

REPUBLIQUE ALGERIENNE DEMOCRATIQUE ET POPULAIRE
MINISTRE DE L'ENSEIGNEMENT SUPERIEUR ET DE LA RECHERCHE SCIENTIFIQUE



UNIVERSITE SAAD DAHLEB DE BLIDA



Institut d'Aéronautique et des Etudes
Spatiales de Blida

MEMOIRE DE FIN D'ETUDES

Pour l'obtention du diplôme Master en Aéronautique

Option : Propulsion avion

THEME :

*Etude Thermomécanique Des Disques Des
Turbines Axiales Par La Méthode Des
Éléments Finis*

Présenté par:

M^r .DEBBAB Abdessamed
M^r .MOKHTARI Merzoug

Promoteur:

M^r. A.BADEREDDINE.

Promotion 2013/2014

Remerciements

Il n'est meilleur remerciement que notre reconnaissance à **DIEU LE TOUT PUISSANT** qui nous a donné du courage et de la volonté pour pouvoir accomplir ce présent travail.

Travail présenté dans ce mémoire a été effectué au sein de l'institut d'Aéronautique de Blida sous la direction de notre promoteur **Mr Badereddine**, à qui on présente notre profonde gratitude et notre vif et sincère remerciement pour avoir accepté de diriger ce travail, pour ses disponibilité, tous les conseils et pour les encouragements qu'il nous a prodigués pendant toute la durée de ce travail.

On tient à remercier également tout le corps professorats de l'institut d'Aéronautique. On exprime notre remerciements aux membres du jury de nous avoir honoré en acceptant de juger notre travail.

Enfin, on exprime notre très grande reconnaissance à nos familles, nos parents, et nos frères pour nous avoir encouragés, pour tous les soucis qu'on leur a causés et surtout pour avoir été toujours auprès de nous.

Résumé

Les disques des turbines à gaz fonctionnent généralement à des gradients de température et des vitesses angulaires élevés. L'application simultanée des grandes forces centrifuges, induites par les grandes vitesses des rotations, et des contraintes thermiques, provoquées par les gradients thermiques élevés, réduit la résistance du matériau et font augmenter automatiquement la déformation du disque.

L'objectif principal de cette thèse est alors de déterminer la distribution des contraintes dans les différentes parties du disque en vue d'en adopter une judicieuse configuration.

La simulation est effectuée principalement sur le logiciel (ANSYS 15) et comparée à notre programme de calcul basé sur la méthode des éléments finis monodimensionnelle pour la partie poireau du disque, d'une part ; et montre bien l'intérêt du modèle bidimensionnel aux niveaux de la jante et de l'attache, d'autre part. De plus, le disque avec aubage est pris en compte par un modèle tridimensionnel justifié par la forme épaisse du disque, par les formes inclinées des attaches et par la présence des trous de refroidissement.

Abstract

Gas turbine discs work mostly at high temperature gradients and are subjected to high angular velocity. Simultaneous application of large centrifugal forces, induced by high rotational speed, and thermic stresses, resulting from high temperature gradients, reduces disc material strength. Thus, the latter effects increase deformation of the disc automatically. In order to attain a certain and reliable analysis for disc and to derive corresponding stress distribution,

The main objective of this thesis is to determine these stresses for a turbine disk with a particular given angular velocity and temperature gradient. The results are obtained by using analytic analyze, finite element method and ANSYS 15 code.

Table des Matières

Remerciements.....	i
Résumé-abstract.....	ii
Table des matières.....	iii
Liste des Symboles.....	vi
Liste des figures.....	vii
Liste des tableaux.....	ix
Introduction.....	x
CHAPITRE I : GENERALITES	
I.1 Bref historique sur l'étude des disques	1
I.1 Etude Technologique.....	2
I.1.1 Introduction	2
I.1.2 Rôle et importance des disques.....	2
I.1.3 Description Technologique.....	3
I.1.4 Les différents types des attaches disque-aubes.....	4
I.2 Quelques cas des disques.....	5
I.2.1 Disque de soufflante.....	5
I.2.2 Disques des Compresseur HP et des Turbine BP.....	5
I.2.3 Disques des Turbine HP.....	6
I.3 Matériaux des Disques de Turbine Moderne.....	6
I.3.1 Caractéristiques des superalliages.....	6
I.3.2 Principaux types d'alliages.....	7
CHAPITRE II : ETUDE MECANIQUE DES DISQUES	
II.1 Sollicitations Dans Un Disque.....	11
II.2 Equilibre d'un disque.....	11
II.2.1 Mécanique des Milieux Continus	11
II.2.2 Notion des contraintes mécaniques.....	12
II.2.3 Equations d'élasticité linéaire	13
II.2.4 Equations d'équilibre d'un milieu continu.....	13
II.2.5 Théorie de déformation.....	14

II.2.6	Equations de constitution.....	14
II.2.7	Condition de résistance.....	15
II.3	Modèle Monodimensionnelle.....	16
II.3.1	Résolution d'un Modelé	17
II.3.2	Disque avec Jante.....	18
II.3.3	Jante et disque.....	19

CHAPITRE III : MODELISATION THERMO-MECANIQUE DES DISQUES

III.1	Echanges Thermique dans les Turboréacteurs.....	21
III.1.1	Chambre de combustion.....	21
III.1.2	Aubes de turbine.....	21
III.1.3	Disques des turbines.....	21
III.2	L'équation de Conduction pour un Disque.....	22
III.2.1	Introduction	22
III.2.2	Transitoire thermique.....	23
III.3	Thermo-élasticité.....	26
III.3.1	Mise en évidence.....	26
III.3.2	Loi de Hooke-Duhamel.....	27
III.3.3	Le problème de thermo-élasticité.....	27
III.3.3	Méthodes de résolution.....	28
III.4	Modèle Monodimensionnelle.....	29
III.4.1	Cas particulier du disque d'épaisseur constante.....	30
III.5	Critère de Dimensionnement.....	33
III.5.1	Spécifications techniques et choix fondamentaux.....	33
III.5.2	Survitesse.....	34
III.5.3	Notion de contrainte moyenne.....	34
III.5.4	Non linéarités et instabilités.....	36
III.5.5	Fluage.....	38
III.5.6	Fatigue Oligocylique.....	39
III.5.7	Tolérance au dommage.....	39

III.5.8	Choix de la Géométrie.....	40
III.5.9	Processus D'optimisation.....	44
CHAPITRE IV : MODELE THERMOELASTIQUE QUASI- MONODIMENSIONNEL		
IV.1	Modèle Thermoélastique	45
IV.1.1	Hypothèses.....	45
IV.1.2	Mise en équations.....	45
IV.1.3	Modélisation quasi-monodimensionnel.....	46
IV.2	Discrétisation du modelé.....	47
IV.2.1	Principes de base de la Méthode d'élément finit.....	48
IV.2.2	Formulation « Galerkin » de la MEF.....	48
IV.3	Méthode de Résolution.....	49
CHAPITRE V : RESULTATS ET INTERPRETATIONS		
V.1	Organigramme.....	53
V.2	Le modèle de Calcul monodimensionnel.....	54
V.2.1	Calcul des contraintes- solution analytique	54
V.2.2	Comparaison des résultats	55
V.3	Le modèle de Calcul Bidimensionnel.....	58
V.3.1	Calcul des contraintes avec chargement extérieurs - solution Analytique.....	58
V.3.2	Comparaison des résultats	59
V.3.3	Disque avec l'attache.....	60
V.4	Le modèle de Calcul tridimensionnel.....	65
V.4.1	La géométrie d'un disque en 3D.....	65
V.4.2	Calcul les contraintes.....	66
	Conclusion.....	68
	Bibliographies	69
	Annexe A.....	71
	Annexe B.....	80
	Annexe C.....	88

Liste des Symboles

σ_n	Contrainte normal	[Pa]
$\sigma_{\theta\theta}$	Contrainte tangentielle	[Pa]
σ_{rr}	Contrainte radiale	[Pa]
σ_{ij}	Tenseur des contraintes	[Pa]
ε_{ij}	Tenseur des déformations	[-]
γ	Glissement	[-]
F	Forces	[N]
F_c	Force de centrifuge	[N]
g	Accélération de la pesanteur	[m/s ²]
h	Epaisseur axiale d'un disque	[m]
ρ	Densité massique	[Kg/m ³]
λ	Conductivité thermique	[W m ² /K]
P	Pression	[Pa]
Ω	Vitesse de rotation	[rads ⁻¹]
t	Temps	[s]
T	Température	[K]
u_i	Champs du déplacement	[m]
E	Module d'Elasticité longitudinale	[Pa]
G	Modules d'élasticité transversale	[Pa]
$\varepsilon_{\theta\theta}$	Déformation tangentielle	[-]
ε_{rr}	Déformation radiale	[-]
σ_p	Contrainte principale	[Pa]
τ_{ij}	Contraintes de cisaillement	[Pa]
r	Rayon	[m]
μ	Coefficient de Poisson	[-]
Q	Flux de chaleur	[W/Kg]
L	Longueur	[m]
α	Coefficient de convection	[W/m ² /K]
C_p	Chaleur spécifique	[J/kgK]
Q	La puissance calorifique	[W/Kg]
α	Coefficient de dilatation linéique	[m/K]
S	Section	[m ²]
V	Volume	[m ³]
x, y, z	Coordonnées Cartésiennes	[-]
HP	haut pression	
BP	base pression	
MEF	méthode d'élément fini	
CAO	Conception Assistée par Ordinateur	

Indices

e, i	Extérieur et intérieur
a	Alésage
d	Disque
j	Jante

Liste des figures

Chapitre I :

Figure I.1	Description technologie d'un disque.....	03
Figure I.2	Les différents types des attaches disque-aubes.....	04
Figure I.3	Les différents types des attaches disque-aubes.....	04
Figure I.4	Disque de soufflante.....	05
Figure I.5	Disques des Compresseur HP et des Turbine BP.....	05
Figure I.6	Disques des Turbine HP.....	06
Figure I.7	Propriétés mécaniques de Waspalloy.....	09
Figure I.8	Propriétés mécaniques d'Udimet 720.....	10

Chapitre II :

Figure II.1	Notion des contraintes.....	12
Figure II.2	Equations de MMC.....	13
Figure II.3	Le problème de la fixation des aubes.....	18
Figure II.4	Le jante et disque d'épaisseur constante.....	19
Figure II.5	Conditions de liaison jante et disque.....	20

Chapitre III :

Figure III.1	Conduction pour un cylindre creux mono et multicouche.....	23
Figure III.2	Transitoire thermique.....	25
Figure III.3	Etapas pour résoudre le modèle.....	29
Figure III.4	Contraintes thermiques dans un disque.....	30
Figure III.5	Cas particulier du disque d'épaisseur constante.....	33
Figure III.6	Notion de contrainte moyenne.....	36
Figure III.7	Non linéarités des chargements et de géométrie.....	38
Figure III.8	Notion de rayon critique.....	42
Figure III.9	Effet d'un épaissement sur la contrainte à l'alésage.....	44

Chapitre IV :

Figure IV.1	Elément du disque.....	45
Figure IV.2	Les efforts sur un disque.....	46
Figure IV.3	élément linéaire à deux nœuds.....	49

Chapitre V :

Figure V-1	les contraintes tangentielle et radiales.....	59
Figure V-2	le profil de la température appliquée.....	60
Figure V-3	les contraintes tangentielle et radiale.....	62
Figure V.7	Comparaison des contraintes avec l'ANSYS 15.....	62
Figure V.8	Comparaison des déplacements avec l'ANSYS 15.....	63
Figure V.9	Comparaison des déformations élastique avec l'ANSYS 15.....	63
Figure V.10	Comparaison des contraintes entre l'analytique et MEF.....	65
Figure V.11	La géométrie d'un disque avec une charge extérieur.....	65
Figure V-12	Comparaison des contraintes avec l'ANSYS 15.....	66
Figure V-13.a	Dessin d'ensemble disque avec aubes.....	66
Figure V-13.b	Géométrie de l'attache.....	67
Figure V-13.c	Région de contact.....	67
Figure V-14	Les Contraintes dans la région de contact sans frottement.....	68
Figure V-15.a	Contraintes équivalant avec l'attache sans frottement.....	68
Figure V-15.b	Les Contraintes dans la région de contact sans frottement.....	68
Figure V-16	Les Contraintes dans la région de contact avec frottement ($f=0,4$)	69
Figure V-17.a	Contraintes équivalant avec frottement en région de contact..	69
Figure V-17.b	Contraintes équivalant avec l'attache avec frottement.....	69
Figure V-18	Attache en 3D.....	70
Figure V-19	Contraintes équivalant en 3D.....	70
Figure V-20	Modèle D'un Disque en 3D.....	71
Figure V-21.a	Section 01.....	71
Figure V-21.b	Section 02.....	72
Figure V-21.c	Section 03.....	72
Figure V-22.a	Les contraintes équivalents pour section 01.....	72
Figure V-22.b	Les contraintes équivalents pour section 02.....	73
Figure V-19	Les contraintes équivalents.....	72
Figure V-20	Les contraintes équivalents à la section 01.....	72
Figure V-21	Les contraintes équivalents à la section 02.....	73

Figure V-22.c Les contraintes équivalents pour section 03.....	73
--	----

Liste des tableaux

Chapitre I :

Tableau I-1 les Propriétés Mécaniques et Thermique d’Inconel 718.....	08
---	----

Chapitre V :

Tableau V-1 Caractéristiques du disque sans attache.....	61
--	----

Tableau V-2 Caractéristique du disque avec chargement extérieur.....	66
--	----

Introduction

Il y a de nombreuses utilisations de disques de turbine dans l'industrie aérospatiale. Comme dans les turboréacteurs, ces disques fonctionnent normalement sous des hautes températures et sont soumis aux vitesses angulaires élevées. La réduction au minimum de la masse de tels organes a comme conséquence les avantages au point de vue poids et coûts minimum de l'engin.

Notre thèse est portée sur l'étude thermomécanique des disques des turbines axiales soumises à des contraintes mécaniques dues aux efforts centrifuges ; d'une part, et aux contraintes thermiques dues aux gradients des températures élevées ; d'autre part. Le but est alors la détermination de ces contraintes pour un disque à une vitesse de rotation et un champ des températures donnés.

Pour cela, notre travail est reparti en cinq chapitres. En premier lieu, nous avons consacré une étude générale comprenant un historique et une étude technologique du disque.

Au chapitre II, notre étude s'est portée sur la modélisation structurale, du point de vue mécanique des milieux continus, du disque soumis aux efforts centrifuges. Pour concrétiser notre étude, une solution analytique pour un modèle monodimensionnel est présentée permettant l'obtention des contraintes mécaniques et les déformations dans les disques.

Pour tenir compte de l'effet de la température, nous avons continué la modélisation thermomécanique de la structure du disque au chapitre III. Pour caractériser les effets des températures, nous avons considéré une solution analytique du modèle monodimensionnel pour déduire les contraintes thermiques.

Afin de prendre en considération l'effet de variation de l'épaisseur du disque, le modèle thermo-élastique quasi-monodimensionnel axisymétrique est adopté au chapitre IV. La procédure de résolution des équations est effectuée par la méthode des éléments finis pour différentes lois de températures proposées au disque.

Au dernier chapitre, nous avons présenté les différents résultats du programme de calcul, écrit sous **MATLAB**, et comparés avec la solution analytique. Et le logiciel de calcul **ANSYS 15**.

Enfin, le travail est clôturé par une conclusion générale.

CHAPITRE I



GENERALITES

I.1 Bref historique sur l'étude des disques

Dans les systèmes de propulsion avancés, un disque de turbine porte de grandes charges mécaniques et thermiques dans ses conditions de fonctionnement (température de hauts gradients et vitesse de rotation élevée), qui peuvent induire des contraintes intensives et des dégâts dangereux. Un objectif significatif de l'optimisation de la forme du disque de turbine est de réduire au minimum sa masse sujette aux conditions sur les contraintes et quelques autres conditions pratiques.

De toute évidence, une méthode d'optimisation efficace est très utile pour améliorer la qualité du disque de turbine et donc d'améliorer le rapport poussée-poids du moteur, poussée-poids élevé, et la fiabilité du système.

Timoshenko ^[1] était le premier à obtenir une solution analytique pour les disques tournants homogènes sans gradient de température.

Kollman ^[2] a résolu le problème du disque à double couches, adaptés par frettage, en utilisant le critère de Tresca (critère de la contrainte de cisaillement maximal).

Jahed et Dubey ^[3] ont proposé une méthode pour les propriétés variable du matériau afin d'analyser les problèmes axisymétriques. Jahed et Sherkati ^[4] puis Jahed et Shirazi ^[5] ont appliqué cette méthode aux disques tournants non homogènes avec épaisseurs variables.

Fox ^[6] à utiliser la méthode du gradient pour le calcul d'optimisation des disques tournants. Zienkiewicz et Campbell ^[7], Wang et Gallagher ^[8], Peterson ^[9] ont utilisé la méthode de programmation linéaire séquentielle pour l'optimisation du profil tournant de disque. En outre, dans une approche différente basée sur la méthode des éléments finis, Chen Cheu ^[10] a optimisé le profil tournant du disque par la méthode de programmation linéaire séquentielle d'optimisation.

I.2 Etude Technologique

I.2.1 Introduction

Les besoins dans la conception de moteurs d'avions demandent la grande puissance, le poids réduit, la sécurité de vol et la haute performance du moteur. Cependant, cela implique moins d'étages de compresseur et turbine qui sont beaucoup plus chargés et fonctionnent à plus hautes températures.

Les disques turbines fonctionnent dans la plus chaude section du moteur, à savoir une des parties la plus chères. Les disques sont classifiés comme composants les plus importants du moteur « critical components », puisque la panne d'un disque est catastrophique à la structure.

I.2.2 Rôle et importance des disques [16]

Dans les turbomachines, les disques sont les pièces qui retiennent les aubes mobiles et leurs assemblages constituent les rotors. La rupture d'un disque représente un des risques les plus graves pour la sécurité de l'appareil :

- Sous l'effet du champ centrifuge, un disque qui rompt, s'éclate en plusieurs fragments.
- Ces derniers sont autant de projectiles perforants capables, du fait de leurs très grandes énergies cinétiques, de percer plusieurs dizaines de millimètres de blindage en acier.
- Les aubes libérées risquent également de provoquer d'importants dégâts.
- Enfin, suivant la position du disque, le compresseur et la turbine peuvent se retrouver désolidarisés avec pour conséquence un risque d'éclatement pour l'ensemble du moteur.

On estime que la rétention des disques (c.à.d. le maintien de tout fragment consécutif à la rupture d'un disque, à l'intérieur de l'enveloppe moteur) conduirait à une augmentation de 40 à 50% de la masse des moteurs civils à grand taux de dilution ; c'est aujourd'hui jugé inacceptable eu égard aux exigences de masse.

C'est pourquoi, le concepteur doit garantir l'intégrité de ces pièces ; de ce fait :

- Leur dimensionnement fait donc appel à des méthodes d'analyse fine,
- Leur fabrication requiert des gammes de fabrication figées,
- Leur maintien et leur suivi en exploitation obéissent à des règles strictes.

I.2.3 Description Technologique [16]

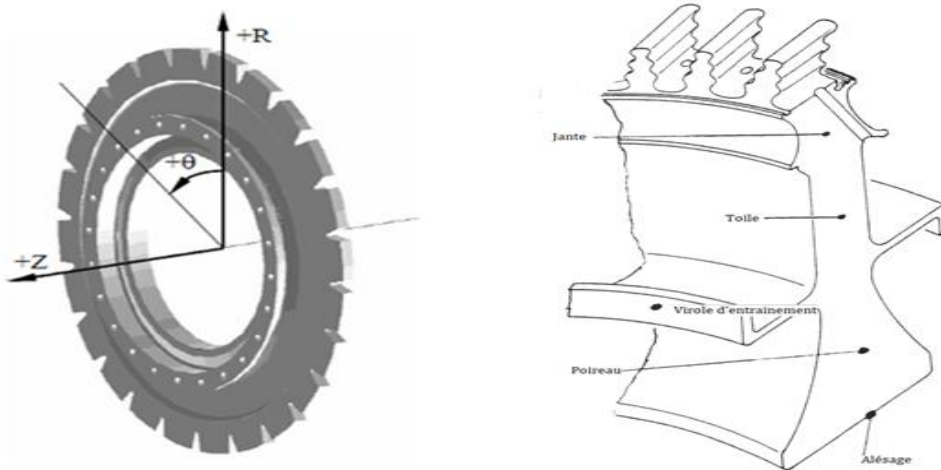


Figure I.1 Description technologique d'un disque

Un disque peut prendre diverses formes suivant sa :

- Situation dans le moteur,
- L'intensité du champ centrifuge,
- La force des aubes et leur nombre,

D'une façon générale il comporte :

- A l'intérieur une zone de transition ou jante qui assure la transition entre l'ensemble discret constitué des aubes et le reste du disque qui est axisymétrique.
- Au rayon intérieur un alésage qui permet le passage d'un arbre ou de tout autre conduit dans l'axe du moteur.

On distingue les différentes zones telles que la jante, la toile, la virole d'entraînement, le poireau et l'alésage. La liaison entre disques est soit assurée par des boulons, soit obtenue par soudure.

I.2.4 Les différents types des attaches disque-aubes

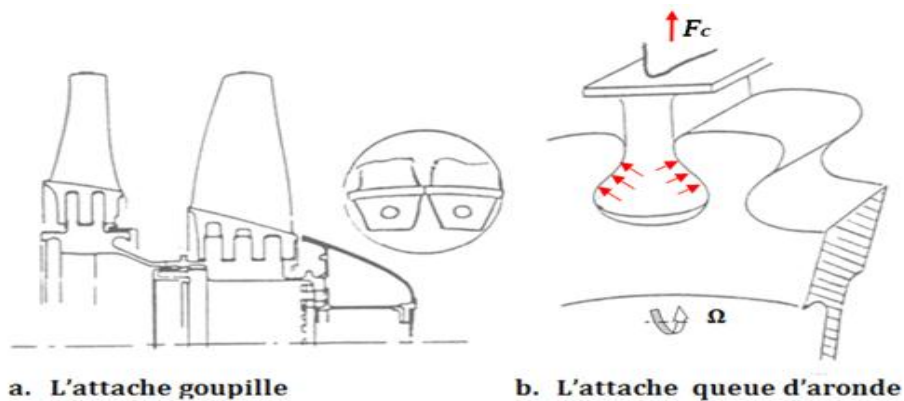


Figure I.2 Les différents types des attaches disque-aubes

a. L'attache goupille

Elle est simple, peu couteuse mais lourde et encombrante. Elle ne s'utilise pratiquement plus.

b. L'attache queue d'aronde

C'est la plus utilisée car elle est simple et efficace. Les aubes sont arrêtées axialement par un flasque.

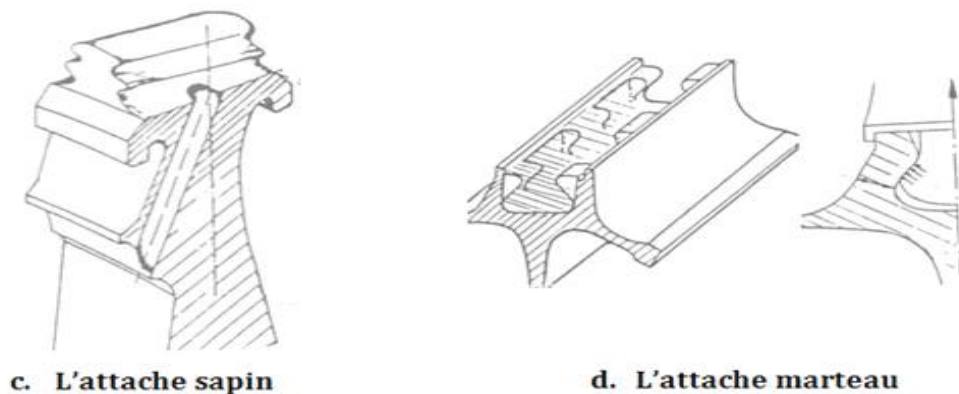


Figure I.3 Les différents types des attaches disque-aubes

c. L'attache sapin

Elle est employée lorsqu'en présence de forces centrifuges très importantes où l'attache queue d'aronde ne convient plus de fait d'une pression de matage et d'une flexion des dents trop importantes. On la trouve surtout sur les aubes de turbine **HP**.

d. L'attache marteau

Par rapport à l'attache queue d'aronde, elle est :

- Moins chère dans l'usinage du disque ;

- Moins encombrante (plus grand nombre d'aubes possible à même rayon d'ancrage) ;
- Plus étanche vis-à-vis des recirculations (*améliore les performances aérodynamiques*).

Pour l'attache marteau, sa limite réside dans sa conception même ; qui conduit à épaissir les joues du disque et par conséquent augmenter la masse du disque si les efforts centrifuges sont élevés.

I.3 Quelques cas de disques ^[16]

I.3.1 Disque de soufflante :

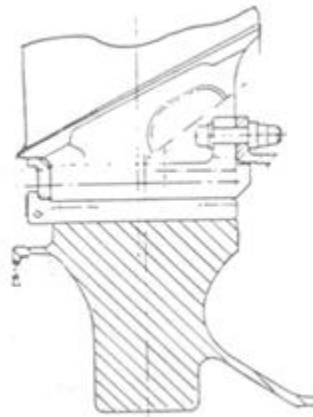


Figure I.4 Disque de soufflante

La matière peut être mise à tout rayon puisqu'elle génère peu d'effort centrifuge. D'où des géométries telles que celle présentée au niveau de l'attache ont conduit à épaissir le disque au rayon extérieur.

I.3.2 Disques des Compresseur HP et des Turbine BP

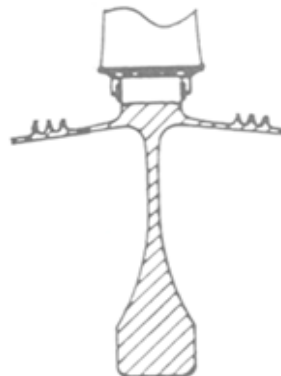


Figure I.5 Disques des Compresseur HP et des Turbine BP

Sur ces disques les efforts centrifuges des aubes étant modères, la solution du disque d'égale contrainte donne une épaisseur sous jante trop faible (difficulté de fabrication et sensibilité à tout défaut). C'est pourquoi ces disques sont d'abord à épaisseur constante.

I.3.3 Disques des Turbine HP

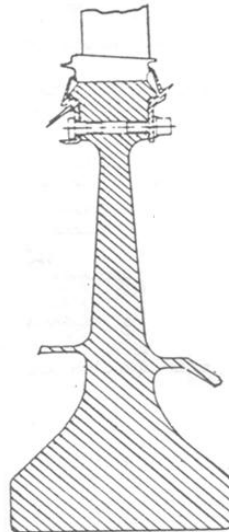


Figure I.6 Disques des Turbine HP

C'est le cas typique du disque d'abord d'égale résistance, très large en bas en raison de l'importance des efforts centrifuges. A noter que dans ce cas il y a intérêt à aléser au rayon le plus faible possible. La limitation provient en général du diamètre de l'arbre **BP**, diamètre qui doit être le plus élevé possible pour éviter les vitesses critiques associées aux premiers modes de flexion.

I.4 Matériaux des Disques de Turbine Moderne^[17]

Ces pièces tournées, de formes complexes, sont construites par des superalliages difficiles à usiner comme l'Inconel 718, le Waspalloy et l'Udimet 720.

I.4.1 Caractéristiques des superalliages

Les superalliages sont des alliages complexes de matériaux métalliques, essentiellement à base de nickel ou de cobalt, dotés d'une bonne tenue mécanique à haute température (au-delà de 500 à 550 °C) et d'une certaine résistance à l'oxydation ou à la corrosion à chaud.

Ils sont utilisés pour la réalisation de turbines à gaz industrielles ou marines, de turbomachines aéronautiques et, de façon plus limitée, dans l'industrie des fours et l'industrie chimique.

Pour limiter les déformations, les pièces doivent avoir l'élasticité la plus élevée possible pour pouvoir supporter une charge instantanée élevée (survitesse d'un disque de turbine) ou une bonne tenue au fluage pour limiter les déformations viscoplastiques sous l'effet d'une contrainte moyenne élevée ; ces propriétés sont relativement faciles à quantifier.

Il n'en est pas de même pour la tenue en fatigues mécanique ou thermique, qui correspondent soit à des vibrations pour la fatigue haute fréquence, soit à des répétitions cycliques des contraintes (démarrages et arrêts), pour lesquelles interviennent également les autres caractéristiques du cycle et la corrosion. Les lois de comportement sous fatigues brutales et élevées, en vitesse de propagation, ainsi que la ténacité doivent être déterminées pour prévoir la rupture finale.

Dans le choix des matériaux et de leurs conditions de traitement, il faut toutefois tenir compte des caractéristiques associées : une limite élastique très élevée risque de correspondre à une faible ténacité ; une structure à gros grains améliore la tenue au fluage mais diminue la tenue en fatigue.

I.4.2 Principaux types d'alliages

a. l'Inconel 718 :

L'Inconel 718 ou NC19FeNb (norme AFNOR) est l'alliage à base de Nickel le plus utilisé pour la fabrication des pièces dont les températures de service sont élevées, comprises entre 540°C et 700°C, sans réduction préjudiciable de leur résistance.

Il est largement utilisé par les industries aéronautiques (fabrication des disques de turbine dans un moteur d'avion (ex : CFM56 de la société SNECMA), pièces de la pompe à hydrogène du moteur pour Ariane).

Il constitue, également, la matière de base pour les roues et pour l'arbre arrière des turbines à gaz. Cet alliage a été mis au point en 1959 par Herb EISELSTEIN [Alex-2004] pour le compte de la société Huntington Alloy Products Division.

L'industrialisation de l'Inconel a commencé en 1980 suite à la crise du cobalt, qui est présent en quantité non négligeable dans le WASPALOY (NC20K14). Cette industrialisation a permis à l'alliage 718 de devenir le superalliage le plus utilisé actuellement. La consommation de SNECMA Moteurs est comprise entre 500 et 1000 tonnes par an.

L'Inconel 718 est un alliage ayant d'excellentes performances jusqu'à 550/600 °C. Les applications comprennent les disques de turbine forgés, l'ensemble mécano-soudés grâce à son excellente soudabilité, les grands carters en coulée de précision, la boulonnerie à chaud ; ses caractéristiques à basse température le font utiliser en cryogénie.

Température en °C	Module d'élasticité en MPa		Coefficient de Poisson
	Module de Young	Module de Torsion	
158	199,948	77,221	0,294
212	198,569	77,221	0,291
392	195,811	75,842	0,288
572	193,053	75,153	0,280
752	190,295	74,463	0,280
932	186,848	73,084	0,275
1112	184,090	72,395	0,272
1292	180,643	71,016	0,273
1472	177,885	69,637	0,271
1652	174,437	68,258	0,272
1832	170,990	66,879	0,271
2012	166,853	65,500	0,276
2192	163,406	63,432	0,283
2372	158,579	61,363	0,292
2552	153,753	58,605	0,306
2732	146,858	55,848	0,321
2912	139,274	52,400	0,331
3092	129,621	48,953	0,334
3272	119,969	44,816	0,341
3452	109,627	39,990	0,366
3632	98,595	35,163	0,402

Température en °C	Conductivité thermique en W /m.s².°F	Coefficient de dilatation thermique en 1/°C*10 ⁻⁶
-544	-	10,62
158	6,170	-
392	6,891	13,158
752	7,852	13,554
1112	8,894	13,932
1472	9,856	14,346
1832	10,817	14,562
2192	11,779	15,102
2552	12,820	16,038
2912	13,862	-
3272	14,823	-
3632	15,705	-

Tableau I.1 les Propriétés Mécaniques et Thermique d'Inconel 718 ^[17]

b. Le Waspalloy ^[17] :

Cet alliage, à base de nickel, est de haute résistance. Il est utilisé pour les pièces critiques qui exigent de haute résistance aux températures élevées. Les applications comprennent des disques de turbine et de compresseur, des arbres, des entretoises, des caisses de turbine, des dispositifs de fixation et toute autre visserie diverse.

L'alliage superbe de Waspalloy est de plus haute résistance, il a le contenu de carbone légèrement inférieur et des teneurs en aluminium de titane plus élevées.

Le Waspalloy est surtout un alliage pour disques de turbine concurrent de l'Inconel 718 ; il a de meilleures performances vers 600/650°C. Ce dernier a occupé la majeure partie du marché des superalliages à base de nickel dans le domaine aéronautique.

D'autres caractéristiques de Waspalloy comprennent une bonne résistance à la corrosion, tout en étant relativement imperméable à l'oxydation rendant bien adapté pour le service dans des environnements extrêmes.

Le Waspalloy a une résistance utile à des températures allant jusqu'à 1400-1600°F (760-870°C), et une bonne résistance à l'oxydation dans une atmosphère de gaz de moteurs à turbine à 1600 °F (870 °C). [17]

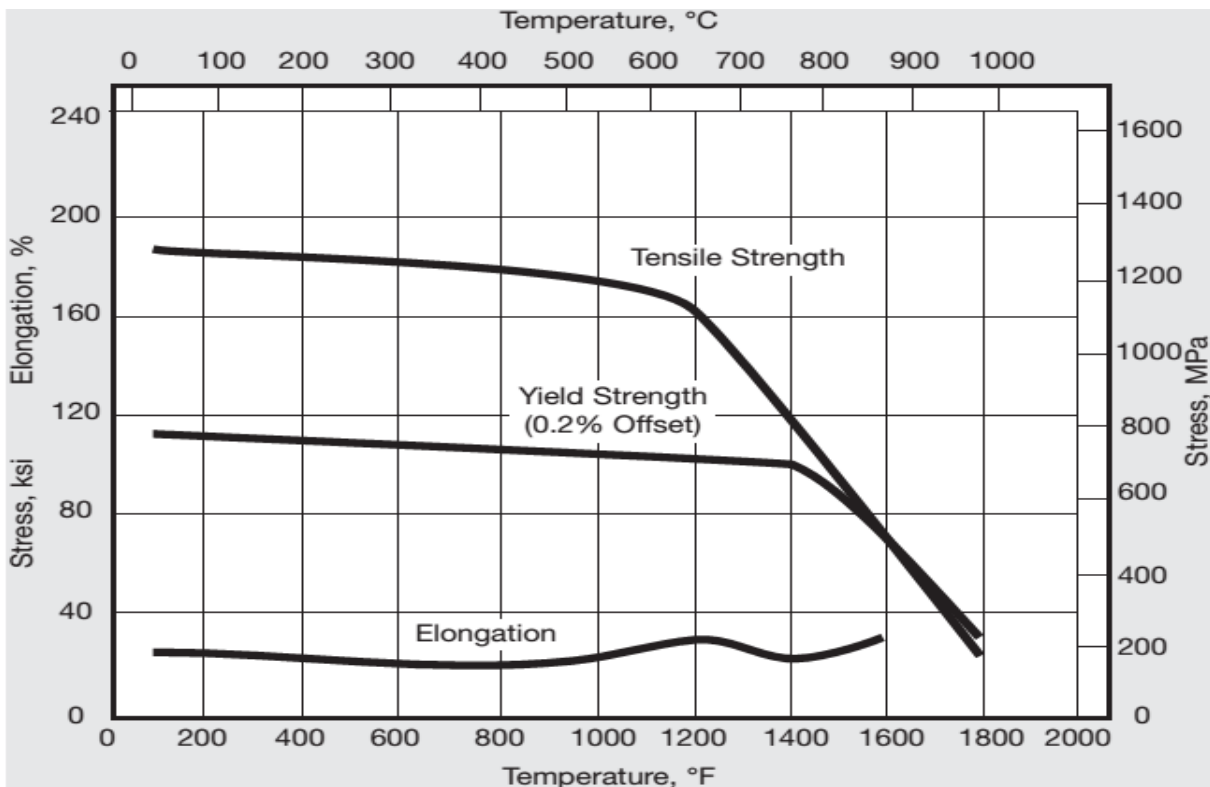


Figure I.7 Propriétés mécaniques de Waspalloy [17]

c. Udimet 720 :

Une solution solide d'alliage de nickel renforcé avec du tungstène et du molybdène est durcie par précipitation avec du titane et de l'aluminium. L'alliage combine une haute résistance avec une stabilité métallurgique comme l'a démontré l'impact de rétention, excellente résistance après de longues expositions à des températures élevées.

Une bonne résistance à la corrosion combinée à haute résistance rend l'alliage utile pour l'aube de turbine à gaz et les applications du disque.

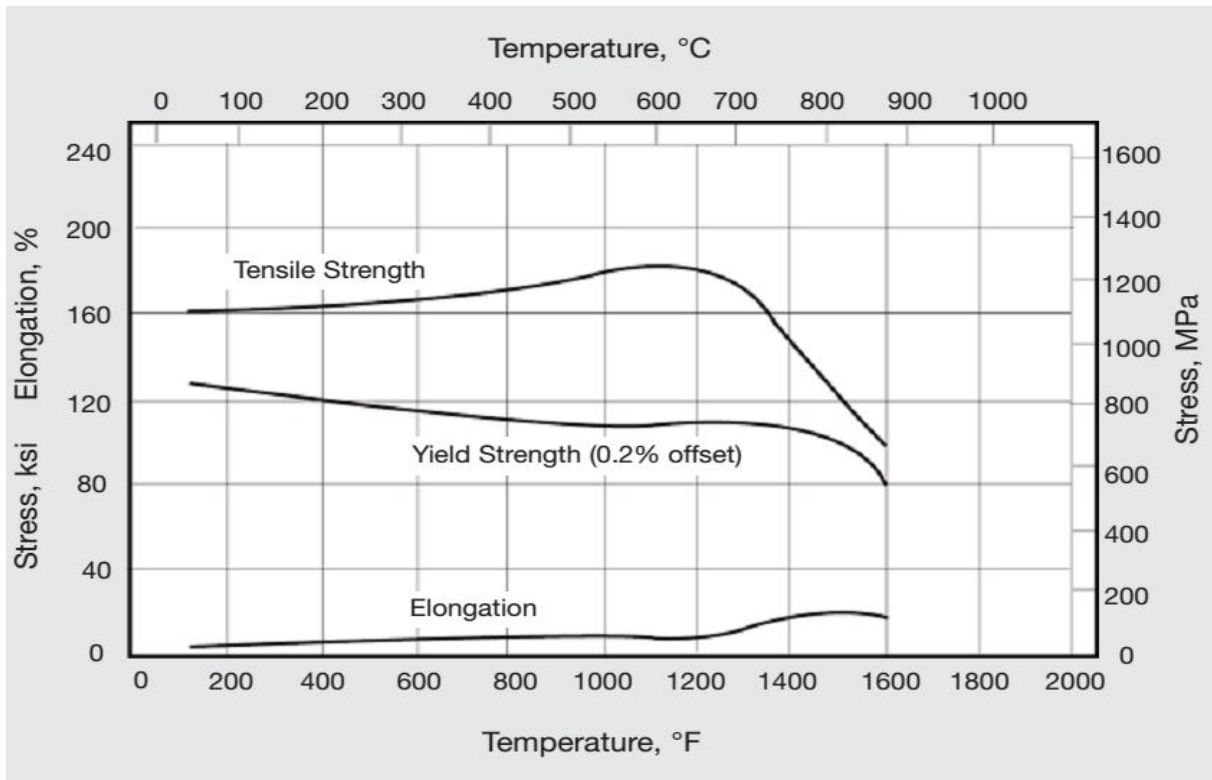


Figure I.8 Propriétés mécaniques d'Udimet 720 [17]

CHAPITRE II



ETUDE MECANIQUE DES DISQUES

II.1 Sollicitations Dans Un Disque

Un disque est essentiellement soumis aux efforts centrifuges générés par les aubes et par sa propre masse. Aux contraintes induites par ces efforts d'origine mécaniques peuvent se superposer des contraintes thermomécaniques dues à l'existence de gradients thermiques entre l'alésage et la jante.

