

Robert Rolland

Théorie de la mesure et de l'intégration

Cours et exercices corrigés



La côte de l'ouvrage : 2-515-362

Table des matières

1	Introduction - Évolution de la notion d'intégrale	1
1.1	Origine de la théorie	1
1.2	Intégrale de Cauchy	2
1.3	Intégrale de Riemann	3
1.4	La conception de Lebesgue	3
1.5	Diverses façons de concevoir la notion d'intégrale	5
1.6	Introduction aux chapitres suivants	6
1.7	Exercices	6
1.7.1	Énoncés	6
1.7.2	Solutions	11
2	Espaces mesurables - Fonctions mesurables	27
2.1	Introduction	28
2.2	Clan unitaire	28
2.3	Tribu	30
2.4	Clan et σ -clan	31
2.5	Espaces mesurables	32
2.6	Fonctions mesurables	33
2.6.1	Définition et premiers exemples	33
2.6.2	Résultats généraux sur les fonctions mesurables	33
2.6.3	Exemples importants	35
2.7	Exercices	40
2.7.1	Énoncés	40
2.7.2	Solutions	43
3	Mesures positives - Espaces mesurés	49
3.1	Mesures positives sur un clan unitaire	49
3.2	Espaces mesurés	56
3.3	Prolongements d'une mesure positive	57
3.3.1	Prolongement à la tribu engendrée	57

3.3.2	Prolongement à la tribu complète engendrée	63
3.3.3	Synthèse sur le prolongement	66
3.4	Construction de mesures	67
3.4.1	Mesure de Borel et de Lebesgue sur $\mathbb{R}$	67
3.4.1.1	Le clan des réunions finies d'intervalles deux à deux disjoints	67
3.4.1.2	Mesure attachée à la longueur des intervalles . . .	68
3.4.1.3	Mesure de Borel et de Lebesgue sur $\mathbb{R}$	72
3.4.2	Mesure produit de mesures de Borel ou de Lebesgue	72
3.4.2.1	Le problème général du produit de deux mesures .	72
3.4.2.2	Clan des réunions finies de produits deux à deux disjoints	73
3.4.2.3	Mesure positive adaptée au problème	73
3.4.2.4	Mesure produit de mesures de Borel ou de Lebesgue	80
3.4.2.5	Généralisations	80
3.4.3	Mesure associée à une fonction de répartition	81
3.5	Exercices	82
3.5.1	Énoncés	82
3.5.2	Solutions	87
4	Intégration par rapport à une mesure positive	105
4.1	Les fonctions simples	105
4.2	Intégration des fonctions positives	109
4.3	Intégration des fonctions à valeurs dans $\overline{\mathbb{R}}$ ou dans $\mathbb{C}$	115
4.4	Intégration par rapport à la somme de deux mesures	121
4.5	Intégration par rapport à une mesure induite	122
4.6	Intégration par rapport à une mesure image	124
4.7	Intégration par rapport à une mesure produit	125
4.8	Intégration de Lebesgue sur $\mathbb{R}^n$	132
4.9	Intégration des fonctions définies sur $\mathbb{N}$	137
4.10	Intégration par partie	138
4.11	Fonctions définies par des intégrales	141
4.11.1	Exemples d'études de continuité	141
4.11.2	Exemples d'études de dérivabilité	145
4.12	Exercices	147
4.12.1	Énoncés	147
4.12.2	Solutions	151

5	Les espaces de l'intégration	173
5.1	Rappel sur les espaces de Banach et les espaces de Hilbert	173
5.1.1	Définitions	173
5.1.2	Les applications linéaires continues. Le dual d'un espace de Banach	176
5.1.3	Le théorème de Hahn-Banach	178
5.1.3.1	Les théorèmes	178
5.1.3.2	Les conséquences	180
5.1.4	Le théorème de Baire et ses conséquences	181
5.1.5	Applications à la géométrie des espaces de Banach	183
5.1.5.1	Théorème de Banach-Steinhaus	183
5.1.5.2	Théorème de Banach-Schauder	186
5.1.6	Les espaces de Hilbert	189
5.1.6.1	Produit scalaire et norme	189
5.1.6.2	Projection orthogonale et distance minimum	193
5.1.6.3	Produits d'espaces de Hilbert	196
5.1.6.4	La dualité dans les espaces de Hilbert	197
5.1.6.5	Systèmes orthonormaux	198
5.1.6.6	Bases hilbertiennes et classification des espaces de Hilbert	201
5.1.6.7	Orthonormalisation de Schmidt	203
5.2	Les espaces $L_K^p(\mu)$ pour $1 \leq p \leq +\infty$	203
5.2.1	Cas où $p = 1$. L'espace $L_K^1(\mu)$	203
5.2.2	Cas où $1 < p < +\infty$	205
5.2.2.1	Cas général	205
5.2.2.2	Le cas particulier de l'espace $L_K^2(\mu)$	208
5.2.3	Cas où $p = +\infty$. L'espace $L_K^\infty(\mu)$	208
5.3	La dualité pour les espaces $L_K^p(\mu)$	209
5.4	Exercices	210
5.4.1	Énoncés	210
5.4.2	Solutions	216
6	Introduction au langage des probabilités	235
6.1	Probabilité et variable aléatoire	235
6.2	La notion d'indépendance	238
6.3	Exercices	242
6.3.1	Énoncés	242
6.3.2	Solutions	248

7	Le point de vue des formes linéaires positives	263
7.1	Introduction	263
7.2	Formes linéaires positives et mesures régulières	267
7.3	Changement de variable	279
7.3.1	Exemple dans $\mathbb{R}$	279
7.3.2	Le cas des transformations linéaires dans $\mathbb{R}^k$	280
7.3.3	Le cas général	281
7.4	Exercices	285
7.4.1	Énoncés	285
7.4.2	Solutions	286
8	Mesures à valeurs réelles ou complexes	297
8.1	Mesures à valeurs dans $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$	297
8.1.1	Généralités	297
8.1.2	Mesures à valeurs réelles	300
8.1.3	Mesures à valeurs complexes	305
8.2	La théorie de Radon-Nikodym	308
8.3	Mesures de Radon	312
8.4	Exercices	317
8.4.1	Énoncés	317
8.4.2	Solutions	319
Annexe		
A	Notes sur l'évolution de l'analyse fonctionnelle et les espaces abstraits	329
A.1	Ce qu'est l'analyse fonctionnelle	329
A.2	Deux textes fondamentaux	331
A.3	La notion de fonction	332
A.4	la notion d'espace abstrait	332
A.5	Fréchet, Baire, Banach et les autres	333
A.6	Les espaces de Hilbert	335
A.7	Frédéric Riesz	336
A.8	Les équations fonctionnelles	337
A.9	Textes originaux	338
A.10	Références bibliographiques	341
Bibliographie		343
Index		345