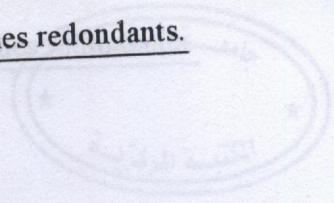
$$C_M(N, T) = \frac{N \cdot M \cdot c_1 + c_4 \cdot \int_0^T [1 - R^M(t)]^N \cdot dt}{T} \quad (4.74).$$

L'expression (4.74) est en bon accord avec (4.13) lorsque $M=1$.

4.3.4.1 Procédure optimale.

Théorème 4.10. Pour M et T fixés, le N^* minimisant $C_M(N, T)$ donné en (4.74) satisfait

$$U(M, N, T) \leq \frac{M \cdot c_1}{c_4} < U(M, N, T) \quad (4.75)$$



où, Résultats numériques et discussions.

$$U(M, N, T) = \begin{cases} \int_0^T R^M(t) \cdot [1 - R^M(t)]^N \cdot dt & \text{si } N \geq 1 \\ \int_0^T R^M(t) \cdot dt & \text{sinon} \end{cases} \quad (4.76).$$

Si de plus $\int_0^T R^M(t) \cdot dt > \frac{M \cdot c_1}{c_4}$, alors la solution de (4.75) existe et est unique.

Théorème 4.11. Pour M et N fixés, le T^* minimisant $C_M(N, T)$ donné en (4.74) satisfait l'égalité

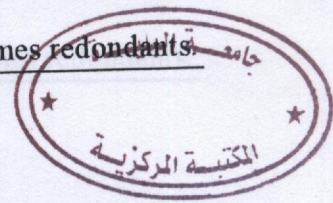
$$T \cdot [1 - R^M(T)]^N + \int_0^T [1 - R^M(t)]^N \cdot dt = \frac{N \cdot M \cdot c_1}{c_4} \quad (4.77).$$

Si de plus nous supposons que $\mu_N(M)$, existe sous des conditions classiques

$T \cdot [1 - R^M(T)]^N \rightarrow +\infty$ quand $T \rightarrow +\infty$ alors,

si $\mu_N(M) > \frac{N \cdot M \cdot c_1}{c_4}$, T^* existe et est unique.

Remarque. Tous les théorèmes cités dans le chapitre 4.4 se justifient de la même manière que dans le cas $M=1$ en substituant $F(\cdot)$ par $1 - R^M(\cdot)$.



4.3.5 Résultats numériques et discussions.

Les tableaux ci-dessous fournissent les solutions N^* , T^* et (N^*, T^*) ainsi que leurs coûts résultants correspondants.

Politique A.

$F(t) = 1 - (1 + \lambda.t).e^{-\lambda.t}$, $t \geq 0$ avec $\lambda = 1$.

Table 16 . c_1/c_2 , N^* , et $C_M(N^*, T)/c_2$, $M=2$.

| $c=c_1/c_2$ | T=0.5 | | T=1 | | T=1.5 | |
|-------------|-------|-------------------|-------|-------------------|-------|-------------------|
| | N^* | $C_M(N^*, T)/c_2$ | N^* | $C_M(N^*, T)/c_2$ | N^* | $C_M(N^*, T)/c_2$ |
| 1 | 1 | 0.6667 | 1 | 1.000 | 1 | 1.2000 |
| 0.9 | 1 | 0.6667 | 1 | 1.000 | 1 | 1.2000 |
| 0.6 | 1 | 0.6667 | 1 | 1.000 | 1 | 1.2000 |
| 0.5 | 1 | 0.6667 | 1 | 1.000 | 1 | 1.2000 |
| 0.3 | 1 | 0.6667 | 1 | 1.000 | 1 | 1.2000 |
| 0.1 | 1 | 0.6667 | 2 | 0.6289 | 3 | 0.7896 |
| 0.08 | 1 | 0.6667 | 2 | 0.6289 | 3 | 0.7896 |
| 0.005 | 3 | 0.0494 | 6 | 0.0665 | 10 | 0.1336 |
| 0.003 | 3 | 0.0494 | 6 | 0.0665 | 11 | 0.1005 |
| 0.001 | 4 | 0.0113 | 8 | 0.0185 | 14 | 0.0413 |