Ces sollicitations sont fonctions du régime moteur et de son état thermique ; tout mouvement de manette modifiera l'état des contraintes à l'intérieur du disque. Ce sont ces modulations qui créent la principale source d'endommagement des disques.

Aux contraintes statiques (*c.à.d.* correspondant à un état thermomécanique du moteur) peuvent se superposer des contraintes d'origine vibratoire, difficiles à prévoir mais qu'il convient de caractériser et de quantifier durant la phase de développement.

II.2 Equilibre d'un disque [16]

II.2.1 Mécanique des Milieux Continus [24]

La mécanique des milieux continus est au centre des disciplines suivantes : le calcul des structures, les procédés de fabrication, la biomécanique, la mécanique des fluides, le génie civil, le design de nouveaux matériaux (la microstructure d'un matériau peut être vue comme une structure à part entière).

Par exemple, pour le calcul des structures, les préoccupations sont les suivantes :

- **Résistance.** La pièce ou structure doit pouvoir supporter et transmettre les charges externes qui lui sont imposées ;
- **Rigidité.** La pièce ou structure ne doit pas subir de déformation excessive lorsqu'elle est sollicitée ;
- **Stabilité.** Un léger changement des conditions extérieures ne doit pas conduire à une réponse catastrophique de la pièce ou de la structure ;
- **Endurance.** La pièce ou structure soumise à un chargement cyclique (répété) doit pouvoir sans rupture supporter un nombre important de cycles : (un réacteur d'avion doit tenir un maximum possible de vols sans se fissurer).

II.2.2 Notion des contraintes mécaniques

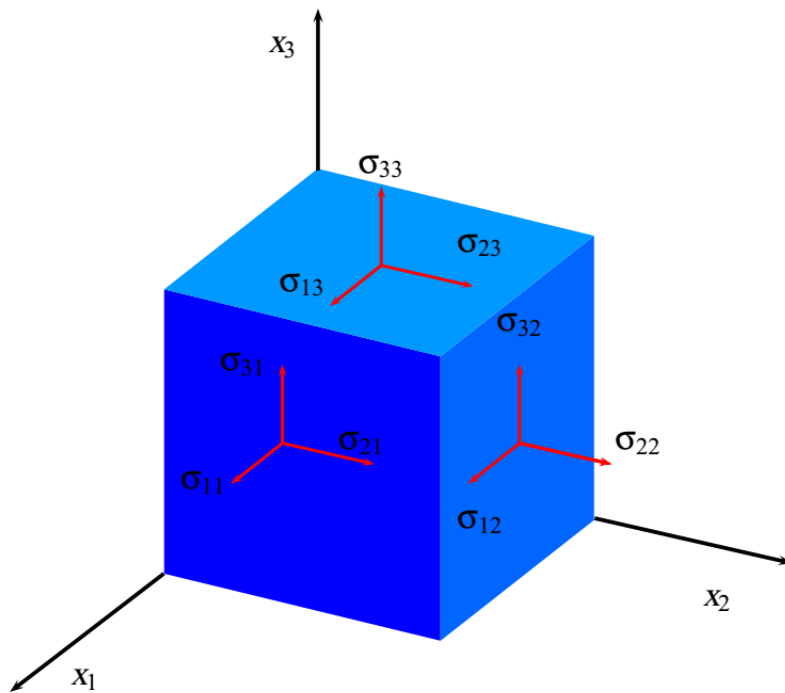


Figure II.1 Notion des contraintes [24]

- L'état de contrainte de l'élément matériel est représenté par un **tenseur des contraintes** :

$$[\boldsymbol{\sigma}] = \begin{bmatrix} \sigma_{xx} & \sigma_{xy} & \sigma_{xz} \\ \sigma_{xy} & \sigma_{yy} & \sigma_{yz} \\ \sigma_{xz} & \sigma_{yz} & \sigma_{zz} \end{bmatrix} \quad \text{ou bien} \quad [\sigma_{ij}] = \begin{bmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{12} & \sigma_{13} \\ \sigma_{12} & \sigma_{22} & \sigma_{23} \\ \sigma_{13} & \sigma_{23} & \sigma_{33} \end{bmatrix} \quad (\text{II.1})$$

$$\sigma_{ij} = \begin{cases} i = j & \Rightarrow \sigma_n(\text{contrainte normale}) \\ i \neq j & \Rightarrow \tau(\text{contrainte tangentielle}) \end{cases} \quad (\text{II.2})$$

- Considérons un élément de frontière, l'équilibre se traduit par :

$$\begin{bmatrix} T_x \\ T_y \\ T_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sigma_{xx} & \sigma_{xy} & \sigma_{xz} \\ \sigma_{xy} & \sigma_{yy} & \sigma_{yz} \\ \sigma_{xz} & \sigma_{yz} & \sigma_{zz} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} n_x \\ n_y \\ n_z \end{bmatrix} \quad \text{Ou bien} \quad [\mathbf{T}]_{ext} = [\boldsymbol{\sigma}][\mathbf{n}]_{ext} \quad (\text{II.3})$$

$[\mathbf{T}]_{ext}$: vecteur force extérieure

$[\mathbf{n}]_{ext}$: vecteur normal extérieur

II.2.3 Equations d'élasticité linéaire

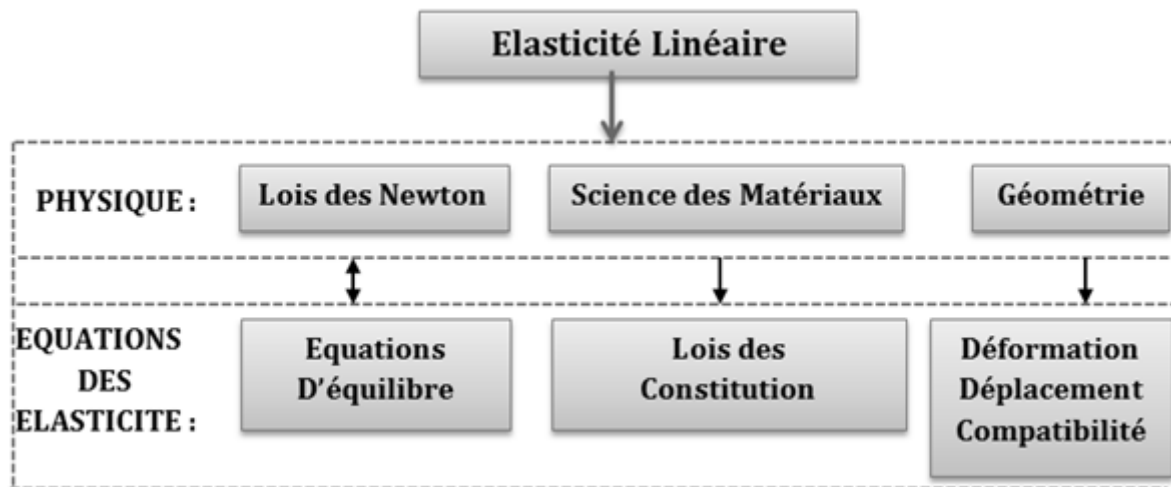


Figure II.2 Equations de MMC

II.2.4 Equations d'équilibre d'un milieu continu

Les forces qui agissent sur l'élément de masse dm sont de deux natures :

- Surfaiques c'est-à-dire tenseur des contraintes (σ) ;
- Volumiques c'est-à-dire gravite ($dm \cdot \vec{g}$), inertie ($dm \cdot \vec{Y}$), centrifuge ($dm \cdot \Omega^2 r$), et magnétique ($dm \cdot \vec{c}$) avec : $\vec{c} = c_x + c_y + c_z$;
- Les forces intérieures (moléculaires entre les particules sont négligées.)

L'équilibre mécanique de l'élément se traduit par :

Après la projection des forces dans tous les axes, on aura l'équation de Navier :

Dans le cas statique, nous avons des équations d'équilibre de Cauchy :

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial \sigma_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{xy}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_{xz}}{\partial z} + \rho c_x = \rho \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \\ \frac{\partial \sigma_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{yy}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_{yz}}{\partial z} + \rho c_y = \rho \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} \\ \frac{\partial \sigma_{xz}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{yz}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_{zz}}{\partial z} + \rho c_z = \rho \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} \end{array} \right. \quad \left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial \sigma_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{xy}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_{xz}}{\partial z} + \rho c_x = 0 \\ \frac{\partial \sigma_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{yy}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_{yz}}{\partial z} + \rho c_y = 0 \\ \frac{\partial \sigma_{xz}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{yz}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_{zz}}{\partial z} + \rho c_z = 0 \end{array} \right. \quad \begin{array}{l} \text{(II.4a)} \\ \text{(II.4b)} \\ \text{(II.4c)} \end{array}$$

Ou bien sous forme tensorielle, les trois équations s'écrivent :

$$\frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial x_j} + \rho c_i = \rho \frac{\partial^2 u_i}{\partial t^2} \quad \text{(II.5)}$$

II.2.5 Tenseur des déformations

Le tenseur de déformation s'écrit :

$$[\boldsymbol{\varepsilon}_{ij}] = \begin{bmatrix} \boldsymbol{\varepsilon}_{xx} & \boldsymbol{\varepsilon}_{xy} & \boldsymbol{\varepsilon}_{xz} \\ \boldsymbol{\varepsilon}_{xy} & \boldsymbol{\varepsilon}_{yy} & \boldsymbol{\varepsilon}_{yz} \\ \boldsymbol{\varepsilon}_{xz} & \boldsymbol{\varepsilon}_{yz} & \boldsymbol{\varepsilon}_{zz} \end{bmatrix} \text{ ou bien } [\boldsymbol{\varepsilon}_{ij}] = \begin{bmatrix} \boldsymbol{\varepsilon}_{11} & \boldsymbol{\varepsilon}_{12} & \boldsymbol{\varepsilon}_{13} \\ \boldsymbol{\varepsilon}_{12} & \boldsymbol{\varepsilon}_{22} & \boldsymbol{\varepsilon}_{23} \\ \boldsymbol{\varepsilon}_{13} & \boldsymbol{\varepsilon}_{23} & \boldsymbol{\varepsilon}_{33} \end{bmatrix} \quad (\text{II.6})$$

Où sont les six équations s'écrivent :

$$\text{Avec : } \boldsymbol{\varepsilon}_{ij} = \frac{1}{2} \left(\frac{du_i}{dx_j} + \frac{du_j}{dx_i} \right) \quad (\text{II.7})$$

$$\boldsymbol{\varepsilon}_{ij} = \left\{ \begin{array}{l} i = j \Rightarrow \text{Déformation Linéaire} \\ i \neq j \Rightarrow \text{Déformation Angulaire, } \boldsymbol{\varepsilon}_{ij} = \frac{\gamma_{ij}}{2}, \gamma_{ij} \text{ est le glissement} \end{array} \right\}$$

II.2.6 Equations de constitution

Pour les matériaux isotropes, la loi de comportement s'écrit :

$$\boldsymbol{\varepsilon}_{xx} = \frac{1}{E} [\boldsymbol{\sigma}_{xx} - \nu (\boldsymbol{\sigma}_{yy} + \boldsymbol{\sigma}_{zz})] ; \boldsymbol{\varepsilon}_{xy} = \frac{\boldsymbol{\sigma}_{xy}}{2G} \quad (\text{II.8a})$$

$$\boldsymbol{\varepsilon}_{yy} = \frac{1}{E} [\boldsymbol{\sigma}_{yy} - \nu (\boldsymbol{\sigma}_{xx} + \boldsymbol{\sigma}_{zz})] ; \boldsymbol{\varepsilon}_{xz} = \frac{\boldsymbol{\sigma}_{xz}}{2G} \quad (\text{II.8b})$$

$$\boldsymbol{\varepsilon}_{zz} = \frac{1}{E} [\boldsymbol{\sigma}_{zz} - \nu (\boldsymbol{\sigma}_{xx} + \boldsymbol{\sigma}_{yy})] ; \boldsymbol{\varepsilon}_{yz} = \frac{\boldsymbol{\sigma}_{yz}}{2G} \quad (\text{II.8c})$$

Avec E et G sont respectivement les modules d'élasticité longitudinale et transversale, respectivement.

Ou bien sous forme tensorielle, les six équations de constitution s'écrivent :

$$\boldsymbol{\varepsilon}_{ij} = \frac{1+\nu}{E} \boldsymbol{\sigma}_{ij} - \frac{\nu}{E} \boldsymbol{\sigma}_{mm} \text{ ou } \boldsymbol{\sigma}_{ij} = \lambda \boldsymbol{\varepsilon}_{mm} \cdot \boldsymbol{\delta}_{ij} + 2G \cdot \boldsymbol{\varepsilon}_{ij} \quad (\text{II.9})$$

Avec le coefficient de Lamé λ et le module de cisaillement G sont :

$$\lambda = \frac{\nu E}{(1+\nu)(1-2\nu)} \quad \text{et} \quad G = \frac{E}{2(1+\nu)} \quad (\text{II.10.a})$$

$$\boldsymbol{\delta}_{ij} = \begin{cases} 1 & i = j \\ 0 & i \neq j \end{cases} \quad (\text{II.10.b})$$

II.2.7 Condition de résistance

a. Contraintes et directions principales

La contrainte principale σ_p est la contrainte normale maximale sur une face de direction \vec{n} dont la contrainte de cisaillement est nul ($\tau_{12} = \tau_{13} = \tau_{32} = 0$). Elle est la solution du système suivant :

$$\begin{bmatrix} \sigma_{xx} - \sigma_p & \sigma_{xy} & \sigma_{xz} \\ \sigma_{xy} & \sigma_{yy} - \sigma_p & \sigma_{yz} \\ \sigma_{xz} & \sigma_{yz} & \sigma_{zz} - \sigma_p \end{bmatrix} \begin{bmatrix} n_x \\ n_y \\ n_z \end{bmatrix} = \mathbf{0} \quad (\text{II.11})$$

Avec n_x ; n_y et n_z sont les directions principales.

Le système possède les solutions non-triviale si $\det([\sigma] - [\sigma_p][I]) = 0$

Pour un état des contraintes planes nous aurons :

$$\begin{Bmatrix} \sigma_{p1} \\ \sigma_{p2} \end{Bmatrix} = \frac{\sigma_{xx} + \sigma_{yy}}{2} \begin{Bmatrix} + \\ - \end{Bmatrix} \sqrt{\left(\frac{\sigma_{xx} - \sigma_{yy}}{2}\right)^2 + \sigma_{xy}^2} \quad (\text{II.12})$$

b. Critère de Tresca

Les contraintes de cisaillement maximales sont données par les expressions :

$$\begin{cases} \tau_{max12} = \frac{1}{2}(\sigma_{p1} - \sigma_{p2}) \\ \tau_{max13} = \frac{1}{2}(\sigma_{p1} - \sigma_{p3}) \\ \tau_{max23} = \frac{1}{2}(\sigma_{p2} - \sigma_{p3}) \end{cases} \quad (\text{II.13})$$

Le matériau doit satisfaire les conditions de résistance suivantes :

$$\sigma_{max} \leq [\sigma]_{adm} \quad (\text{II.14a})$$

$$\tau_{max} \leq \frac{[\sigma]_{adm}}{2} \quad (\text{II.14b})$$

Avec : $\sigma_{max} = \max(\sigma_{p1}; \sigma_{p2}; \sigma_{p3})$ et $\tau_{max} = \max(\tau_{max12}; \tau_{max13}; \tau_{max23})$.

c. Critère de Von-Mises

Il existe un autre critère pour vérifier la condition de résistance. C'est celui donné par Von-Mises, il définit la contrainte équivalente par :

$$\sigma_e = \sqrt{\frac{1}{2} [(\sigma_{p1} - \sigma_{p2})^2 + (\sigma_{p1} - \sigma_{p3})^2 + (\sigma_{p3} - \sigma_{p2})^2]} \quad (\text{II.15})$$

Le matériau doit satisfaire les conditions de résistance suivantes :

$$\sigma_e \leq [\sigma]_{adm} \quad (\text{II.16})$$

II.3 Modèle Monodimensionnelle ^[16]

En coordonnées cylindriques, le modèle bidimensionnel **(2D)** s'écrit comme suit :

$$F_r + \frac{\partial \sigma_{rr}}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial \sigma_{r\theta}}{\partial \theta} - \frac{\sigma_{rr} - \sigma_{\theta\theta}}{r} = 0 \quad (\text{II.17a})$$

$$F_\theta + \frac{\partial \sigma_{r\theta}}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial \sigma_{\theta\theta}}{\partial \theta} + \frac{2}{r} \sigma_{r\theta} = 0 \quad (\text{II.17b})$$

Avec : $F_r = \rho \Omega^2 r$ et $F_\theta = 0$

$$\varepsilon_{rr} = \frac{\partial u_r}{\partial r} = \frac{1}{E} (\sigma_{rr} - \nu \sigma_{\theta\theta}) \quad (\text{II.18a})$$

$$\varepsilon_{\theta\theta} = \frac{1}{r} \frac{\partial u_\theta}{\partial \theta} + \frac{u_r}{r} = \frac{1}{E} (\sigma_{\theta\theta} - \nu \sigma_{rr}) \quad (\text{II.18b})$$

On a adopté l'hypothèse axisymétrique, $\frac{\partial}{\partial \theta} = 0$, et pour une épaisseur constante nous obtenons $\sigma_{r\theta} = 0$. Le modèle bidimensionnelle **(2D)** se transforme en monodimensionnelle **(1D)** suivant :

$$\rho \Omega^2 r + \frac{d\sigma_{rr}}{dr} - \frac{\sigma_{rr} - \sigma_{\theta\theta}}{r} = 0 \quad (\text{II.19a})$$

$$\varepsilon_{rr} = \frac{du_r}{dr} = \frac{1}{E} (\sigma_{rr} - \nu \sigma_{\theta\theta}) \quad (\text{II.19b})$$

$$\varepsilon_{\theta\theta} = \frac{u_r}{r} = \frac{1}{E} (\sigma_{\theta\theta} - \nu \sigma_{rr}) \quad (\text{II.19c})$$

De plus, nous pouvons combiner les deux dernières expressions pour donner une équation écrite en contrainte. En effet, la dérivée de la dernière équation donne :

$$\frac{du_r}{dr} = \frac{d}{dr} \left[\frac{r}{E} (\sigma_{\theta\theta} - \nu \sigma_{rr}) \right] \quad (\text{II.20})$$

Substituons cette expression dans la deuxième équation du système (II.19) nous obtenons l'équation de compatibilité des déformations écrit en contrainte :

$$(1 + \nu) \frac{\sigma_{\theta\theta} - \sigma_{rr}}{E} + r \frac{d}{dr} \left(\frac{\sigma_{\theta\theta} - \nu \sigma_{rr}}{E} \right) = 0 \quad (\text{II.21})$$

II.3.1 Résolution du Modèle

Le système à intégrer est donc :

$$\frac{d\sigma_{rr}}{dr} - (\sigma_{\theta\theta} - \rho \Omega^2 r^2) = 0 \quad (\text{II.22a})$$

$$(1 + \nu) \frac{\sigma_{\theta\theta} - \sigma_{rr}}{E} + r \frac{d}{dr} \left(\frac{\sigma_{\theta\theta} - \nu \sigma_{rr}}{E} \right) = 0 \quad (\text{II.22b})$$

Pour simplifier l'écriture et pour faciliter l'interprétation des résultats, changeons de variables et prenons les relations suivantes :

$$\delta_{rr} = \frac{\sigma_{rr}}{\rho \cdot \Omega^2 r_e^2}; \quad \delta_{\theta\theta} = \frac{\sigma_{\theta\theta}}{\rho \cdot \Omega^2 r_e^2}; \quad z = \frac{r}{r_e} \quad (\text{II.23})$$

δ_{rr} et $\delta_{\theta\theta}$ seront donc une mesure directe de la valeur relative des contraintes $\sigma_{\theta\theta}$ et σ_{rr} dans le disque, par rapport à cette référence.

Le système devient :

$$\frac{d(z\delta_{rr})}{dz} = \delta_{\theta\theta} - z^2 \quad (\text{II.24a})$$

$$\left(\frac{1+\nu}{z} \right) (\delta_{\theta\theta} - \delta_{rr}) + \frac{d}{dz} (\delta_{\theta\theta} - \nu \delta_{rr}) = 0 \quad (\text{II.24b})$$

Tirons $\delta_{\theta\theta}$ de la première équation et remplaçons le par sa valeur dans le seconde on aura :

$$\left(\frac{1+\nu}{z} \right) \left[z \frac{d\delta_{rr}}{dz} + z^2 \right] + \frac{d}{dz} \left[z \frac{d\delta_{rr}}{dz} + \delta_{rr}(1 - \nu) \right] + z^2 = 0 \quad (\text{II.25})$$

Et l'équation précédente se réduit à :

$$\frac{1}{z^3} \cdot \frac{1}{dz} \left(z^3 \frac{d\delta_{rr}}{dz} \right) = -(3 + \nu) \quad (\text{II.26})$$

Après l'intégration, on trouve :

$$\delta_{rr} = A - \frac{B}{z^2} - \frac{3+\nu}{8} z^2 \quad (\text{II.27a})$$

$$\delta_{\theta\theta} = A + \frac{B}{z^2} - \frac{1+3\nu}{8} z^2 \quad (\text{II.27b})$$

Si on introduit les conditions aux limites on aura les relations suivantes :

$$\delta_{rr} = \delta_{rre} \text{ au rayon extérieur}$$

$$\delta_{rr} = \delta_{rra} \text{ au rayon d'alésage}$$

La solution du disque plan d'épaisseur constante est :

$$\delta_{rr} = \frac{1 - \frac{z_a^2}{z^2}}{1 - \frac{z_a^2}{z_a^2}} \delta_{rre} + \frac{\frac{1}{z^2} - 1}{\frac{1}{z_a^2} - 1} \delta_{rra} + \frac{3+\nu}{8} (1 - z^2) \left(1 - \frac{z_a^2}{z^2}\right) \quad (\text{II.28a})$$

$$\delta_{\theta\theta} = \frac{1 + \frac{z_a^2}{z^2}}{1 - \frac{z_a^2}{z^2}} \delta_{rre} - \frac{\frac{1}{z^2} + 1}{\frac{1}{z_a^2} - 1} \delta_{rra} + \frac{3+\nu}{8} (1 + z^2) \left(1 + \frac{z_a^2}{z^2}\right) - \frac{1+\nu}{2} z^2 \quad (\text{II.28b})$$

II.3.2 Disque avec Jante

Le principe du disque repose sur le fait que les efforts radiaux extérieurs ou centrifuges diffusent vers le centre du disque où ils sont alors repris sous forme de contrainte tangentielle. Pour maintenir un niveau de contrainte constant ou limiter du moins les contraintes à l'alésage il faut avoir une épaisseur plus importante à l'alésage qu'au rayon extérieur. L'augmentation relative de matière vers l'alésage :

- Minimise les efforts centrifuges puisqu'on met de la matière là où le champ centrifuge est plus faible ;
- Donne à cette zone la capacité de reprendre plus d'efforts, **mais cela pose le problème de la fixation des aubes.**

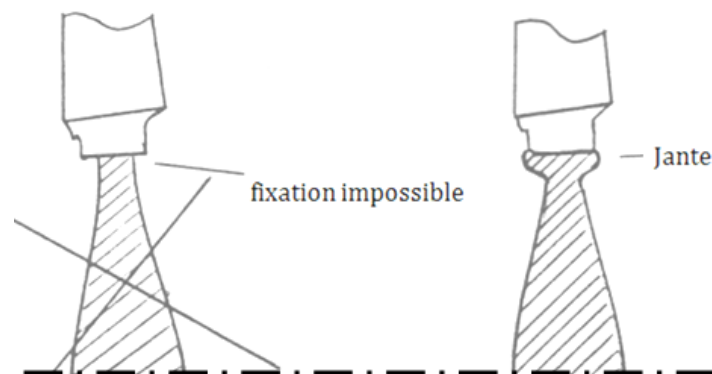


Figure II.3 Problème de la fixation des aubes

Il est donc nécessaire d'épaissir localement le disque par adjonction d'une jante, approximée dans un premier temps par un anneau épais, étudions un tel assemblage.

II.3.3 Jante et disque

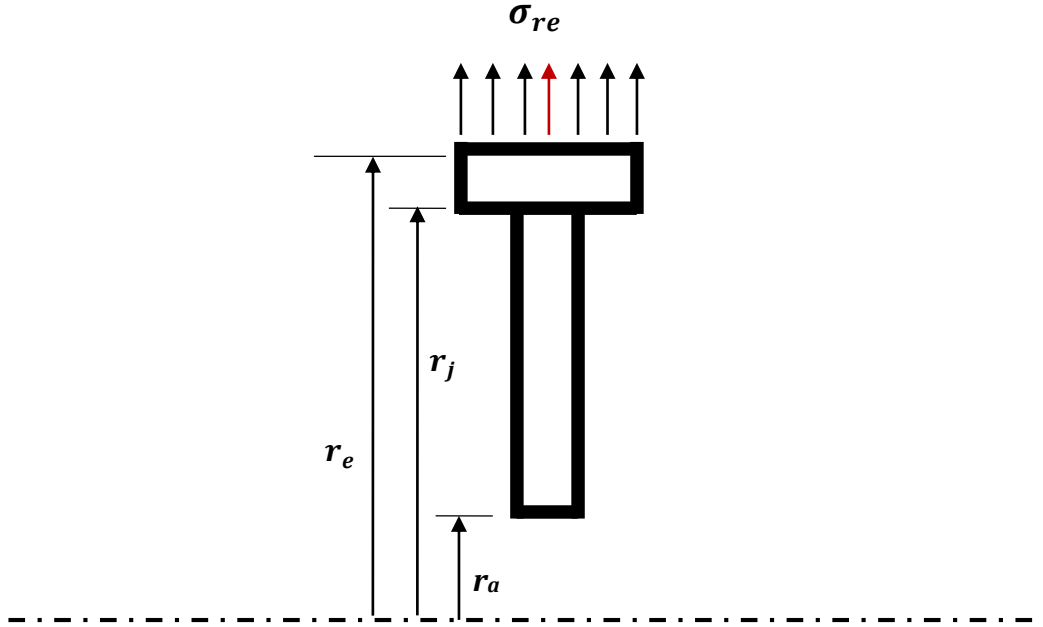


Figure II.4 Jante et disque d'épaisseurs constantes

Pour la jante

$$\sigma_r^j = A - \frac{B}{r^2} - \frac{3+\nu}{8} \rho \cdot \Omega^2 \cdot r^2 \quad (\text{II.29a})$$

$$\sigma_\theta^j = A + \frac{B}{r^2} - \frac{1+3\nu}{8} \rho \cdot \Omega^2 \cdot r^2 \quad (\text{II.29b})$$

Pour le disque

$$\sigma_r^d = A' - \frac{B'}{r^2} - \frac{3+\nu}{8} \rho \cdot \Omega^2 \cdot r^2 \quad (\text{II.30a})$$

$$\sigma_\theta^d = A' + \frac{B'}{r^2} - \frac{1+3\nu}{8} \rho \cdot \Omega^2 \cdot r^2 \quad (\text{II.30b})$$

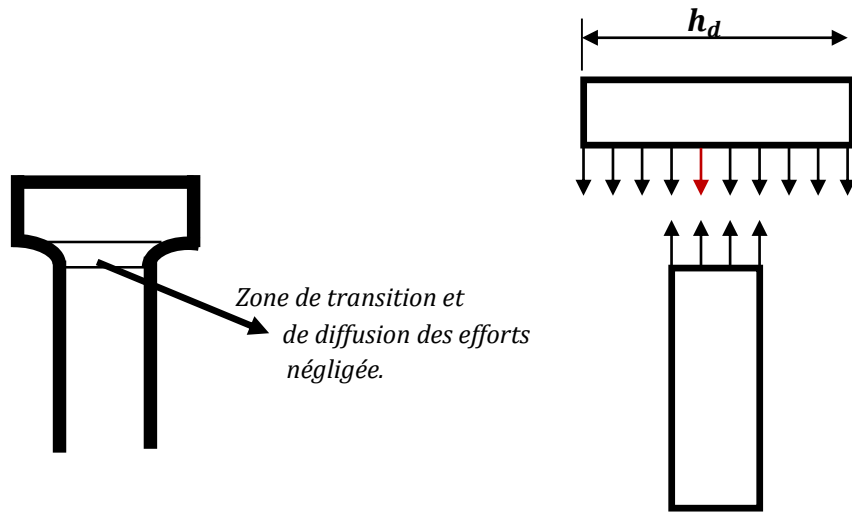
Nous obtenons donc un système d'équations linéaires à 4 inconnues A, A', B, B'.

- Equations de conditions aux limites

Jante : $\sigma_r^j = \sigma_{re}$ pour $r = r_e \Rightarrow$ Equation : $E_1(A, B) = 0$ (II.31a)

Disque : $\sigma_r^d = 0$ pour $r = r_a \Rightarrow$ Equation : $E_2(A', B') = 0$ (II.31b)

- Conditions de liaison jante-disque



- **Figure II.5** Conditions de liaison jante-disque

Équilibre des efforts :

$$2\pi r_j h_j \sigma_r^j (r=r_j) = 2\pi r_j h_j \sigma_r^d (r=r_j) \quad \text{Equation: } E_3 (A, B, A', B') = 0 \quad (\text{II.32})$$

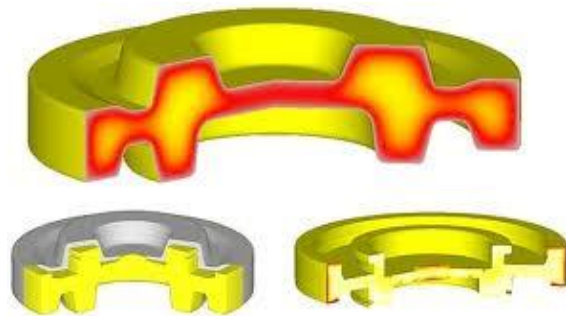
Compatibilité des déplacements :

$u_j (r = r_j) = u_d (r = r_j)$ donne :

$$r_j \frac{\sigma_\theta^d(r_j) - \nu \cdot \sigma_r(r_j)}{E} = r_j \frac{\sigma_\theta^d(r_j) - \nu \cdot \sigma_r(r_j)}{E} \Rightarrow \text{Equation : } E_4 (A, B, A', B') = 0 \quad (\text{II.33})$$

La solution du système composé des 4 équations E_1, E_2, E_3, E_4 donne A, B, A', B' et par voie de conséquence les contraintes dans la jante et dans le disque.

CHAPITRE III



**MODELISATION THERMO-MECANIQUES DES
DISQUES**

III.1 Echanges Thermique dans les Turboréacteurs [16]

III.1.1 Chambre de combustion

Le principe de fonctionnement d'une chambre de combustion repose sur la réalisation d'un foyer primaire à très haute température et régime tourbillonnaire, où les réactions chimiques sont favorisées par les effets combinés de la température, du brassage et du temps de séjour allongé par les recirculations et d'une zone de dilution et d'homogénéisation.

La température du tube à flamme résulte donc :

- D'un apport de chaleur dû au rayonnement du foyer primaire et à la convection forcée interne ;
- D'un pompage thermique dû à la convection forcée externe et aux phénomènes locaux de conduction. *Ex cas d'un film usiné.*

III.1.2 Aubes de turbine

Le refroidissement des aubes de turbine s'opère par une circulation d'air à l'intérieur des aubages. Le débit total qui parcourt l'ensemble des étages d'une turbine atteint ainsi sur les moteurs actuels **10 à 13%** du débit primaire ! Si pour un distributeur **HP**, ce débit n'est pas pénalisant dans le bilan du cycle thermodynamique puisqu'il est réintroduit en amont de la roue de turbine, il n'en est pas de même pour la roue mobile ou c'est de l'air ne travaille pas. Il y a donc :

- Apport de chaleur par convection forcée externe ;
- Pompage thermique par convection forcée interne et par conduction (au niveau local comme pour les chambres et globalement par le pied de l'aube).

III.1.3 Disques des turbines

D'une façon générale les disques s'échauffent par l'extérieur (jante et dents du disque) et sont refroidis par des débits d'air qui lèchent l'alésage et le poireau.

Il y a donc :

- La conduction au niveau des contacts pieds d'aubes-attaches de disques, entretoises de raccordement inter-disques et dans les disques.
- La convection forcée au fond des alvéoles et sur la jante (débits de recirculation), le long des flancs du poireau et à l'alésage.

Ces échanges thermiques peuvent être très importants. Dans les cavités inter disques il a « **barattage** » de l'air qui dans certains cas provoque un échauffement non négligeable de l'air emprisonné. Mais bien maîtrisés ils peuvent aussi être exploités par le concepteur. C'est aussi que PWA dans ses moteurs pilote les jeux rotor-stator en jouant sur la dilatation thermique du rotor.

III.2 L'équation de conduction pour un disque [16]

III.2.1 Introduction

Dans les turboréacteurs, la recherche de performances passe par la maîtrise de températures de plus en plus élevées. Des températures moyennes sortie chambre de **1350°C-1400°C** sont couramment atteintes en exploitation et pour la prochaine décennie on vise **1500-1600°C** ! Il en va de même pour les températures sorties compresseur **HP** qui atteint maintenant plus de **600°C**.

Le développement de nouveaux alliages réfractaires et de nouvelles techniques de fabrication (fonderie monocristallins, métallurgie des poudres) n'expliquent pas à eux seuls la formidable évolution qui s'est réalisé depuis le début des années **1970**. Il y a en parallèle à développement considérable des techniques de refroidissement et de ventilation qui fait que même au cœur d'une turbomachine fonctionnant à **1500°C** en sortie chambre, la température des enceintes huile et paliers reste en dessous de **200°C**.

On imagine par conséquent le rôle joué par les échanges thermiques et les gradients thermiques qu'ils génèrent. Dans ce chapitre, on traitera les phénomènes et les équations de base qui régissent les échanges thermiques et les problèmes thermoélastiques en introduisant la notion de contrainte thermique. On traitera le cas du disque d'épaisseur constante en exemple.

Considérons un cylindre creux de conductivité thermique (λ), de rayon intérieur R_1 , de rayon extérieur R_2 et de longueur L . Les températures interne et externe sont T_1 et T_2 . En régime permanent nous avons l'équation de conduction $\nabla^2 T = 0$:

$$\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(\lambda r \frac{\partial T}{\partial r} \right) + \frac{\lambda}{r^2} \frac{\partial^2 T}{\partial \theta^2} + \frac{\lambda \partial^2 T}{\partial z^2} = 0 \quad \text{et pour} \quad \frac{\partial T}{\partial \theta} = \frac{\partial T}{\partial z} = 0 \quad (\text{III.1})$$

$$\text{On aura :} \quad \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(\lambda r \frac{\partial T}{\partial r} \right) = 0 \quad (\text{III.2})$$

$$\text{On sait que :} \quad q_r = -\lambda A \frac{\partial T}{\partial r} = -\lambda (2\pi r L) \frac{\partial T}{\partial r} \quad (\text{III.3})$$

D'après les équations (III.2 et III.3) :

$$q_r = \frac{(T_1 - T_2)}{R_{cond}} ; \text{Où } R_{cond} = \frac{\ln\left(\frac{r_2}{r_1}\right)}{\lambda(2\pi r L)} \quad (\text{III.4})$$

Avec R_{cond} est la résistance thermique

Pour une structure multicouche soumise à la convection interne et externe (**fig. III.1**) :

$$q_r = \frac{(T_1 - T_2)}{\frac{1}{2\pi r_1 L \tilde{\alpha}_1} + \frac{\ln\left(\frac{r_2}{r_1}\right)}{2\pi \lambda_1 L} + \frac{\ln\left(\frac{r_3}{r_2}\right)}{2\pi \lambda_2 L} + \frac{\ln\left(\frac{r_4}{r_3}\right)}{2\pi \lambda_3 L} \dots \frac{\ln\left(\frac{r_n}{r_{n-1}}\right)}{2\pi \lambda_{n-1} L} + \frac{1}{2\pi r_n L \tilde{\alpha}_n}} \quad (\text{III.5})$$

Ordres de grandeur :

En convection naturelle $\alpha \approx 30 \text{ à } 50 \text{ W/m}^2/\text{°C}$ mais peut atteindre en convection forcée des valeurs de $10\,000 \text{ W/m}^2/\text{°C}$ (bord d'attaque d'une aube).

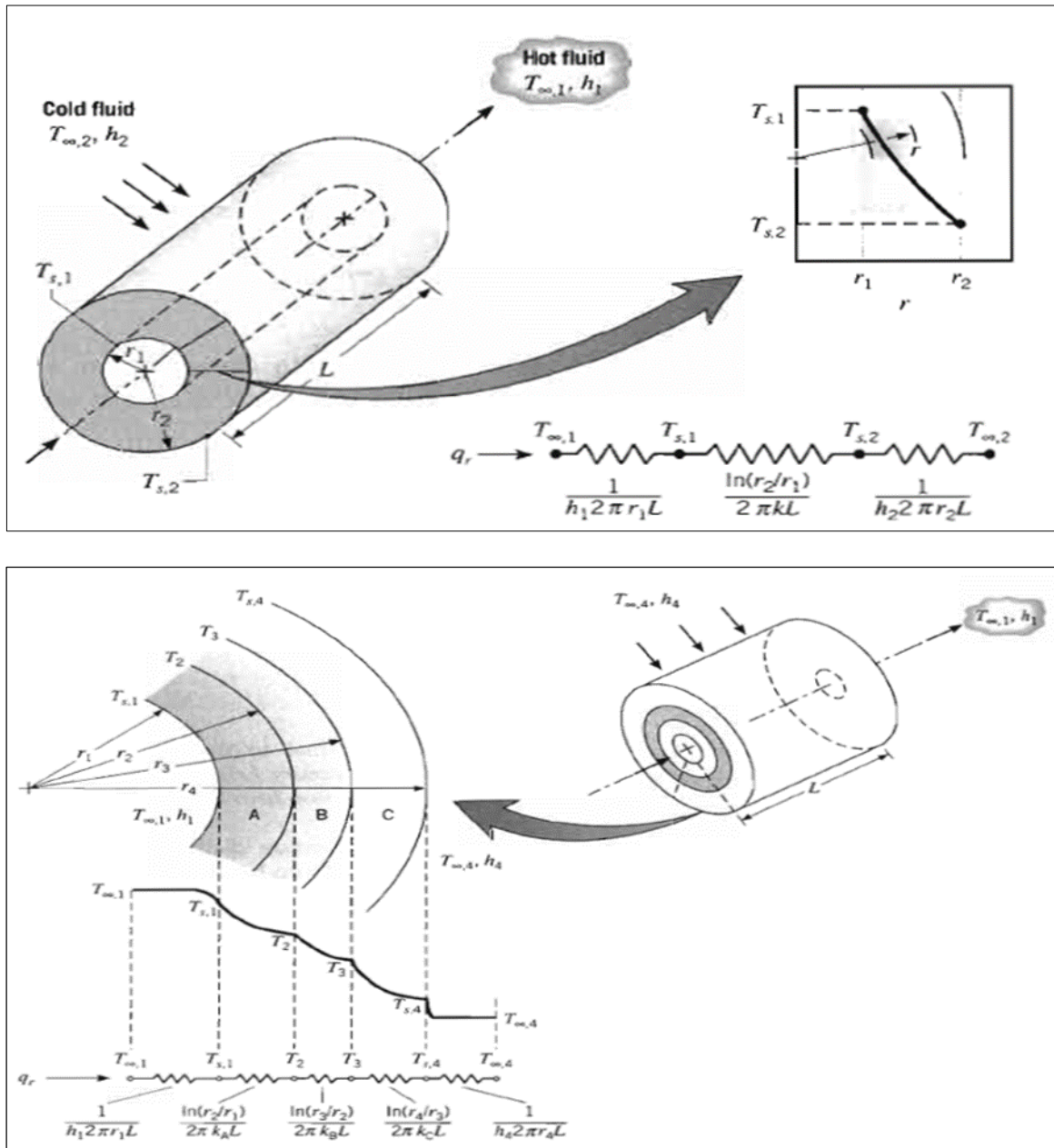


Figure III.1 Conduction pour un cylindre creux mono et multicouche

III.2.2 Transitoire thermique

$$\Sigma \text{ [Quantité de chaleur reçue Par conduction suivant les 3 faces]} = \begin{cases} 0 & \text{régime stables} \\ \text{Quantité de chaleur en transitoire emmagasinée par échauffement} \end{cases}$$

$$\text{Soit : } \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(\lambda r \frac{\partial T}{\partial r} \right) + \frac{\lambda}{r^2} \frac{\partial^2 T}{\partial \theta^2} + \frac{\lambda \partial^2 T}{\partial z^2} + Q = \rho C_p \frac{\partial T}{\partial t} \quad (\text{III.6})$$

Avec : ρ = masse spécifique

C_p = chaleur spécifique

Q : la puissance calorifique engendrée au sein même de la matière (effet Joule...)

