

J.M. Arnaudiès P. Delezoide
H. Fraysse

**Exercices résolus
d'algèbre
du cours
de mathématiques - 1**

*Classes préparatoires
1^{er} cycle universitaire*

DUNOD

TABLE DES MATIÈRES

Introduction

CHAPITRE I	Vocabulaire de théorie des ensembles	1
§ I.1	Un peu de logique, exercices 1, 2, 7	1
§ I.2	Construction d'ensembles, exercices 2, 6	2
§ I.3	Correspondances et applications, exercices 2, 6, 8	3
§ I.4	Familles, exercice 2	4
§ I.5	Relations d'équivalence. Ensemble quotient, exercices 4, 5, 11	5
§ I.6	Relations d'ordre, exercices 2, 3, 5, 7	7
CHAPITRE II	Nombres entiers, nombres rationnels	10
§ II.1	Axiomes de Peano ; récurrence, exercices 1, 3, 7, 9	10
§ II.2	Ordre naturel dans $\mathbb{N}$, exercices 1, 3, 5	13
§ II.3	Ensembles finis, infinis, dénombrables, exercices 1, 4, 5	17
§ II.4	Lois de composition. Structure de groupe, exercices 4, 7, 9, 11	19
§ II.5	L'anneau des entiers relatifs, la structure d'anneau, exercices 5, 7, 8, 10, 13	21
§ II.6	Les nombres rationnels, la structure de corps, exercices 4, 5, 9, 13, 17	25
CHAPITRE III	Bases du calcul algébrique et combinatoire	31
§ III.3	Composé de familles à support fini, exercice 1	31
§ III.4	Dénombrement, exercices 2, 4, 5, 8, 9, 13	32
§ III.5	Formule du binôme, exercices 6, 7, 10	41
§ III.7	Notion d'idéal d'un anneau commutatif, exercices 1, 2, 3, 7, 9	44
CHAPITRE IV	Notions d'arithmétique	50
§ IV.1	Congruences dans $\mathbb{Z}$, anneaux $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$, exercices 2, 3, 9, 11, 14, 20, 21	50

§ IV.2	Arithmétique dans $\mathbb{Z}$ et $\mathbb{N}$, exercices 2, 5, 6, 11, 12, 18, 19, 24	54
§ IV.3	Éléments inversibles des anneaux $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$, exercices 7, 8	59
§ IV.4	Nombres premiers, exercices 2, 4, 8, 11, 12	60
§ IV.5	Décomposition en facteurs premiers, exercices 1, 2, 4, 8, 11, 14, 20, 21, Numération, exercices 2, 5, 7	62
CHAPITRE V	Groupes	74
§ V.1	Génération de groupes, exercices 1, 3, 5, 7, 8	74
§ V.2	Ordre d'un élément, exercices 1, 3, 4, 5, 6	80
§ V.3	Classes suivant un sous-groupe. Indice, exercices 3, 5, 6, 8, 9	87
§ V.4	Groupes de permutations, exercices 2, 3, 4, 5, 6, 9, 12, 13, 16	93
§ V.5	Cycles dans les groupes $\mathfrak{S}_E$ (E fini), exercices 1, 2, 3, 7, 10, 12	102
§ V.6	Opération d'un groupe sur un ensemble, exercices 5, 6, 11, 12	108
§ V.7	Sous-groupes distingués. Groupe quotient, exercices 1, 2, 9, 11, 12, 13, 14	115
CHAPITRE VI	Structure d'espace vectoriel et d'algèbre	125
§ VI.1	Structure d'espace vectoriel, exercices 1, 7	125
§ VI.2	Applications linéaires, exercices 1, 2, 7	127
§ VI.3	Combinaisons linéaires ; indépendance linéaire, exercices 2, 5, 7	129
§ VI.5	Le corps des nombres complexes, exercices 7, 10	132
§ VI.6	Racines carrées d'un nombre complexe, exercices 6, 9	134
§ VI.7	Nombres complexes de module 1, exercices 2, 3, 8, 9	135
§ VI.8	Arguments d'un nombre complexe, exercices 11, 12, 13, 18, 19	138
§ VI.9	Nombres complexes et géométrie, exercices 4, 5	142
§ VI.10	Nombres complexes et similitudes, exercices 1, 2	145
§ VI.11	Nombres complexes, droites et cercles, exercices 1, 2	151
CHAPITRE VII	Polynômes sur un corps commutatif	154
§ VII.1	Polynômes à une indéterminée, exercices 4, 5, 6	154
§ VII.2	L'anneau euclidien $K[X]$, exercices 1, 2, 5, 7, 10, 11	156