Table 17 . c_1/c_2 , N^* , et $C_M(N^*, T)/c_2$, $M=3$.

| $c=c_1/c_2$ | T=0.5 | | T=1 | | T=1.5 | |
|-------------|-------|-------------------|-------|-------------------|-------|-------------------|
| | N^* | $C_M(N^*, T)/c_2$ | N^* | $C_M(N^*, T)/c_2$ | N^* | $C_M(N^*, T)/c_2$ |
| 1 | 1 | 1.000 | 1 | 1.5000 | 1 | 1.8000 |
| 0.9 | 1 | 1.000 | 1 | 1.5000 | 1 | 1.8000 |
| 0.6 | 1 | 1.000 | 1 | 1.5000 | 1 | 1.8000 |
| 0.5 | 1 | 1.000 | 1 | 1.5000 | 1 | 1.8000 |
| 0.3 | 1 | 1.000 | 1 | 1.5000 | 1 | 1.8000 |
| 0.1 | 1 | 1.000 | 2 | 1.1270 | 3 | 1.4697 |
| 0.08 | 1 | 1.000 | 2 | 1.1270 | 3 | 1.4697 |
| 0.005 | 3 | 0.1399 | 7 | 0.2043 | 14 | 0.3942 |
| 0.003 | 4 | 0.0455 | 8 | 0.1389 | 16 | 0.3006 |
| 0.001 | 4 | 0.0455 | 10 | 0.0622 | 22 | 0.1274 |

Table 18 . $c_1/c_2, T^*$, et $C_M(N, T^*)/c_2, M=2$.

| $c=c_1/c_2$ | N=2 | | N=3 | | N=4 | |
|-------------|--------|-------------------|--------|-------------------|---------|-------------------|
| | T^* | $C_M(N, T^*)/c_2$ | T^* | $C_M(N, T^*)/c_2$ | T^* | $C_M(N, T^*)/c_2$ |
| 1 | 9.4001 | 1.8703 | 9.9601 | 2.0441 | 10.2901 | 2.2487 |
| 0.9 | 8.8701 | 1.8129 | 9.9601 | 2.0441 | 10.2901 | 2.2487 |
| 0.6 | 4.3500 | 1.6223 | 7.4401 | 1.7636 | 9.4001 | 1.8702 |
| 0.5 | 3.9099 | 1.5167 | 5.0000 | 1.6639 | 7.9201 | 1.7784 |
| 0.3 | 1.9599 | 1.1982 | 2.5199 | 1.3139 | 3.0999 | 1.4344 |
| 0.1 | 1.0099 | 0.6371 | 1.3299 | 0.6572 | 1.5899 | 0.7038 |
| 0.08 | 0.9099 | 0.5531 | 1.2199 | 0.5659 | 1.4599 | 0.5965 |
| 0.005 | 0.3400 | 0.0841 | 0.5599 | 0.0732 | 0.7299 | 0.0671 |
| 0.003 | 0.3000 | 0.0624 | 0.4999 | 0.0494 | 0.6699 | 0.0462 |
| 0.001 | 0.2200 | 0.0287 | 0.3899 | 0.0195 | 0.5499 | 0.0183 |

Table 19 . $c_1/c_2, T^*$, et $C_M(N, T^*)/c_2, M=3$.