$\frac{\partial T}{\partial t} = 0$ au régime stabilisé

Les conditions aux limites sont, soit des températures imposées, soit des flux thermiques donnés par les équations d'échanges. En supposant λ , ρ , C_p , constants, l'équation précédente se réduit à :

$$\lambda \Delta T + Q = \rho C_p \frac{\partial T}{\partial t} \quad (\text{III.7})$$

Qui, au régime stabilisé, est l'équation de Laplace.

Il est fréquent qu'au régime stabilisé les gradients de température soient relativement faibles. En effet, à l'équilibre thermique il y a égalité entre les flux entrant et sortant. Flux entrant signifie que la température de la zone de la pièce au contact de la source chaude est inférieure à la température de cette dernière, et réciproquement.

Flux sortant que la zone au contact de la source froide est à une température supérieure à cette dernière. Ce raisonnement ne peut plus être tenu pendant une phase de transitoire thermique où :

- Les conditions aux limites varient ;
- Le bilan entre quantité de chaleur reçue et quantité de chaleur donnée n'est pas nul puisqu'il y a réchauffement ou refroidissement de la pièce.

Il peut par conséquent y avoir des gradients plus importants pendant ces phases transitoires et il est donc nécessaire de les calculer ou de les estimer. Nous nous limiterons à dégager quelques aspects essentiels à la compréhension des phénomènes physiques. Revenons pour cela à la méthode de séparation des variables la solution est de la forme :

$$T(x, y, z, t) = \sum_1^{\infty} [a_n \cdot \varphi_n(x, y, z) \cdot e^{-\frac{\lambda}{\rho c} \cdot \alpha_n^2 \cdot t}] \quad (\text{III.8})$$

On constate que l'état stabilisé s'atteint au cours d'une évolution dans le temps de type exponentiel.

La constante de temps globale dépend :

- Des propriétés thermiques du matériau et plus particulièrement du rapport $\frac{\lambda}{\rho c}$;
- De la géométrie de la pièce par l'intermédiaire des paramètres α_n^2 . on conçoit aisément qu'une pièce massive s'échauffera ou se refroidira plus lentement qu'une pièce mince.

On pourra donc approximer l'évolution de la température d'un point P du solide partant de l'état T_0 pour arriver à celui T_1 par une fonction de la forme suivant :

$$T_p(t) = T_0 + (T_1 - T_0) (1 - e^{-at}) \quad (\text{III.9})$$

Appliquons maintenant ces considérations à un disque dont l'échauffement provient de l'écoulement aérodynamique de la veine et dont le refroidissement est assuré par un débit de ventilation au niveau de l'alésage.

L'expérience montre par ailleurs que les constantes de temps pour ces pièces sont de plusieurs minutes alors qu'une accélération ralenti-plein gaz modifie les valeurs thermodynamiques en **4 à 5s** pour un moteur militaire et **10 à 12s** pour un moteur civil à grand taux de dilution.

Nous constatons dans le cas présent que le gradient maximal est atteint **15 à 20s** après la fin de l'accélération mais bien avant que l'on parvienne à la stabilisation thermique.

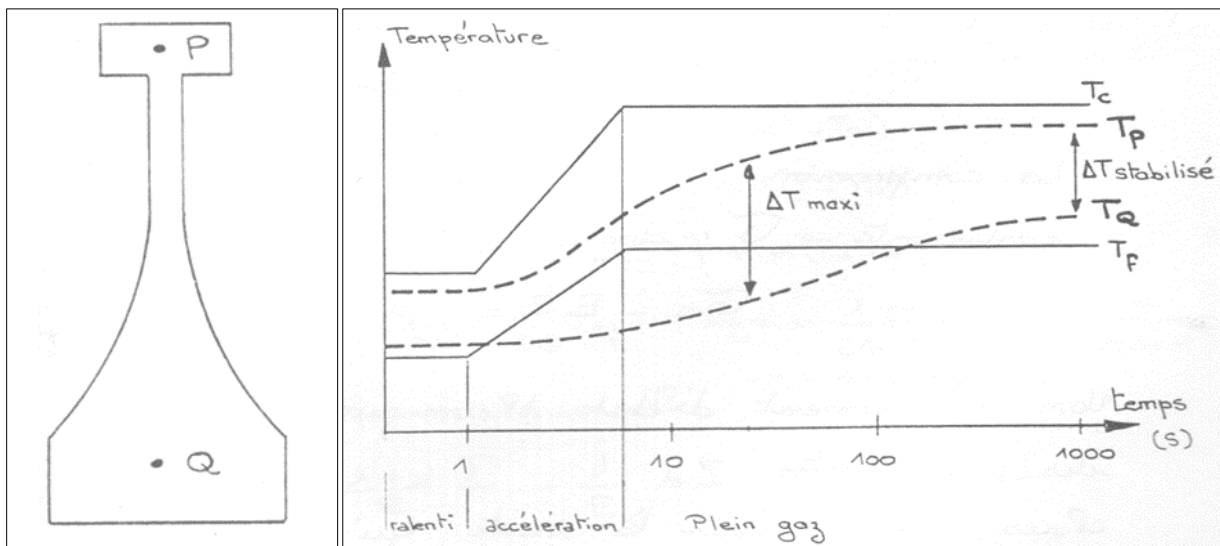


Figure III.2 Transitoire thermique [16]

La détermination des températures est une étape-clé dans tout dimensionnement mécanique. En effet les températures jouent un rôle :

- ✓ Par leurs niveaux intrinsèques desquels dépendront les propriétés des matériaux ;
- ✓ Mais aussi par leurs répartitions, les gradients thermiques étant source de contraintes.
- ✓ Ces derniers sont souvent plus importants dans les phases transitoires que dans les conditions stabilisées, ceci est particulièrement vrai avec des pièces massives et/ou des matériaux à faible conductibilité comme certaines céramiques très réfractaires qu'elles soient monolithiques ou composites.
- ✓ Dans ce cas la principale difficulté du concepteur est l'identification, dans le domaine de vol parfois très étendu, de la phase transitoire la plus endommageant !

III.3 Thermo-élasticité [23]

Nous considérons maintenant le cas où les déformations sont causées non seulement par des contraintes mais également par des élévations de température. C'est le phénomène de la thermo élasticité. Une élévation de température a tendance en général à faire gonfler les corps et une diminution à tendance à les contracter.

III.3.1 Mise en évidence

Considérons un barreau de longueur L et à la température homogène T_0 . Plaçons ce barreau entre deux murs et chauffons-le jusqu'à la température T_1 ; sous l'effet de la chaleur le barreau va chercher à se dilater d'une valeur ΔL égale à $L \alpha (T_1 - T_0)$, α étant le coefficient de dilatation linéique. Mais comme il ne peut s'allonger, des efforts de compression vont naitre aux deux extrémités.

Ces efforts sont tels que la longueur du barreau à la température T_1 demeurera identique à celle qu'il avait lorsqu'il était à la température T_0 et soumis à aucun effort.

Etat initial : Longueur L

Etat final : Longueur L $\left\{ \begin{array}{l} + \text{dilatation thermique } \Delta L \\ - \text{dilatation mécanique } \Delta L \end{array} \right.$

La compression mécanique correspond donc à une contrainte σ donnée par :

$$\sigma = E \cdot \varepsilon = -E \frac{\Delta L}{L} = -E \alpha (T_1 - T_0) \quad (\text{III.10})$$

Non changement d'état thermique peut donc entrainer des contraintes ; nous verrons par la suite qu'il est possible de générer des contraintes sous le seul effet de gradients thermiques sans blocage mécanique des dilatations.

III.3.2 Loi de Hooke-Duhamel

Elles se déduisent de la loi de Hooke en ajoutant aux effets des contraintes ceux dus à la dilatation thermique à savoir :

$$\varepsilon_{xx} = \frac{1}{E} [\sigma_{xx} - \nu (\sigma_{yy} + \sigma_{zz})] + \alpha (T - T_0) \quad (\text{III.11a})$$

$$\varepsilon_{yy} = \frac{1}{E} [\sigma_{yy} - \nu (\sigma_{xx} + \sigma_{zz})] + \alpha (T - T_0) \quad (\text{III.11b})$$

$$\varepsilon_{zz} = \frac{1}{E} [\sigma_{zz} - \nu (\sigma_{xx} + \sigma_{yy})] + \alpha (T - T_0) \quad (\text{III.11c})$$

$$\varepsilon_{xy} = \frac{1}{2G} \sigma_{xy} ; \varepsilon_{yz} = \frac{1}{2G} \sigma_{yz} ; \varepsilon_{xz} = \frac{1}{2G} \sigma_{xz} ; G = \frac{E}{2(1+\nu)} \quad (\text{III.11d})$$

Ou bien sous une forme tensorielle :

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1+\nu}{E} \sigma_{ij} - \frac{\nu}{E} \sigma_{mm} \delta_{ij} + \alpha (T - T_0) \delta_{ij} \quad (\text{III.12})$$

T_0 représente la température de l'état de référence.

III.3.3 Le problème de thermo-élasticité

Il consiste à déterminer, au point courant \mathbf{P} de la structure et à l'instant \mathbf{t} :

- Les six composantes de tenseur σ_{ij} ;
- Les six composantes du tenseur ε_{ij} ;
- Les trois composantes du vecteur déplacement u_i ;
- La température T .

En thermo-élasticité, il n'y a pas couplage entre équation de la chaleur et équations de l'élasticité. La température T est donc déterminée par l'équation de conduction :

$$\lambda \Delta T - \rho c \frac{\partial T}{\partial t} + Q = 0 \quad (\text{III.13})$$

Préalablement à la résolution du problème d'élasticité ; en revanche si sous l'effet des gradients thermiques et/ou des efforts extérieurs il y a de fortes déformations plastiques alors le couplage thermomécanique apparaît par le terme Q qui sera non nul et lie au potentiel de déformation plastique.

Revenons au problème d'élasticité : pour **15 inconnues** nous devons avoir **15 équations** :

- ✓ Trois (3) sont données par les équations d'équilibre qui ne sont pas modifiées par la présence du terme de dilatation thermique.

$$\frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial x_j} + \rho c_i = \rho \frac{\partial^2 u_i}{\partial t^2} = 0 \quad (\text{III.14})$$

- ✓ Six (6) sont données par la loi de Hooke Duhamel ;

$$\epsilon_{ij} = \frac{1+\nu}{E} \sigma_{ij} - \frac{\nu}{E} \sigma_{mm} + \alpha (T - T_0) \delta_{ij} \quad (\text{III.15})$$

- ✓ Six (6) proviennent des relations entre déformations et déplacements :

$$\epsilon_{ij} = \frac{1}{2} \left(\frac{du_i}{dx_j} + \frac{du_j}{dx_i} \right) \quad (\text{III.16})$$

III.3.3 Méthodes de résolution

La résolution de notre modèle suite les étapes suivantes :

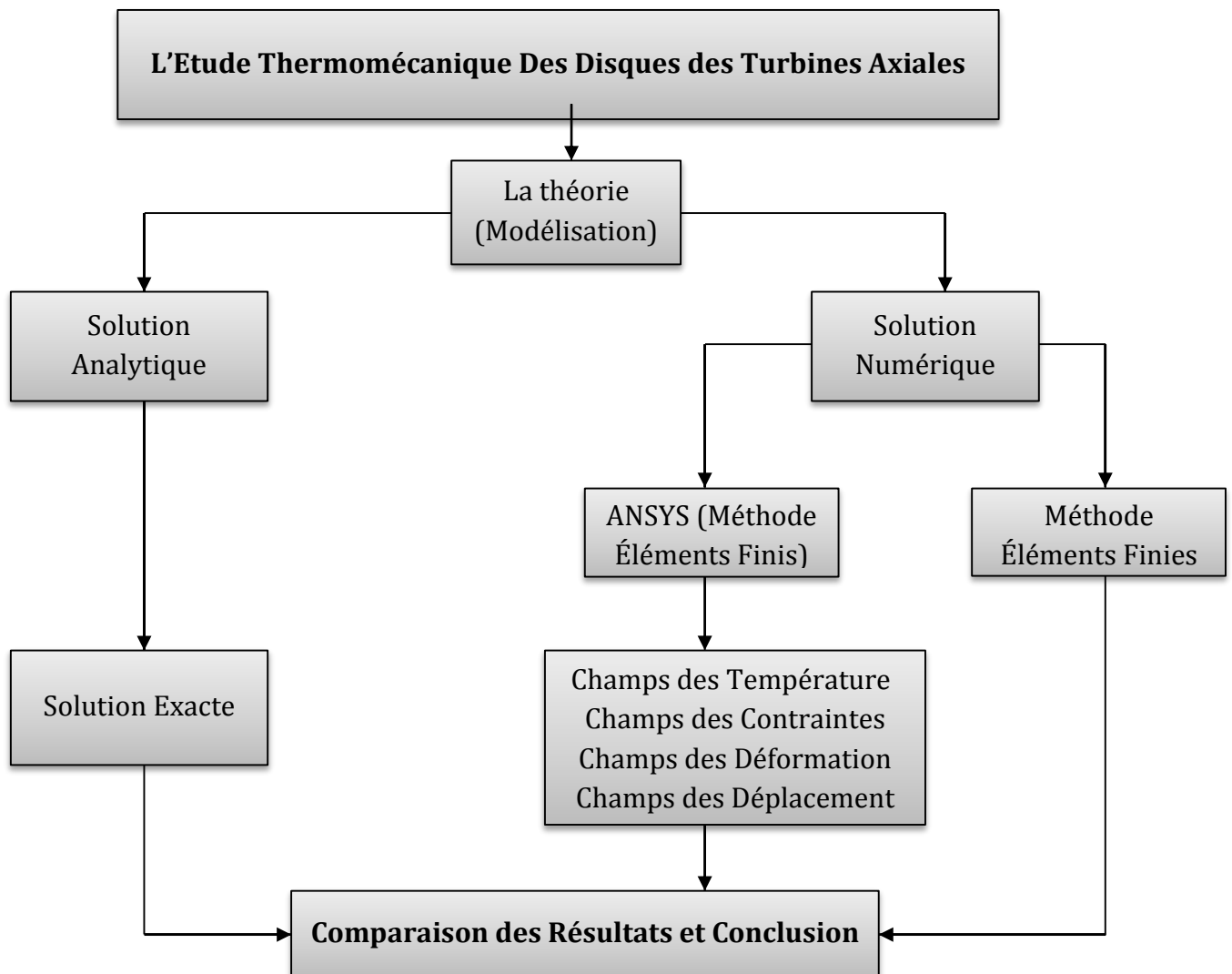


Figure III.3 Etapes de résolution du modèle.

III.4 Modèle Monodimensionnelle [16]

Reprenons les équations établies pour un disque plan, d'épaisseur « h » faible devant le rayon extérieur de façon à se placer dans l'hypothèse de l'état de contraintes planes.

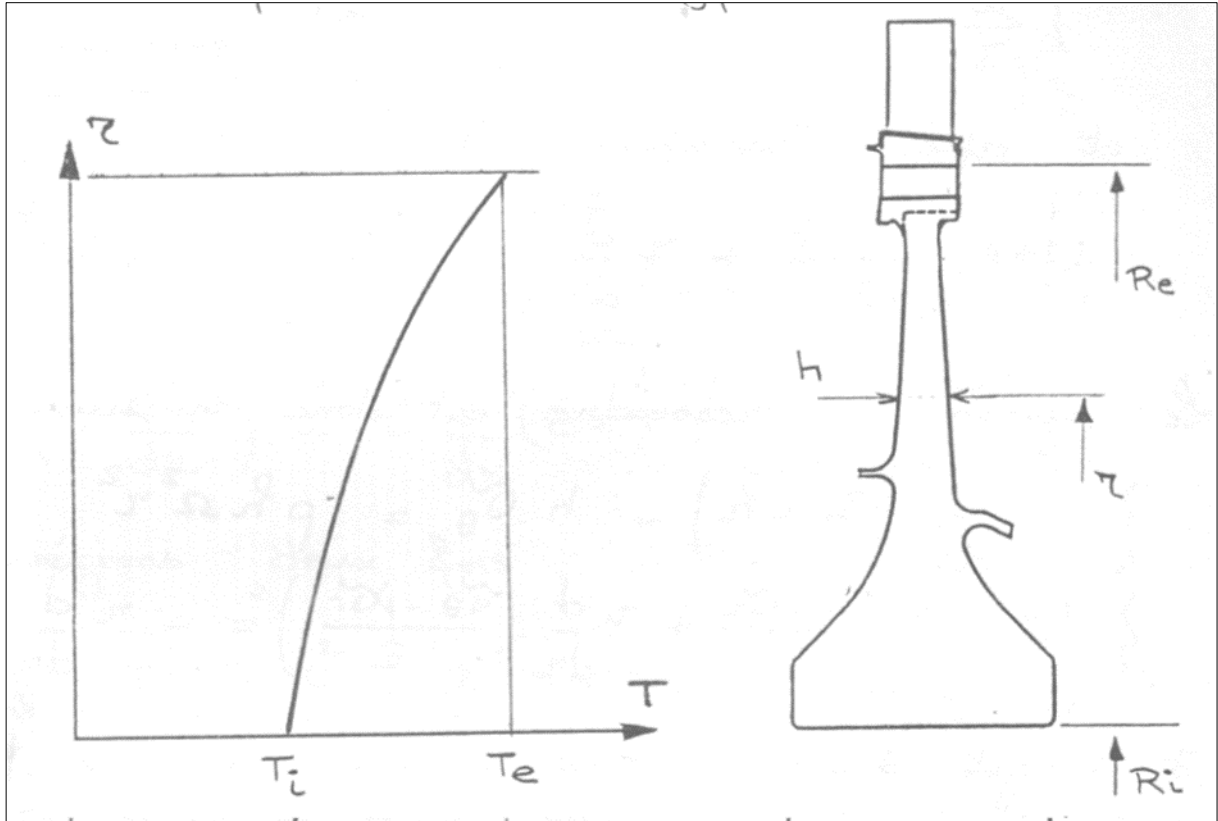


Figure III.4 Contraintes thermiques dans un disque

L'équation d'équilibre qui traduit l'égalité entre les efforts appliqués à un petit élément de hauteur « dr » et les réactions dues aux contraintes internes, demeure inchangée à savoir :

$$\frac{d}{dr} (\sigma_{rr} r) = (\sigma_{\theta\theta} - \rho \Omega^2 r^2) \quad (\text{III.17})$$

Soit la loi de Hooke-Duhamel :

$$\frac{du}{dr} = \varepsilon_{rr} = \frac{\sigma_{rr} - \nu \sigma_{\theta\theta}}{E} + \alpha(T - T_0) \quad (\text{III.18a})$$

$$\frac{u}{r} = \varepsilon_{\theta\theta} = \frac{\sigma_{\theta\theta} - \nu \sigma_{rr}}{E} + \alpha(T - T_0) \quad (\text{III.18b})$$

Après transformation on aura :

$$(1+\nu) \cdot \frac{\sigma_{\theta\theta} - \sigma_{rr}}{E} + r \cdot \frac{d}{dr} \left[\left(\frac{\sigma_{\theta\theta} - \nu \sigma_{rr}}{E} \right) + \alpha(T - T_0) \right] = 0 \quad (\text{III.19})$$

Les équations de compatibilité qui traduisent les relations entre le déplacement radial « u_r » et les allongements respectivement suivant la circonférence et une radiale sont également inchangés :

Le système à résoudre est donc le suivant :

$$\frac{d}{dr}(\sigma_{rr}.r) - \sigma_{\theta\theta} = \rho.\Omega^2.r^2 \quad (\text{III.20a})$$

$$(1 + \nu) \frac{\sigma_{\theta\theta} - \sigma_{rr}}{E} + r \frac{d}{dr} \left(\frac{\sigma_{\theta\theta} - \nu \sigma_{rr}}{E} \right) = -r \frac{d}{dr} [\alpha (T_1 - T_0)] \quad (\text{III.20b})$$

Il s'agit d'un système linéaire en $\sigma_{\theta\theta}$ et σ_{rr} que nous pouvons dissocier les effets thermiques des autres chargements.

Pour le cas où $\Omega = 0$; nous constatons que les contraintes $\sigma_{\theta\theta}$ et σ_{rr} sont nulles si et seulement si :

$$\frac{d}{dr}(\alpha(T - T_0)) = 0 \quad (\text{III.21})$$

Autrement dit si : $T = c^{ste}$ puisque α peut être considéré comme constant dans une plage qui pour les matériaux conventionnels s'étend sur plusieurs centaines de degrés. Cela signifie que toute variation de T ; même linéaire induit des contraintes thermiques.

III.4.1 Cas particulier du disque d'épaisseur constante

Pour simplifier l'écriture supposons $T_0 = 0$ autrement dit, la variable « T » représente en fait $(T - T_0)$.

Le système à résoudre devient :

$$\frac{d}{dr}(r\sigma_{rr}) = \sigma_{\theta\theta} \quad (\text{III.22a})$$

$$(1+\nu) (\sigma_{\theta\theta} - \sigma_{rr}) + \frac{1}{r} \frac{d}{dr} (\sigma_{\theta\theta} - \nu \sigma_{rr} + E\alpha T) = 0 \quad (\text{III.22b})$$

Élimine $\sigma_{\theta\theta}$ on obtient:

$$\frac{d^2\sigma_{rr}}{dr^2} + \frac{3}{r} \frac{d\sigma_{rr}}{dr} + \frac{1}{r} \frac{d}{dr} (E\alpha T) = 0 \quad (\text{III.23a})$$

$$\frac{d}{dr} (r^3 \frac{d\sigma_{rr}}{dr}) + r^2 \frac{d}{dr} (E\alpha T) = 0 \quad (\text{III.23b})$$

En intégrant deux fois, on aura :

$$r^3 \frac{d\sigma_{rr}}{dr} + E \alpha T r^2 - 2 \int E \alpha T r dr = C \quad (\text{III.24a})$$

$$\frac{d\sigma_{rr}}{dr} = -\frac{E\alpha T}{r} + \frac{2}{r^3} \int E \alpha T r dr + \frac{C}{r^3} \quad (\text{III.24b})$$

$$\sigma_{rr} = -\frac{1}{r^2} \int E \alpha T r dr - \frac{C}{2r^2} + A \quad (\text{III.24c})$$

En posant $B = \frac{C}{2}$, le champ des contraintes **est** alors :

$$\sigma_{rr} = A - \frac{B}{r^2} - \frac{1}{r^2} \int_{R_i}^r E \alpha T r dr \quad (\text{III.25a})$$

$$\sigma_{\theta\theta} = A + \frac{B}{r^2} + \frac{1}{r^2} \int_{R_i}^r E \alpha T r dr - E \alpha T \quad (\text{III.25b})$$

Les constants A et B sont déterminées par les conditions aux limites suivants :

$$\sigma_{rre} = 0 \text{ au rayon extérieur } R_e$$

$$\sigma_{rri} = 0 \text{ au rayon d'alésage } R_i \text{ (} R_i \neq 0 \text{)}$$

D'où, les expressions des contraintes thermiques :

$$\sigma_{rr} = \frac{r^2 - R_i^2}{r^2 - R_e^2} \int_{R_i}^{R_e} E \alpha T r dr - \frac{1}{r^2} \int_{R_i}^r E \alpha T r dr \quad (\text{III.26a})$$

$$\sigma_{\theta\theta} = \frac{r^2 - R_i^2}{r^2 - R_e^2} \int_{R_i}^{R_e} E \alpha T r dr + \frac{1}{r^2} \int_{R_i}^r E \alpha T r dr - E \alpha T \quad (\text{III.26b})$$

D'où on déduit la relation remarquable

$$\sigma_{\theta\theta i} - \sigma_{\theta\theta e} = E \alpha (T_e - T_i) \quad (\text{III.27})$$

Qui est indépendante de la loi $T(r)$

Particularisons les résultats précédents au cas d'une loi de température de la forme :

$$T = a + b r^n \quad (\text{III.28})$$

Et conduisant de la valeur T_e à la périphérie à la valeur T_i sur l'alésage :

$$T = \frac{T_i R_e^n - T_e R_i^n}{R_e^n - R_i^n} + \frac{T_e - T_i}{R_e^n - R_i^n} r^n \quad (\text{III.29})$$

On en déduit alors :

$$\sigma_{rr} = E\alpha \frac{T_e - T_i}{n+2} \frac{1 - \left(\frac{R_i}{R_e}\right)^{n+2}}{1 - \left(\frac{R_i}{R_e}\right)^n} \left(\frac{R_i}{r}\right)^2 \left[\frac{1 - \left(\frac{r}{R_e}\right)^{n+2}}{1 - \left(\frac{R_i}{R_e}\right)^{n+2}} - \frac{1 - \left(\frac{r}{R_e}\right)^2}{1 - \left(\frac{R_i}{R_e}\right)^2} \right] \quad (\text{III.30a})$$

$$\sigma_{\theta\theta} = E\alpha \frac{T_e - T_i}{n+2} \frac{1 - \left(\frac{R_i}{R_e}\right)^{n+2}}{1 - \left(\frac{R_i}{R_e}\right)^n} \left(\frac{R_i}{r}\right)^2 \left[\frac{1 - \left(\frac{r}{R_e}\right)^2}{1 - \left(\frac{R_i}{R_e}\right)^2} - \frac{1 + (n+1) \left(\frac{r}{R_e}\right)^{n+2}}{1 - \left(\frac{R_i}{R_e}\right)^{n+2}} \right] \quad (\text{III.30b})$$

Et intéressons-nous aux valeurs extrêmes de la contrainte tangentielle à l'alésage et à la périphérie :

$$\sigma_{\theta\theta e} = E\alpha \frac{T_e - T_i}{n+2} \left[\frac{2}{1 - \left(\frac{R_i}{R_e}\right)^2} - \frac{n \left(\frac{R_i}{R_e}\right)^n}{1 - \left(\frac{R_i}{R_e}\right)^n} \right] \quad (\text{III.31a})$$

$$\sigma_{\theta\theta i} = E\alpha \frac{T_e - T_i}{n+2} \left[\frac{2 \left(\frac{R_i}{R_e}\right)^2}{1 - \left(\frac{R_i}{R_e}\right)^2} - \frac{n}{1 - \left(\frac{R_i}{R_e}\right)^n} \right] \quad (\text{III.31b})$$

La figure ci-dessous donne l'évolution de $\sigma_{\theta\theta e}$ et $\sigma_{\theta\theta i}$ en fonction de la valeur relative du rayon d'alésage pour diverses valeurs de « n » :

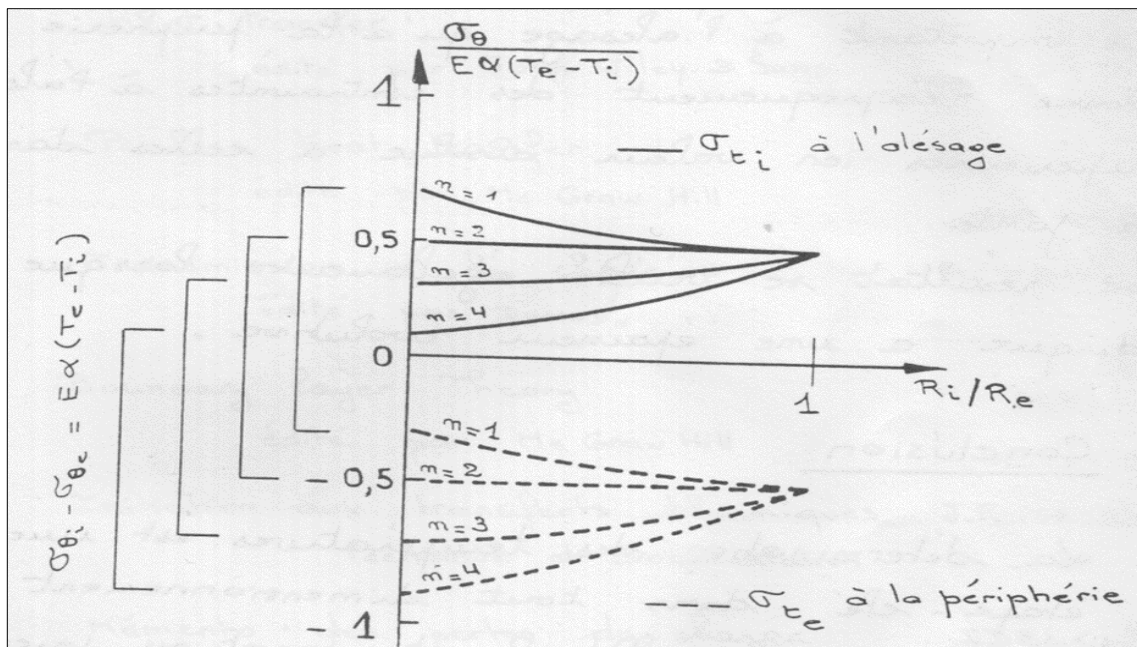


Figure III.5 Cas particulier du disque d'épaisseur constante [16]

On remarque alors :

- Pour une distribution de température donnée (n fixé) et un rayon d'alésage fixé, les contraintes sont proportionnelles à l'écart $(T_e - T_i)$;

- Pour une jante plus chaude que l'alésage ($T_e > T_i$), la périphérie est en compression et l'intérieur en traction ;
- Pour un anneau ($\frac{R_i}{R_e} > 0.9$), les contraintes sont indépendantes de la répartition de la température et valent $\pm E \alpha \frac{T_e - T_i}{2}$;
- A géométrie donnée ($\frac{R_i}{R_e}$ fixé) ; les contraintes varient comme le gradient local :
 - « n » élève correspondent à un gradient de température important à la jante et faible à l'alésage et corrélativement des contraintes à la périphérie supérieures en valeur absolue à celles à l'alésage.
 - « n » faible correspondent à un gradient de température plus important à l'alésage qu'à la périphérie et donne réciproquement des contraintes à l'alésage supérieures en valeur absolue à celles dans la jante. Ces résultats se vérifient également lorsque le disque a une épaisseur évolutive.

III.5 Critère de Dimensionnement ^[16]

III.5.1 Spécifications techniques et choix fondamentaux

Dans la pratique le mécanicien chargé du dimensionnement d'un disque se voit imposer des spécifications qui lui fixent les objectifs de durées de vie et de temps entre révision, les marges vibratoires, les règlements à satisfaire et des choix fondamentaux attachés au projet étudié. Parmi ces derniers citons :

- La vitesse de rotation maximale ;

Le rayon intérieur de veine ;

Le nombre des aubes ; leur corde. (*Les choix aérodynamiques*)

- Les circuits de ventilation qui conditionnent les températures puisés par le disque et les gradients thermiques auxquels il sera soumis ;
- Le (ou des) matériau(x) en fonction d'une expérience antérieure, de l'existence d'un schéma industriel de production, d'un souci d'uniformisation avec d'autres moteurs...
- L'architecture motrice : passage d'un arbre à l'intérieur du rotor du moteur, plan de démontage.

Le rôle du mécanicien est donc d'optimiser la géométrie du disque (et conjointement celle des aubes) pour parvenir à une conception « *saine* » avec le minimum de masse dont :

- ❖ **La durée de vie**, pour des conditions d'utilisation spécifiées, est vérifiée. Cela suppose par conséquent la prise en compte :
 - De l'endommagement par fatigue oligocyclique et par fluage si nécessaire ;
 - La maîtrise des phénomènes vibratoires en prenant des marges vis-à-vis des coïncidences fréquentielles et en se réservant une amplitude de contrainte admissible ;
 - L'absence d'instabilité de type flambement.
- ❖ **L'utilisation du moteur** peut être maintenue durant un temps limité au moins égale à celui qui s'écoule entre deux révisions avec des défauts métallurgiques, des défauts d'usinages, des criques, dont la nature ou/et la taille n'auraient pas permis une détection lors des contrôles qui précèdent le montage de la pièce sur moteur.
- ❖ **La pièce reste intègre** même lors de fonctionnements anormaux du moteur tels que survitesse, sur-température, balourd dynamique.

III.5.2 Survitesse

Les règlements imposent que tout disque doit être capable de subir une survitesse de **23% à 25%** (valeur fonction des règlements) sans éclatement de façon à disposer d'une certaine marge de sécurité vis-à-vis d'incidents tels que dérèglement de la régulation, rupture d'arbre et désolidarisation de la turbine.

En général on cherche à avoir une marge supérieure à **30%**. La capacité de survitesse doit donc pouvoir être démontrée à la température de fonctionnement la plus sévère avec maintien au régime nominal pendant un certain temps.

III.5.3 Notion de contrainte moyenne

Imaginons un disque d'épaisseur constante avec un matériau à comportement parfaitement elasto-plastique sans écrouissage. Etudions l'évolution des contraintes lorsqu'on augmente progressivement sa vitesse de rotation.

La contrainte maximale étant à l'alésage, cette zone va plastifier en premier ; comme dans cette zone la contrainte sera limitée à σ_l , la reprise des efforts centrifuges nécessitera une contribution supérieure de la zone élastique.

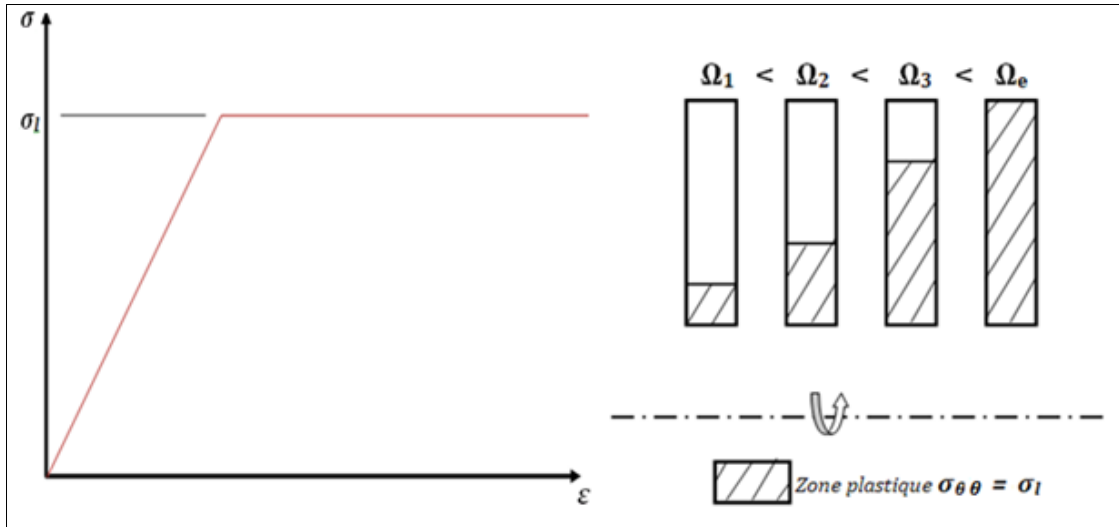


Figure III.6 Notion de contrainte moyenne [16]

Au fur et à mesure que la vitesse augmente, le front de la zone plastique se rapproche de plus en plus vite du rayon extérieur. Lorsqu'il arrive à ce dernier, le disque est entièrement plastique, la contrainte tangentielle est uniformément égale à $\sigma_{\theta\theta} = \sigma_l$ et il ne reste plus aucune réserve pour résister à une augmentation des efforts centrifuges.

A cette vitesse Ω_e , le disque a atteint le seuil d'éclatement et se comporte comme un anneau ($\sigma_{\theta\theta} = c^{ste}$) et S la section du disque.



$$\sigma = \frac{\Sigma(\text{efforts radiaux})}{2\pi S}$$

Dans un cas plus général :

$$\Sigma(\text{efforts radiaux}) = F_{aubes} (\Omega_e^2) + F_{centrifuge\ disque} \quad (\text{III.32a})$$

$$F_{centrifuge\ disque} = \int_{r_a}^{r_e} (\rho 2\pi r h dr \cdot \Omega_e^2 dr) \quad (\text{III.32b})$$

$$F_{centrifuge\ disque} = \int_{r_a}^{r_e} (2\pi \rho \cdot \Omega_e^2 h r^2 dr) \quad (\text{III.32c})$$

En négligeant les effets de non-linéarité, les efforts radiaux sont proportionnels au carré de la vitesse. On peut donc évaluer, à un régime donné Ω , la marge vis-à-vis de l'éclatement en comparant la contrainte tangentielle moyenne $\sigma_{\theta\theta m}$ définie par :

$$\sigma_{\theta\theta m} = \frac{\Sigma(\text{efforts radiaux})}{2\pi S} \quad (\text{III.33})$$

À la contrainte à la rupture du matériau ; la vitesse d'éclatement est alors donnée par :

$$\frac{\Omega_e^2}{\Omega^2} = \frac{\sigma_l}{\sigma_{\theta\theta m}} \quad (\text{III.34a})$$

Avec:

$$\sigma_{\theta\theta m} = \frac{F_{aubes}(\Omega_e^2) + \int_{r_a}^{r_e} (2\rho\pi.\Omega_e^2 hr^2 dr)}{2\pi S} \quad (\text{III.34b})$$

L'analyse fait ci-dessus, suppose que la plastification du disque, au voisinage de la vitesse d'éclatement, conduit à un état où la contrainte est uniforme dans tout le disque.

Ce n'est pas le cas des allongements. Dans les zones qui par un calcul élastique apparaissent très sollicités (alésage, facteurs de forme autour des trous...) la contrainte est en effet écrêtée à σ_l mais l'allongement subit par la matière atteint des valeurs importants (plusieurs %).

