

7434

934



934

Table des matières

CHAPITRE 1

Pré-semi-anneaux, semi-anneaux et dioïdes

1. Quelques exemples fondateurs	5
2. Semi-groupes et monoïdes	7
2.1. Définitions et exemples	8
2.2. Propriétés combinatoires des semi-groupes finis	11
2.3. Monoïdes réguliers et groupes	12
3. Monoïdes ordonnés	14
3.1. Ensembles ordonnés	14
3.2. Monoïdes ordonnés – Exemples	16
3.3. Préordre canonique dans un monoïde commutatif	17
3.4. Monoïdes canoniquement ordonnés	18
3.5. Demi-groupes	22
3.6. Monoïdes idempotents et demi-treillis	23
3.7. Classification des monoïdes	24
4. Pré-semi-anneaux et pré-dioïdes	26
4.1. Pré-semi-anneaux à droite, à gauche	26
4.2. Pré-semi-anneaux	27
4.3. Pré-dioïdes	28
5. Semi-anneaux	29
5.1. Définition et exemples	29
5.2. Anneaux et corps	30
5.3. La propriété d'absorption dans les pré-semi-anneaux	31

5.4. Produit de semi-anneaux	32
5.5. Classification des pré-semi-anneaux et des semi-anneaux	33
Dioïdes	34
6.1. Définition et exemples	34
6.2. Dioïde des endomorphismes d'un monoïde commutatif canoniquement ordonné	38
6.3. Dioïdes symétrisables	40
6.4. Dioïdes idempotents et dioïdes sélectifs	41
6.5. Dioïdes double-idempotents et treillis distributifs. Dioïdes double-sélectifs	41
6.6. Dioïdes idempotents-réguliers. Dioïdes sélectifs-réguliers	44
6.7. Dioïdes idempotents-inversibles. Dioïdes sélectifs-inversibles....	45
6.8. Produit de dioïdes.....	46
6.9. Dioïde canoniquement associé à un semi-anneau.....	47
6.10. Classification des dioïdes.....	48
xercices	50

CHAPITRE 2

Propriétés combinatoires des (pré)-semi-anneaux

Introduction	61
Polynômes et séries formelles à coefficients dans un (pré-) semi-anneau	62
2.1. Polynômes.....	62
2.2. Séries formelles.....	64
Matrices carrées à coefficients dans un (pré)-semi-anneau	65
Bidéterminant d'une matrice carrée. Bipolynôme caractéristique .	66
4.1. Rappels sur les permutations.....	66
4.2. Bidéterminant d'une matrice.....	69
4.3. Bipolynôme caractéristique.....	70
Bidéterminant d'un produit de matrices : une propriété combinatoire des pré-semi-anneaux	72
Le théorème de Cayley-Hamilton dans les pré-semi-anneaux	76
Semi-anneaux, bidéterminants et arborescences	80
7.1. Une extension aux semi-anneaux du théorème de Borchardt et Tutte.....	80
7.2. Démonstration du théorème 3	81
7.3. La version classique du théorème comme cas particulier.....	85
7.4. Une version plus générale du théorème	86
Une généralisation de l'identité de Mac Mahon aux pré-semi-anneaux commutatifs	88

8.1. L'identité de Mac Mahon généralisée.....	88
8.2. L'identité de Mac Mahon classique comme cas particulier.....	91
Exercices	92

CHAPITRE 3

Topologies des ensembles ordonnés. Dioïdes topologiques

1. Introduction	95
2. La Sup-Topologie et la Inf-Topologie dans des ensembles partiellement ordonnés	96
2.1. La Sup-Topologie	96
2.2. La Inf-Topologie	97
3. Convergence dans la Sup-Topologie et borne supérieure	98
3.1. Définition (sup-convergence)	98
3.2. Notions de limite sup et de limite inf	100
4. Continuité des fonctions. Semi-continuité	101
5. Le théorème du point fixe dans un ensemble ordonné	102
6. Dioïdes topologiques	103
6.1. Définition (dioïde topologique)	104
6.2. Équations linéaires de type point fixe dans un dioïde topologique. Quasi-inverse	105
7. Les éléments p-stables d'un dioïde	109
7.1. Exemples	110
7.2. Résolution d'équations linéaires	112
7.3. Résolution d'équations « non linéaires »	115
8. Résiduation et solutions généralisées	120
Exercices	126

CHAPITRE 4

Résolution de systèmes linéaires dans les dioïdes

1. Introduction	127
2. Problème du plus court chemin et résolution de système linéaire dans un dioïde	128
2.1. Le système linéaire associé au plus court chemin.....	129
2.2. Algorithme de Bellman. Lien avec la méthode de Jacobi.....	130
2.3. La notion de quasi-inverse d'une matrice	131
2.4. Minimalité de la solution de Bellman-Jacobi	131
3. Quasi-inverse d'une matrice à éléments dans un semi-anneau. Existence et propriétés	132

