

Ahmed Lesfari

Formes différentielles et analyse vectorielle

Cours et exercices corrigés



Table des matières

1	Généralités	7
1.1	Formes différentielles de degré 1	7
1.2	Formes différentielles de degré 2	8
1.3	Formes différentielles de degré k	11
2	Produit extérieur	13
2.1	Définition et propriétés	13
2.2	Exemples	14
3	Différentielle extérieure	17
3.1	Définition et propriétés	17
3.2	Exemples d'opérateurs classiques	21
4	Formes fermées, formes exactes	27
4.1	Formes différentielles fermées et formes différentielles exactes	27
4.2	Lemme ou théorème de Poincaré	30
4.3	Facteur intégrant, équation exacte et groupe de cohomologie	35
5	Intégration des formes différentielles	41
5.1	Intégration sur un simplexe ou sur un chemin	41
5.2	Intégration sur une chaîne	46
6	Transposée des formes différentielles	51
6.1	Définition et exemple	51
6.2	Propriétés	52
7	Bord d'un simplexe et d'une chaîne	59
7.1	Bord d'un simplexe	59
7.2	Bord d'une chaîne	61
7.3	Groupes d'homologie	61

8	Théorème de Stokes-Cartan	63
8.1	Formule de Stokes-Cartan	63
8.2	Cas particuliers	67
8.2.1	Formule de Green-Riemann	67
8.2.2	Formule de Stokes-Ampère	67
8.2.3	Formule de Gauss-Ostrogradski	68
9	Intégration des fonctions holomorphes	69
9.1	Fonctions holomorphes	69
9.2	Intégration des fonctions holomorphes	75
10	Formes symplectiques	93
10.1	Espaces vectoriels symplectiques	93
10.2	Formes symplectiques sur une variété différentiable	95
11	Calcul variationnel	105
11.1	Equation d'Euler-Lagrange et équations canoniques de Hamilton	105
11.2	Equation d'Hamilton-Jacobi	114
12	Formes différentielles sur les surfaces de Riemann	123
12.1	Différentielles abéliennes et relations bilinéaires de Riemann . .	124
12.2	Le théorème de Riemann-Roch et la formule de Riemann-Hurwitz	141
12.3	Le théorème d'Abel et le problème d'inversion de Jacobi	142
13	Exercices	145
13.1	Exercices résolus	145
13.2	Exercices proposés	198
14	Appendice 1 (intégrales multiples)	209
14.1	Théorème de Fubini	209
14.2	Changement de variables	218
15	Appendice 2 (variétés différentiables)	223
15.1	Définitions et propriétés	223
15.2	Sous-variétés	233
16	Appendice 3 (démonstration de quelques théorèmes)	237
16.1	Théorèmes de Riemann-Roch et de Riemann-Hurwitz	237
16.2	Théorèmes d'Abel et de Jacobi	246
	Bibliographie	259
	Index	261