Il faut donc que le matériau soit suffisamment ductile (c.à.d. ait une capacité d'allongement à rupture suffisante) pour absorber ces allongements sans annonce de crique. Si ce n'est pas le cas, une ou des criques apparaissent et les lois physiques qui régissent l'éclatement du disque font appel à d'autres théories ; et en particulier à celle de la Mécanique de la Rupture.

III.5.4 Non linéarités et instabilités

Le constant tangentiel défini précédemment permet d'estimer la vitesse d'éclatement d'un disque isolé avec une assez bonne pression mais dans la pratique des analyses plus finies sont nécessaires. En effet les lois d'élasto-plastiques et les non-linéarités ne peuvent être ignorées :

a. Loi de comportement

Toute plastification s'accompagne en fait d'un tri-axialité des contraintes et la notion de contrainte tangentielle moyenne qui repose sur une zone plastique pilotée uniquement par la contrainte tangentielle $\sigma_{\theta\theta}$ est à cet égard très insuffisante :

Partout où la valeur de la contrainte radiale est comprise entre **25 et 75%** de celle de la contrainte tangentielle, la contrainte de Von Mises, la plus représentative vis-à-vis de la plastification est inférieure à la contrainte tangentielle de **10%** et plus. La simplification a donc en général pour conséquence une surestimation de la zone plastique.

b. Non linéarités des chargements et de géométrie

Elle vient du fait que sous l'action des efforts centrifuges, le disque se dilate et se déforme entraînant une modification de la répartition des efforts centrifuges et de leur valeur au point de créer dans certains cas une instabilité. Ces phénomènes sont amplifiés lorsque le matériau a un comportement non linéaire de type elasto-plastique.

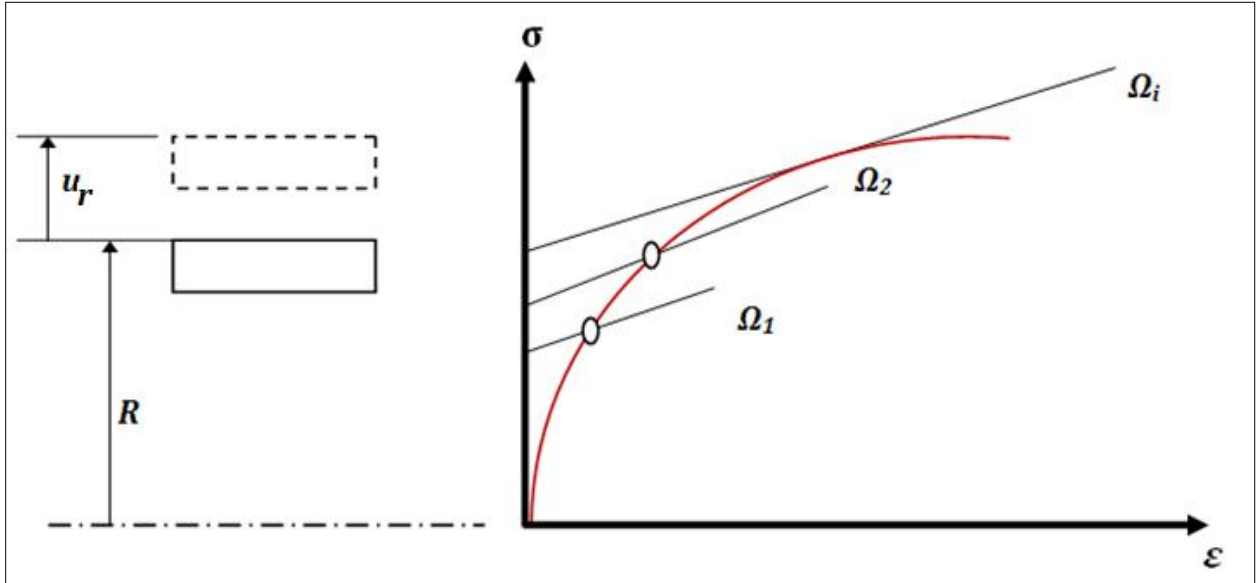


Figure III.7 Non linéarités des chargements et de géométrie

Prenons un cas simplifié d'un anneau de **rayon** R entrainé au régime Ω et fabriqué par un matériau dont la courbe de traction monotone est donnée comme indiquée sur la figure ci-dessus (comportement elasto-plastiques avec écrouissage).

Soit u_r le déplacement à l'équilibre, la contrainte tangentielle pour cet anneau de rayon $(R+u_r)$ est :

$$\sigma_{\theta\theta} = \rho \Omega^2 (R+u_r)^2 \approx \rho \Omega^2 (R^2 + 2u_r R) \quad (\text{III.35})$$

$$\text{Par ailleurs : } \frac{u}{R} = \epsilon_{\theta\theta}$$

Et il vient ;

$$\sigma_{\theta\theta} = \rho \Omega^2 (R^2 + 2R^2 \epsilon_{\theta\theta}) = \rho \Omega^2 R^2 (1 + 2\epsilon_{\theta\theta}) \quad (\text{III.36})$$

$$\sigma_{\theta\theta} = \rho \Omega^2 R^2 + 2\rho \Omega^2 R^2 \epsilon_{\theta\theta} \quad (\text{III.37})$$

L'équilibre est donc donné par l'intersection de la droite $\sigma_{\theta\theta}$ d'équation donnée ci-dessus,

Avec la courbe d'érouissages $\sigma = f(\varepsilon)$

Au-delà d'une certaine valeur de Ω égale à Ω_i , il n'y a plus intersection : Ω_i est vitesse limité de stabilité. Au-delà de Ω_i toute augmentation infinitésimale de Ω se traduira par une augmentation du champ centrifuge et par conséquent par une dilatation supplémentaire de l'anneau, qui entrainera à son tour une augmentation des efforts centrifuge, sans qu'aucun équilibre ne puisse être atteint.

La vitesse d'éclatement est donc plus fiable que celle donnée par une simple analyse linéaire. Autrement dit, l'analyse simplifiée est trop optimiste vis-à-vis de ce non-linéaire.

III.5.5 Fluage

Le fluage global des disques est assez rare, car dans la plupart des cas les autres critères à respecter (*survitesse, fatigue oligocylique*) limitent le niveau des contraintes à des valeurs suffisamment basses pour qu'il n'y ait pas fluage.

Le fluage global se rencontre néanmoins sur des disques en alliage de titane surtout si l'état de contrainte est multiaxial. C'est à éviter car les écoulements de fluage (vitesse, orientation) sont très dispersés d'un lot de matière à l'autre et sont donc difficilement maîtrisable. Chaque constructeur a développé son propre méthode et critères pour le dimensionnement de disque en fluage.

En premier approximation, on peut prendre la contrainte moyen tangentielle associé à la température moyenne du disque pour entre dans les abaques de fluage.

III.5.6 Fatigue oligocylique

Ce type d'endommagement n'est pas propre aux disques mais apparait sur toute pièce soumise à des cycles répètes de mise sous contraintes.

Les principales étapes nécessaires à sa prise en compte :

- a. **Connaissance des conditions d'utilisation** : la fatigue oligocylique étant liée aux niveaux de contrainte et de température, il est indispensable de connaître les conditions d'utilisation (régime moteur, température...) pour déterminer le cycle de contrainte. La durée de vie s'exprimera alors au nombre de mission réalisable avant apparition d'une crique.
- b. **Détermination des contraintes locales** : l'endommagement sera maximal partout où les niveaux de contrainte sont les plus élevés, à savoir l'alésage et toute zone où la géométrie provoque un facteur de forme. On trouve ci-dessous quelque **exemple** d'endroits où il y a forte probabilité d'apparition de criques consécutivement à un endommagement de fatigue.

Si par une analyse élastique, on montre que la limite d'élasticité du matériau n'est dépassée que dans une zone réduite du disque (c.à.d. qui ne représente pas plus de **15% à 20%** du volume des disques, alors on pourra se limiter à cette analyse élastique et appliquer **la méthode de Neuber** pour avoir accès aux cycles de contrainte et d'allongement réellement subis par la matière. Sinon une analyse elasto-plastique est nécessaire.

- c. **Décomposition de la mission en cycles** élémentaires suivant l'algorithme dit du « *Rainflow* »
- d. **Calcul de l'endommagement d'une mission** en utilisant une règle de calcul linéaire. Cette étape suppose que l'on dispose de courbes de fatigue des matériaux établis soit à allongement imposé soit à contrainte imposée.

III.5.7 Tolérance au dommage

L'objectif est d'assurer qu'un défaut, à la limite de possibilités des moyens de détection à neuf et en service, et existant dans le disque au moment de **(re)**montage et de la remise en service, n'entraîne pas la rupture de ce dernier avant la prochaine dépose programme ; fixé par la durée de vie déclarée ou par les intervalles de maintenance.

Ce point est particulièrement important. Il focalise depuis quelque années l'attention des constructeurs et des autorités certifiant, car l'évolution de la conception des disques a, dans les l'années **70 à 80**, conduit à diminuer relativement leur tolérance au dommage pour les raisons suivants :

- Développement de nouveaux matériaux et/ou recherche de structures métallurgiques favorisant la tenue à la fatigue oligocylique. Ces propriétés en fissuration (vitesses de propagation de crique plus élevées à même Δk) ;
- Avec ces nouveaux matériaux, amorces en fatigue oligocylique généralement à partir de défauts inhérents à l'élaboration (gros carbures, ségrégation) ;
- Augmentation corrélative du niveau de contrainte qui amène à une forte diminution des temps de propagation par le biais de 2 phénomènes : d'une part à taille de défaut donnée correspond au Δk plus élevé donc une vitesse de fissuration plus élevée et, d'autre part, la taille de défaut critique est diminuée ;
- Optimisation de forme et optimisation de masse : On cherche à faire travailler au maximum toute la matière.

En cas de crique il n'y a plus de capacité à reprendre les efforts libérés par la zone fissurée et la crique se propage très vite, contrairement à certaine vieilles conceptions où il est arrivé que la crique s'arrête après avoir parcouru un trajet donné.

C'est pourquoi une analyse de propagation de crrique est nécessaire à l'alésage et partout où la durée de vie en fatigue oligocylique semble limitée.

III.5.8 Choix de la Géométrie

Chaque constructeur a développé ses propres méthodes d'optimisation de disque et c'est la raison pour laquelle les rotors ont chez un même constructeur souvent un même aspect d'un moteur à l'autre. Néanmoins quelques règles simples régissent la philosophie de dimensionnement. Le premier consiste à évaluer la difficulté du projet en situant le rayon « *critique* ».

a) Notion de rayon critique

Si σ^* est la contrainte moyenne tangentielle à ne pas dépasser pour assurer la marge en survitesse, l'expérience montre que le disque d'égale constante $\sigma = \sigma^*$ est la solution qui conduit à la masse minimale. Il suffirait alors de lui adjoindre une jante pour la fixation des aubes.

Malheureusement cette géométrie de disque, qui est non alésé, est impossible, d'une part ; les impératifs technologiques font qu'il est souvent nécessaire d'alésé le disque (passage d'un arbre, d'un support de palier, d'une enceinte d'huile), d'autre part ; un disque très mince et plein pose des problèmes vibratoires et des difficultés de fabrication (en particulier mauvaises propriétés mécaniques sur l'axe dues à une structure métallurgique difficilement contrôlable par forgeage).

En alésage du disque, on supprime de la matière qui travaille et qu'il faut la remplacer en rajoutant sur les flânes. Imaginons le cas limite où la matière est rajoutée « *ponctuellement* » au rayon d'alésage sous forme d'un anneau.

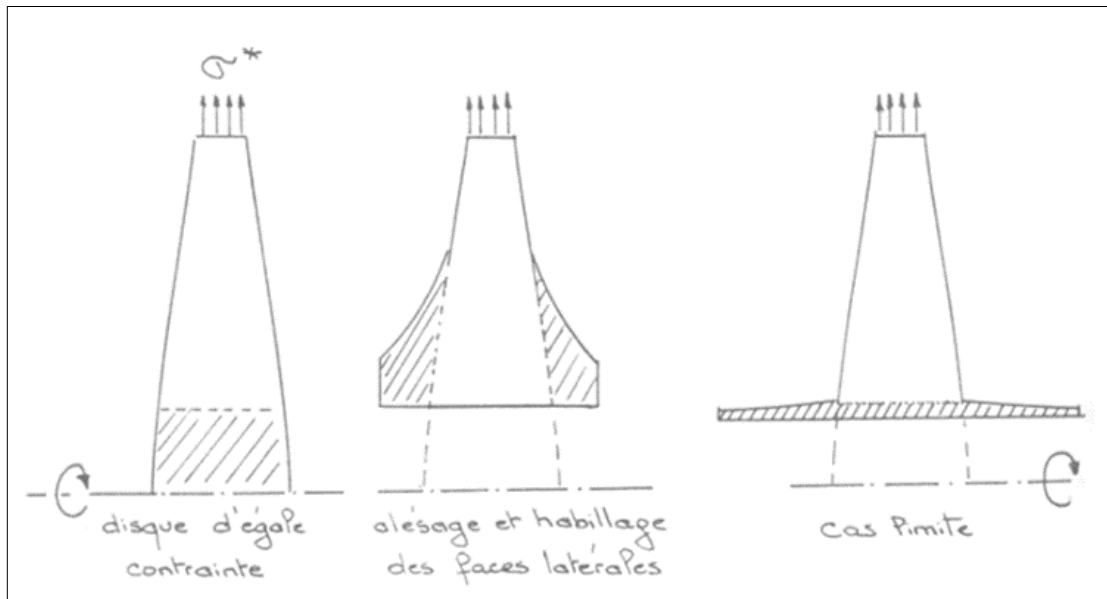


Figure III.8.a Notion de rayon critique

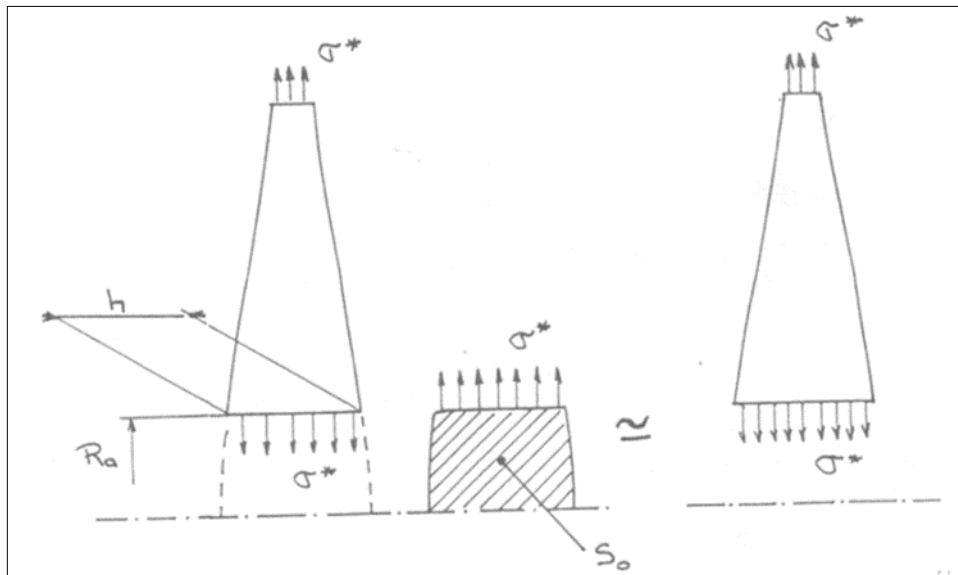


Figure III.8.b Notion de rayon critique

Dimensionnons cet anneau de façon à maintenir la contraintes tangentielle moyenne égale à σ^* . Pour cela reconstituons la contrainte radiale σ^* à la liaison disque-anneau, afin de conserver un disque d'égale contrainte dans la partie supérieure au rayon d'alésage. La sollicitation tangentielle moyenne dans l'anneau est alors :

$$\sigma_{\theta\theta} = \rho \Omega^2 R_a^2 + \frac{2\pi\sigma^* R_a h}{2\pi S} \quad (\text{III.38})$$

Avec :

Ω : centrifuge

S : section de l'anneau

$2\pi\sigma^* R_a h$: Σ efforts extérieurs pour l'anneau

Pour maintenir l'ensemble à contrainte tangentielle moyenne σ^* et puisque on a supposé que l'état de contrainte du disque état inchangé, il faut que l'anneau ait un contrainte tangentielle égale à σ^* ;

$$\sigma^* = \rho \Omega^2 R_a^2 + \frac{2\pi\sigma^* R_a h}{2\pi S} \quad (\text{III.39})$$

Ce qui permet de déterminer S :

$$S = \frac{\sigma^* R_a h}{\sigma^* \left(1 - \frac{\rho \Omega^2 R_a^2}{\sigma^*}\right)} \approx \frac{S_0}{\left(1 - \frac{\rho \Omega^2 R_a^2}{\sigma^*}\right)} \quad (\text{III.40})$$

La solution n'est physique que pour $S > 0$ et dans ce cas S est toujours inférieur à S_0 . On constate que S tend vers l'infini quand R_a tend vers $R_c = \sqrt{\frac{\sigma^*}{\rho \Omega^2}}$ appelé rayon critique.

Ce résultat est une évidence si on l'interprète physiquement, l'anneau de section S a pour but de reprendre les efforts initialement repris par la partie centrale du disque, que l'on supprime. Mais sa contrainte ne doit pas dépasser une certaine valeur fixée à σ^* .

Comme il est rajouté à un rayon supérieur au rayon moyen de la section supprimée, il génère lui-même plus d'effort centrifuge. Il est alors évident que si le rayon est suffisamment élevé pour que ses propre efforts centrifuges génèrent une contrainte σ^* , il n'a, quelle que soit sa section, plus aucune capacité à reprendre d'autres efforts.

Dans la pratique, le disque sera épaissi de façon continue à partir d'un rayon plus élevé (on parlera d'habillage). Donc la section rajoutée générera plus d'effort centrifuge que notre simple modèle d'anneau, ce qui réduira d'autant la capacité de cet habillage à remplacer la matière supprimée lorsqu'on alèse le disque.

Le rayon maximal, auquel il est possible d'aléser au disque d'égale contrainte, tout en maintenant la contrainte tangentielle moyenne à la valeur initiale, est donc toujours inférieur au rayon critique. Un projet est d'autant plus difficile que le rayon critique est bas.

b) Effet d'un épaississement sur la contrainte à l'alésage

Il arrive souvent que l'on soit amené à épaissir localement un disque. Il importe de savoir dans quel sens joue cet apport de matière. Va-t-il diminuer ou augmenter la contrainte tangentielle à l'alésage? Soit R le rayon au niveau duquel est ajouté le supplément de matière par augmentation de l'épaisseur du disque. A ce rayon, le déplacement du disque non épaissi est donné par :

$$u_d = \frac{(\sigma_{\theta\theta} - \nu\sigma_{rr})}{E} R \quad (\text{III.41})$$

Avec $(\sigma_{\theta\theta} - \nu\sigma_{rr})$ est la valeur de la contrainte avant épaissement

Celui du supplément de matière qui s'assimile alors à un anneau serait, s'il était isolé du disque :

$$u_a = \frac{\rho\Omega^2 R^2}{E} R = \frac{\rho\Omega^2 R^3}{E} \quad (\text{III.42})$$

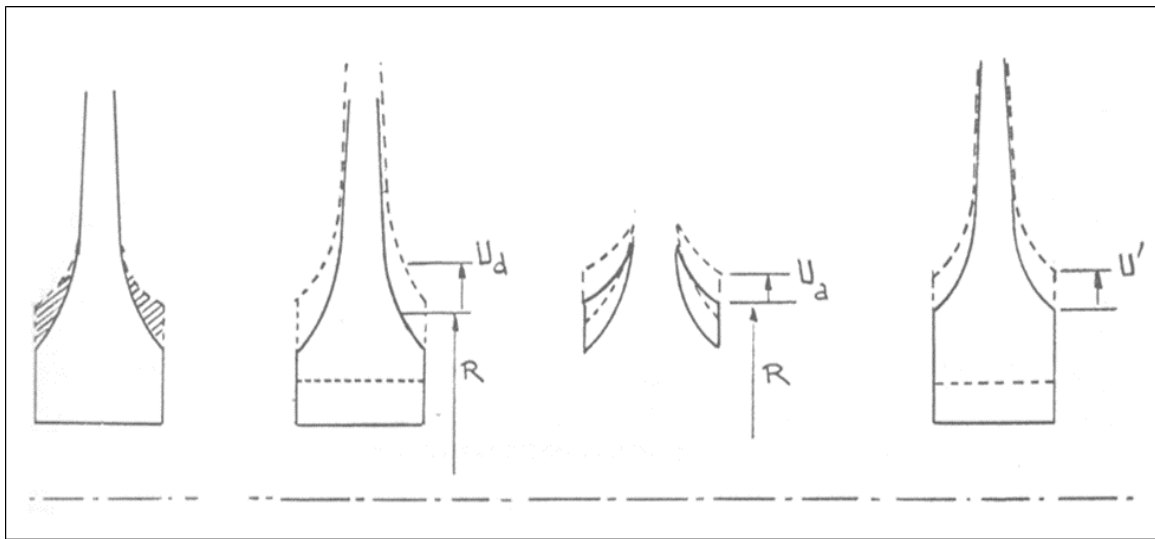


Figure III.9 Effet d'un épaissement sur la contrainte à l'alésage

Lorsque cette matière est ajoutée au disque, un nouvel équilibre apparaît. Il est tel qu'au rayon considère le déplacement est maintenant U' avec :

$$U_d < U' < U_a \quad (\text{III.43})$$

Si $U_a > U_d$, cette matière va surcharger le disque et donc augmenter la contrainte à alésage;

Si $U_a < U_d$, cette matière va soulager le disque et donc diminuer la contrainte à alésage.

L'exemple ci-dessus montre l'intérêt de prendre en considération les déplacements lorsqu'il s'agit d'étudier l'équilibre de pièces axisymétriques. C'est particulièrement vrai dans le cas de l'étude des viroles d'entraînement où il est important de choisir un rayon d'accrochage tel que les moments de flexion soient minimisés.

III.5.9 Processus D'optimisation [10]

Le dimensionnement d'un disque est en fait un processus d'optimisation qui doit intégrer des paramètres aussi variés tels que marge en survitesse, fatigue oligocyclique, rigidité dynamique, contraintes des fabrications.

Le processus itératif commence par :

- Une estimation, fondée sur des dimensionnements antérieurs, des facteurs de forme α_k autour des fonds d'alvéoles, des trous de fixation. Par définition, la contrainte locale élastique vaut α_k , la contrainte nominale qui résulte d'un simple calcul monodimensionnel.
- La détermination de la contrainte moyenne pour respecter la marge en survitesse et/ou le critère de fluage globale.
- La détermination de la contrainte maximale admissible en fatigue oligocyclique.
- Cette dernière correspond à celle à ne pas dépasser à l'alésage et permet de calculer les contraintes nominales σ_{rr} et $\sigma_{\theta\theta}$ admissibles aux niveaux des rayons où il y a les facteurs de forme α_k .
- Une évaluation des thermiques ;
- L'établissement des impératifs technologique à respecter tels qu'épaisseurs minimales, rayon d'alésage minimal, encombrement minimal, épaisseur maximale à l'alésage.

Ces données étant acquises, on itère alors autour d'une famille de disques issue soit d'un disque d'égale contrainte, alésé à un rayon variable et habillé latéralement par une famille d'habillages définis para-métriquement par leurs hauteurs et leurs largeurs.

L'optimisation consiste à rechercher la masse minimale en jouant sur la valeur des paramètres d'optimisation tout en restant à l'intérieur du domaine des contraintes d'optimisation précédemment définies.

CHAPITRE IV



**MODELE THERMOELASTIQUE QUASI-
MONODIMENSIONNEL**

IV.1 Modèle Thermoélastique [1]

IV.1.1 Hypothèses

- a. **Disque** – disque axisymétrique possédant un plan de symétrie orthogonal à son axe de symétrie ; et épaisseur du disque faiblement variable suivant le rayon ;
- b. **Chargement** – l'axe de rotation confondu avec l'axe de symétrie ; charges extérieures uniformément réparties et radiales disque soumis à un gradient thermique.
- c. **R.D.M.** – élasticité linéaire ; état de contraintes planes, justifié pour des épaisseurs faibles ou modérées comparés au rayon. La contrainte normale au plan du disque, nulle sur les deux faces, est supposée négligeable dans l'épaisseur.

IV.1.2 Mise en équations :

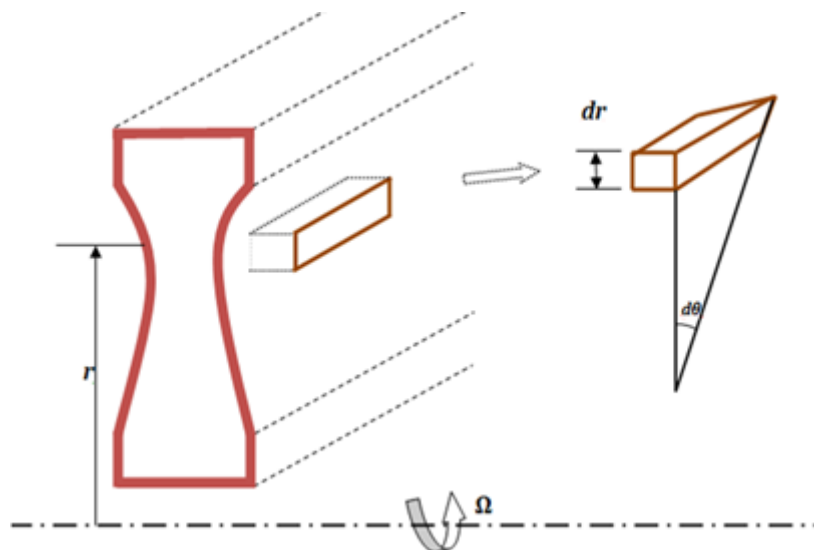


Figure IV.1 Élément du disque

Isolons un élément de disque de hauteur dr et angle $d\theta$; soient σ_{rr} et $\sigma_{\theta\theta}$ les contraintes normales aux faces de l'élément de référence suivant la convention :

On appellera :

σ_{rr} - contrainte normale dans la direction radiale

$\sigma_{\theta\theta}$ - contrainte normale dans la direction tangentielle

($\sigma_{\theta\theta}$: n'est pas une contrainte de cisaillement mais normal)

Les propriétés de symétrie font que σ_{rr} et $\sigma_{\theta\theta}$ sont les deux contraintes principales la troisième σ_{zz} est supposée nulle (état de contrainte plane).

Dans un disque mince d'épaisseur variable en mouvement rotatif, l'état de contraintes à n'importe quel rayon peut être complètement défini par les deux contraintes principales, les contraintes radiale et tangentielle σ_{rr} et $\sigma_{\theta\theta}$ respectivement.

La mise en équation du problème d'élasticité implique l'écriture de deux équations :

- ❖ Une équation d'équilibre ;
- ❖ Une équation de compatibilité des déplacements.

IV.1.3 Modélisation quasi-monodimensionnel

La première de ces deux équations est obtenue à partir des conditions d'équilibre d'un élément de disque comme suit ;

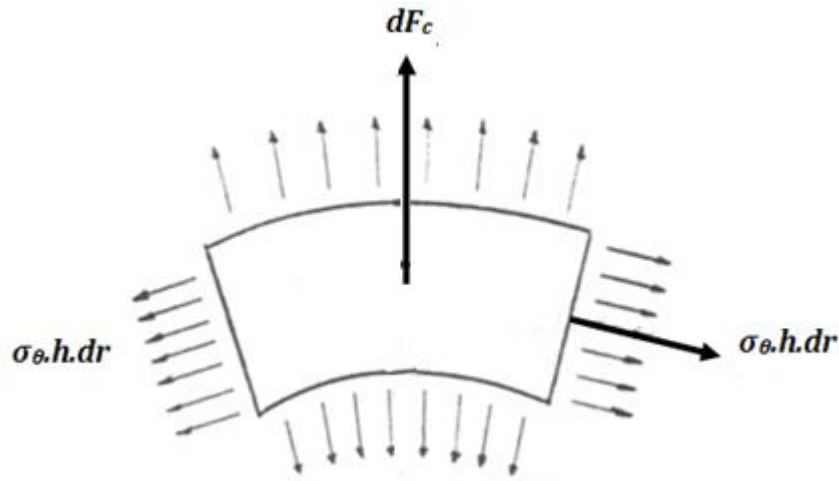


Figure IV.2 Les efforts sur un disque

Les seuls efforts volumiques sont ceux dus au champ centrifuge, ils ont pour valeur :

$$dF_c = \rho dV \Omega^2 r ; \quad \text{Sachant que : } dV = r d\theta dr h \quad \text{Donc : } dF_c = \rho d\theta dr h \Omega^2 r^2 \quad (\text{IV.1})$$

L'équilibre de l'élément de volume est donné par celui des efforts projetés sur l'axe radial.

$$\sigma_{rr} r h d\theta + d(\sigma_{rr} r h d\theta) - \sigma_{rr} r h d\theta + dF_c - 2\sigma_{\theta\theta} h dr \frac{d\theta}{2} = 0 \quad (\text{IV.2})$$

En remplaçant dF_c par sa valeur on obtient l'équation d'équilibre du disque à épaisseur variable suivante :

$$\frac{d}{dr}(\sigma_{rr} r h) = h(\sigma_{\theta\theta} - \rho \Omega^2 r^2) \quad (\text{IV.3})$$

La deuxième, équation est obtenue en exprimant la loi de Hooke-Duhamel en fonction des contraintes ;

$$\frac{du_r}{dr} = \varepsilon_{rr} = \frac{\sigma_{rr} - \nu \sigma_{\theta\theta}}{E} + \alpha(T - T_0) \quad (IV.4.a)$$

$$\frac{u_r}{r} = \varepsilon_{\theta\theta} = \frac{\sigma_{\theta\theta} - \nu \sigma_{rr}}{E} + \alpha(T - T_0) \quad (IV.4.b)$$

Après transformation, nous obtenons l'équation de compatibilité suivante, écrite en contraintes ;

$$(1 + \nu) \frac{\sigma_{\theta\theta} - \sigma_{rr}}{E} + r \frac{d}{dr} \left(\frac{\sigma_{\theta\theta} - \nu \sigma_{rr}}{E} \right) + r \frac{d}{dr} (\alpha \Delta T) = 0 \quad (IV.5)$$

Finalement on a le modèle thermomécanique représenté par le système suivant :

$$\begin{cases} \frac{d}{dr} (\sigma_{rr} r h) = h (\sigma_{\theta\theta} - \rho \Omega^2 r) \\ (1 + \nu) \frac{\sigma_{\theta\theta} - \sigma_{rr}}{E} + r \frac{d}{dr} \left(\frac{\sigma_{\theta\theta} - \nu \sigma_{rr}}{E} \right) + r \frac{d}{dr} (\alpha \Delta T) = 0 \end{cases} \quad (IV.6) \text{ et } (IV.7)$$

Avec les conditions à limites suivantes :

$$r = R_i ; \sigma_{ri} = -P_i \quad (IV.8.a)$$

$$r = R_e ; \sigma_r = \frac{\sum \text{efforts radiaux}}{2\pi r h} \quad (IV.8.b)$$

Il est suffisant de résoudre le système des équations (IV.6) et (IV.7), avec une connaissance des conditions aux limites, pour les deux inconnus σ_{rr} et $\sigma_{\theta\theta}$. Puisque ΔT et h sont fonctions, généralement, du rayon r . Les équations ne peuvent pas être résolues analytiquement ; une solution numérique de type d'élément-finie.

IV.2 Discrétisation du modèle

La solution analytique du système d'équations (IV.6) (IV.7) est en général inaccessible. On est donc conduit à chercher une solution approchée par une méthode numérique : la méthode des éléments finis.

IV.2.1 Principes de base de la Méthode des éléments finis [25]

La méthode des éléments finis est décrite comme une technique d'analyse numérique utilisée pour des solutions approchées à des équations aux dérivées partielles pour des problèmes d'ingénierie complexes basés sur la discrétisation de un continuum. Essentiellement, un continuum est divisé en de nombreux «éléments» discrétisés et sont reliés les uns aux autres à des points spécifiques appelés nœuds. Chaque fonction élémentaire décrit la variable de champ à l'intérieur de l'élément et est répétée pour tous les éléments. Assemblée de tous les éléments dans un système d'équations algébriques linéaires représente l'ensemble du domaine. La solution des équations pour l'ensemble du domaine peuvent être obtenues en résolvant l'assemblée algébrique simplifiée système et l'obtention de valeurs nodales de la variable de champ. Par conséquent, MEF tente de représenter une quantité continue pensait approximation par un modèle discret composé d'un ensemble de fonctions piecewise continuous.

MEF tel qu'il est utilisé dans la mécanique des solides peut être plus facile à expliquer en 7 étapes générales ;

- (i) La discrétisation du domaine et de sélectionner les types d'éléments appropriés pour ressembler plus étroitement le la géométrie décrite.
- (ii) En supposant une fonction de déplacement en termes de déplacements nodales.
- (iii) L'application d'une loi de comportement matériau.
- (iv) La dérivation des matrices de rigidité élément qui fournit la condition d'équilibre dans chaque élément individuel.
- (v) Assemblage des équations de l'élément basées sur leur connectivité nodale à obtenir des équations qui représentent la structure entière.
- (vi) En résolvant la variable de champ inconnu - déplacements nodaux.
- (vii) En résolvant pour les tensions de l'élément et les contraintes directement des déplacements nodales l'utilisation des lois constitutives appropriées.

IV.2.2 Formulation « Galerkin » de la méthode des éléments finis [26]

Considérer un sous domaine ou un élément fini représenté sur la figure (IV.3), l'élément comporte deux nœuds, une à chaque extrémité. À chaque nœud, la valeur de correspondante de coordonnées (r_i ou r_{i+1}) et la variable nodale (σ_i ou σ_{i+1}) sont affectés. Admettons la fonction d'essai inconnu à être :

$$\sigma_{rr} = a_1 r + a_0 \quad (IV.9)$$

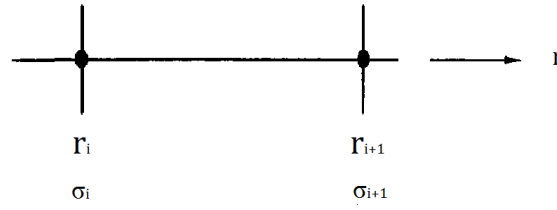


Figure IV.3 élément linéaire à deux nœuds [26]

On exprime sur l'équation (IV.9) avec la variable nodale, en remplaçant a_1 et a_0 avec σ_i et σ_{i+1} :

$$\sigma_{rr} = a_1 r + a_0 \Rightarrow \begin{cases} r = r_i \Rightarrow \sigma_{rr} = \sigma_{rr_i} \\ r = r_{i+1} \Rightarrow \sigma_{rr} = \sigma_{rr_{i+1}} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \sigma_{rr_i} = a_1 r_i + a_0 \\ \sigma_{rr_{i+1}} = a_1 r_{i+1} + a_0 \end{cases} \quad (\text{IV.10})$$

Donc :

$$\Rightarrow \begin{cases} a_1 = \frac{\sigma_{rr_{i+1}} - \sigma_{rr_i}}{r_{i+1} - r_i} \\ a_0 = -\frac{\sigma_{rr_{i+1}} - \sigma_{rr_i}}{r_{i+1} - r_i} r_i + \sigma_{rr_i} \end{cases} \quad (\text{IV.11})$$

En Substitution les équations (IV.11) dans l'équation (IV.9) et réarrangement de l'expression résultant avec

$$\sigma_{rr} = N_i \sigma_{rr_i} + N_{i+1} \sigma_{rr_{i+1}} \quad (\text{IV.12})$$

On obtient :

$$\begin{cases} N_i = \frac{r_{i+1} - r}{r_{i+1} - r_i} \\ N_{i+1} = \frac{r + r_i}{r_{i+1} - r_i} \end{cases} \quad (\text{IV.13})$$

N_i et N_{i+1} appelées fonctions d'interpolations, qui sont les même que pour $\sigma_{\theta\theta}$.