| $c=c_1/c_2$ | N=2 | | N=3 | | N=4 | |
|-------------|--------|-------------------|--------|-------------------|--------|-------------------|
| | T^* | $C_M(N, T^*)/c_2$ | T^* | $C_M(N, T^*)/c_2$ | T^* | $C_M(N, T^*)/c_2$ |
| 1 | 7.1501 | 2.8887 | 7.3701 | 3.2464 | 7.5901 | 3.6399 |
| 0.9 | 7.1501 | 2.8887 | 7.3701 | 3.2464 | 7.5901 | 3.6399 |
| 0.6 | 5.0700 | 2.5066 | 6.9001 | 2.7726 | 7.3701 | 3.2464 |
| 0.5 | 3.7699 | 2.3694 | 6.2000 | 2.5999 | 7.0101 | 2.7758 |
| 0.3 | 1.9899 | 1.9261 | 2.6699 | 2.1465 | 3.6299 | 2.3455 |
| 0.1 | 0.9399 | 1.0493 | 1.2099 | 1.1292 | 1.4199 | 1.2209 |
| 0.08 | 0.8499 | 0.9258 | 1.0899 | 0.9626 | 1.2899 | 1.0417 |
| 0.005 | 0.3100 | 0.1442 | 0.4799 | 0.1221 | 0.6199 | 0.1190 |
| 0.003 | 0.2700 | 0.1040 | 0.4299 | 0.0835 | 0.5699 | 0.0831 |
| 0.001 | 0.2000 | 0.0491 | 0.3400 | 0.0348 | 0.4699 | 0.0337 |

Table 20 . $c_1/c_2, N^*, T^*$ et $C_M(N^*, T^*)/c_2, M=2$.

| $c=c_1/c_2$ | N^* | T^* | $C_M(N^*, T^*)/c_2$ |
|-------------|-------|--------|---------------------|
| 1 | 1 | 5.3100 | 1.6830 |
| 0.9 | 1 | 4.6000 | 1.6429 |
| 0.6 | 1 | 2.8099 | 1.4751 |
| 0.5 | 1 | 2.3199 | 1.3976 |
| 0.3 | 1 | 1.4399 | 1.1803 |
| 0.1 | 2 | 1.0099 | 0.6371 |
| 0.08 | 2 | 0.9099 | 0.5531 |
| 0.005 | 2 | 0.3400 | 0.0841 |
| 0.003 | 2 | 0.3000 | 0.0624 |
| 0.001 | 2 | 0.2200 | 0.0287 |

Table 21 . c_1/c_2 , N^* , T^* et $C_M(N^*, T^*)/c_2$, $M=3$.

| $c=c_1/c_2$ | N^* | T^* | $C_M(N^*, T^*)/c_2$ |
|-------------|-------|--------|---------------------|
| 1 | 1 | 5.3200 | 2.5254 |
| 0.9 | 1 | 4.6000 | 2.4646 |
| 0.6 | 1 | 2.8099 | 2.2126 |
| 0.5 | 1 | 2.3199 | 2.0964 |
| 0.3 | 1 | 1.4399 | 1.7704 |
| 0.1 | 1 | 0.6299 | 1.1595 |
| 0.08 | 2 | 0.8499 | 0.9258 |
| 0.005 | 2 | 0.3100 | 0.1442 |
| 0.003 | 2 | 0.2700 | 0.1040 |
| 0.001 | 2 | 0.2000 | 0.0491 |

Table 22 . c_1/c_2 , N^* , T^* et $C_M(N^*, T^*)/c_2$, $M=4$.

| $c=c_1/c_2$ | N^* | T^* | $C_M(N^*, T^*)/c_2$ |
|-------------|-------|--------|---------------------|
| 1 | 1 | 5.0800 | 3.3727 |
| 0.9 | 1 | 4.5500 | 3.2873 |
| 0.6 | 1 | 2.8099 | 2.9501 |
| 0.5 | 1 | 2.3199 | 2.7952 |
| 0.3 | 1 | 1.4399 | 2.3607 |
| 0.1 | 1 | 0.6299 | 1.5460 |
| 0.08 | 1 | 0.5399 | 1.4026 |
| 0.005 | 2 | 0.2900 | 0.2095 |
| 0.003 | 2 | 0.2500 | 0.1479 |
| 0.001 | 2 | 0.1800 | 0.0650 |

Interpretation.

Pour M fixé, les résultats s'interprètent de la même manière que dans le cas d'un système parallèle ($M=1$).

Lorsque M augmente, on observe à partir des tables 16 et 17 que le nombre d'éléments redondants augmente. Ceci est dû simplement au fait que la fiabilité du système diminue avec M et augmente avec N . Par contre, le comportement de T^* à partir des tables 18 et 19 mérite d'être précisé. Les coûts résultants augmentent bien sûr avec M du moment que la fiabilité diminue. Il est donc conseillé, que le nombre d'unités séries soit gardé aussi petit que possible.

