

ALAIN PLANCHE

MANUEL

Mathématiques pour économistes

Analyse



2^e édition

DUNOD

Table des matières

1. SUITES RÉELLES, NOTION DE LIMITE

I. Étude générale	2
1. <i>Suites et séries</i>	2
1) Exemple introductif	2
2) Définitions	3
3) Quelques précisions	4
4) Opérations sur les suites	6
5) Suites monotones, suites bornées	7
2. <i>Suites convergentes</i>	9
1) Introduction : Achille rattrape-t-il la tortue ?	9
2) Définitions	10
3) Condition suffisante de convergence	11
4) Opérations sur les suites convergentes	12
5) Comparaison des suites convergentes	13
6) Suites adjacentes	14
3. <i>Extension aux limites infinies</i>	15
1) Opérations sur les limites	16
2) Limite de l'inverse d'une suite	17
I. Suites arithmétiques et géométriques, application au calcul financier	18
1. <i>Suites arithmétiques</i>	18
1) Définition	18
2) Comportement d'une suite arithmétique	19
3) Série arithmétique	19
4) Comportement d'une série arithmétique	20
5) Autres résultats à connaître	20

2. Suites géométriques	21
1) Définition	21
2) Comportement d'une suite géométrique	21
3) Série géométrique	22
4) Comportement d'une série géométrique	22
5) Suites se ramenant à une suite géométrique	23
3. Application au calcul financier	24
1) Les principes de base	24
2) Formation d'un capital au moyen d'annuités	24
3) Remboursement d'un emprunt au moyen d'annuités	25
III. Convergence des séries	26
1. Séries à termes positifs	26
1) Définition et premières propriétés	26
2) Comparaison de deux séries à termes positifs	26
2. Critères de convergence des séries à termes positifs	28
1) Comparaison avec une série géométrique	28
2) Comparaison avec une série de Riemann	28
3) Exemples	29
3. Autres séries	31
1) Séries absolument convergentes	31
2) Séries alternées	32

2. FONCTIONS RÉELLES D'UNE VARIABLE RÉELLE, LIMITES ET CONTINUITÉ

I. Définitions et généralités	34
1. Fonctions réelles d'une variable réelle	34
1) Exemple introductif	34
2) Définition	35
3) Graphe et représentation graphique	36
4) Parité, imparité, périodicité	36
2. Opérations sur les fonctions	37
1) Opérations algébriques	37
2) Inverse d'une fonction	38
3) Composition des fonctions	38
3. Fonctions et relation d'ordre sur $\mathbb{R}$	38
1) Fonctions bornées	38
2) Extremums d'une fonction	39
3) Fonctions monotones	40
4) Comparaison de deux fonctions	40

II. Limites d'une fonction	41
1. Définitions	41
1) Image d'une suite par une fonction	41
2) Notion de point adhérent	41
3) Limite d'une fonction en un point	42
4) Limite à gauche, limite à droite	43
5) Limites à l'infini	43
2. Détermination des limites	44
1) Les limites à connaître	44
2) Opérations sur les limites	45
3) Limite d'une fonction composée	46
4) Passage des inégalités à la limite	46
3. Branches infinies d'une courbe	47
1) Asymptotes parallèles aux axes	47
2) Autres asymptotes	48
3) Position de la courbe par rapport à une asymptote	49
III. Fonctions continues	49
1. Définitions	49
1) Continuité en un point	49
2) Continuité sur un intervalle	50
3) Prolongement par continuité	50
2. Opérations sur les fonctions continues	51
1) Opérations algébriques	51
2) Fonctions composées	51
3) Conséquences : continuité des fonctions usuelles	51
3. Propriétés des fonctions continues sur un intervalle	52
1) Théorème des valeurs intermédiaires	52
2) Maximum et minimum sur un intervalle compact	52
3) Fonction réciproque d'une fonction continue strictement monotone	53
4. Théorèmes du point fixe	55
1) Suite définie par $u_{n+1} = f(u_n)$	55
2) Point fixe d'une fonction continue sur un intervalle compact	56
3) Point fixe d'une fonction contractante sur un intervalle fermé	56
4) Exemple d'application au calcul des racines d'un polynôme	57

3. FONCTIONS DÉRIVABLES

I. Dérivée d'une fonction	59
1. Nombre dérivé et fonction dérivée	59
1) Taux d'accroissement	60
2) Nombre dérivé	60
3) Dérivabilité et continuité	61