IV.3 Méthode de Résolution

Pour résoudre le système d'équations (IV.6) et (IV.7) par éléments finis, on suit les étapes suivantes :

D'après l'équation (IV.6):

$$\sigma_{\theta\theta} = \frac{1}{h} \frac{d(rh\sigma_{rr})}{dr} + \rho\Omega^2 r^2 \quad (\text{IV.14})$$

Substituée dans l'équation (IV.7), donne :

$$(1 + \nu) \left(\frac{1}{hr} \frac{d(rh\sigma_{rr})}{dr} + \rho\Omega^2 r - \frac{\sigma_{rr}}{r} \right) + \frac{d}{dr} \left(\frac{1}{h} \frac{d(rh\sigma_{rr})}{dr} + \rho\Omega^2 r^2 - \nu\sigma_{rr} \right) = -E \frac{d(\alpha\Delta T)}{dr} \quad (\text{IV.15})$$

Après simplification, on obtient la forme finale suivante:

$$\frac{d}{dr} \left(r \frac{d\sigma_{rr}}{dr} \right) + \left(2 + \frac{rdh}{hdr} \right) \frac{d\sigma_{rr}}{dr} + \left((1 + \nu) \frac{dh}{hdr} + \frac{d}{dr} \left(\frac{rdh}{hdr} \right) \right) \sigma_{rr} = -(3 + \nu)\rho\Omega^2 r - E \frac{d(\alpha\Delta T)}{dr} \quad (\text{IV.16})$$

En vue d'avoir la forme discrétisée de l'équation ci-dessus, appliquons la méthode de «Galerkin » :

$$\int_{r_i}^{r_{i+1}} \left\{ \begin{matrix} N_i \\ N_{i+1} \end{matrix} \right\} \left(\frac{d}{dr} \left(r \frac{d\sigma_{rr}}{dr} \right) \right) dr + \int_{r_i}^{r_{i+1}} \left\{ \begin{matrix} N_i \\ N_{i+1} \end{matrix} \right\} \left(2 + \frac{rdh}{hdr} \right) \frac{d\sigma_{rr}}{dr} dr + \int_{r_i}^{r_{i+1}} \left\{ \begin{matrix} N_i \\ N_{i+1} \end{matrix} \right\} \left((1 + \nu) \frac{dh}{hdr} + \frac{d}{dr} \left(\frac{rdh}{hdr} \right) \right) \sigma_{rr} dr = \int_{r_i}^{r_{i+1}} \left\{ \begin{matrix} N_i \\ N_{i+1} \end{matrix} \right\} \left(-(3 + \nu)\rho\Omega^2 r - E \frac{d(\alpha\Delta T)}{dr} \right) dr \quad (\text{IV.17.a})$$

Appliquons l'intégration par partie sur le terme de second ordre :

$$\begin{aligned} & r \left\{ \begin{matrix} N_i \\ N_{i+1} \end{matrix} \right\} \frac{d\sigma_{rr}}{dr} \Big|_{r_i}^{r_{i+1}} - \int_{r_i}^{r_{i+1}} \left(r \frac{d\sigma_{rr}}{dr} \frac{d}{dr} \left(\left\{ \begin{matrix} N_i \\ N_{i+1} \end{matrix} \right\} \right) \right) dr + \int_{r_i}^{r_{i+1}} \left(\left\{ \begin{matrix} N_i \\ N_{i+1} \end{matrix} \right\} \left(2 + \frac{rdh}{hdr} \right) \frac{d\sigma_{rr}}{dr} \right) dr + \\ & \int_{r_i}^{r_{i+1}} \left(\left\{ \begin{matrix} N_i \\ N_{i+1} \end{matrix} \right\} \left((1 + \nu) \frac{dh}{hdr} + \left(\frac{d}{dr} \left(\frac{rdh}{hdr} \right) \right) \right) \sigma_{rr} \right) dr = \\ & \int_{r_i}^{r_{i+1}} \left(\left\{ \begin{matrix} N_i \\ N_{i+1} \end{matrix} \right\} \left(-(3 + \nu)\rho\Omega^2 r - E \frac{d(\alpha\Delta T)}{dr} \right) \right) dr \end{aligned} \quad (\text{IV.17.b})$$

Considérons une variation linéaire de l'épaisseur (h) sur un élément fini, posons donc $\left(\frac{dh}{hdr} \right) = C$; constante sur l'élément :

$$\begin{aligned} & - \int_{r_i}^{r_{i+1}} \left(r \frac{d\sigma_{rr}}{dr} \frac{d}{dr} \left(\left\{ \begin{matrix} N_i \\ N_{i+1} \end{matrix} \right\} \right) \right) dr + \int_{r_i}^{r_{i+1}} \left(\left\{ \begin{matrix} N_i \\ N_{i+1} \end{matrix} \right\} (2 + Cr) \frac{d\sigma_{rr}}{dr} \right) dr + \int_{r_i}^{r_{i+1}} \left(\left\{ \begin{matrix} N_i \\ N_{i+1} \end{matrix} \right\} (2C + \right. \\ & \left. \nu C) \sigma_{rr} \right) dr = \int_{r_i}^{r_{i+1}} \left(\left\{ \begin{matrix} N_i \\ N_{i+1} \end{matrix} \right\} \left(-(3 + \nu)\rho\Omega^2 r - E \frac{d(\alpha\Delta T)}{dr} \right) \right) dr - r \left\{ \begin{matrix} N_i \\ N_{i+1} \end{matrix} \right\} \frac{d\sigma_{rr}}{dr} \Big|_{r_i}^{r_{i+1}} \end{aligned} \quad (\text{IV.18.a})$$

$$\begin{aligned}
 & - \int_{r_i}^{r_{i+1}} \left(r \begin{Bmatrix} N'_i \\ N'_{i+1} \end{Bmatrix} \frac{d\sigma_{rr}}{dr} \right) dr + \int_{r_i}^{r_{i+1}} \left(\begin{Bmatrix} N_i \\ N_{i+1} \end{Bmatrix} (2 + Cr) \frac{d\sigma_{rr}}{dr} \right) dr + \int_{r_i}^{r_{i+1}} \left(\begin{Bmatrix} N_i \\ N_{i+1} \end{Bmatrix} (2C + \nu C) \sigma_{rr} \right) dr \\
 & = \int_{r_i}^{r_{i+1}} \left(\begin{Bmatrix} N_i \\ N_{i+1} \end{Bmatrix} \left(-(3 + \nu) \rho \Omega^2 r - E \frac{d(\alpha \Delta T)}{dr} \right) \right) dr - r \begin{Bmatrix} N_i \\ N_{i+1} \end{Bmatrix} \frac{d\sigma_{rr}}{dr} \Big|_{r_i}^{r_{i+1}} \quad (IV.18.b)
 \end{aligned}$$

D'où la forme finale discrétisée:

$$\begin{aligned}
 & \left(- \int_{r_i}^{r_{i+1}} \left(r \begin{Bmatrix} N'_i \\ N'_{i+1} \end{Bmatrix} \{N'_i \quad N'_{i+1}\} \right) dr + \int_{r_i}^{r_{i+1}} \left((2 + Cr) \begin{Bmatrix} N_i \\ N_{i+1} \end{Bmatrix} \{N'_i \quad N'_{i+1}\} \right) dr + \right. \\
 & \left. \int_{r_i}^{r_{i+1}} \left((2C + \nu C) \begin{Bmatrix} N_i \\ N_{i+1} \end{Bmatrix} \{N_i \quad N_{i+1}\} \right) dr \right) \begin{Bmatrix} \sigma_{rr_i} \\ \sigma_{rr_{i+1}} \end{Bmatrix} = \int_{r_i}^{r_{i+1}} \left(\begin{Bmatrix} N_i \\ N_{i+1} \end{Bmatrix} \left(-(3 + \nu) \rho \Omega^2 r - E \frac{d(\alpha \Delta T)}{dr} \right) \right) dr \\
 & - r \begin{Bmatrix} N_i \\ N_{i+1} \end{Bmatrix} \frac{d\sigma_{rr}}{dr} \Big|_{r_i}^{r_{i+1}} \quad (IV.19)
 \end{aligned}$$

Ecrivons l'équation ci dessus sous la forme matricielle, soient :

$$\begin{aligned}
 [K_e] & = \left[\int_{r_i}^{r_{i+1}} \left(-r \begin{Bmatrix} N'_i \\ N'_{i+1} \end{Bmatrix} \{N'_i \quad N'_{i+1}\} \right) dr + \int_{r_i}^{r_{i+1}} \left((2 + Cr) \begin{Bmatrix} N_i \\ N_{i+1} \end{Bmatrix} \{N'_i \quad N'_{i+1}\} \right) dr + \right. \\
 & \left. \int_{r_i}^{r_{i+1}} \left((2C + \nu C) \begin{Bmatrix} N_i \\ N_{i+1} \end{Bmatrix} \{N_i \quad N_{i+1}\} \right) dr \right] = \begin{bmatrix} k_{11} & k_{12} \\ k_{21} & k_{22} \end{bmatrix} \quad (IV.20)
 \end{aligned}$$

$$\{F_e\} = \int_{r_i}^{r_{i+1}} \left(\begin{Bmatrix} N_i \\ N_{i+1} \end{Bmatrix} \left(-(3 + \nu) \rho \Omega^2 r - E \frac{d(\alpha \Delta T)}{dr} \right) \right) dr - r \begin{Bmatrix} N_i \\ N_{i+1} \end{Bmatrix} \frac{d\sigma_{rr}}{dr} \Big|_{r_i}^{r_{i+1}} = \begin{Bmatrix} F_{ei} \\ F_{ei+1} \end{Bmatrix} \quad (IV.21)$$

$$\{q_e\} = \begin{Bmatrix} \sigma_{rr_i} \\ \sigma_{rr_{i+1}} \end{Bmatrix} \quad (IV.21)$$

Avec :

$$k_{11} = \int_{r_i}^{r_{i+1}} \left((2 + Cr) N_i N'_i + (2C + \nu C) N_i^2 - r N_i'^2 \right) dr \quad (IV.23.a)$$

$$k_{12} = \int_{r_i}^{r_{i+1}} \left((2 + Cr) N_i N'_{i+1} + (2C + \nu C) N_i N_{i+1} - r N'_i N'_{i+1} \right) dr \quad (IV.23.b)$$

$$k_{21} = \int_{r_i}^{r_{i+1}} \left((2 + Cr) N_{i+1} N'_i + (2C + \nu C) N_{i+1} N_i - r N'_{i+1} N'_i \right) dr \quad (IV.23.c)$$

$$k_{22} = \int_{r_i}^{r_{i+1}} \left((2 + Cr) N_{i+1} N'_{i+1} + (2C + \nu C) N_{i+1}^2 - r N'_{i+1}{}^2 \right) dr \quad (IV.23.d)$$

$$F_{ei} = \int_{r_i}^{r_{i+1}} N_i \left(-(3 + \nu) \rho \Omega^2 r - E \frac{d(\alpha \Delta T)}{dr} \right) dr - r_i \left(\frac{d\sigma_{rr}}{dr} \right)_{r_i} \quad (IV.23.e)$$

$$F_{ei+1} = \int_{r_i}^{r_{i+1}} N_{i+1} \left(-(3 + \nu) \rho \Omega^2 r - E \frac{d(\alpha \Delta T)}{dr} \right) dr + r_{i+1} \left(\frac{d\sigma_{rr}}{dr} \right)_{r_{i+1}} \quad (IV.23.f)$$

D'où l'équation matricielle :

$$[K_e] \{q_e\} = \{F_e\} \quad (IV.24)$$

Après assemblage nous obtenons le système suivant :

$$\begin{bmatrix} k_{11} & \cdots & k_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ k_{n1} & \cdots & k_{nn} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \sigma_{rr\ 1} \\ \vdots \\ \sigma_{rr\ n} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} F_1 \\ \vdots \\ F_n \end{Bmatrix} \quad (\text{IV.27})$$

Avec :

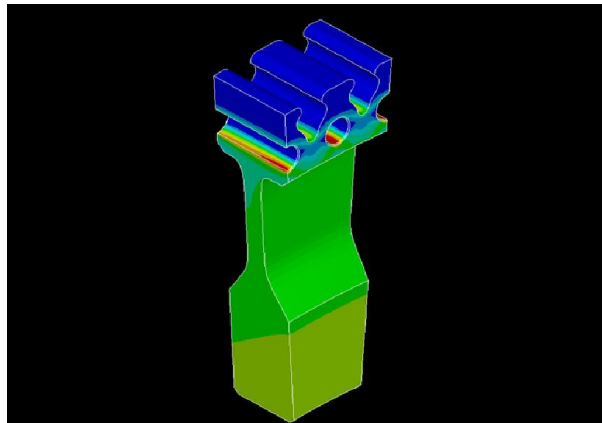
$\sigma_{rr\ 1}$ et $\sigma_{rr\ n}$ sont imposés ; $\sigma_{rr\ 2}, \dots, \sigma_{rr\ n-1}$ sont inconnus.

F_1 et F_n sont inconnus ; F_2, \dots, F_{n-1} sont connus.

En fin la discrétisation de l'équation (IV.14) permet d'obtenir les contraintes $\sigma_{\theta\theta\ i}$:

$$\begin{aligned} & \int_{r_i}^{r_{i+1}} \left(\begin{bmatrix} N_i N_i & N_i N_{i+1} \\ N_i N_{i+1} & N_{i+1} N_{i+1} \end{bmatrix} dr \right) \begin{Bmatrix} \sigma_{\theta\theta\ i} \\ \sigma_{\theta\theta\ i+1} \end{Bmatrix} \\ & = \int_{r_i}^{r_{i+1}} \rho \Omega^2 r^2 \begin{Bmatrix} N_i \\ N_{i+1} \end{Bmatrix} dr \\ & + \int_{r_i}^{r_{i+1}} \left(\begin{bmatrix} r N_i N_i' + (1 + rC) N_i^2 & r N_i N_{i+1}' + (1 + rC) N_i N_{i+1} \\ r N_{i+1} N_i' + (1 + rC) N_i N_{i+1} & r N_{i+1} N_{i+1}' + (1 + rC) N_{i+1}^2 \end{bmatrix} dr \right) \begin{Bmatrix} \sigma_{rr\ i} \\ \sigma_{rr\ i+1} \end{Bmatrix} \end{aligned} \quad (\text{IV.28})$$

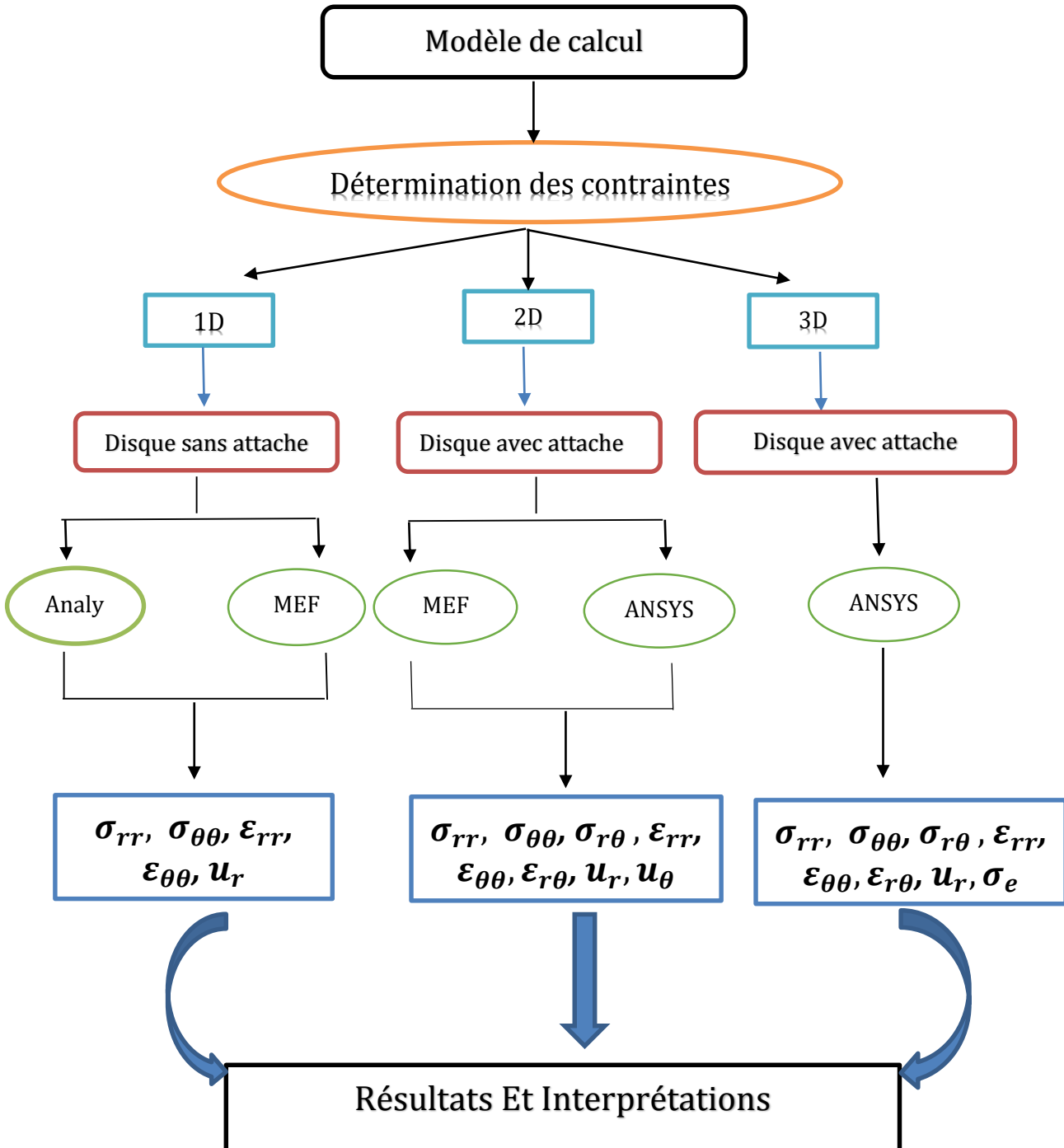
CHAPITRE V



RESULTATS ET INTERPRETATIONS

V.1 Organigramme

La procédure de calcul et la présentation des résultats suivent l'organigramme suivant :



V.2 Le Modèle de calcul monodimensionnel

V.2.1 Calcul des contraintes- solution analytique

Les solutions analytiques pour les contraintes thermoélastiques dans les disques tournants sont déjà établies dans les chapitres précédents, en effet [25] :

$$\sigma_{rr} = A - \frac{B}{r^2} - \frac{\rho r^2 \omega^2}{8} (3 + \nu) - \frac{E\alpha}{r^2} \int_{R_i}^r T(r) r dr \quad (V.1)$$

$$\sigma_{\theta\theta} = A + \frac{B}{r^2} - (1 + 3\nu) \frac{\rho r^2 \omega^2}{8} - E\alpha T(r) + \frac{E\alpha}{r^2} \int_{R_i}^r T(r) r dr \quad (V.2)$$

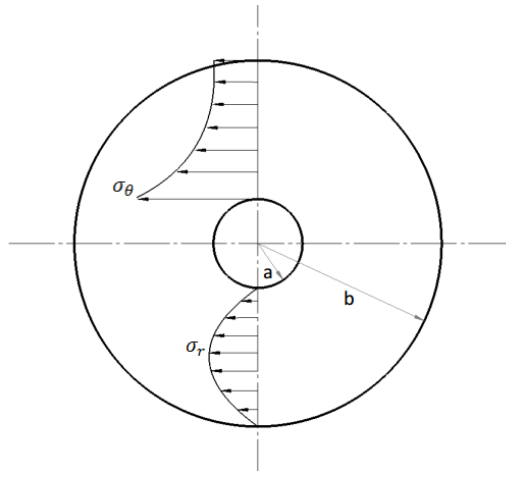


Figure V.1 la contrainte radiale et tangentielle dans le disque tournant avec le trou central [25]

Avec : E est le module de Young et α est le coefficient de dilatation thermique. A et B sont déterminés par les conditions aux limites à conditions que la température soit variable en fonction du rayon r ; T(r).

En utilisant le profil de température suivante [25]:

$$T(r) = \frac{1}{b^2 - ab} [(T_{MAX} - T_{MIN})r^2 + (T_{MIN} - T_{MAX})ar] + T_{MIN} \quad (V.3)$$

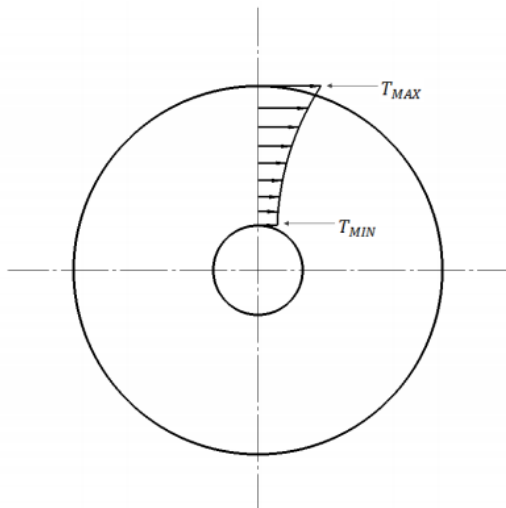


Figure V-2 le profil de la température appliquée [25]

Les conditions des frontières d'un disque nécessaires pour résoudre les constantes A et B, en vue de calculer les contraintes, sont :

$$\sigma_{rra} = 0 \text{ et } \sigma_{rrb} = 0 \quad (\text{V.4})$$

D'où:

$$A = \frac{b^2}{b^2 - a^2} \left[\frac{\rho(\nu + 3)\omega^2}{8} (b^2 - a^2) + \frac{4\alpha E(a^2 T_{MAX} - b^2 T_{MAX} + b^2 T_{MIN} - a^2 T_{MIN})}{12(-2ab + a^2 + b^2)} \right] + \frac{\rho(\nu + 3)a^2\omega^2}{8} + \frac{4\alpha E(-2abT_{MAX} - 4abT_{MIN} + a^2T_{MAX} + 3b^2T_{MAX} + 2a^2T_{MIN})}{24(-2ab + a^2 + b^2)} \quad (\text{V.5})$$

$$B = \frac{a^2 b^2}{b^2 - a^2} \left[\frac{\rho(\nu + 3)\omega^2}{8} (b^2 - a^2) + \frac{4\alpha E(a^2 T_{MAX} - b^2 T_{MAX} + b^2 T_{MIN} - a^2 T_{MIN})}{12(-2ab + a^2 + b^2)} \right] \quad (\text{V.6})$$

Le tableau suivant représente le modèle du disque choisi :

Géométrie		Propriétés de Matériau INCONEL 718		Conditions de Chargement	
a	31,75 mm	ρ	8510 kg/m ³	ω	10000 RPM
b	190,5 mm	E	220 GPa	T _{max}	650 °C
		ν	0,29	T _{min}	400 °C
		α	1,36 × 10 ⁻⁵ 1/°C		

Tableau V-1: Caractéristiques du disque sans attache [25]

V.2.2 Comparaison des résultats

a. les contraintes

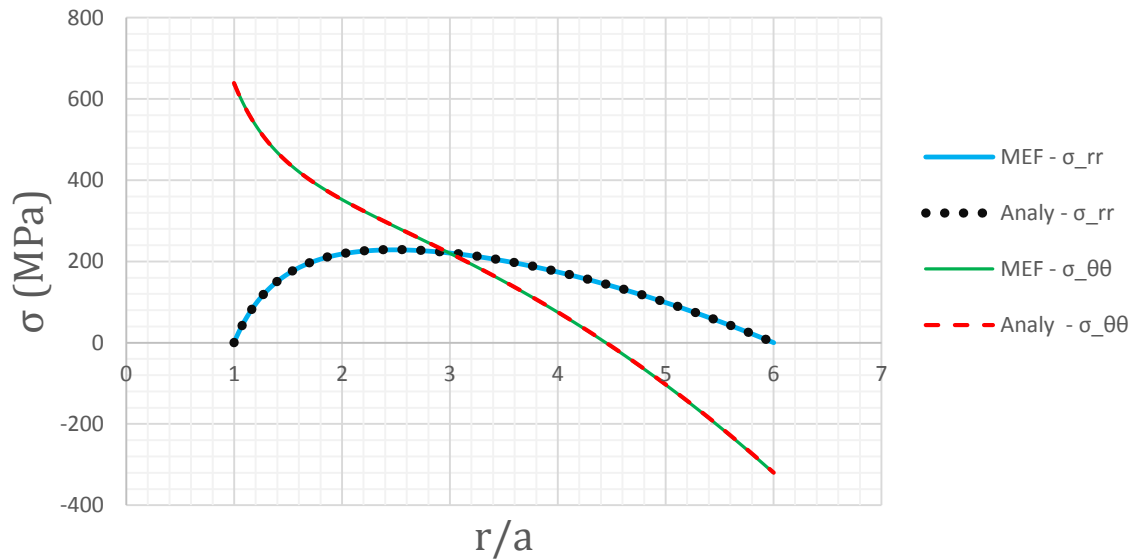


Figure V-3 les contraintes tangentielle et radiale

- Pour les contraintes tangentielles ($\sigma_{\theta\theta}$), on remarque qu'elle est maximale au niveau d'alésage puis commence à diminuer rapidement dans la partie poireau. Les contraintes sont redressées au niveau de la toile et prennent des valeurs modérées. Au niveau de la jante, la contrainte chute et devient négative (*compression*).
- Pour les contraintes radiales (σ_{rr}), on remarque que les conditions aux limites sont respectées aux niveaux d'alésage et de la jante. La contrainte reste toujours positive (*traction*) modérée.

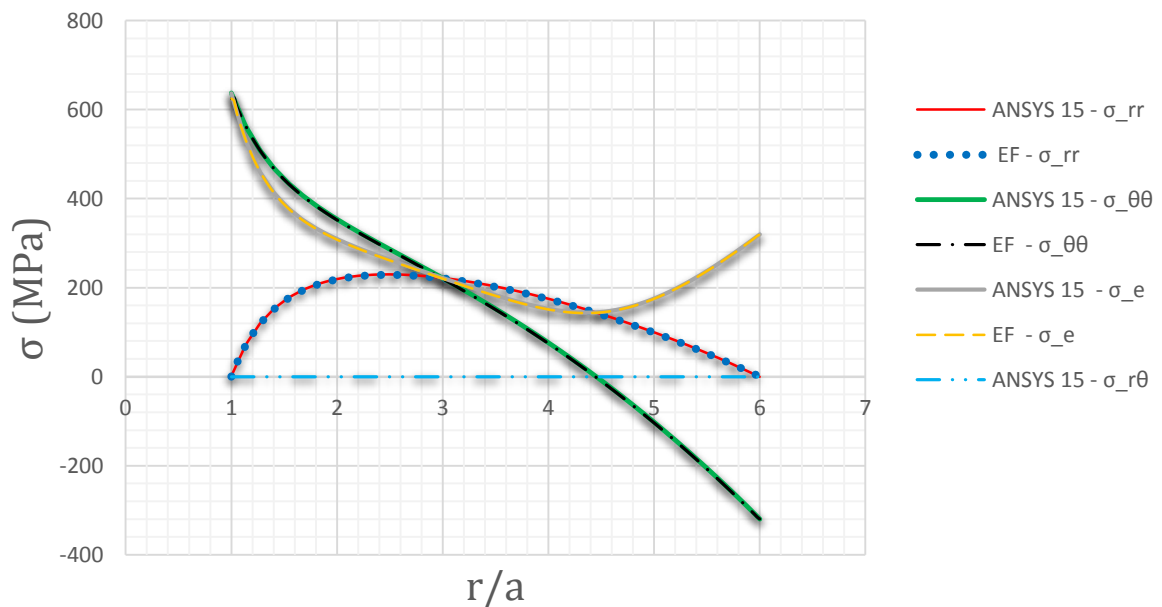


Figure V.4 Comparaison des contraintes avec l'ANSYS 15 : (a) contrainte radial (σ_{rr}), (b) contrainte tangentielle ($\sigma_{\theta\theta}$), (c) contrainte équivalons (σ_e), (d) contrainte de cisaillement ($\sigma_{r\theta}$)

- On constate que nos résultats des contraintes (σ_{rr} , $\sigma_{\theta\theta}$, $\sigma_{r\theta}$, σ_e) en fonction de rayon du disque sont bien comparables avec ceux obtenus par ANSYS.
- On remarque que les contraintes de cisaillement ($\sigma_{r\theta}$) obtenues par ANSYS sont proches de zéro et ce qui justifie notre modèle de calcul où $\sigma_{r\theta} = 0$.

b. Déplacements et déformations

On procède à calculer les déformations dans le disque à partir des contraintes tangentielles et radiales. Les résultats ci-dessous montrent que les déformations et les déplacements sont maximaux au rayon extérieur.

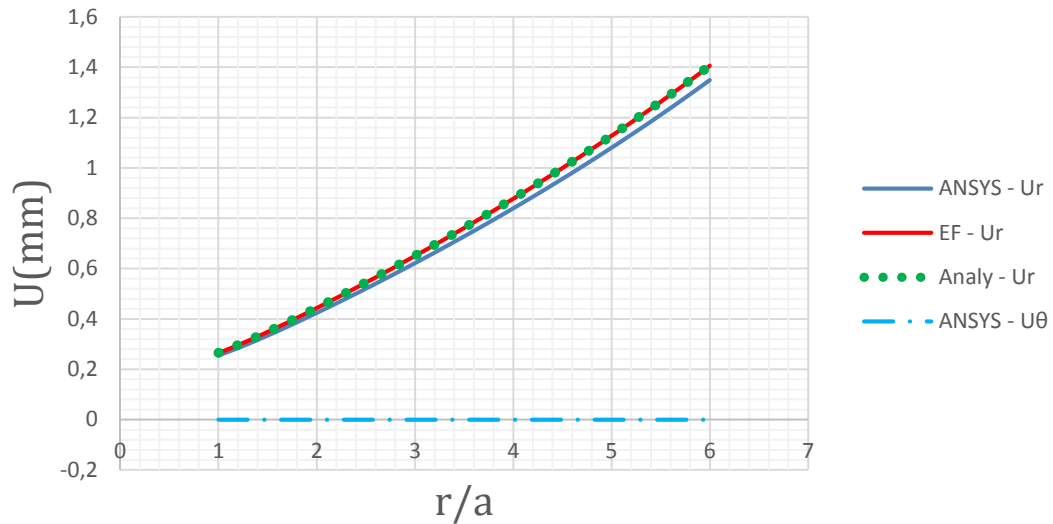


Figure V.5 Comparaison des déplacements avec l'ANSYS 15

- Le déplacement calcul par l'ANSYS est inférieur à ceux de la MEF et l'analytique à cause de dilatation thermique bidimensionnel.

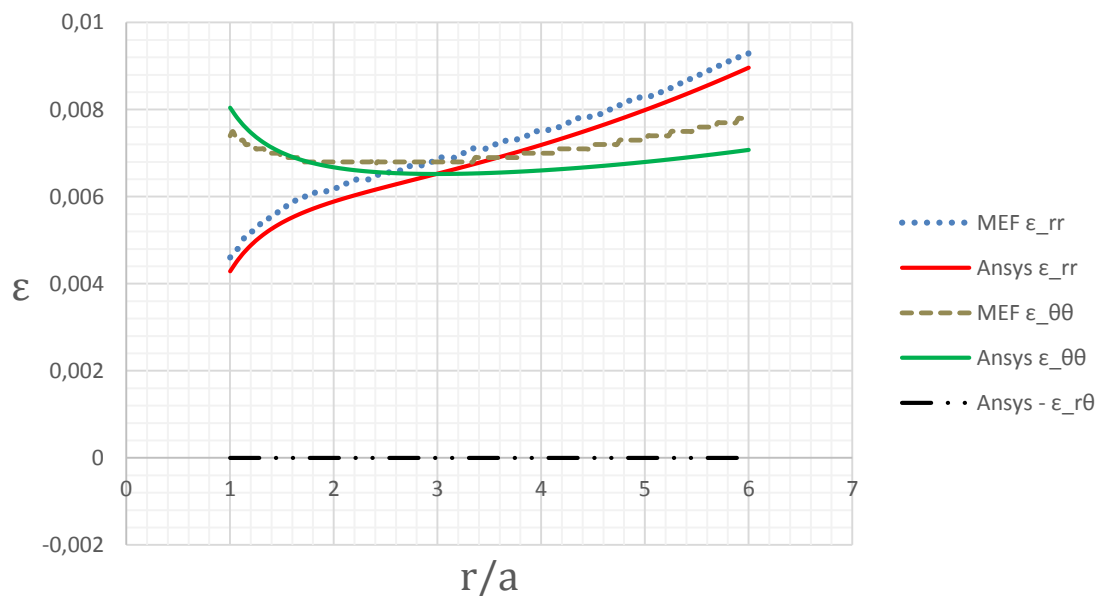


Figure V.6 Comparaison des déformations avec l'ANSYS 15

- On constate que nos résultats des déformations élastiques (ϵ_{rr} , $\epsilon_{\theta\theta}$) en fonction du rayon du disque sont aussi bien comparables avec ceux obtenu par ANSYS.

- Pour la déformation tangentielle ($\varepsilon_{\theta\theta}$), on remarque qu'elle est maximale au niveau d'alésage puis commence à diminuer rapidement dans la partie poireau. Les déformations prennent des valeurs modéré du poireau jusqu'à la jante.
- En générale, les déformations radiales (ε_{rr}) sont relativement faibles par rapport à celles tangentielles ($\varepsilon_{\theta\theta}$). On remarque que ces déformations sont élevées au niveau d'alésage et commence à chuter rapidement dans la partie poireau. Les déformations restent toujours positives élevées dans la partie toile jusqu'à la jante.
- On remarque que les déformations de cisaillement ($\varepsilon_{r\theta}$) sont proche de zéro, ce qui justifie notre modèle de calcul où $\varepsilon_{r\theta} = 0$.

V.3 Le modèle de Calcul Bidimensionnel

V.3.1 calcul des contraintes avec chargement extérieurs - solution analytique

Le modèle précédent a considéré le borde extérieur comme frontière libre. Pour le disque avec attache, l'effet d'aube est pris en compte par une masse ajoutée à la surface extérieur. Le chargement extérieur ainsi engendré est considéré comme une charge répartie réalisant une contrainte de traction moyenne telle que [25]:

$$\sigma_b = \sigma_{r(r=b)} = \frac{m_b \omega^2 r_m N}{2\pi b h} \quad (V.7)$$

Avec : m_b est la masse de chaque aube, N est le nombre des aubes, h est l'épaisseur du disque, b est le rayon extérieur du disque et r_m est le rayon entre le centre du disque et le centre de l'aube.

Dans ce cas les constantes A et B deviennent :

$$A = \frac{b^2}{b^2 - a^2} \left[\frac{\rho(\nu + 3)\omega^2}{8} (b^2 - a^2) + \frac{4\alpha E (a^2 T_{MAX} - b^2 T_{MAX} + b^2 T_{MIN} - a^2 T_{MIN})}{12(-2ab + a^2 + b^2)} + \sigma_b \right] \\ + \frac{\rho(\nu + 3)a^2 \omega^2}{8} \\ + \frac{4\alpha E (-2ab T_{MAX} - 4ab T_{MIN} + a^2 T_{MAX} + 3b^2 T_{MAX} + 2a^2 T_{MIN})}{24(-2ab + a^2 + b^2)} \quad (V.8)$$

$$B = \frac{a^2 b^2}{b^2 - a^2} \left[\frac{\rho(\nu + 3)\omega^2}{8} (b^2 - a^2) \\ + \frac{4\alpha E (a^2 T_{MAX} - b^2 T_{MAX} + b^2 T_{MIN} - a^2 T_{MIN})}{12(-2ab + a^2 + b^2)} + \sigma_b \right] \quad (V.9)$$

En utilisant les paramètres de tableau V-2, lequel contient Les paramètres du disque et de l'aube nécessaires à la modélisation du chargement extérieur (V.7) :

Géométrie		Propriétés de Matériau INCONEL 718		Conditions de Chargement		Géométrie de l'Aube	
a	31,75 mm	ρ	8510 kg/m ³	ω	10000 RPM	m_b	102 g
b	190,5 mm	E	220 GPa	T_{max}	650 °C	r_m	230,75 mm
		ν	0,29	T_{min}	400 °C	N	60 Aubes
		α	$1,36 \times 10^{-5} 1/°C$			σ_b	80 MPa

Tableau V-2: Caractéristique du disque avec chargement extérieur [25]

V.3.2 comparaison des résultats

a. Les contraintes

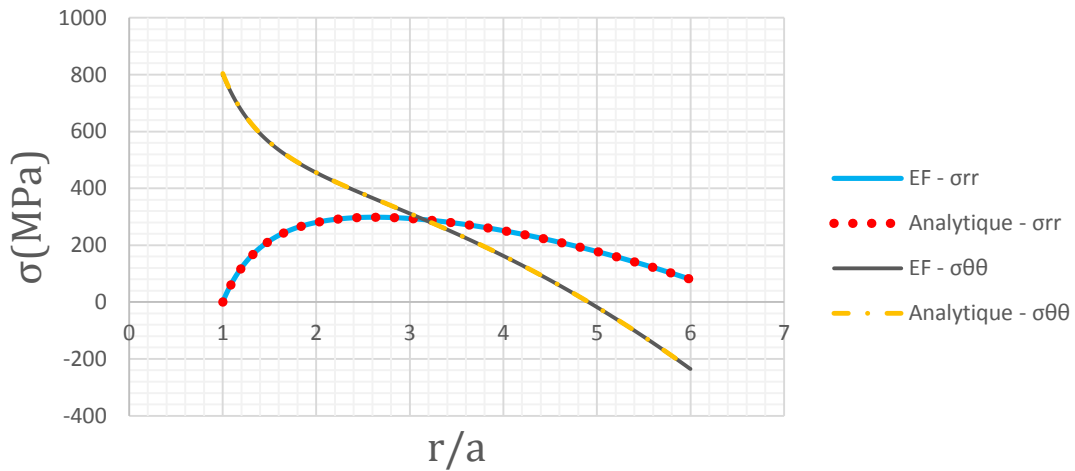


Figure V.7 Comparaison des contraintes par la méthode analytique avec EF : (a) contrainte radial (σ_{rr}), (b) contrainte tangentielle ($\sigma_{\theta\theta}$)

Pour la simulation sur ANSYS, le chargement extérieur représentant l'effet de l'aube est pris en compte en considérant une petite masse comme suit :

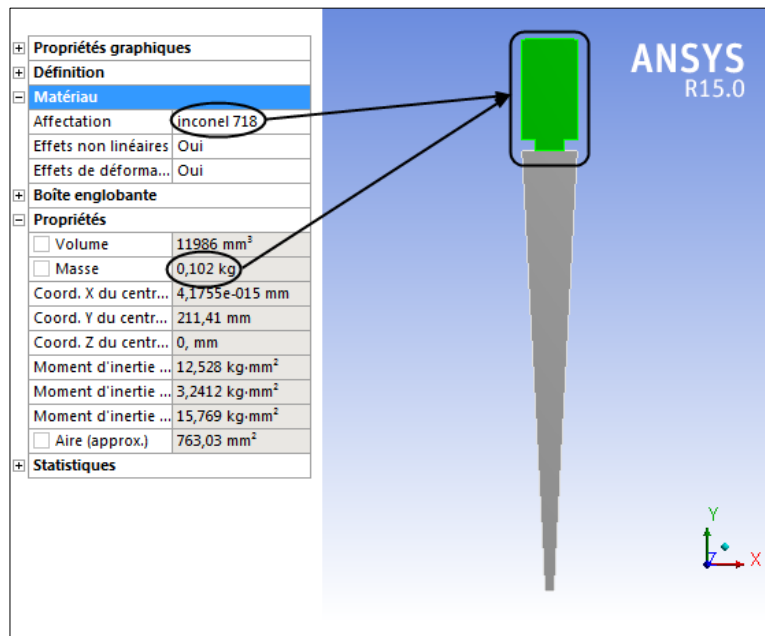


Figure V.8 La géométrie d'un disque avec une charge extérieure

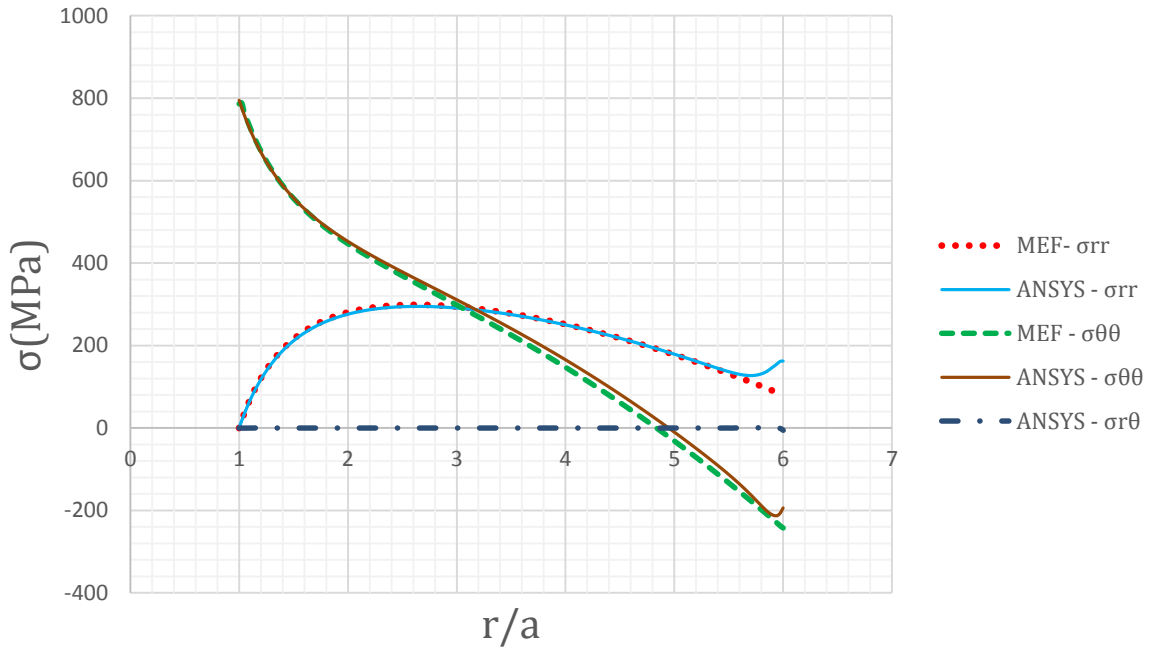


Figure V-9 Comparaison des contraintes avec l'ANSYS 15 pour du disque avec une charge extérieur:(a)contrainte radial (σ_{rr}), (b) contrainte tangentiel ($\sigma_{r\theta}$)

On remarque d'après la comparaison faite dans la figure V-9. Que les valeurs des contraintes sont presque a l'exception dans la jante ou l'effet 2D est bien prononcé.