Politique B.

$F(t)=1-e^{-\lambda t}, t \geq 0$ avec $\lambda=1$.

Table 23 . $c_4/c_1, N^*$, et $C_M(N^*,T)/c_4, M=2$.

| $c=c_4/c_1$ | T=0.5 | | T=1 | | T=1.5 | |
|-------------|-------|------------------|-------|------------------|-------|------------------|
| | N^* | $C_M(N^*,T)/c_4$ | N^* | $C_M(N^*,T)/c_4$ | N^* | $C_M(N^*,T)/c_4$ |
| 10 | 1 | 0.6321 | 1 | 0.8647 | 2 | 0.9029 |
| 20 | 1 | 0.6321 | 3 | 0.6465 | 4 | 0.8152 |
| 30 | 2 | 0.3996 | 4 | 0.5590 | 5 | 0.7746 |
| 50 | 3 | 0.2526 | 5 | 0.4833 | 8 | 0.6646 |
| 100 | 3 | 0.2526 | 7 | 0.3614 | 12 | 0.5418 |
| 200 | 5 | 0.1009 | 10 | 0.2336 | 18 | 0.3988 |
| 300 | 5 | 0.1009 | 12 | 0.1747 | 23 | 0.3089 |
| 600 | 6 | 0.0638 | 15 | 0.1129 | 30 | 0.2161 |
| 900 | 7 | 0.0403 | 17 | 0.0844 | 35 | 0.1673 |
| 1000 | 7 | 0.0403 | 18 | 0.0730 | 37 | 0.1511 |

Table 24 . $c_4/c_1, N^*$, et $C_M(N^*,T)/c_4, M=3$.

| $c=c_4/c_1$ | T=0.5 | | T=1 | | T=1.5 | |
|-------------|-------|------------------|-------|------------------|-------|------------------|
| | N^* | $C_M(N^*,T)/c_4$ | N^* | $C_M(N^*,T)/c_4$ | N^* | $C_M(N^*,T)/c_4$ |
| 10 | 1 | 0.7769 | 1 | 0.9502 | 1 | 0.9889 |
| 20 | 1 | 0.7769 | 2 | 0.9029 | 2 | 0.9780 |
| 30 | 2 | 0.6035 | 2 | 0.9029 | 3 | 0.9670 |
| 50 | 2 | 0.6035 | 4 | 0.8152 | 5 | 0.9457 |
| 100 | 4 | 0.3642 | 7 | 0.6994 | 9 | 0.9043 |
| 200 | 5 | 0.2830 | 12 | 0.5418 | 18 | 0.8178 |
| 300 | 6 | 0.2198 | 15 | 0.4649 | 25 | 0.7563 |
| 600 | 8 | 0.1327 | 21 | 0.3422 | 41 | 0.6325 |
| 900 | 9 | 0.1031 | 26 | 0.2651 | 54 | 0.5470 |
| 1000 | 9 | 0.1031 | 27 | 0.2519 | 58 | 0.5231 |

Table 25 . $c_4/c_1, T^*$, et $C_M(N,T^*)/c_4, M=2$.

| $c=c_4/c_1$ | N=2 | | N=3 | | N=4 | |
|-------------|--------|------------------|--------|------------------|--------|------------------|
| | T^* | $C_M(N,T^*)/c_4$ | T^* | $C_M(N,T^*)/c_4$ | T^* | $C_M(N,T^*)/c_4$ |
| 10 | 1.0754 | 0.7808 | 1.4354 | 0.8395 | 1.8054 | 0.8962 |
| 20 | 0.6716 | 0.5461 | 0.8816 | 0.5687 | 1.0716 | 0.6071 |
| 30 | 0.5416 | 0.4376 | 0.7216 | 0.4456 | 0.8815 | 0.4711 |
| 50 | 0.4217 | 0.3246 | 0.5817 | 0.3251 | 0.7117 | 0.3320 |
| 100 | 0.3104 | 0.2140 | 0.4504 | 0.2093 | 0.5604 | 0.2064 |
| 200 | 0.2401 | 0.1454 | 0.3501 | 0.1277 | 0.4501 | 0.1241 |
| 300 | 0.2067 | 0.1147 | 0.3067 | 0.0964 | 0.4067 | 0.0960 |
| 600 | 0.1533 | 0.0698 | 0.2533 | 0.0628 | 0.3333 | 0.0561 |
| 900 | 0.1322 | 0.0540 | 0.2222 | 0.0462 | 0.3022 | 0.0423 |
| 1000 | 0.1320 | 0.0538 | 0.2120 | 0.0413 | 0.2920 | 0.0382 |