4) Fonction dérivable sur un intervalle	63
5) Dérivées successives	64
2. <i>Opérations sur les fonctions dérivables</i>	64
1) Opérations algébriques	64
2) Composition des fonctions dérivables	66
3) Dérivée d'une fonction réciproque	66
4) Dérivées des fonctions d'usage courant	67
II. Étude des fonctions dérivables	70
1. <i>Propriétés des fonctions dérivables</i>	70
1) Extremum sur un intervalle ouvert	70
2) Théorème de Rolle	71
3) Théorème des accroissements finis	71
2. <i>Application à l'étude des fonctions</i>	72
1) Variations d'une fonction dérivable	72
2) Plan d'étude d'une fonction dérivable	74
3) Tangente en un point de la courbe représentative	74
4) Point fixe d'une fonction continûment dérivable	74
3. <i>Utilisation des dérivées d'ordre supérieur à 1</i>	76
1) Formules de Taylor et Mac Laurin	76
2) Application à la recherche des extremums d'une fonction sur un intervalle ouvert	77
3) Position locale d'une courbe par rapport à une tangente	78
4) Fonctions convexes, fonctions concaves	78
III. Primitives	80
1. <i>Définitions et généralités</i>	80
1) Primitive d'une fonction	80
2) Ensemble des primitives d'une fonction sur un intervalle	80
3) Existence des primitives d'une fonction	81
2. <i>Calcul des primitives d'une fonction</i>	81
1) Quelques primitives à connaître	81
2) Opérations sur les primitives	82
3) Reconnaissance de la dérivée d'une fonction composée	83
4) Recherche de primitives, notion d'équation différentielle	83
4. APPROXIMATION LOCALE DES FONCTIONS	
I. Notion d'approximation	86
1. <i>Rappels sur l'approximation des nombres réels</i>	86
1) Valeur approchée et erreur	86
2) Valeur approchée et encadrement	86
3) Développement décimal et approximation décimale	87
4) Erreur relative, ordre de grandeur	88

2. <i>Approximation locale des fonctions et infiniment petits</i>	89
1) Notion d'approximation locale	89
2) Infiniment petits	90
3) Comparaison des infiniment petits	91
4) Ordre d'un infiniment petit	93
5) Approximation locale d'ordre n d'une fonction	93
II. Différentielle d'une fonction	94
1. <i>Fonction différentiable en un point</i>	94
1) Définition	94
2) Différentiabilité et dérivabilité	96
2. <i>Différentielle d'une fonction en un point. Calcul différentiel</i>	97
1) Notation différentielle de la dérivée et calcul infinitésimal	97
2) La différentielle : une fonction	98
3) Calcul différentiel	100
III. Développements limités	101
1. <i>Définitions et exemples</i>	101
1) Développement limité d'ordre n au voisinage de 0	101
2) Développement limité d'ordre n au voisinage de a	102
3) Exemples et remarques	102
2. <i>Développements limités des fonctions indéfiniment dérivables</i>	103
1) Utilisation de la formule de Taylor-Mac Laurin	103
2) Développements limités usuels au voisinage de 0	104
3. <i>Calcul pratique de développements limités et utilisation</i>	105
1) Opérations algébriques sur les développements limités	105
2) Développement limité d'une fonction composée	107
3) Utilisation des développements limités pour le calcul des limites	108
IV. Généralisation : comparaison locale des fonctions	109
1. <i>Fonctions équivalentes, fonction négligeable devant une autre fonction</i>	109
1) Exemple introductif	109
2) Définitions	110
3) Exemples	110
2. <i>Utilisation pour le calcul des limites</i>	111
1) Règles d'utilisation	111
2) Exemples	112

5. CALCUL INTÉGRAL

I. Présentation de la notion d'intégrale à partir d'exemples	116
1. <i>Intégrale d'une fonction en escalier</i>	116
1) Fonction en escalier	116

2) Intégrale d'une fonction en escalier	116
3) Interprétation graphique	117
4) Changement de variable	119
5) Propriétés de l'intégrale	120
2. <i>Fonctions intégrables au sens de Riemann</i>	121
1) Extension de la notion d'intégrale	121
2) Propriétés de l'intégrale	124
3) Les grandes catégories de fonctions intégrables	125
4) Valeur moyenne d'une fonction sur un intervalle	126
II. Calcul de l'intégrale d'une fonction continue	130
1. <i>Principe du calcul</i>	130
1) Primitive définie par une intégrale	130
2) Conséquences	131
3) Application au calcul intégral	131
2. <i>Pratique de l'intégration</i>	132
1) Intégration par changement de variable	132
2) Intégration par parties	134
III. Intégrales généralisées (ou impropres)	136
1. <i>Intégrale sur un intervalle de type $[a, b[$ (ou $]a, b]$)</i>	136
1) Définition	136
2) Exemples : intégrales de Riemann en 0	137
2. <i>Intégrale sur un intervalle de type $[a, +\infty[$ (ou $]-\infty, a]$)</i>	138
1) Définition	138
2) Exemples : intégrales de Riemann en $+\infty$	138
3. <i>Intégrale sur un intervalle ouvert</i>	139
1) Définition	139
2) Exemple	140

6. FONCTIONS LOGARITHMES ET EXPONENTIELLES

I. Fonctions logarithme et exponentielle de base e	142
1. <i>Définitions et étude</i>	142
1) Introduction	142
2) La fonction logarithme népérien ($\ln$)	143
3) Étude de la fonction logarithme népérien	144
4) Fonction exponentielle	146
2. <i>Exemples de calcul intégral</i>	148
1) Reconnaissance de la dérivée d'une fonction composée	148
2) Utilisation de l'intégration par parties	149
3) Équations différentielles linéaires d'ordre 1	150