On peut attribuer l'incohérence aux hypothèses faites pour les conditions de la frontière du chargement de l'attachée. Le modèle de MEF suppose que le chargement de l'attache agit uniformément par-dessus de la surface de la jante du disque. En la réalité, c'est plus concentré comme montré par le modèle de l'ANSYS au Figure V.9.

V.3.3 Disque avec l'attache

a. La géométrie du disque avec l'attache (Annexe.B.1)

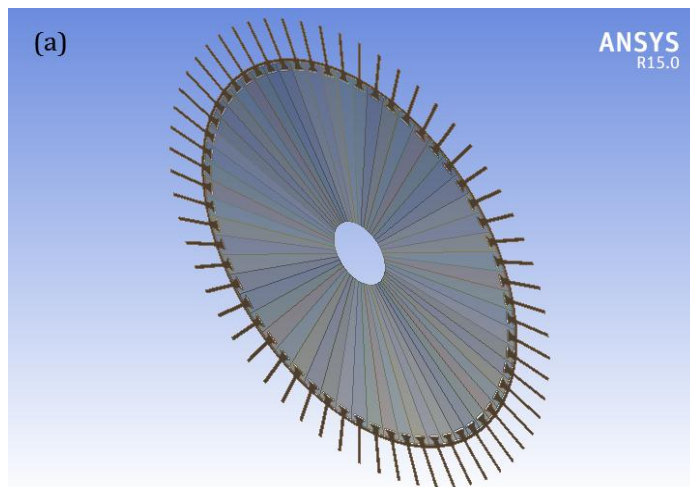


Figure V-10.a Dessin d'ensemble disque avec aubes.

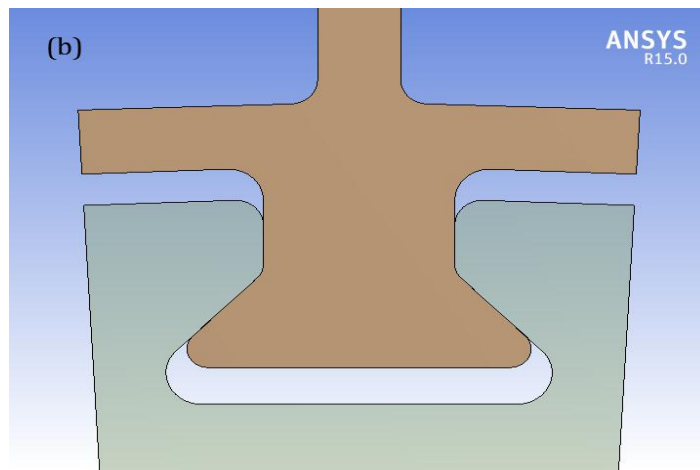


Figure V-10.b Géométrie de l'attache.

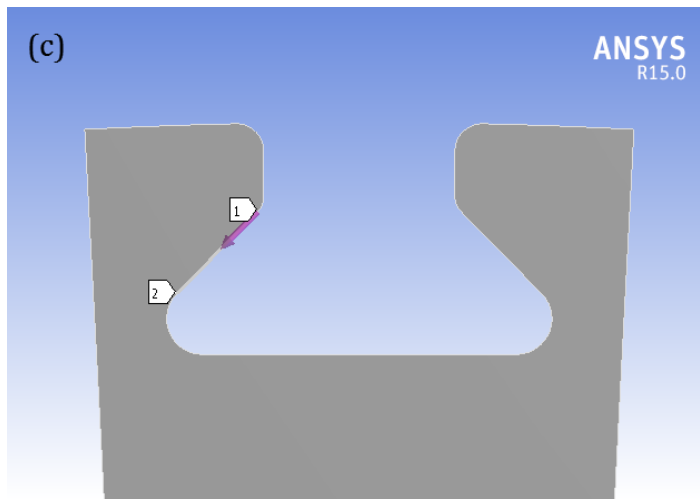


Figure V-10.c Région de contact.

Dans cette partie d'étude on s'intéresse à la région de contact, comme montrer sur la figure ci-dessus.

b. Calcul des contraintes

On calcul les contrainte en deux cas, cas sans frottement el l'autre avec frottement.

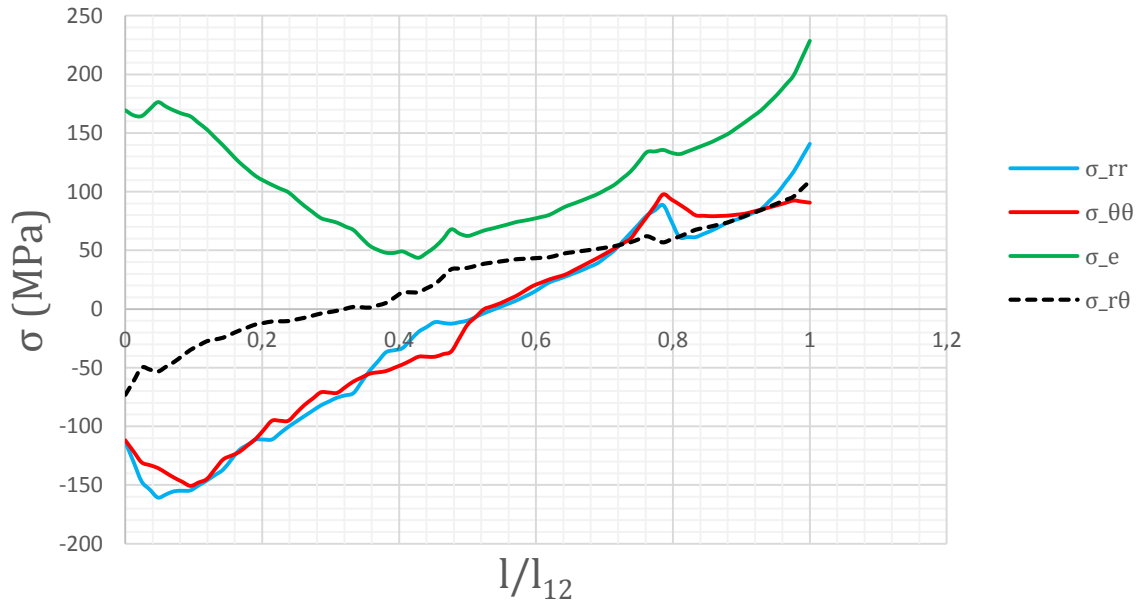


Figure V-11 Les Contraintes dans la région de contact sans frottement

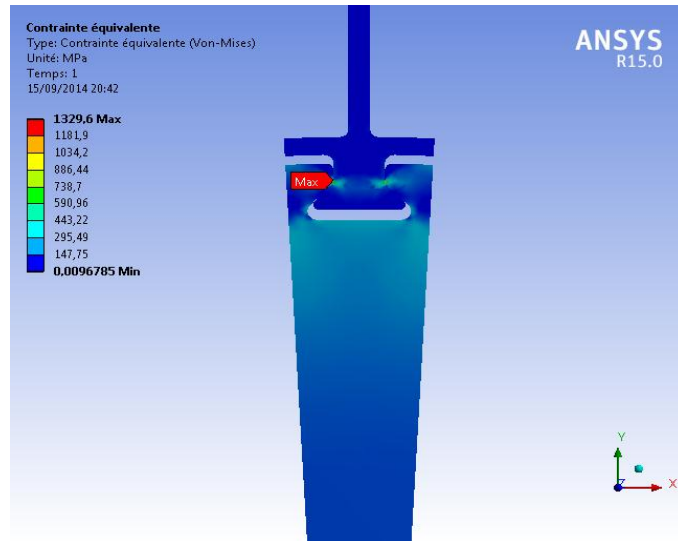


Figure V-12.a Contraintes équivalentes sans frottement

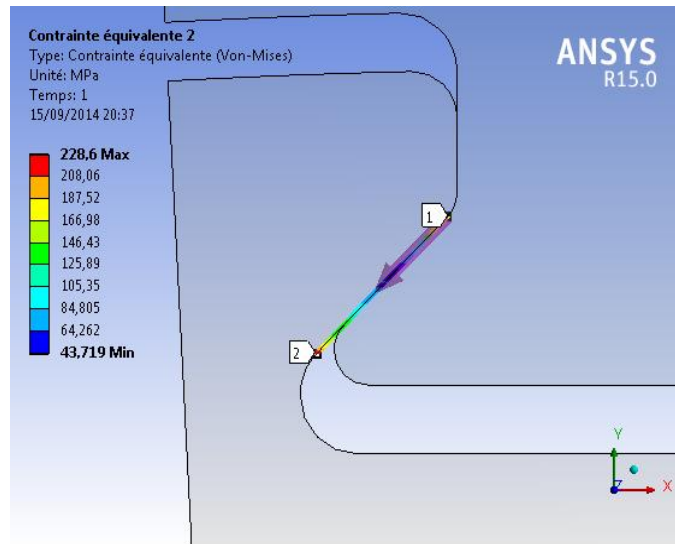


Figure V-12.b Les Contraintes dans la région de contact sans frottement

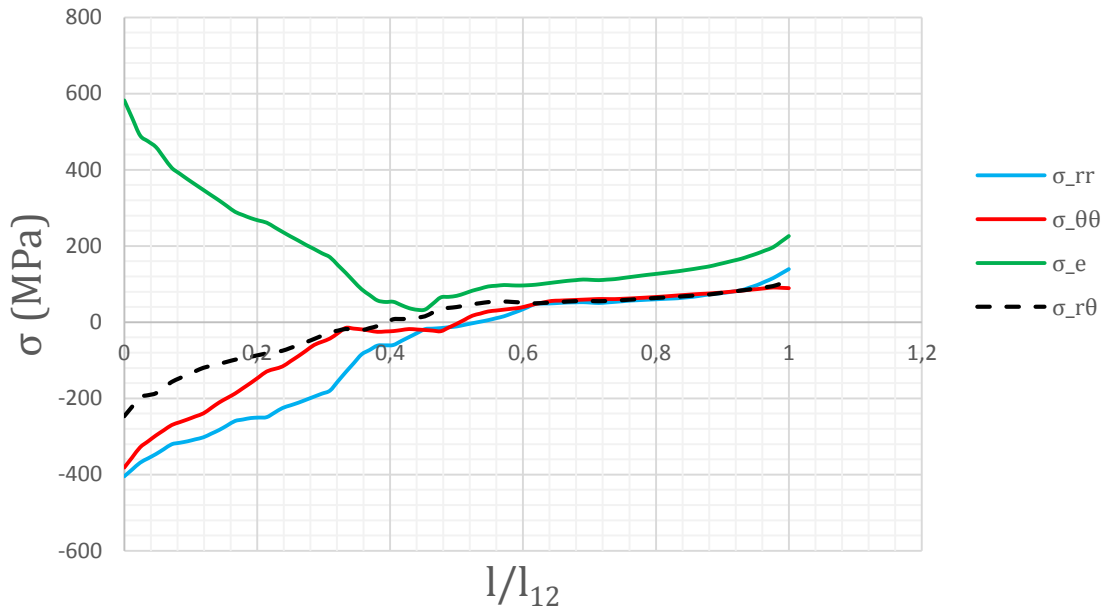


Figure V-13 Les Contraintes dans la région de contact avec frottement ($f=0,4$).

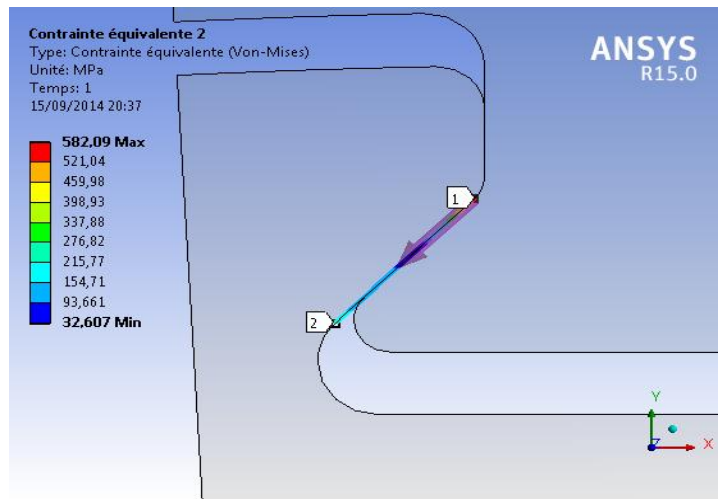


Figure V-14.a Contraintes équivalentes avec frottement dans la région de contact

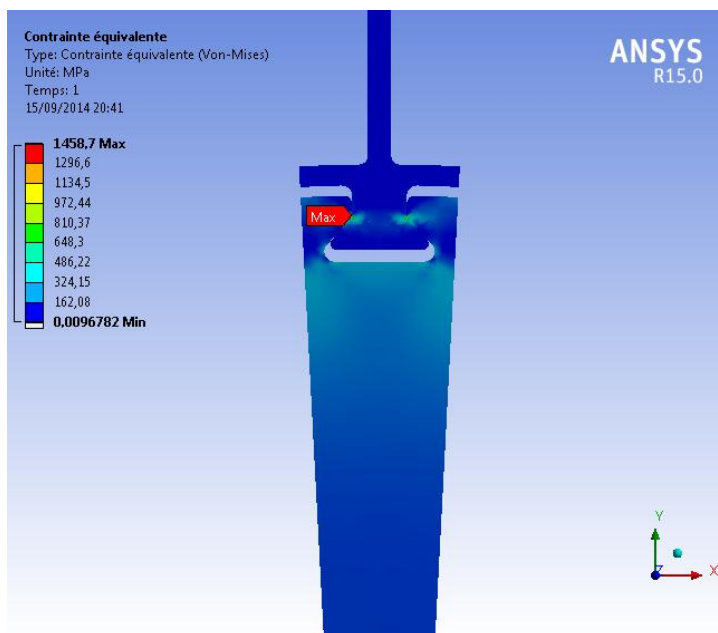


Figure V-14.b Contraintes équivalentes avec frottement.

- On constate que les contraintes prennent des valeurs plus grandes en présence de frottement au niveau du contact aube-attache.

c. Extrusion du modèle 2D (Annexe. B.2)

Il s'agit d'une extrusion du modèle 2D pour obtenir un modèle 3D et faire la comparaison des résultats correspondants (Annexe. B.2).

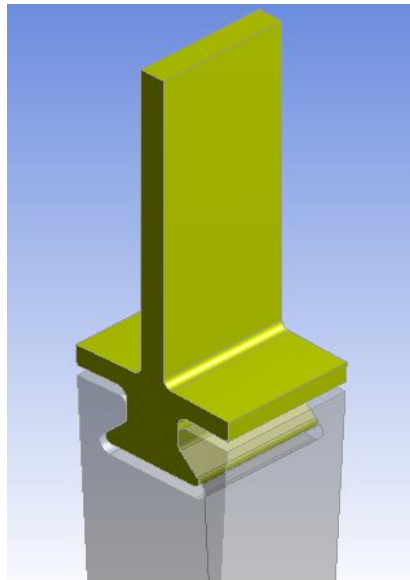


Figure V-15 Attache en 3D.

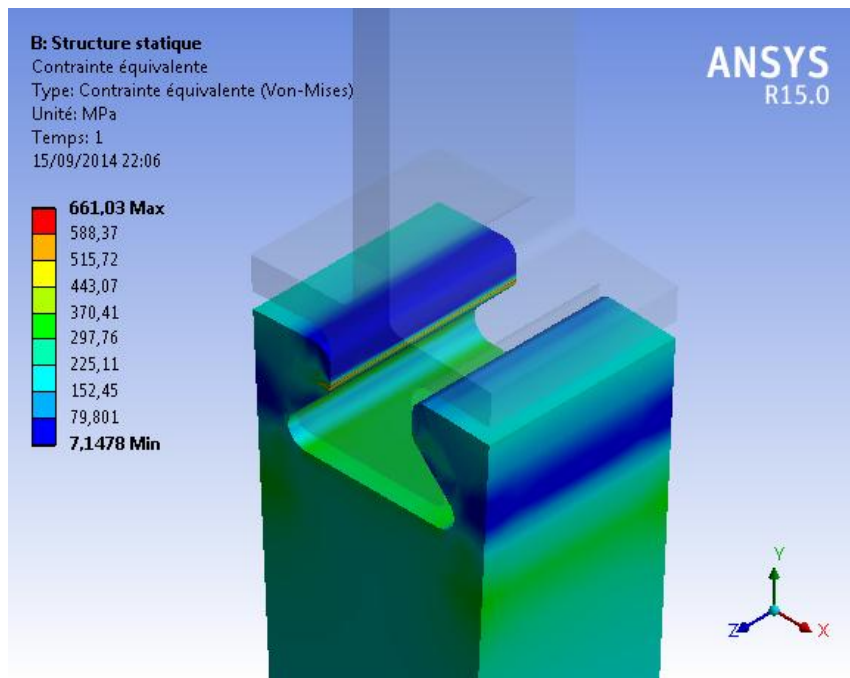


Figure V-16 Contraintes équivalentes en 3D

- On remarque que les contraintes sont restées les mêmes à travers l'épaisseur de disque à cause de la symétrie, donc nous pouvons éviter l'analyse en 3D pour ce modèle.

V. 4 Le modèle de Calcul tridimensionnel

En réalité les disques de turbine possèdent des formes plus compliquées en raison de présence des formes inclinées des attaches, des trous de refroidissement et d'épaisseurs variables. Alors l'analyse bidimensionnelle (2D) s'avère insuffisante pour réaliser les études thermomécaniques, donc il faut faire recours à des analyses tridimensionnelles (Annexe. C).

V. 4.1 La géométrie du disque avec aube en 3D

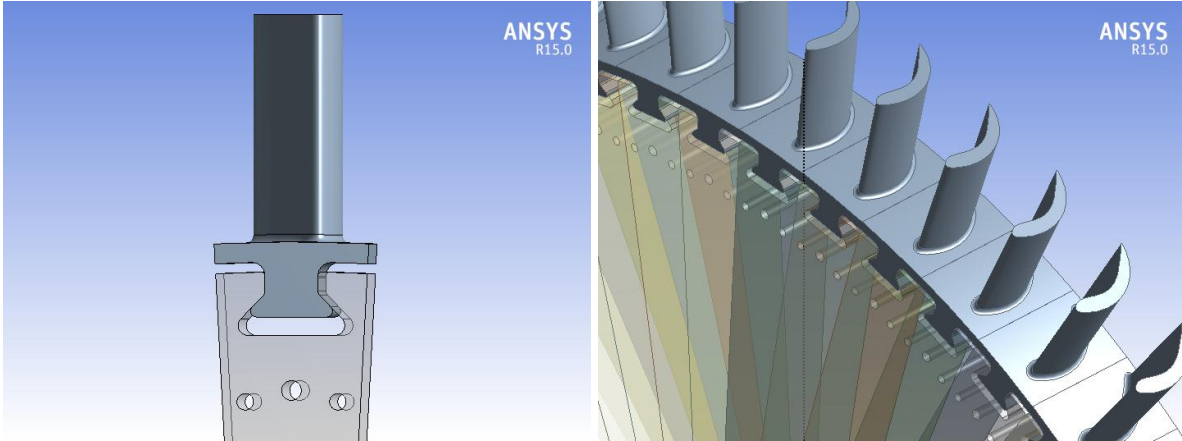


Figure V-17 Modèle D'un Disque en 3D

On coupe suivant le plan XY le disque en plusieurs sections pour montrer les effets de variations de la géométrie (Annexe. C).

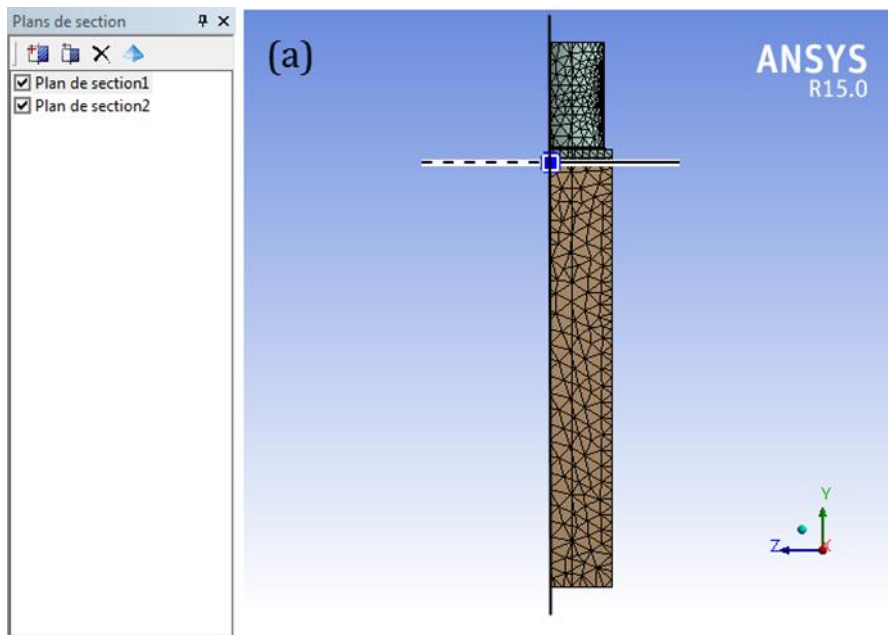


Figure V-18.a Section 01

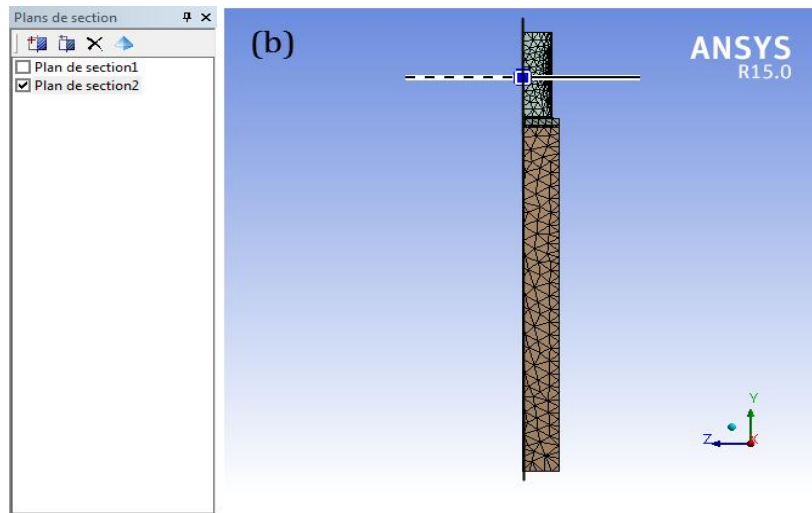


Figure V-18.b Section 02

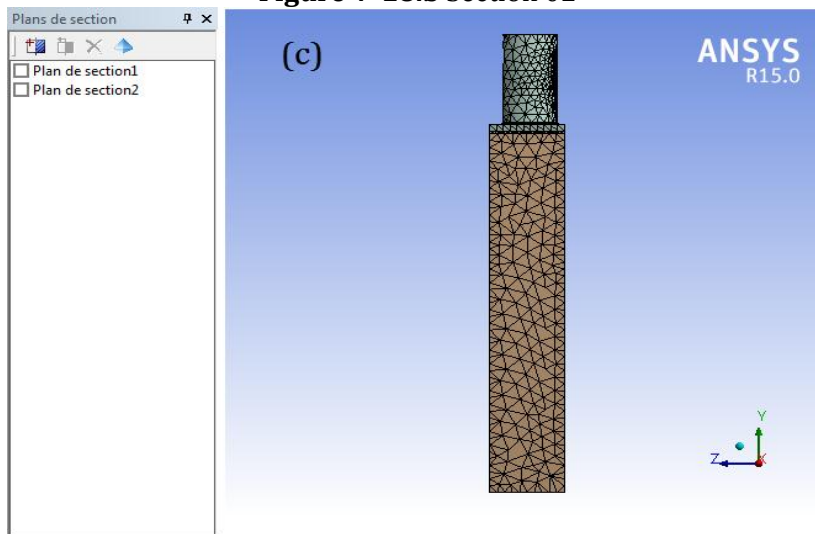


Figure V-18.c Section 03

V.4.2 Calcul les contraintes

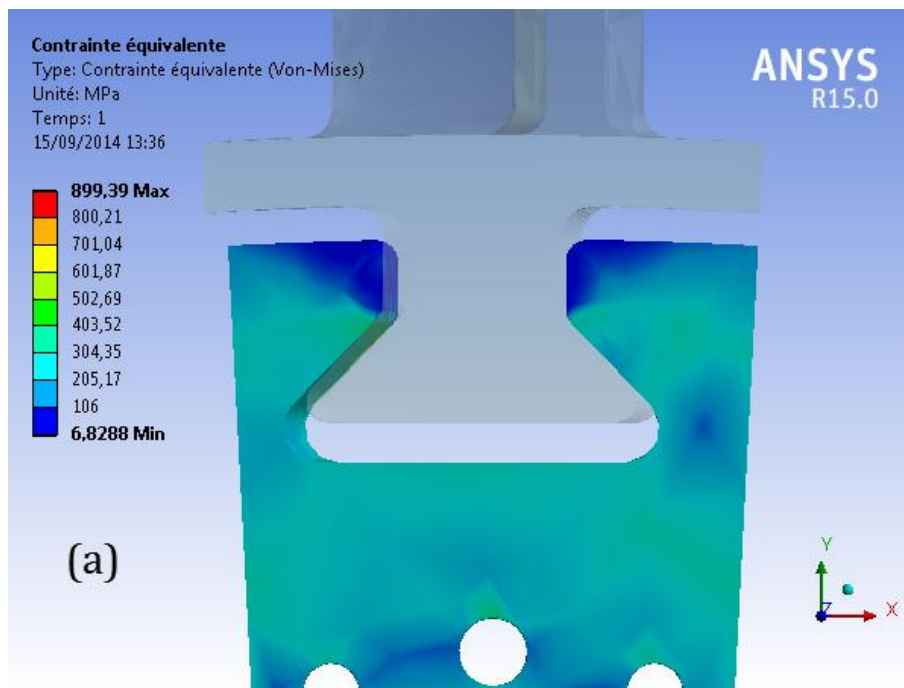


Figure V-19.a Les contraintes équivalents pour section 01.

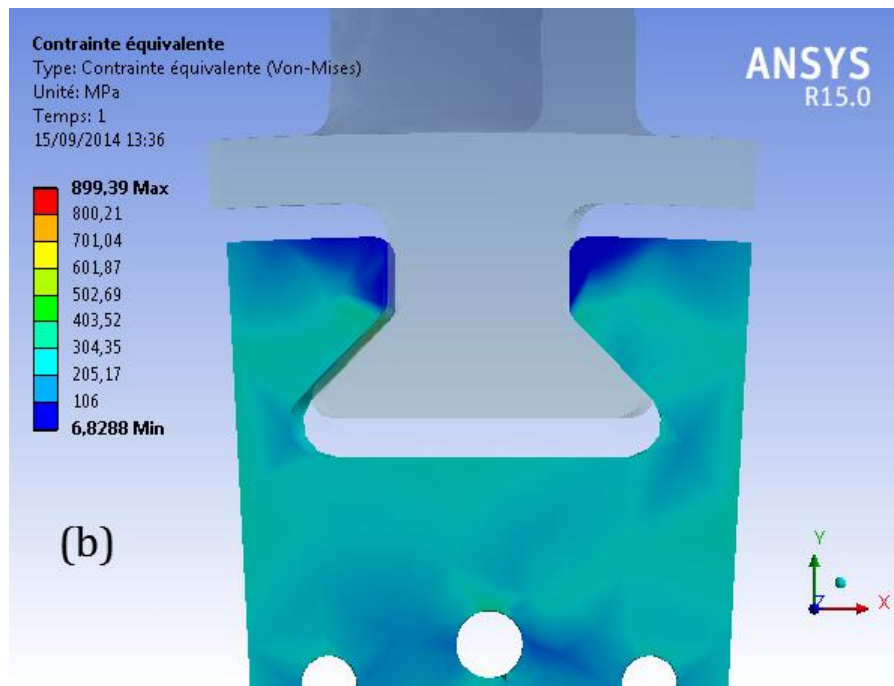


Figure V-19.b Les contraintes équivalents pour section 02.

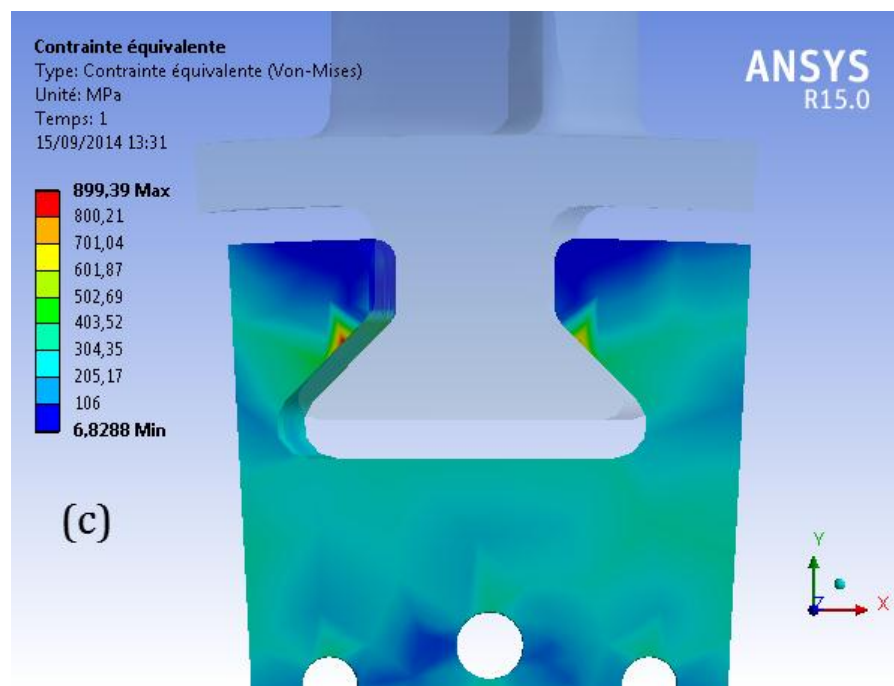


Figure V-19.c Les contraintes équivalents pour section 03.

- D'après les figures ci-dessus, on remarque bien les concentrations des contraintes aux niveaux du contact aube–disque et des trous de refroidissement pour les différentes sections suivant l'épaisseur.

Conclusion

Le principal objectif de la présente étude était d'évaluer les contraintes thermomécaniques et alors déterminer la position la plus vulnérable à la rupture dans un disque de turbine, en utilisant un modèle de calcul mathématique quasi-monodimensionnel comparé avec celui d'éléments finis (**ANSYS 15**).

La solution analytique n'est disponible, pour déterminer les zones où les contraintes importantes, que pour un disque d'épaisseur constant. Ainsi, nos résultats obtenus par la MEF sont bien comparables avec ceux de l'analytique et ceux de l'ANSYS. Quand on ajoute l'effet des aubes, l'analyse analytique et la MEF donnent des résultats valables dans les parties poireau et toile du disque, mais à la jante l'analyse nécessite un calcul bidimensionnel. Par simulation sur ANSYS, ce type de calcul donne des résultats fiables comparé à ceux obtenus par un modèle 3D, ce qui justifie l'utilisation du modèle 2D pour un calcul de dimensionnement préliminaire de la partie jante du disque.

Cependant pour un disque présentant des trous de refroidissement, des attaches des aubes inclinées et de calage des aubes, l'analyse fine au point de vue thermomécanique, particulièrement en ces endroits, mérite un calcul avec un modèle 3D.

D'après les résultats de l'évolution des contraintes, il est nécessaire d'augmenter la dimension de la partie poireau de disque pourvu qu'elle reste pratique (disques de poids non excessif et non encombrant). Par contre, nous pouvons réduire les dimensions au niveau de la toile.

Au niveau de la périphérie, le disque est alésé pour prévoir l'encastrement des aubes, c'est pourquoi on doit adopter une jante pour assurer des contraintes modérées.

Enfin, on souhaite que notre modeste travail satisfasse tout lecteur et participe dans le développement de cet axe de recherche et aussi servira les étudiants, particulièrement de l'institut d'Aéronautique, pour leurs travaux de recherche.

Bibliographie

- [1] **Timoshenko SP, Goodier JN**. Theory of elasticity. New York: McGraw-Hill; 1970.
- [2] **Kollman FG**. Die Auslegung Elastisch-Plastisch beanspruchter
- [3] **Jahed H, Dubey RN**. An axisymmetric method of elastic plastic analysis capable of predicting residual stresses. J Pressure Vessel Technol 1997; 119:264–73.
- [4] **Jahed H, Sherkatti S**. Thermoplastic analysis of inhomogeneous rotating disk with variable thickness, in: Proceedings of the EMAS Conference of Fatigue, Cambridge, England, April 2000.
- [5] **Jahed H, Shirazi**. Thermoplastic analysis of rotating discs at elevated temperatures. Int J Pressure Vessels Piping 2001; 71(3):285–91.
- [6] **Fox RL**. Optimization methods for engineering design. London: Addison-wesley; 1970.
- [7] **Zeinkiewicz OC, Campbell JS**. Shape optimization and sequential linear programming in optimum structural design. New York: John Wiley; 1973.
- [8] **Wang SY, Son Y, Gallagher KH**. Sensitivity analysis in shape optimization of continuum structures. Comp Structure 1985; 20:855–67.
- [9] **Peterson P**. The integrated approach of FEM-SLP for solving problems of optimal designs. In: Optimization of distributed parameters. Leyden: Sijthoff and Noordhoff; 1981. p. 757–80.
- [10] **Cheu Tsu-Chein**. Procedures for shape optimization of gas turbine. Comp Structure 1990; 54(1):1–4.
- [11] **Manson, S.S**. The Determination of Elastic Stresses in Gas Turbine Disks. NACA Report. 871, 1947.
- [12] **Leopold WR**. Centrifugal and thermal stresses in rotating disks. ASME J Applied Mechanics 1984; 18:322–6.
- [13] **Meguid SA, Kanth PS, Czekanski A**. Finite element analysis of fir-tree region in turbine discs. Finite Element Analysis Des 2000; 35(4):305–17.
- [14] **Song W, Keane A, Rees J, Bhaskar A, Bagnall S**. Turbine blade fir-tree root design optimisation using intelligent CAD and finite element analysis. Computational Structure 2002; 80(24):1853–67.

- [15] **Farshi B, Jahed H, Mehrabian A.** Optimum design of inhomogeneous non-uniform rotating discs. *Computational Structure* 2004; 82(9–10):773–9.
- [16] **P. Sénéchal.** Dimensionnement des turbomachines ; ENSAE, 1994 ISBN 2840880164, 9782840880165
- [17] <http://www.specialmetals.com>
- [18] **Witek L.** Failure analysis of turbine disc of an aero engine. *Engineering Failure Analysis* 2006; 13(1):9–17.
- [19] **Shyy W, Papila N, Vaidyanathan R, Tucker K.** Global design optimization for aerodynamics and rocket propulsion components. *Programed Aerospace Science* 2001; 37(1):59–118.
- [20] **Forrester AIJ, Keane AJ.** Recent advances in surrogate-based optimization. *Programed Aerospace Science* 2009; 45(1–3):50–79.
- [21] **Behrooz Farshi, Hamid Jahed, Abdolhossein Mehrabian.** Optimum design of inhomogeneous non-uniform rotating discs.
- [22] Zienkiewicz, O. C., Taylor, R. L., and Zhu, J. Z., 2005, «The Finite Element Method Its Basis and Fundamentals," Elsevier Science & Technology Books, San Diego.
- [23] **Thompson, A. Stanley.** Stresses in Rotating Disks at High Temperatures. *Jour. Appl. Mech.*, vol. 13, no.1, March 1946, pp A45-A52.
- [24] **Nicholas Moes,** Mécaniques des Milieux Continu
- [25] **Maricic.** Luke Anthony, “Thermo-Mechanical Behaviour of Turbine Disc Assembly in the Presence of Residual Stresses”, Mechanical and Industrial Engineering, University of Toronto.
- [26] **Young. W.Kwon, Hyochoong. Bang,**” The finite element method using MATLAB”,
- [27] **Hearn, E. J.,** 1997, "Mechanics of materials an introduction to the mechanics of elastic and plastic deformation of solids and structural materials," Butterworth-Heinemann, Oxford; Boston.