Table 29 . c_4/c_1 , N^* , T^* et $C_M(N^*, T^*)/c_4$, $M=4$.

| $1/c=c_4/c_1$ | N^* | T^* | $C_M(N^*, T^*)/c_4$ |
|---------------|-------|--------|---------------------|
| 10 | ∅ | ∅ | ∅ |
| 20 | 1 | 0.7524 | 0.9507 |
| 30 | 1 | 0.4505 | 0.8351 |
| 50 | 1 | 0.2664 | 0.6945 |
| 100 | 1 | 0.1836 | 0.5202 |
| 200 | 1 | 0.1208 | 0.3833 |
| 300 | 1 | 0.0937 | 0.3126 |
| 600 | 2 | 0.1368 | 0.1775 |
| 900 | 2 | 0.1145 | 0.1350 |
| 1000 | 3 | 0.1640 | 0.1114 |

Interprétation.

Pour M fixé, idem que dans le cas parallèle.

Lorsque M augmente, les coûts résultants augmentent (pour les mêmes raisons que précédemment). cependant, contrairement à la politique A, le comportement des deux variables de décision N^* (tables 23 et 24) et T^* (tables 25 et 26) méritent d'être précisé. Nous pensons que cela est dû (intuitivement) à la présence d'éléments en série. L'étude des ordres stochastiques [51,54] pourrait éventuellement donner des éléments de réponse.

CONCLUSION

Dans cette thèse, nous avons étudié des modèles de politiques de maintenance pour des systèmes redondants, dans le cas d'actions correctives mineures et périodes d'inactivité.

Nous avons établi des conditions nécessaires et suffisantes d'existence et d'unicité de la stratégie optimale et élaboré des procédures simples de recherche des politiques optimales dans le cas où la fonction de fiabilité est IFR.

Les nombreuses expérimentations numériques sur des exemples tests montrent une bonne adéquation avec l'intuition physique. Cependant, il serait intéressant d'étudier le comportement des algorithmes de recherche pour des systèmes gouvernés par d'autres lois plus flexibles telles que les lois non paramétriques (NBU, IMRL,...). L'approche par comparabilité stochastique semble être une orientation particulièrement indiquée pour établir des propriétés qualitatives des politiques connues (y compris les nôtres) et des comparaisons entre elles. La monographie récente de Shaked & Shanthikumar [51], ainsi qu'une série de travaux récents tentent déjà de s'y consacrer, même si cela ne concerne pour l'instant que les politiques les plus classiques (âge et blocs).

Il serait intéressant également d'étudier la politique PRNMI comportant toutes les variables de décision considérées par Ait kadi & Cléroux [2], bien que dans ce cas cela conduirait à des difficultés difficilement surmontables.