Table des matières		IX
§ VII.3	L'anneau factoriel $K[X]$, exercices 3, 4, 9, 10	161
§ VII.4	Fonctions polynômes, racines, exercices 2, 4, 5, 6, 13, 24	170
§ VII.5	Racines d'un polynôme. Formule de Taylor, exercices 6, 9, 10, 11, 22, 23	177
§ VII.6	Factorisation dans $\mathbb{R}[X]$, exercices 2, 3, 4, 6, 7	193
§ VII.7	Congruences dans $K[X]$. Anneaux quotients, exercices 2, 4, 6	202
CHAPITRE VIII Fractions rationnelles. Séries formelles		204
§ VIII.1	Le corps $K(X)$, exercices 1, 2, 5, 10, 12	204
§ VIII.2	Décomposition en éléments simples, exercices 1, 3, 5, 7	210
§ VIII.3	Fonctions rationnelles. Dérivation, exercices 2, 3, 6, 7, 9, 12	224
§ VIII.5	Applications des séries formelles, exercices 3, 4, 7, 10	237
CHAPITRE IX Espaces vectoriels ; dimension		248
§ IX.1	Sous-espaces supplémentaires, projecteurs, exercices 2, 3, 6, 8	248
§ IX.2	Produits et sommes d'espaces vectoriels, exercices 2, 4, 6, 7, 10	251
§ IX.3	Espaces de dimension finie, exercices 3, 6, 9	255
§ IX.4	Propriétés des espaces de dimension finie, exercices 1, 2, 4, 8, 13, 14	258
§ IX.5	Hyperplans, exercice 3	264
§ IX.6	Endomorphismes. Groupe linéaire, exercices 1, 2, 3, 6, 10	266
§ IX.7	Éléments algébriques d'une extension d'un corps, exercices 6, 7, 13	270
CHAPITRE X Fonctions polynomiales sur K^n ; équations algébriques		283
§ X.1	Polynômes à n lettres, exercices 1, 2, 5, 12	283
§ X.3	Fonctions symétriques, exercices 7, 1, 3, 9	287
§ X.4	Formules de Newton, exercices 1, 4, 5	300
§ X.5	Équations algébriques. Équations de degré 3, exercices 1, 6, 8, 14, 19	306
§ X.6	Équations de degré 4, équations particulières, exercices 1, 3, 5, 7, 12, 14	314

CHAPITRE XI	Matrices	323
§ XI.1	Matrices de type (m, n) , exercice 3	323
§ XI.2	Matrices carrées, exercices 1, 2, 4, 8, 13	324
§ XI.3	Matrices et applications linéaires, exercices 1, 3, 5, 8	333
§ XI.4	Rang d'une matrice, exercices 2, 5, 6, 7	339
§ XI.5	Opérations élémentaires, exercices 3, 4	343
§ XI.6	Similitude d'endomorphismes ou de matrices, exercices 1, 6, 7, 9	345
CHAPITRE XII	Dualité. Espaces vectoriels quotients	352
§ XII.1	Dual ; forme bilinéaire canonique, exercices 2, 3, 6	352
§ XII.2	Dualité en dimension finie, exercices 2, 3, 4, 5, 7, 8	355
§ XII.3	Quotients d'espaces vectoriels, exercices 2, 8, 11, 16, 17	362
§ XII.4	Quotients, produits et sommes directes, exercice 2	369
CHAPITRE XIII	Déterminants	371
§ XIII.1	Applications multilinéaires, exercices 5, 6	371
§ XIII.2	Formes n -linéaires alternées sur E de dimension n , exercice 1	379
§ XIII.3	Déterminant de n vecteurs dans une base, exercices 1, 3	380
§ XIII.4	Déterminant d'une matrice carrée, exercices 1, 4	382
§ XIII.5	Exemples de déterminants, exercices 5, 6, 7, 9, 17, 20, 23, 25, 26	385
CHAPITRE XIV	Equations linéaires sur un corps	411
§ XIV.1	Langage de la géométrie affine, exercice 3	411
§ XIV.2	Systèmes de Cramer, exercices 4, 5, 10	411
§ XIV.3	Equations linéaires, cas général, exercices 7, 10, 13, 14, 16	421
CHAPITRE XV	Réduction d'endomorphismes	432
§ XV.1	Valeurs propres et polynôme caractéristique, exercices 1, 2, 7, 9	432
§ XV.2	Trigonalisation, exercices 2, 8, 9, 11	439
§ XV.3	Sous-espaces propres, exercices 1, 2, 3, 4, 5, 11, 13	445
§ XV.4	Polynômes d'endomorphismes ou de matrices, exercices 3, 4, 6, 8, 9	457

Table des matières **XI**

§ XV.5	Sous-espaces caractéristiques, exercices 1, 2, 3, 4, 6, 8, 9, 12	467
§ XV.6	Suites définies par une relation de récurrence, exercices 2, 9	482

CHAPITRE XVI Complément : réduction de Jordan **486**

§ XVI.1	Etude des endomorphismes nilpotents, exercices 2, 6	486
§ XVI.2	Réduction de Jordan quand $\chi_u(X)$ est dissocié, exercices 1, 2, 3	487
§ XVI.3	Sous-espaces monogènes, exercice 1	491

Bibliographie	493
---------------	-----

**J.M. Arnaudiès P. Delezoide
H. Fraysse**

Exercices résolus d'algèbre du cours de mathématiques - 1

Ce recueil contient 355 exercices résolus choisis parmi les énoncés les plus représentatifs du cours d'algèbre.

Très détaillées et de niveau varié, les solutions ont été rédigées avec le souci constant d'approfondir les notions abordées et d'élargir la portée des exercices.

Dans la lignée du cours avec lequel il forme un ensemble sans égal (J.M. Arnaudiès et H. Fraysse, *cours de mathématiques*, tome 1, *algèbre*), ce recueil est un outil de travail complet et vivant qui ouvre la voie aux résultats concrets et pratiques.

L'ensemble comportera 4 volumes :

- *Exercices résolus d'analyse*, 1993 ;
- *Exercices résolus d'algèbre*, 1994 ;
- *Exercices résolus d'analyse* (compléments), 1995 ;
- *Exercices résolus d'algèbre bilinéaire et géométrie*, 1996, à paraître.



Code 041470
ISBN 2 10 001470 6