Annexe A Simulation Sur ANSYS Du Disque En 1D

Dans cette annexe, en affichant tous les résultats

Matériau Utilisée Inconel 718

Propriétés de l'Inconel 718 à 22°C	
Module d'élasticité (YOUNG) (E)	220 GPa
Coefficient de Poisson (ν)	0.294
Conductivité Thermique (k)	10.78W/m ² K
Masse volumique (ρ)	8510 kg/m ³
Coefficient de dilatation thermique (α)	1.36 10 ⁻⁵ 1/°C

Tableau.A.1 Propriétés de l'Inconel 718

A.1 Disque Sans charge $\sigma_{rr_b} = 0$

A.1.1 la géométrie et les données

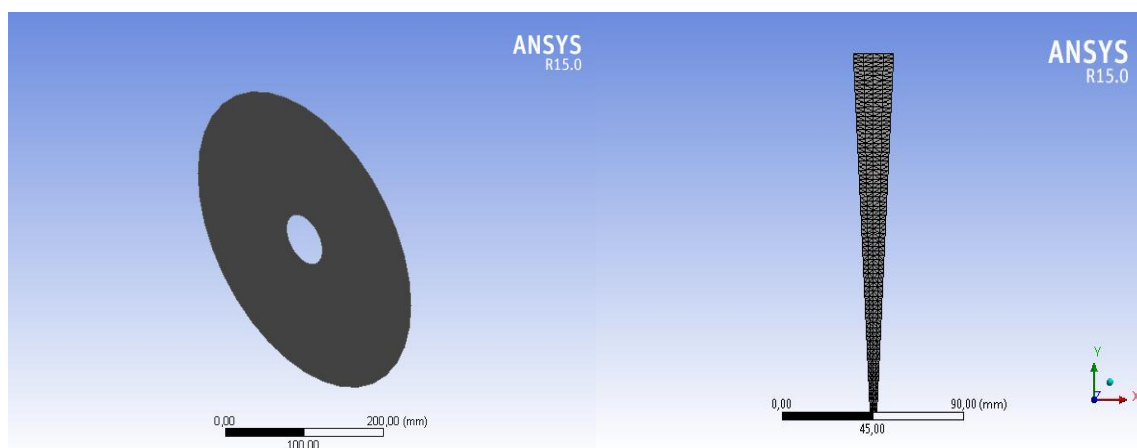


Fig. A.1 la géométrie et le maillage

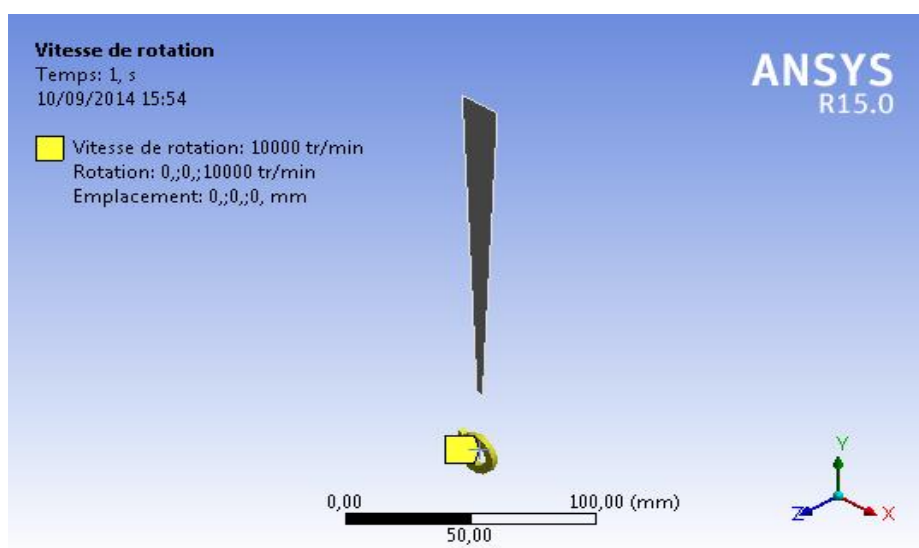


Fig. A.2 Vitesse de rotation

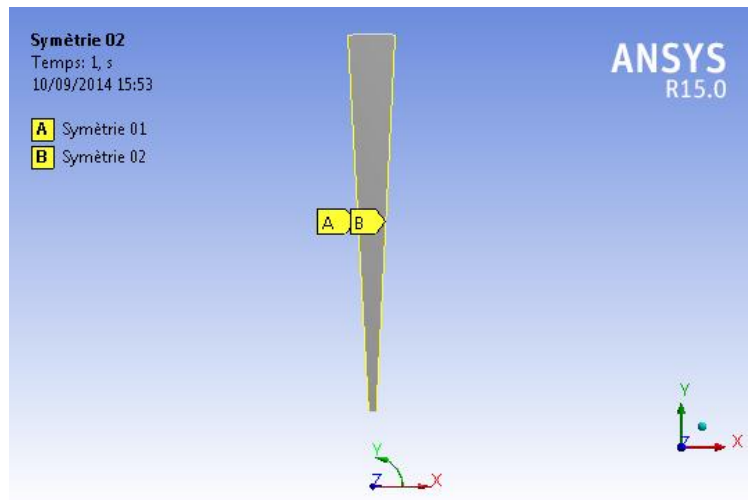


Fig.A.3 Les zones de symétrie cyclique

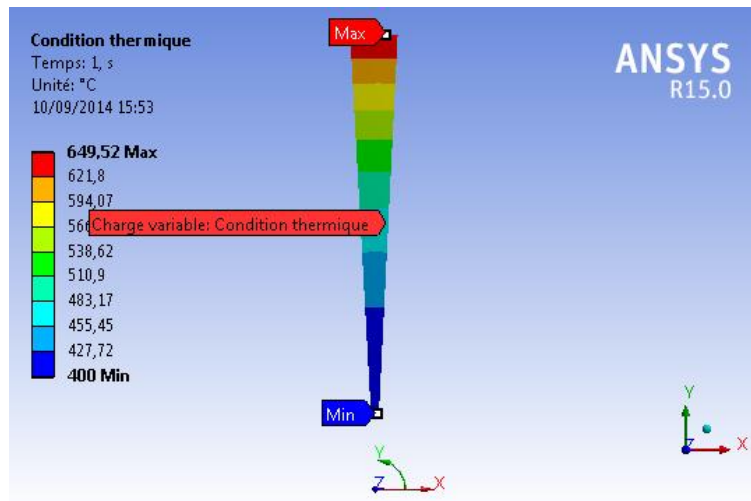


Fig.A.4 le profil de la température

A.1.2 les Contraintes

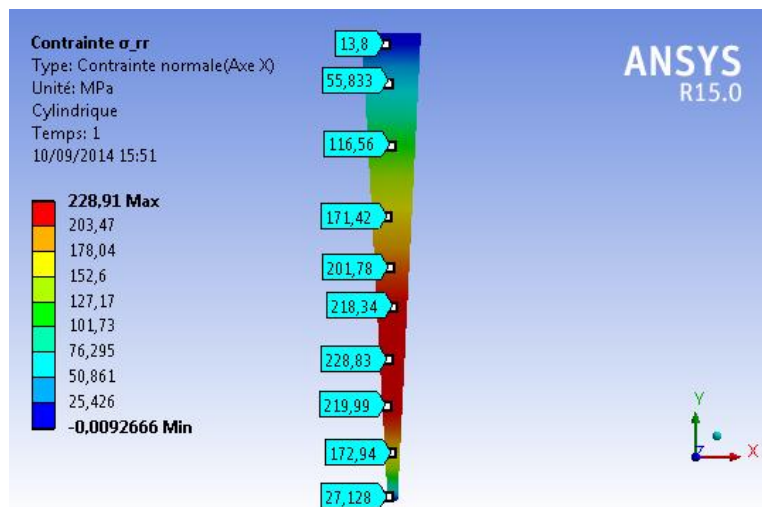


Fig.A.5 les Contraintes Radiales σ_{rr}

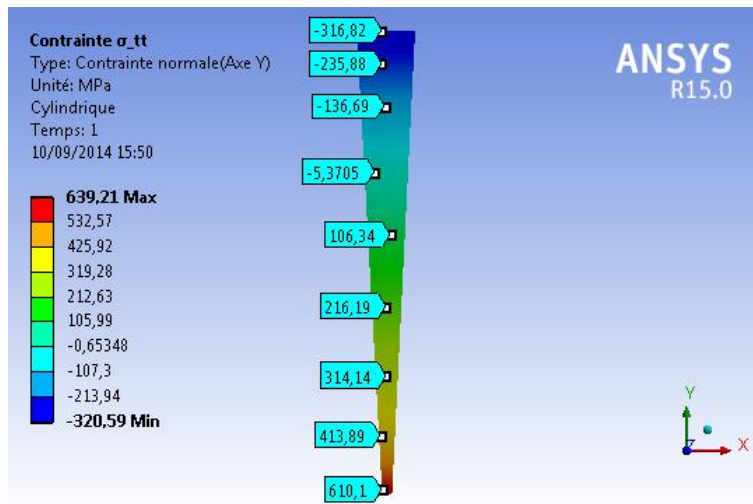


Fig.A.6 les Contraintes Tangentielles $\sigma_{\theta\theta}$

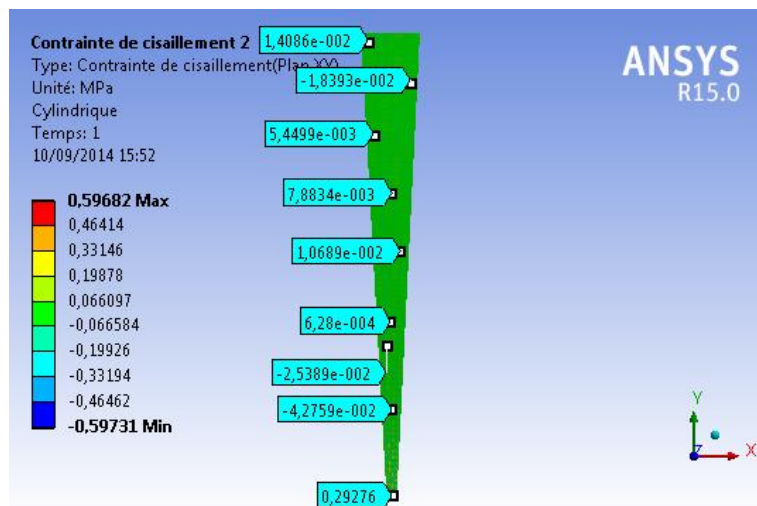


Fig.A.7 les Contraintes Cisaillements $\sigma_{r\theta}$

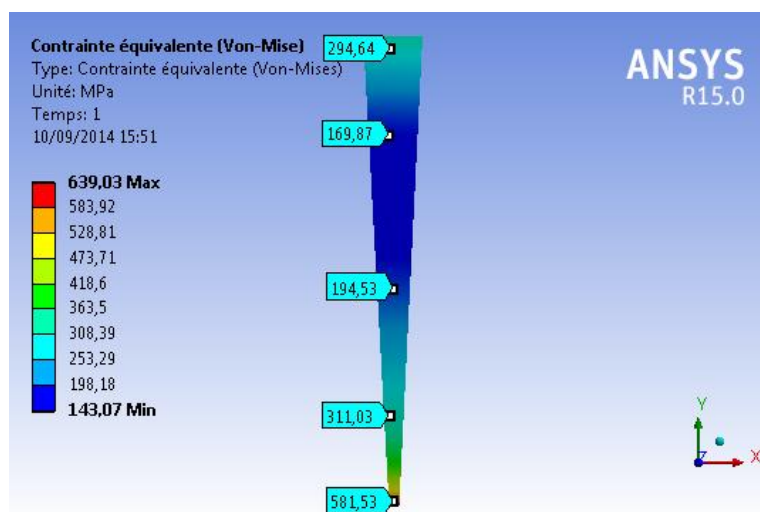


Fig.A.8 les Contraintes Équivalentes (Von-Mise) σ_e

A.1.3 les Déplacements

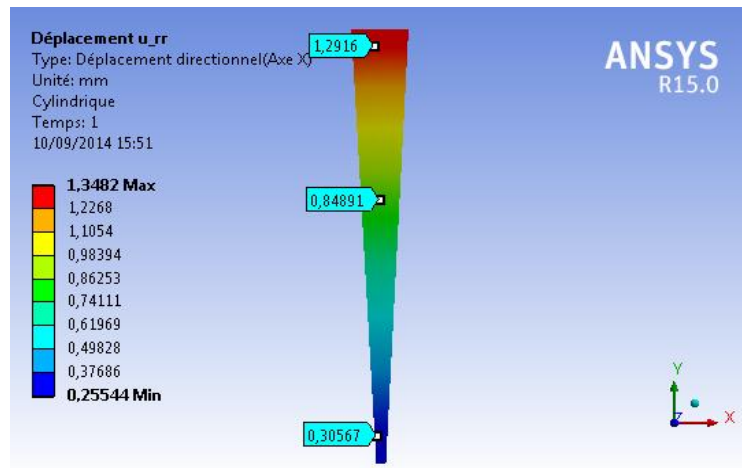


Fig.A.9 les Déplacements U_{rr}

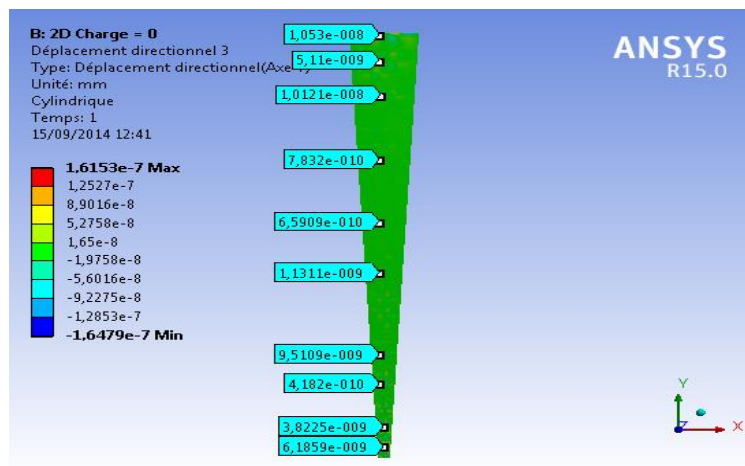


Fig.A.10 les Déplacements $U_{\theta\theta}$

A.1.4 les Déformations

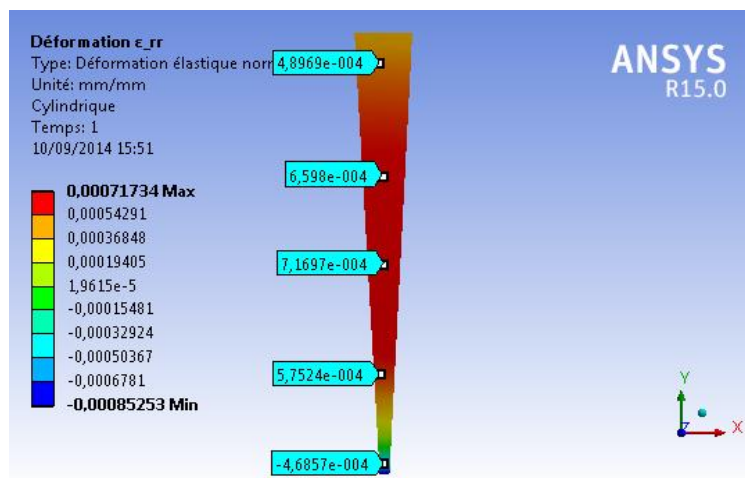


Fig.A.11 les Déformations Radiales ϵ_{rr}

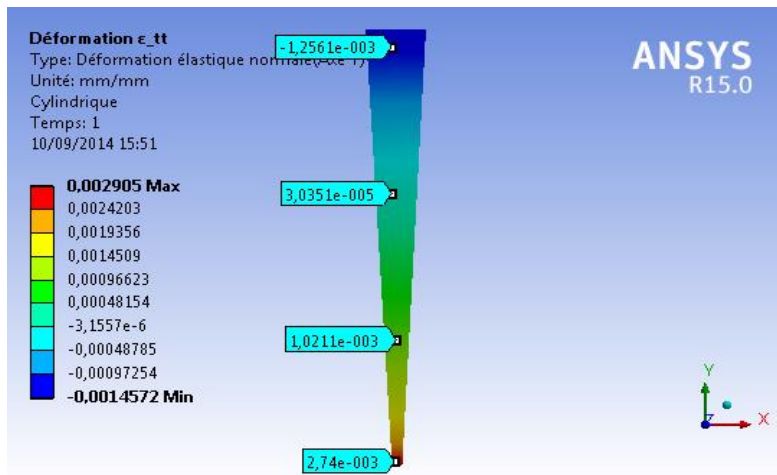


Fig.A.12 les Déformations Tangentielles $\epsilon_{\theta\theta}$

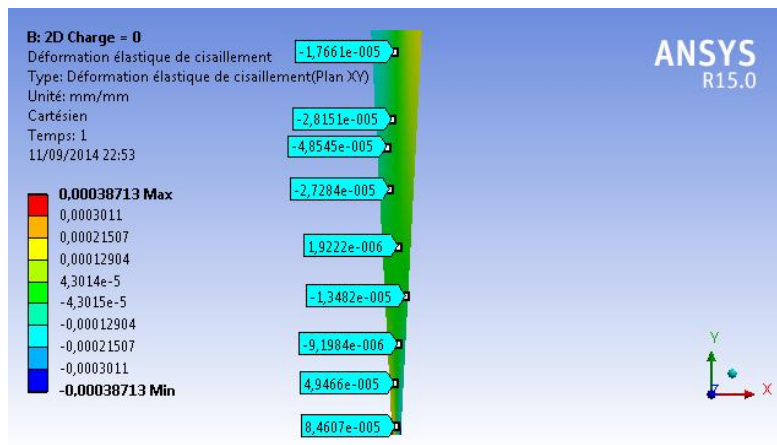


Fig.A.13 les Déformations Cisaillements $\epsilon_{r\theta}$

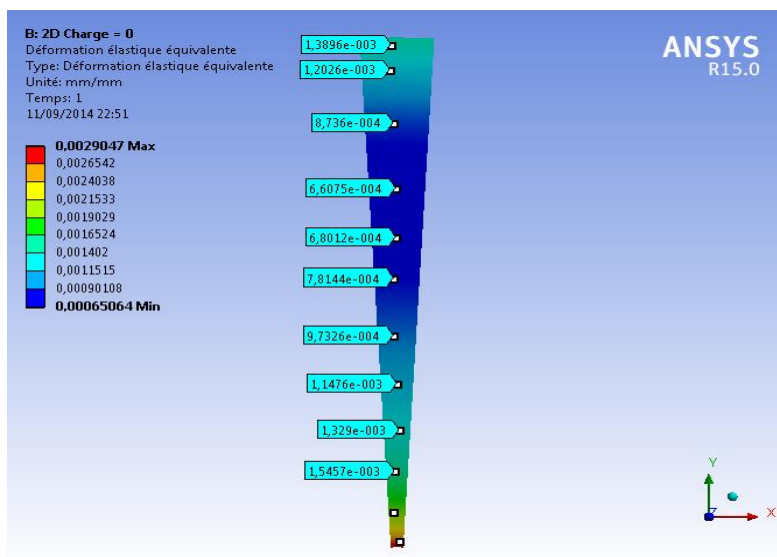


Fig.A.14 les Déformations Équivalentes (Von-Mise) ϵ_e

A.2 Disque Avec Charge extérieur

A.2.1 la géométrie avec les données

La géométrie et les données sont les mêmes avec celle de A.1, la différence est la charge.

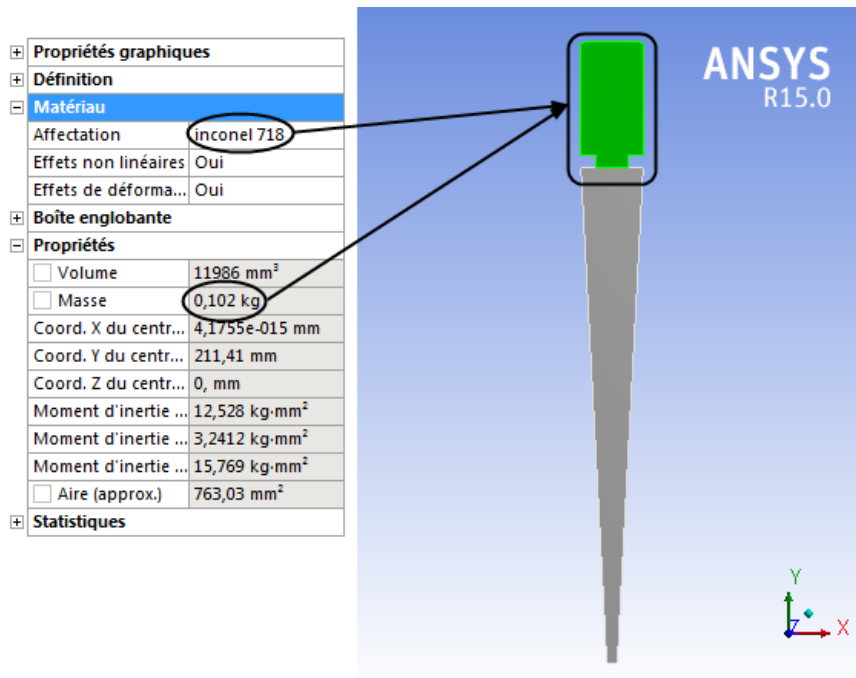


Fig.A.15 la charge.

A.2.2 les Contraintes

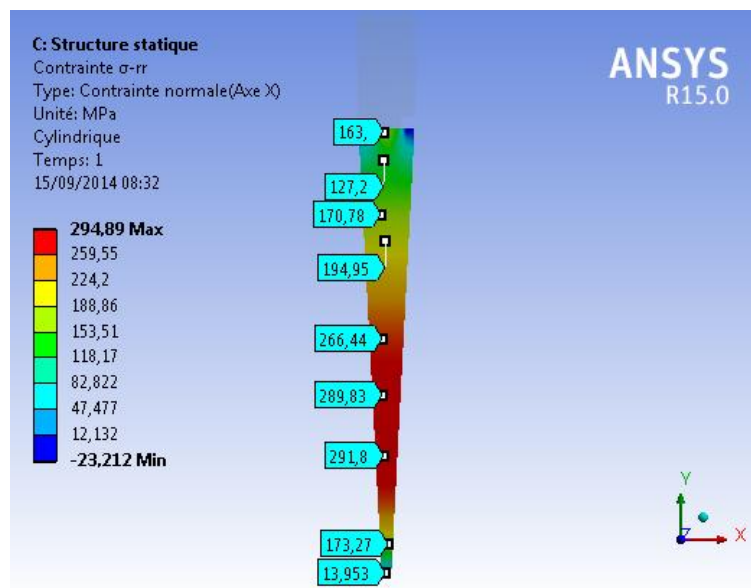


Fig.A.16 les Contraintes Radiales σ_{rr}

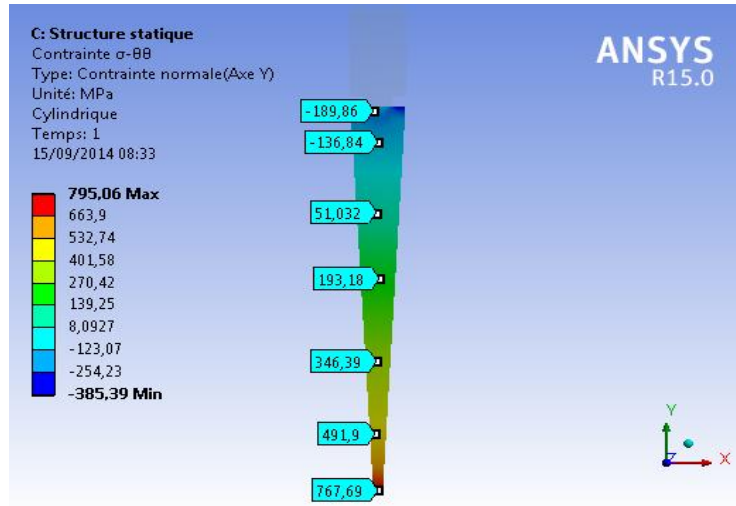


Fig.A.17 les Contraintes Tangentielles $\sigma_{\theta\theta}$

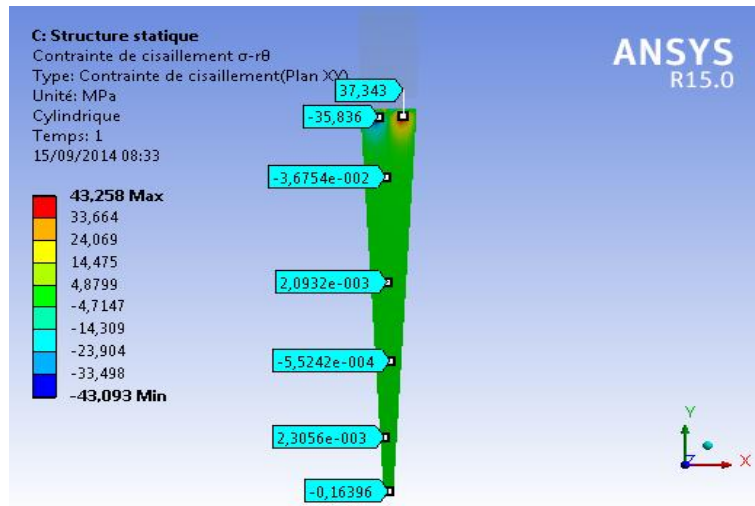


Fig.A.18 les Contraintes de Cisaillements $\sigma_{r\theta}$

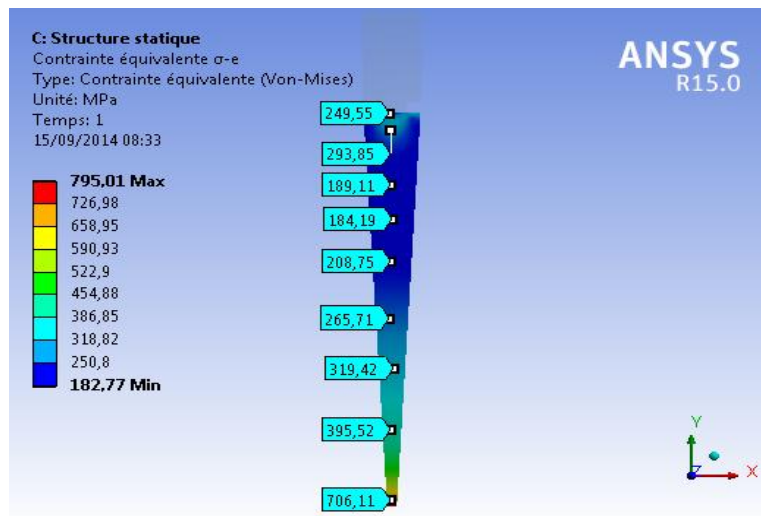


Fig.A.19 les Contraintes Equivalentes σ_e

A.2.3 les Déplacements

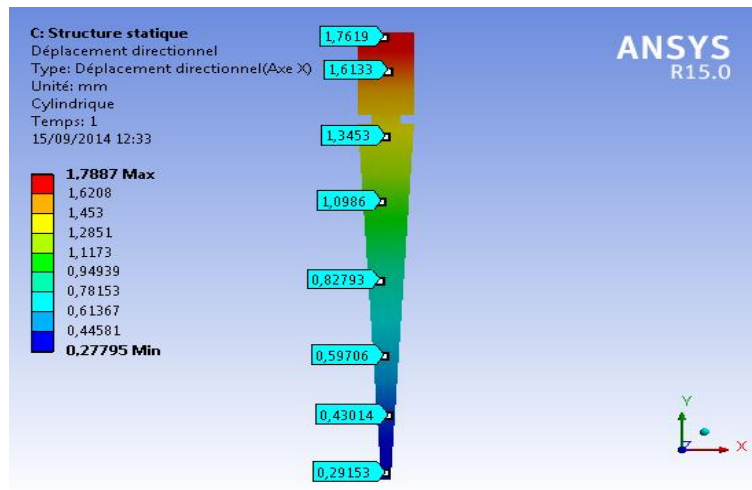


Fig.A.20 les Déplacements U_{rr}

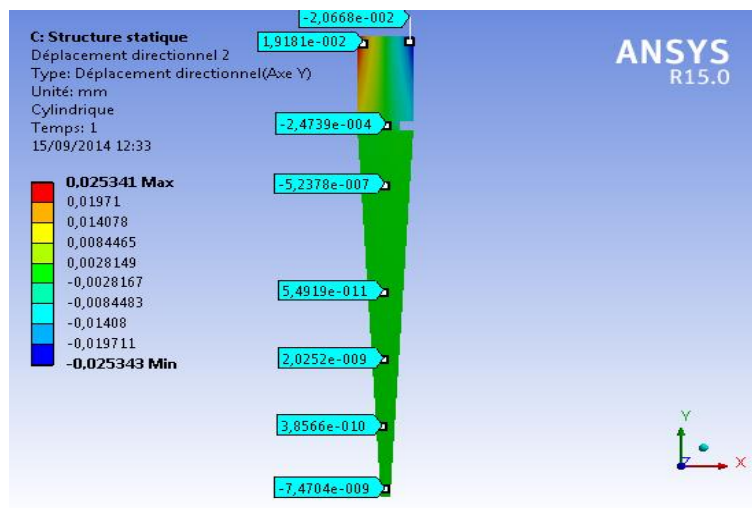


Fig.A.21 les Déplacements $U_{\theta\theta}$

A.2.4 les Déformations

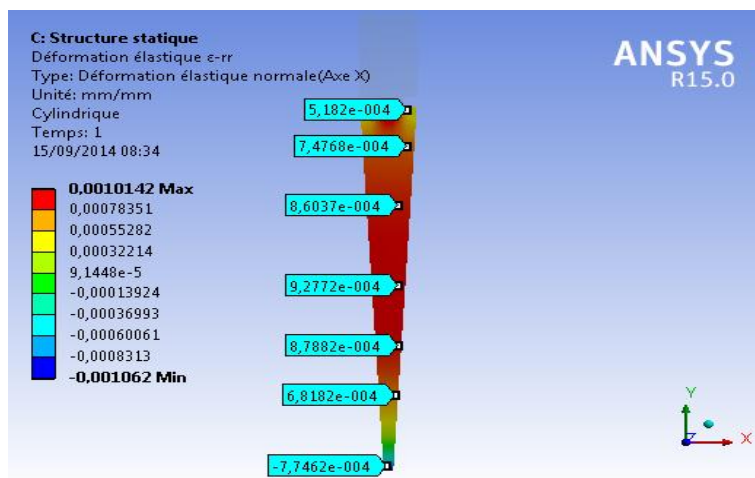


Fig.A.22 les Déformations Radiales ϵ_{rr}

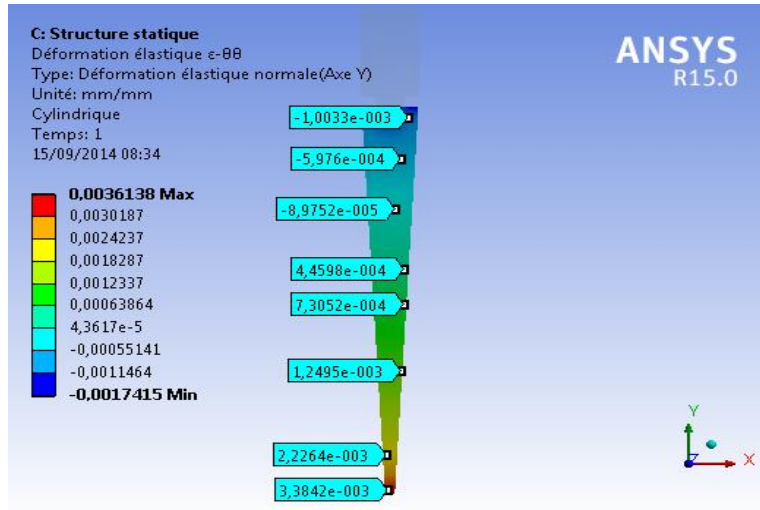


Fig.A.23 les Déformations Tangentielles $\epsilon_{\theta\theta}$

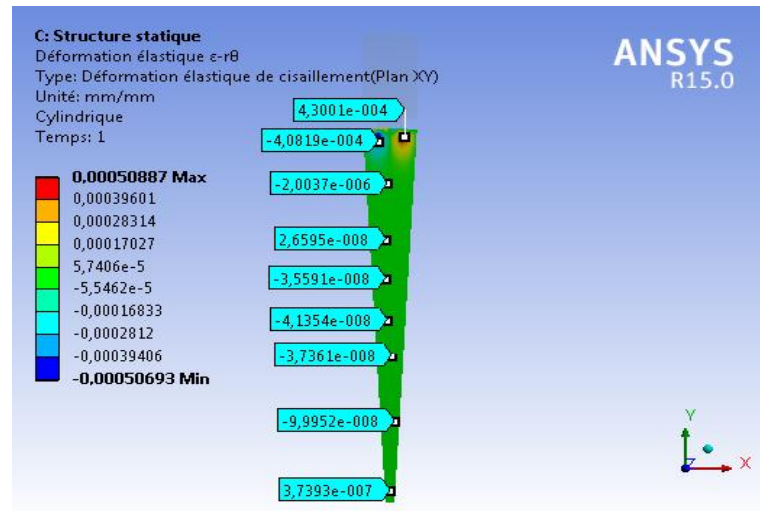


Fig.A.24 les Déformations de cisailments $\epsilon_{r\theta}$

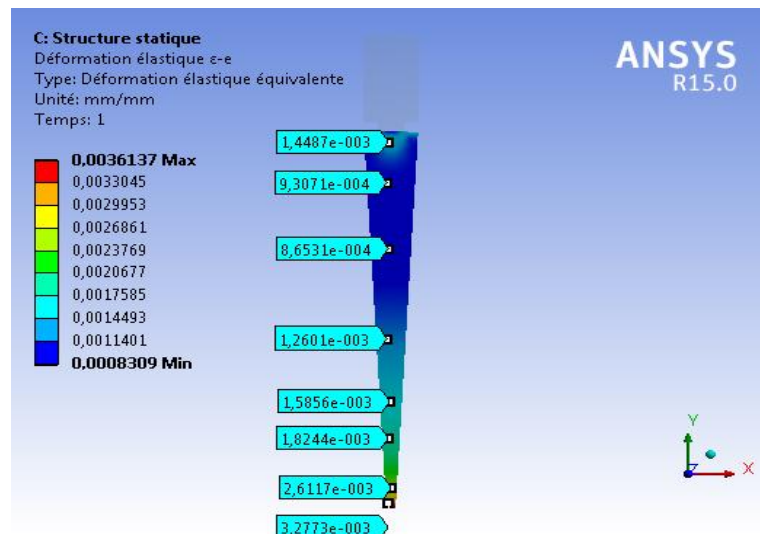


Fig.A.25 les Déformations Equivalentes ϵ_e

Annexe B Simulation Sur ANSYS Du Disque En 2D

B.1 Disque Avec l'attache (Cas sans frottement)

B.1.1 la géométrie et les données

Les données sont les mêmes avec celle de A.1.

Rayon intérieur	1,6441 mm
Rayon extérieur	4,1874 mm
Angle γ	44,48 °
Angle φ	45,52 °

Tableau.B.1 les détails de l'attache

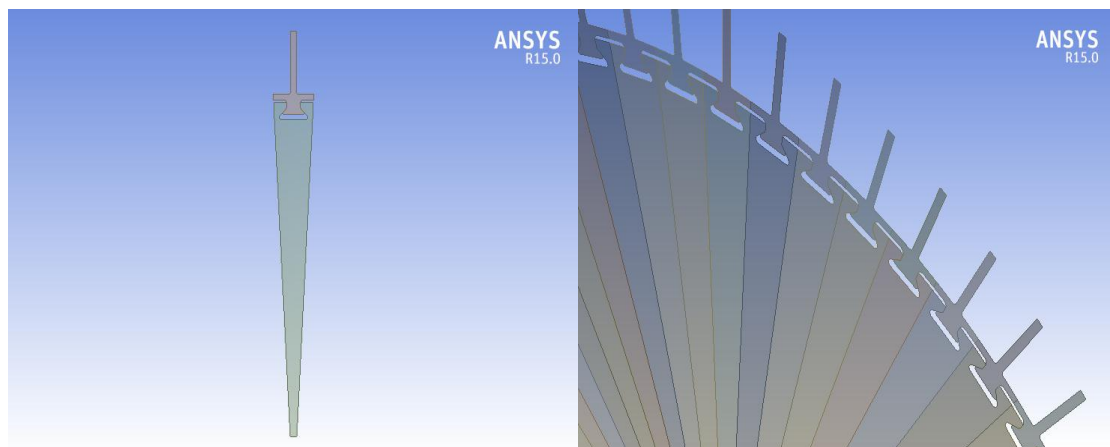


Fig.B.1 la géométrie

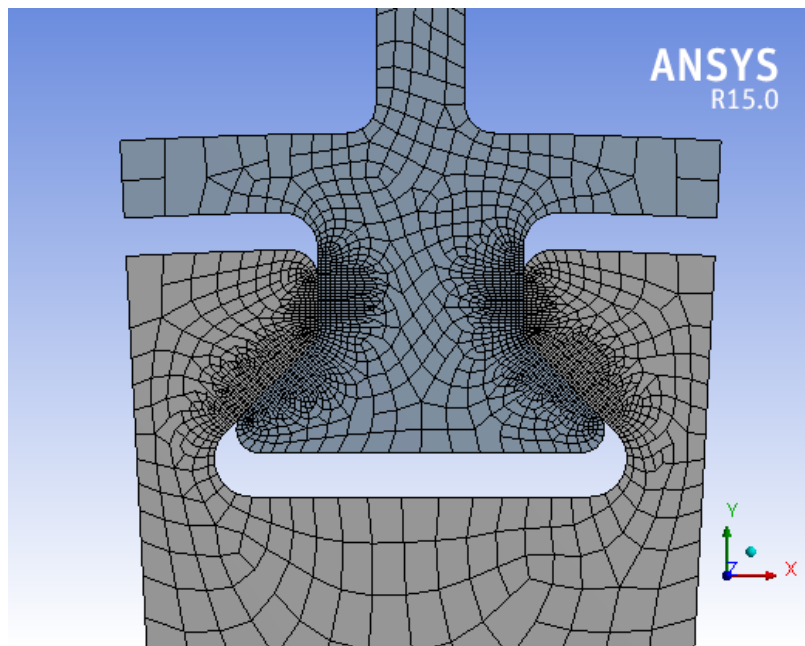


Fig.B.2 le maillage

B.1.2 les Contraintes

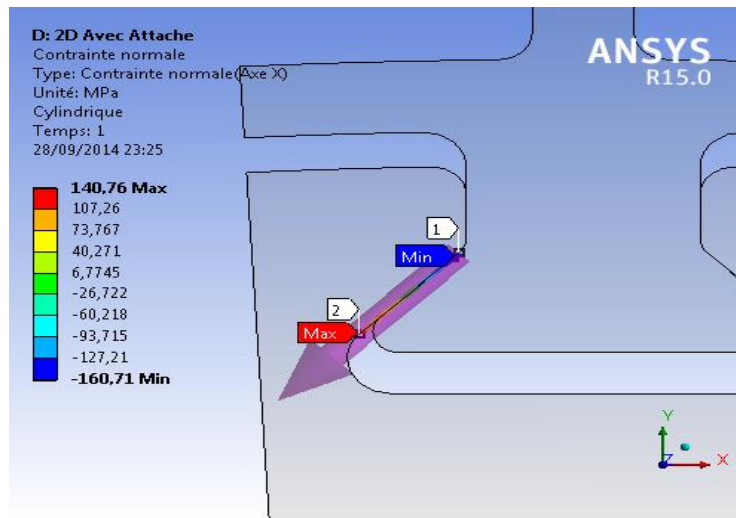


Fig.B.3 les Contraintes Radiales σ_{rr}

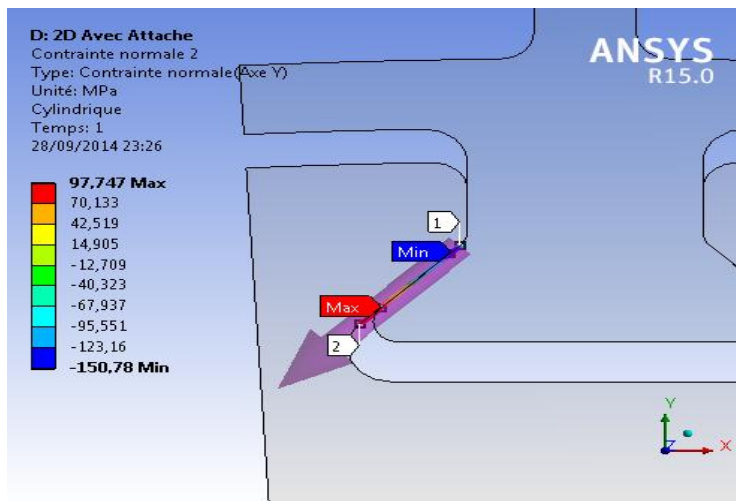


Fig.B.4 les Contraintes Tangentielles $\sigma_{\theta\theta}$

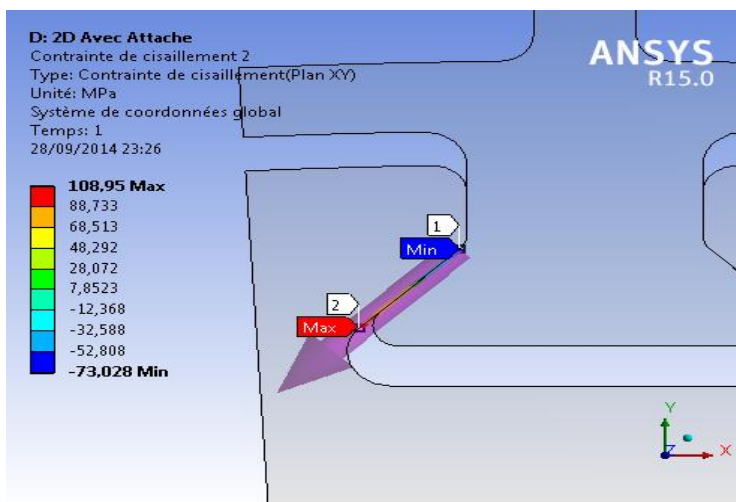


Fig.B.5 les Contraintes de cisaillements $\sigma_{r\theta}$

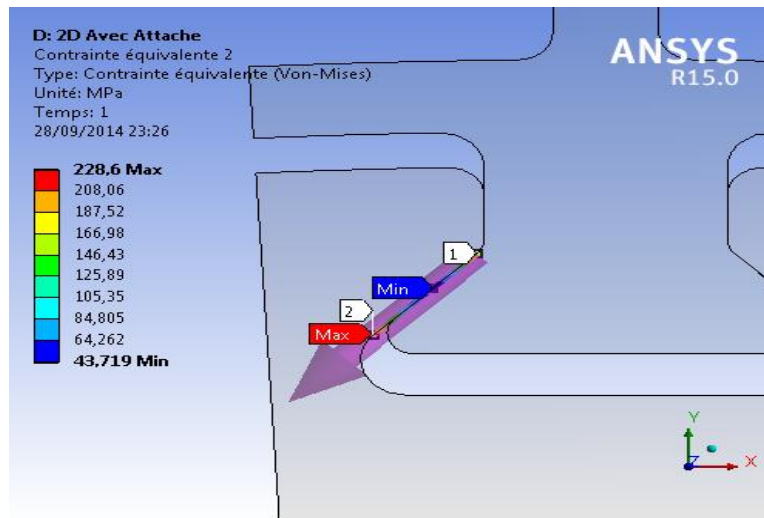


Fig.B.6 les Contraintes Equivalentes σ_e

B.1.3 les Déplacements

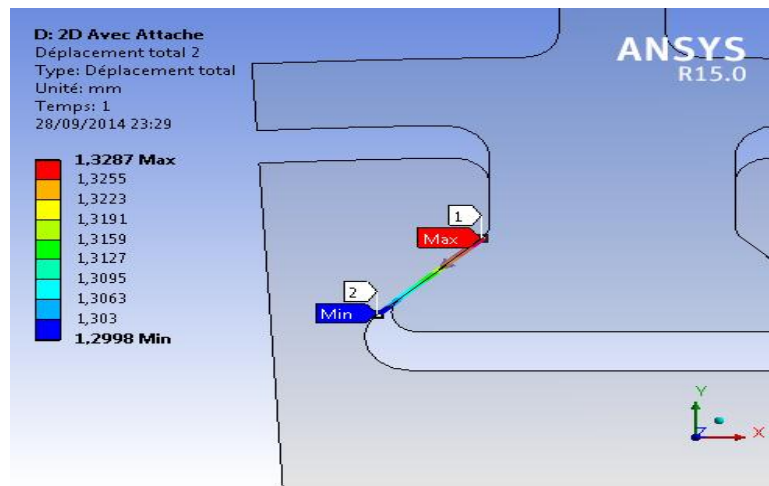


Fig.B.7 Les déplacements.