- [17] M. Chandra & N. D. Singpurwalla, Relationships between notions which are common to Reliability and Economics, **Mathematics & Operations Research**, vol. 6, pp. 113-121, (1981).
- [18] D. R. Cox, **Renewal Theory**, Methuen, London, (1962).
- [19] P. C. I. Crookes, Replacement strategies, **Operations Research Quaterly**, 1963, 14, pp. 167-184.
- [20] J. V. Deshpande, S. C. Kochar & H. Singh, Aspects of positive ageing, **Journal of Applied Probability**, vol. 23, pp. 748-758, (1986).
- [21] R. F. Drenick, Mathematical aspects of the reliability problem, **J. Soc. Indust. Appl. Math.**, vol. 8, N° 1, pp. 125-149, (1960).
- [22] B. J. Flehinger, A general model for the reliability analysis of systems under various preventive maintenance policies, **Ann. Math Statist.**, 1962, vol. 33, N° 1, pp. 137-156.
- [23] G. R. Herd, Failure rates, **Arinc Monograph 2**, Aeronautical Radio. Inc., Wachington, D, C. 1955
- [24] A. H. Hevesh, Comments on: Steady-state availability of k-out-of-n: G system with single repair, **IEEE Trans. Reliability**, vol. R-13, 1984 Oct, p. 324.
- [25] T. Hirayama, M. Kijima & S. Nishimuras, Further results for dynamic scheduling of multiclass G/G/1 queues, **J. Appl. Prob**, vol. 26, pp. 595-603, (1989)
- [26] M. Hollander, H. D. Park & F. Proshan, A class of life distributions for ageing, **J. American Statistical Assoc.**, vol. 81, pp. 91-95, (1986).
- [27] H. Joe & F. Proshan, Percentile residual life functions, **Operations research**, vol. 32, pp. 668-678, (1984).
- [28] N. L. Johnson, A proof of wald's theorem on cumulative sums, **Ann. Maths Statist.**, vol. 30, N° 4, pp. 1245-1247, (1959).
- [29] B. Klefsjö, Reliability interpretations of some concepts from Economics, **Naval Research Logistics Quaterly**, vol. 31, pp. 301-308, (1984).
- [30] B. Klefsjö, Some tests against ageing based on the total time on test transform, communications in statistics, **Theory & Methods**, vol. 14, pp. 381-392, (1985)
- [31] S. C. Kochar & D. D. Wiens, Partial ordering of life distributions with respect to their ageing proprties, **Naval Research Logistic**, vol. 34, pp. 823-829, (1987).
- [32] B. Ksir & M. Bousbaha, in: Séminaire sur les applications des mathématiques et de l'informatique, **Blida 7-9 Mai 1991**

- [33] B. Ksir & M. Bousbaha, Reliability bounds and direct computation of the reliability of a consecutive k-out-of-n: F system with Marcov dependence, **Microelectron. Reliab.**, vol.33, N° 3, pp. 313-317, (1993).
- [34] K. B. Kulaseker & H. D. Park, The class of better mean residual life of age t_0 , **Microelectron. Reliab.**, vol.27, pp. 725-735, (1987).
- [35] M. T. Lai & J. Yuan, Optimal replacement policy (N^*, n^*) for a parallel system with common cause failure and geometric repair time, **Microelectron. Reliab.**, vol.30, N° 5, pp. 973-982, (1990).
- [36] R. C. Laumer, Inequalities for NBUE and NWUE life distributions, **Operations Research**, vol. 32, pp. 660-667, (1984).
- [37] D. G. Lington, J. G. Saw, Reliability analysis of the k-out-of-n: F system, **IEEE Trans. Reliability**, vol. R-29, 1980 Jun, pp. 97-103.
- [38] W. Y. Loh, A new generalization of NBU distribution, **IEEE Trans. Reliability**, vol. R-33, pp. 419-422, (1984).
- [39] M. O Lorenz, Methods of measuring the concentration of Wealth, **J. of American Statistical Association**, vol. 9, pp. 209-219, (1983).
- [40] A. J. Lotka, A contribution to the theory of self renewing aggregates with special reference to industrial replacement, **Ann. Math. Statist.**, vol. 10, pp. 1-25, (1941).
- [41] H. Morimura, On some preventive maintenance policies for IFR, **J. Operations Research Soc. of Japan**, vol. 12, N° 3, pp.94-124, (1970).
- [42] T. Nakagawa, Replacement problem of a parallel system in random environment, **J.Appl.Prob.**, 16, pp. 203-205, (1979).
- [43] T. Nakagawa, A summary of periodic replacement with minimal repair at failure, **J. Operations Research Soc. of Japan**, vol. 24, pp. 213-227, (1981).
- [44] T. Nakagawa, A modified block replacement with two variables, **IEEE Trans. Reliability**, vol. 31, pp. 398-400, (1982).
- [45] T. Nakagawa, Optimum number of units for a parallel system, **J.Appl.Prob.**, vol. 21, pp. 431-436, (1984).
- [46] T. Nakagawa, Optimisation problem in k-out-of-n systems, **IEEE Trans. Reliability**, vol. 31, pp. 401-405, (1982).
- [47] N. Oukid, Comparaison stochastique de files d'attente, Thèse de magister, **Institut de mathématiques appliquées, Blida**, juin 1995.
- [48] M. J. Phillips, "k-out-of-n: G system are preferable", **IEEE Trans. Reliability**, vol. R-29, 1980 Jun, pp. 166-169.