3.1. Définitions.....	132
3.2. Graphe associé à une matrice. Matrice d'adjacence généralisée et propriétés	134
3.3. Conditions d'existence de la quasi-inverse A^*	137
3.4. Quasi-inverse et solutions de systèmes linéaires. Minimalité pour les dioïdes.....	139
Algorithmes itératifs pour la résolution de systèmes linéaires	141
4.1. Algorithme de Jacobi généralisé	141
4.2. Algorithme de Gauss-Seidel généralisé	143
4.3. Algorithme de Dijkstra généralisé (« algorithme glouton ») dans certains dioïdes sélectifs	146
4.4. Extension des algorithmes itératifs aux algèbres d'endomorphismes	149
Algorithmes directs : méthode de Gauss-Jordan généralisée et variantes	158
5.1. Méthode de Gauss-Jordan généralisée : principe.....	158
5.2. Méthode de Gauss-Jordan généralisée : algorithmes	164
5.3. Méthode « escalier » généralisée	165
Exemples d'application : problèmes de cheminement dans les graphes	169
6.1. Problèmes d'existence et de connexité	171
6.2. Problèmes d'énumération de chemins	171
6.3. Chemin de capacité (inf-section) maximum. Arbre minimum	172
6.4. Chemin à nombre d'arcs minimum.....	172
6.5. Plus court chemin.....	173
6.6. Chemin de fiabilité maximum.....	173
6.7. Les problèmes de cheminement multicritères.....	173
6.8. Problème du k-ième meilleur chemin	174
6.9. Fiabilité d'un réseau.....	176
6.10. Les chemins η -optimaux.....	176
6.11. L'effet multiplicateur en économie	178
6.12. Chaînes de Markov et théorie du potentiel	178
6.13. Graphes flous et relations floues	179
6.14. Structure algébrique des classifications hiérarchiques.....	179
Exercices	182

CHAPITRE 5

Dépendance et indépendance linéaires dans les semi-modules et les moduloïdes

Introduction	187
Semi-modules et moduloïdes	187

2.1. Définitions.....	188
2.2. Morphismes de semi-modules ou de moduloïdes. Endomorphismes.....	190
2.3. Sous-semi-module. Semi-module quotient.....	190
2.4. Sous-semi-module engendré. Famille génératrice d'un (sous)semi-module.....	191
2.5. Notion de dépendance et d'indépendance linéaires dans les semi-modules	192
3. Bidéterminant et indépendance linéaire	196
3.1. Permanent, bidéterminant et bi-applications linéaires alternées ...	197
3.2. Bidéterminant de matrices à colonnes (lignes) linéairement dépendantes. Résultats généraux.....	200
3.3. Bidéterminant de matrices à colonnes (lignes) linéairement dépendantes : cas des dioïdes sélectifs.....	203
3.4. Bidéterminant et indépendance linéaire dans les dioïdes sélectifs-inversibles.....	208
3.5. Bidéterminant et indépendance linéaire dans les dioïdes MAX-MIN.....	217
Exercices.....	223

CHAPITRE 6

Valeurs propres et vecteurs propres d'endomorphismes

1. Introduction	225
2. Existence de valeurs propres et de vecteurs propres : résultats généraux	226
3. Valeurs propres et vecteurs propres dans les dioïdes idempotents. Caractérisation des moduloïdes propres	231
4. Valeurs propres et vecteurs propres dans les dioïdes à structure de groupes multiplicatifs	239
4.1. Valeurs propres et vecteurs propres : propriétés générales.....	239
4.2. Le théorème de Perron-Frobenius pour des dioïdes sélectifs-inversibles.....	246
5. Valeurs propres, bidéterminant et bipolynôme caractéristique	251
6. Applications en Analyse de Données	253
6.1. Applications en classification hiérarchique	254
6.2. Applications en Analyse des Préférences : quelques réponses au paradoxe de Condorcet.....	259
7. Applications en automatique : théorie des systèmes dynamiques linéaires dans le dioïde $(\mathbb{R} \cup \{-\infty\}, \text{Max}, +)$	263
7.1. Systèmes linéaires en automatique classique.....	263

Voici l'ouvrage de référence sur les dioïdes et les semi-anneaux. Unique en son genre, il illustre la richesse de ces structures algébriques par des dizaines d'exemples liés aux disciplines scientifiques les plus diverses. Il met en évidence leurs liens profonds avec les graphes et propose une synthèse de leurs nombreuses applications, dans les sciences fondamentales et les sciences de l'ingénieur :

- résolution d'une grande variété de problèmes de recherche de chemins optimaux dans les graphes ;
- extension des algorithmes classiques de plus courts chemins à des problèmes de cheminement non classiques (plus courts chemins avec contraintes de temps, avec longueurs des arcs dépendant du temps, etc.) ;
- analyse des données, classification hiérarchique et analyse des préférences ;
- modèles algébriques du flou et de l'incertain ;
- automatique des systèmes à événements discrets ;
- résolution d'équations non-linéaires de la physique telles que : Hamilton-Jacobi, équation de Burgers ;
- développement d'analyses « linéaires » pour des problèmes non-linéaires (analyse MIN-PLUS, analyse MIN-MAX).

De par la diversité des modèles et des méthodes de résolution étudiés, *Graphes, dioïdes et semi-anneaux* propose des outils nouveaux applicables à tous les domaines scientifiques. Il est ainsi appelé à devenir un classique.

L'ouvrage s'adresse aux élèves des écoles d'ingénieurs, des 2^e et 3^e cycles universitaires en informatique et recherche opérationnelle, mathématiques appliquées, automatique ; aux professeurs d'informatique, de mathématiques et de physique (niveau maîtrise et DEA) ; aux ingénieurs informaticiens et automaticiens ; et, pour les nombreux exemples et exercices proposés, aux enseignants en mathématiques des lycées et premiers cycles universitaires.

Michel Gondran est conseiller scientifique à Électricité de France, division R&D. Il est lauréat du prix Monpetit de L'Académie des sciences.

Michel Minoux est professeur à l'université Pierre-et-Marie-Curie (Paris VI) où il est responsable du DEA « informatique et recherche opérationnelle ».

2-7430-0489-4



9782743004897