B.1.4 les Déformations

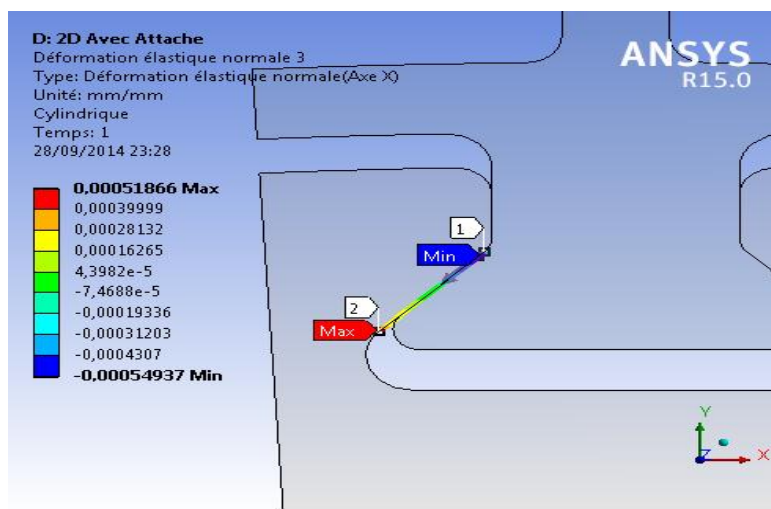


Fig.B.8 les Déformations Radiales ϵ_{rr}

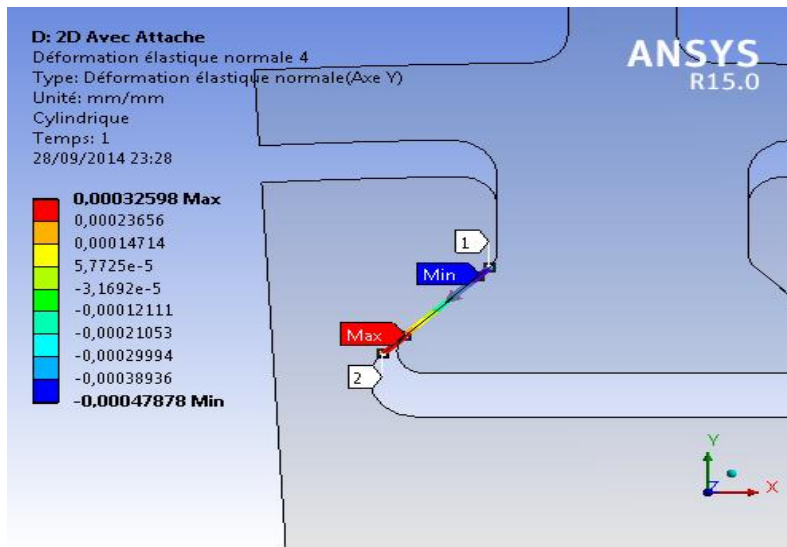


Fig.B.9 Les Déformations Tangentielles $\epsilon_{\theta\theta}$

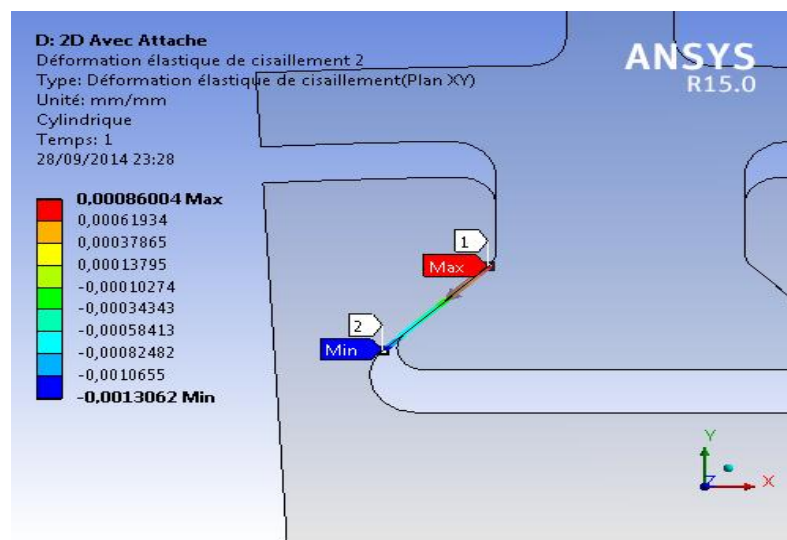


Fig.B.10 Les Déformations de Cisaillements $\epsilon_{r\theta}$

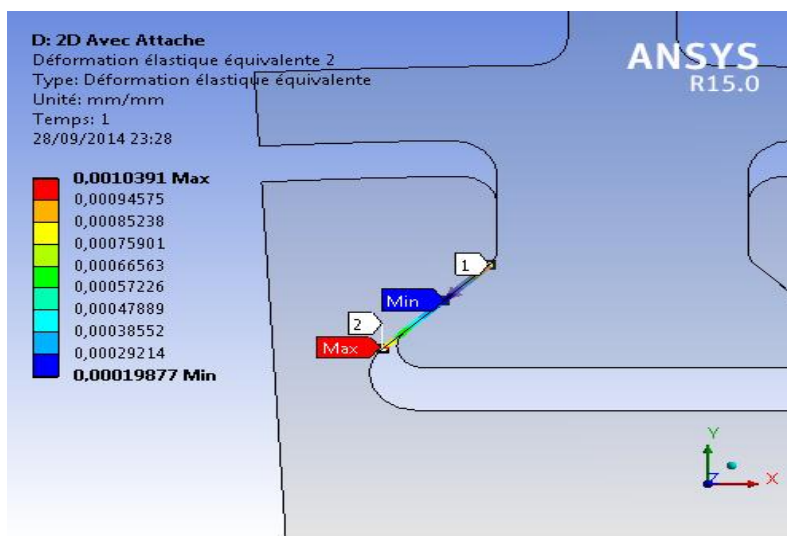


Fig.B.11 Les Déformations Equivalents ϵ_e

B.2 Disque Avec l'attache 3D (Extrusion de 2D)

B.2.1 la géométrie et les données

Les données sont les mêmes avec celle de B.1

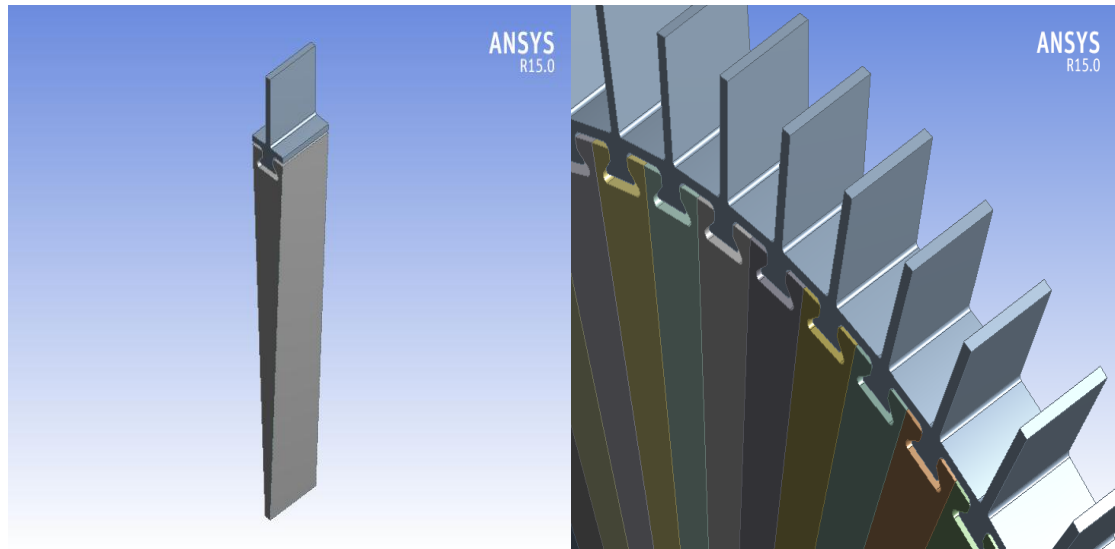


Fig.B.12 la géométrie

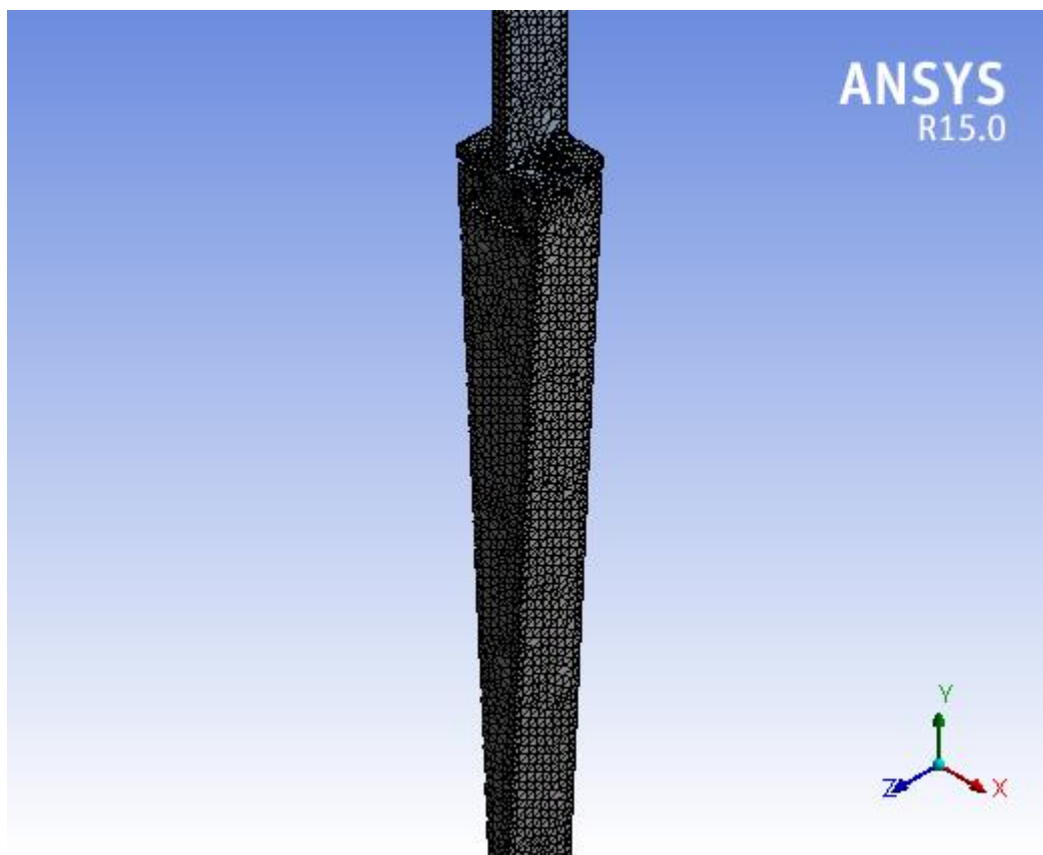


Fig.B.13 le Maillage

B.2.2 les Contraintes

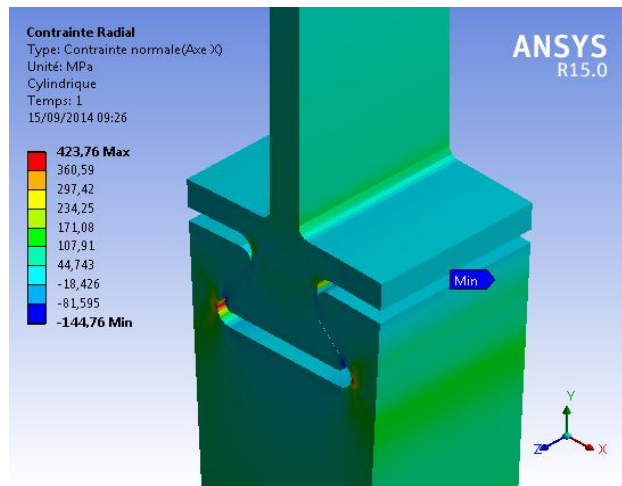


Fig.B.14 les Contraintes Radiales σ_{rr}

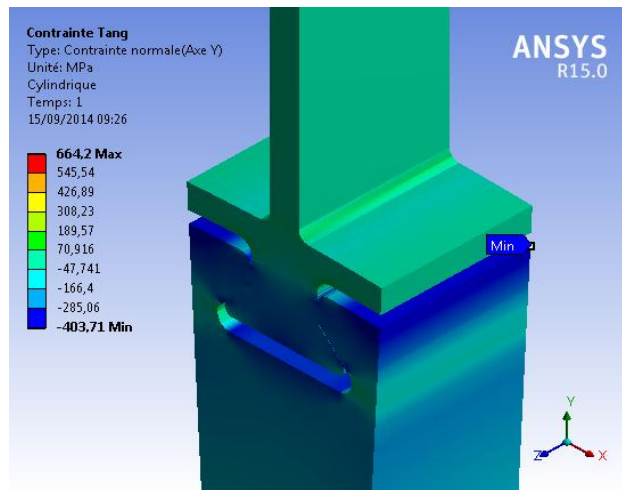


Fig.B.15 les Contraintes Tangentielles $\sigma_{\theta\theta}$

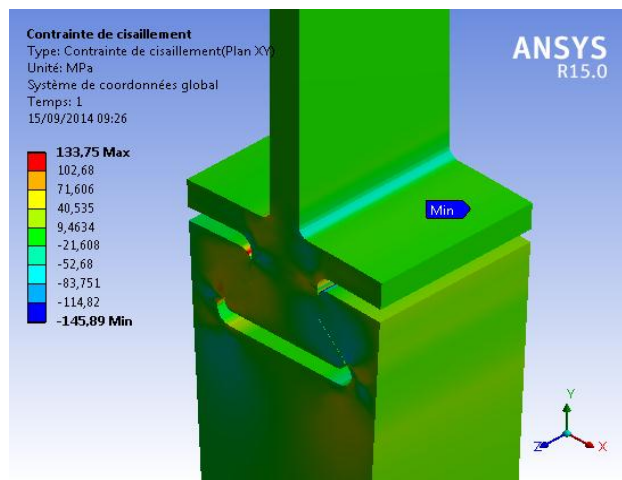


Fig.B.16 les Contraintes de Cisaillements $\sigma_{r\theta}$

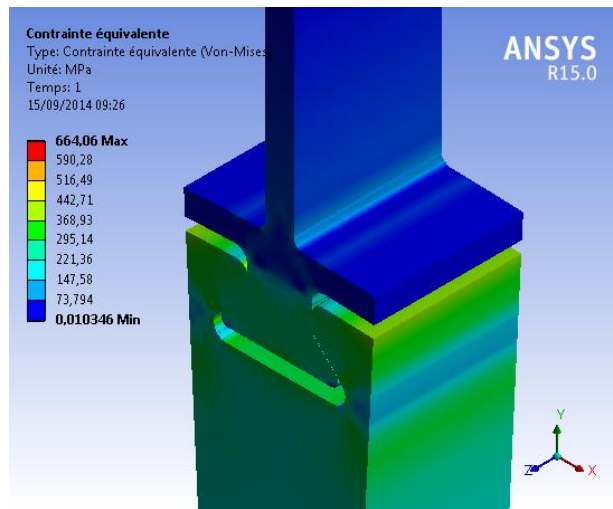


Fig.B.17 les Contraintes Equivalentes σ_e

B.2.3 les Déplacements

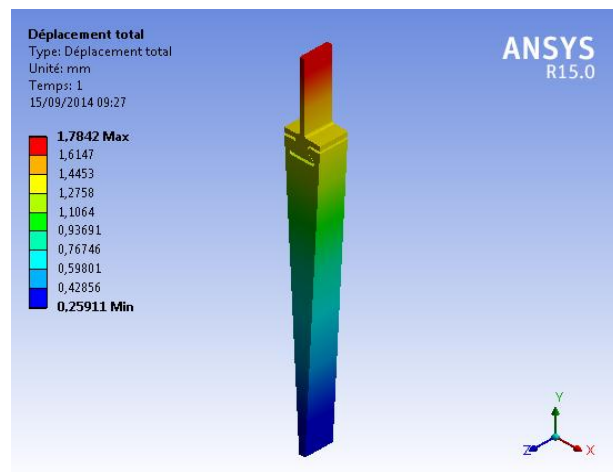


Fig.B.18 Les Déplacements.

B.2.4 les Déformations

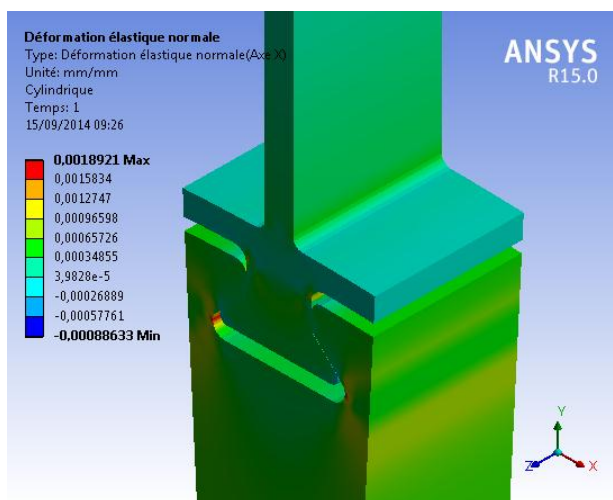


Fig.B.19 les Déformation Radiales ϵ_{rr}

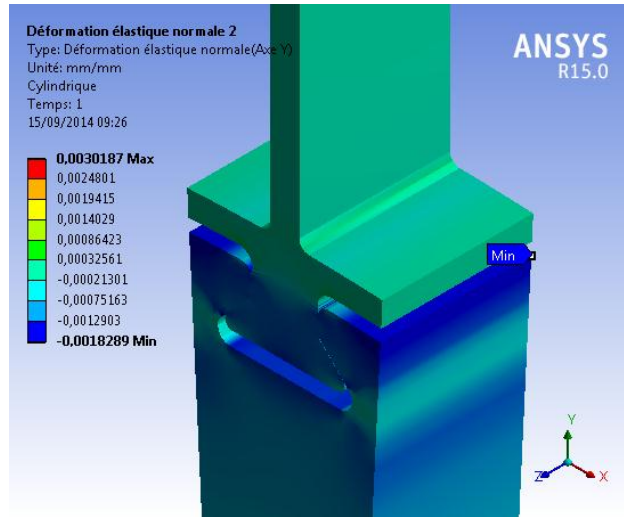


Fig.B.20 les Déformation Tangentielles $\varepsilon_{\theta\theta}$

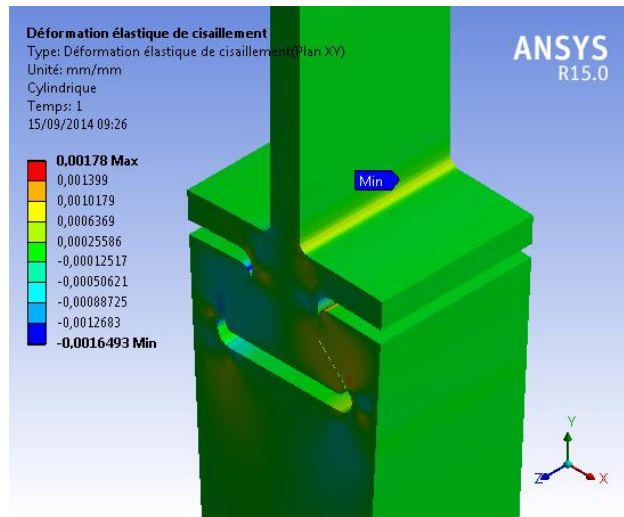


Fig.B.21 les Déformation de Cisaillements $\varepsilon_{r\theta}$

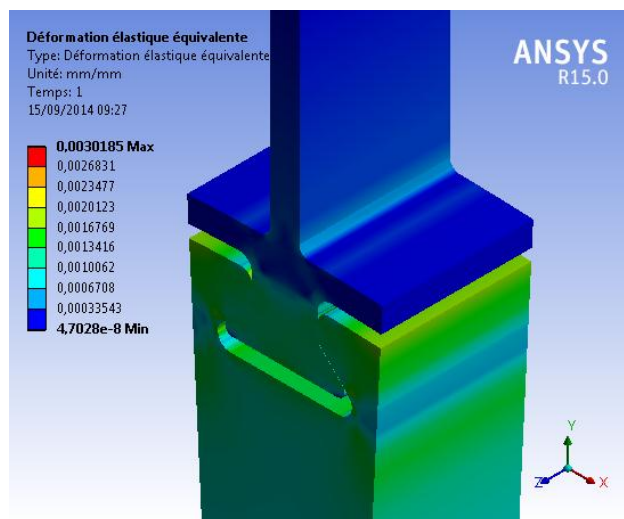


Fig.B.22 les Déformation Equivalentes ε_e

Annexe C Simulation Sur ANSYS Du Disque En 3D

C.1.1 la géométrie et les données

Les données sont les mêmes avec celle de B.2

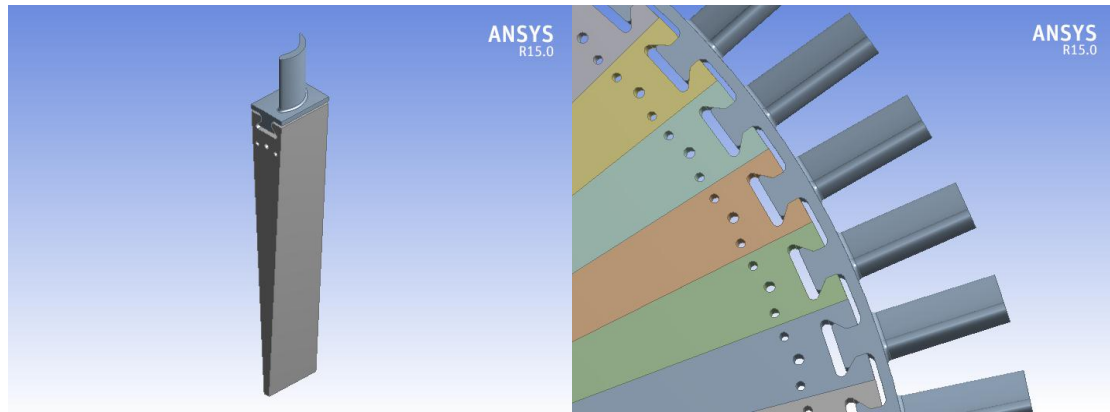


Fig.C.1 la géométrie

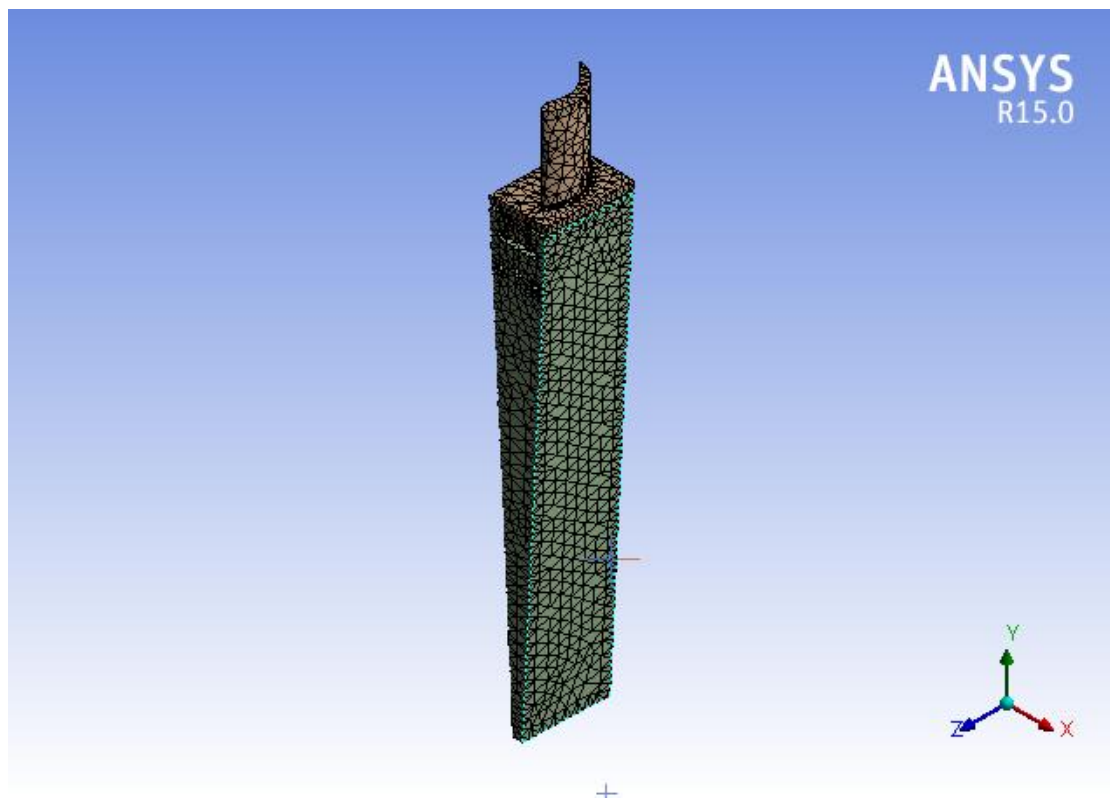


Fig.C.2 Le Maillage

C.1.2 les Contraintes

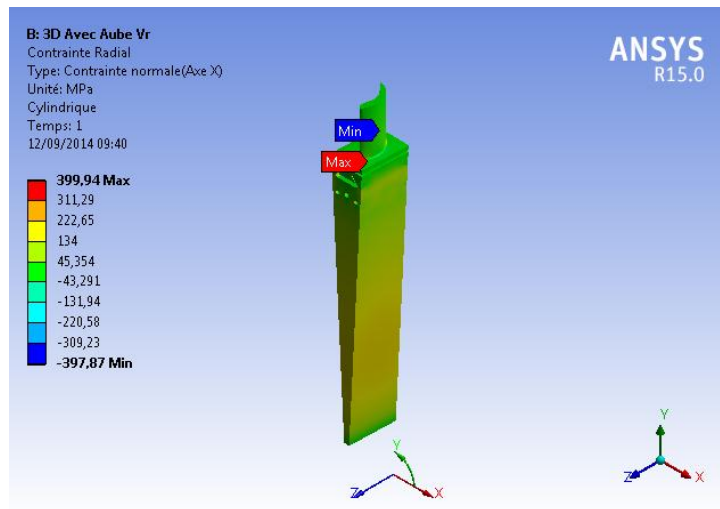


Fig.C.3 Les Contraintes Radiales σ_{rr}

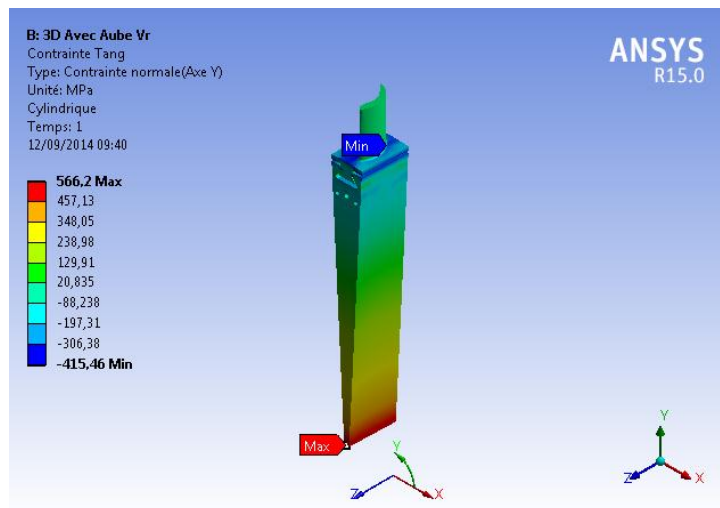


Fig.C.4 Les Contraintes Tangentielles $\sigma_{\theta\theta}$

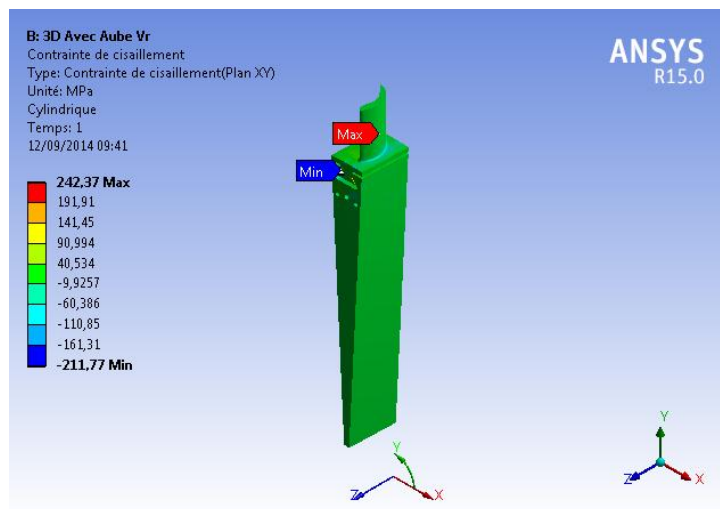


Fig.C.5 Les Contraintes de Cisaillements $\sigma_{r\theta}$

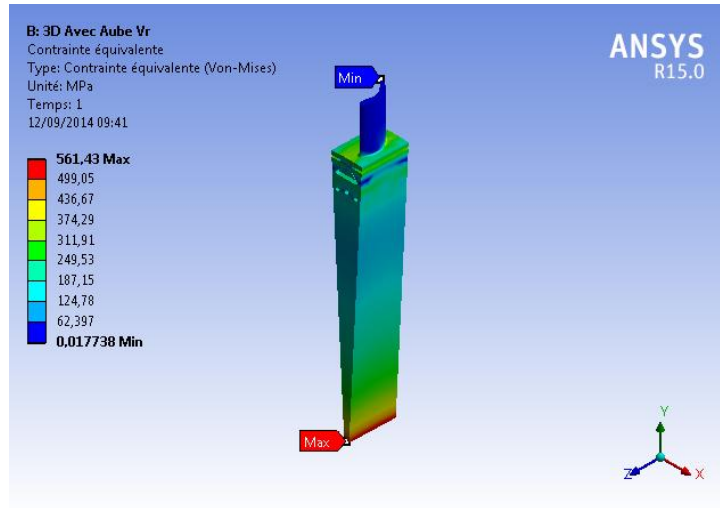


Fig.C.6 Les Contraintes Equivalentes σ_e

C.1.3 les Déplacements

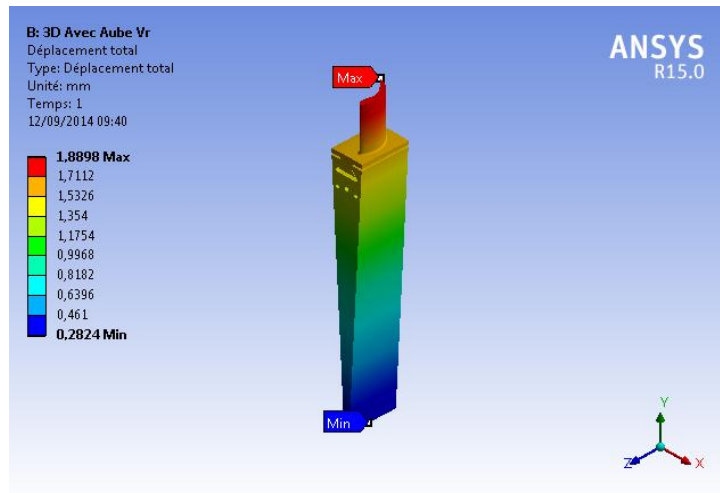


Fig.C.7 les Déplacements.

C.1.4 les Déformations

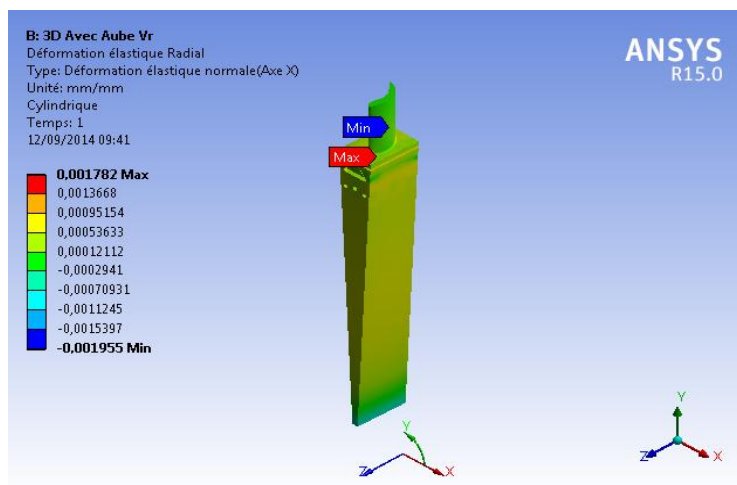


Fig.C.8 les Déformations Radiales ϵ_{rr}

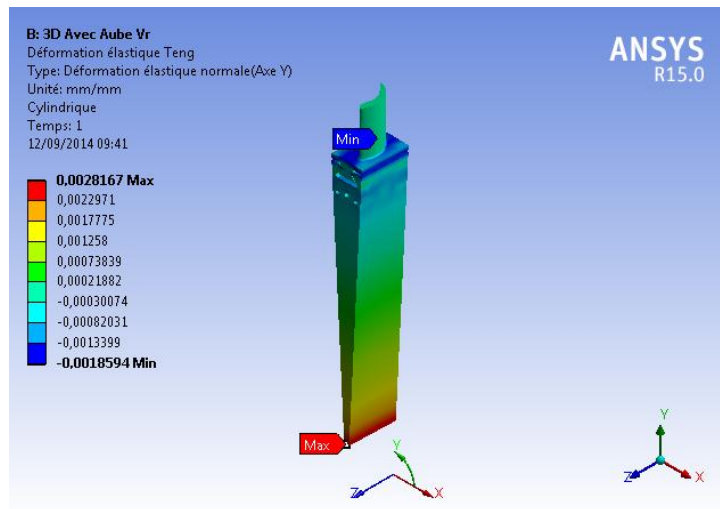


Fig.C.9 Déformations de Tangentielles $\epsilon_{r\theta}$

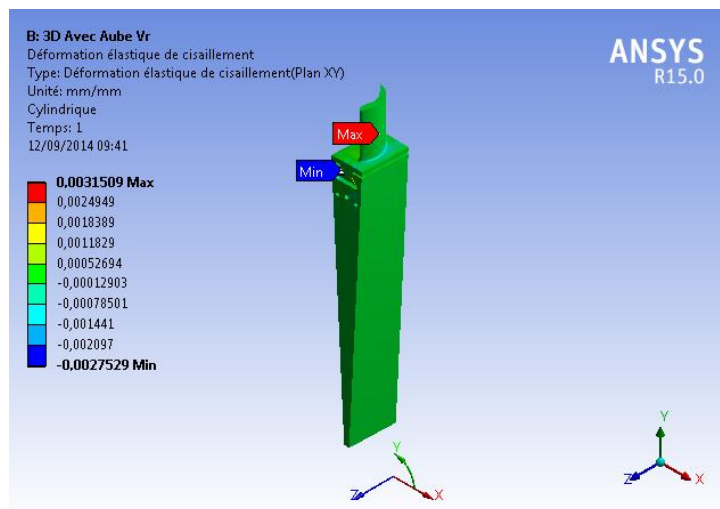


Fig.C.10 Déformations de Cisaillement $\epsilon_{r\theta}$

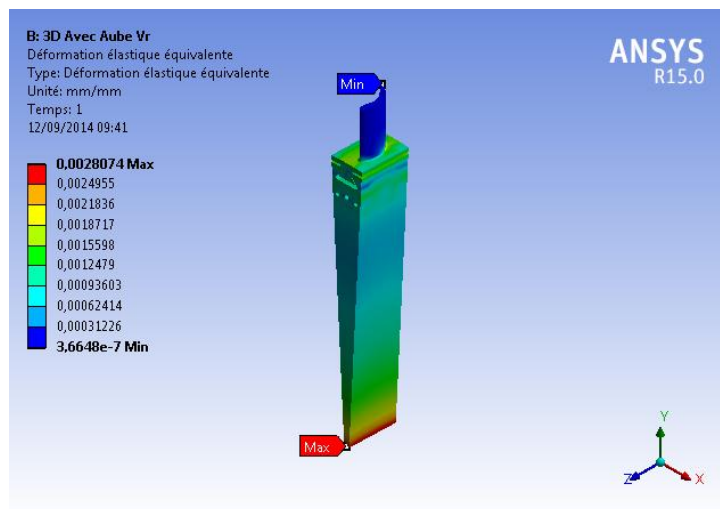


Fig.C.11 Déformations Equivalentes ϵ_e