- [49] C. R. Reddy, Optimisation of k-out-of n systems subject to common cause failures with repair provision, *Microelectron. Reliab.*, vol.33, No. 2, pp.175-183, (1993).
- [50] T. Rolsky, Mean residual life, *Bull. Int. Statistics Inst.*, vol. 46, pp. 266-270, (1975).
- [51] J. Shaked & N. Shanthikumar, Stochastic orders and their applications, *Academic Press, New York*, 1994.
- [52] H. Singh & J. V. Deshpande, On some new ageing properties, *Scandinavian, J. Statistics*, vol. 12, pp. 213-320, (1985).
- [53] J. L. Soler, Notes de cours, DEA de recherche operationnelle et statistiques, *ENISMAG., Grenoble*, (1985-1986)
- [54] D. Stoyan, Comparison Methods for Queueing Models and Other Stochastic Models, *Wiley*, (1993).
- [55] T. Tango, Extended block replacement policy with used items, *Journal of Applied Probability*, 1978, 15, pp. 560-572.
- [56] C. Tilquin & R. Cléroux, Periodic replacement with minimal repair at failure and adjustments costs, *Naval Research Logistics Quaterly*, vol. 22, N° 2, pp.243-254, (1975).
- [57] N. Venugopal, C. R. Reddy & M. Meenakshi Bai, Cost optimal, parallel repair systems with fixed repair sanctions, *Microelectron. Reliab.*, vol.27, pp. 419-422, (1987).
- [58] N. Venugopal, C. R. Reddy & M. Meenakshi Bai, Cost optimal - (N^*, n^*) parallel reliability systems, *Int. J. Systems Sci.*, vol.19, pp. 1623-1629, (1988).
- [59] N. Venugopal, Y. K. Reddy & M. Meenakshi Bai, Cost-space (N^*, m, n^*) parallel-series systems, *Microelectron. Reliab.*, vol.29, N° 1, pp. 9-15, (1989).
- [60] N. Venugopal, S. Shaffi Ahamed & C. Rami Reddy, Optimal repair stage for k-out-of-n systems, *Microelectron. Reliab.*, vol.29, N° 1, pp. 17-19, (1989).
- [61] G. Weiss, On the theory of replacement of machinery with a random failures time, *Naval Research Logistics Quaterly*, vol. 3, N° 4, pp.279-293 (1956).
- [62] G. Weiss, The reliability of a redundant system which operates repetitively, *Navord 4348, Naval Ordnance Laboratory, White Oak, Maryland*, (1956).
- [63] G. Weiss, On some economic factors influencing areability program, *Navord 4256, Naval Ordnance Laboratory, White Oak, Maryland*, (1956).
- [64] G. Weiss, A note the coincidence of some fonctions, *Quart. Appl.Math.*, vol.14, N° 1, pp.103-107, (1956).
- [65] E. L. Welber, Relationship between equipment reliability preventive maintenance policy, and operating costs, *ARINC Monograph 7, Aeronautical Radio Inc., Wachington, D. C.*, (1959).

[66] K. Yasui & T. Nakagawa, A summary of optimum replacement policies for a parallel redundant system, **Microelectron. Reliab.**, vol. 28, N° 4, pp. 635-641, (1988).

[67] W. Y. Yun & B. S. Bai, Optimal numbers of redundant units for parallel systems with common mode failures, **Reliability Engineering**, 16, pp. 201-206, (1986).

فہرست :
فہرست :
فہرست :
فہرست :