

Ahmed Lesfari

Fonctions spéciales de la physique mathématique

Cours et exercices corrigés



Table des matières

1	Fonctions gamma et bêta d'Euler	9
1.1	Fonction gamma d'Euler	9
1.2	Fonction bêta d'Euler	19
2	Solutions holomorphes d'équations différentielles	23
2.1	Théorèmes d'existence et d'unicité	23
2.2	Équations linéaires et étude des points singuliers fuchsien	28
3	Fonctions hypergéométriques de Gauss	37
3.1	Équation hypergéométrique de Gauss	37
3.1.1	Etude au voisinage de $z = 0$	37
3.1.2	Etude au voisinage de $z = 1$	42
3.1.3	Etude au voisinage de $z = \infty$	42
3.2	Calcul des coefficients de transmission et de réflexion . .	44
4	Fonctions de Legendre	49
4.1	Équation de Legendre	49
4.2	Polynômes de Legendre	53
4.3	Équation de Legendre généralisée	62
4.4	Étude de l'équation de Laplace	64
5	Fonctions de Bessel	69
5.1	Équation de Bessel	69
5.2	Résolution de l'équation des ondes	81
5.2.1	En coordonnées cylindriques	81
5.2.2	En coordonnées sphériques	83
5.3	Équation de Helmholtz	88
5.4	Équation des télégraphistes	89
5.5	Un problème de Bernoulli	93

6	Polynômes de Laguerre	97
6.1	Définitions et généralités	97
6.2	Étude de l'équation de Schrödinger pour l'atome d'hydrogène	102
7	Polynômes d'Hermite	107
7.1	Définitions et généralités	107
7.2	Étude de l'oscillateur harmonique	111
8	Fonctions elliptiques, courbes elliptiques	113
8.1	Courbes elliptiques et hyperelliptiques	113
8.2	Fonctions elliptiques	120
8.3	Fonction $\wp$ de Weierstrass	128
9	Intégrales elliptiques, fonctions de Jacobi	141
9.1	Intégrales elliptiques	141
9.2	Fonctions de Jacobi	143
9.3	Le pendule simple	151
9.4	Équations d'Euler du corps solide	155
10	Fonctions zêta de Riemann et êta de Dirichlet	161
10.1	Fonction zêta de Riemann	161
10.2	Fonction êta de Dirichlet	170
11	Polynômes de Bernoulli	171
11.1	Définitions et généralités	171
11.2	Propriétés	173
12	Polynômes de Tchebychev	181
12.1	Polynômes de Tchebychev de première espèce	181
12.2	Polynômes de Tchebychev de seconde espèce	191
12.3	Polynômes de Tchebychev et interpolation de Lagrange	193
13	Fonctions ζ et σ de Weierstrass	199
13.1	Fonction ζ de Weierstrass	199
13.2	Fonction σ de Weierstrass	203
14	Fonctions diverses	207
14.1	Fonctions d'Airy et de Scorer	207
14.2	Polynômes de Jacobi et de Gegenbauer	211

14.3 Fonctions de Kummer, de Whittaker et de Macdonald . .	213
14.4 Fonctions d'erreur, intégrales de Fresnel	217
14.5 Exponentielle intégrale, sinus, cosinus et logarithme intégral	219
14.6 Fonctions gamma incomplètes	221
15 Fonctions thêta	223
15.1 Définitions et propriétés générales	223
15.2 Fonctions méromorphes, fonctions thêta	226
15.3 Exemples	242
16 Solutions méromorphes d'équations différentielles	253
16.1 Existence et unicité des solutions	253
16.2 Le corps solide d'Euler revisité	261
17 Espaces préhilbertiens	265
17.1 Généralités	265
17.2 Orthogonalité	275
17.3 Exercices	287
18 Appendices (rappels et compléments)	291
18.1 Séries entières, séries de Fourier	291
18.2 Fonctions holomorphes et méromorphes	304
18.3 Suites, séries de fonctions holomorphes ou méromorphes .	325
18.4 Produits infinis	333
18.5 Fonctions définies par une intégrale	338
18.6 Surfaces de Riemann compactes	346
Bibliographie	351
Index	355