<i>Quelques problèmes d'approximation</i>	152
1) Deux limites fondamentales	152
2) Développements limités des fonctions exponentielle et logarithme népérien	153
3) Valeurs approchées de e	154
I. Autres fonctions logarithmes et exponentielles, fonction puissance réelle	156
1. <i>Présentation générale</i>	156
1) Fonction logarithme de base a ($a > 0, a \neq 1$)	156
2) Fonction exponentielle de base $a > 0$	157
3) Fonction puissance	158
4) Comparaison de ces fonctions	159
2. <i>Dérivée logarithmique, croissance, élasticité</i>	160
1) Taux d'accroissement relatif et dérivée logarithmique	160
2) Croissance exponentielle	161
3) Caractérisation d'une croissance exponentielle	162
4) Élasticités	165
III. Complément de calcul intégral	169
1. <i>Intégration des fonctions rationnelles</i>	169
1) Le principe	169
2) Exemples de décomposition	170
3) Intégration des fractions élémentaires	172
2. <i>Intégrales et séries de Riemann</i>	174
1) Intégrales de Riemann	174
2) Comparaison d'une série et d'une intégrale : l'exemple de la série harmonique	175
3) Séries de Riemann	176
3. <i>Actualisation en temps continu</i>	177
1) Taux d'actualisation, taux d'actualisation instantané	177
2) Actualisation d'un flux	177
3) L'horizon économique	178

7. PRATIQUE DES FONCTIONS DE DEUX VARIABLES RÉELLES

I. Fonctions réelles de deux variables réelles	180
1. <i>Définitions et généralités</i>	180
1) Exemple introductif	180
2) Représentation graphique	181
3) Premiers éléments de topologie de $\mathbb{R}^2$	183
4) Limites et continuité	184
5) Fonctions implicites	186

2. Dérivées partielles	187
1) Définition	187
2) Dérivées des fonctions composées	189
3) Théorème des fonctions implicites	192
4) Vecteur gradient	193
5) Élasticités	195
3. Fonctions homogènes	196
1) Définition	196
2) Homogénéité des dérivées partielles	196
3) Théorème d'Euler	197
II. Utilisation des dérivées partielles	198
1. Courbe enveloppe d'une famille de courbes	198
1) Présentation	198
2) Coût moyen de longue période	198
3) Recherche d'une courbe enveloppe	199
4) Un cas particulier intéressant	201
2. Intégrales dépendant d'un paramètre	202
1) Un cas élémentaire	202
2) Le paramètre t apparaît seulement dans l'expression de la fonction	202
3) Le cas général	203
3. Extremums libres et liés	204
1) Extremums et extremums locaux	204
2) Caractérisation d'un extremum sur un ensemble ouvert (extremum libre)	204
3) Extremums liés	206
4) Allocation optimale des ressources et élasticités	209
III. Intégrales doubles	210
1. Calcul d'une intégrale double	211
1) Exemple introductif	211
2) Principaux résultats	211
3) Un exemple	213
2. Changement de variables	214
1) Jacobien d'un changement de variables	214
2) Changement de variables dans une intégrale double	215
3) Exemples	216

8. FONCTIONS DE DEUX OU PLUSIEURS VARIABLES, OPTIMISATION

I. Fonctions réelles de n variables réelles	220
1. Premières définitions	220
1) Topologie de $\mathbb{R}^n$	220

2) Fonctions continues de n variables réelles	221
3) Extremums, extremums locaux	222
2. <i>Dérivabilité, différentiabilité</i>	223
1) Dérivée suivant une direction, dérivées partielles	223
2) Différentielle d'une fonction	224
3) Notation différentielle	225
4) Calcul différentiel	226
5) Vecteur gradient	227
6) Fonctions continûment différentiables	228
3. <i>Étude locale des fonctions de classe C^2</i>	228
1) Définition	228
2) Formule de Taylor, développement limité d'ordre 2	231
3) Étude pratique d'une forme quadratique	232
II. Problèmes d'optimisation, introduction à la programmation mathématique	235
1. <i>Extremums libres et liés</i>	235
1) Extremums libres	235
2) Extremums liés	237
3) Remarques pratiques	240
2. <i>Extremums sous contraintes</i>	242
1) Contraintes et liaisons	242
2) Présentation du problème	242
3) Recherche d'un extremum situé sur une et une seule arête	242
4) Étude des sommets	243
5) Conditions de Kuhn et Tucker	246
3. <i>Rôle de la convexité</i>	248
1) Définitions	248
2) Propriétés des fonctions convexes et des fonctions concaves	249
3) Maximum d'une fonction concave, minimum d'une fonction convexe	250
4. <i>Programmation linéaire, interprétation des multiplicateurs</i>	252
1) Présentation	252
2) Généralisons un peu	253
3) Interprétation des multiplicateurs	253
Bibliographie	255
Index	257

ÉCO SUP

Alain Planche

MATHÉMATIQUES POUR ÉCONOMISTES

Analyse

Consacré à l'analyse, ce second volume des *Mathématiques pour économistes* forme avec l'ouvrage d'algèbre un manuel de mathématiques spécialement conçu pour les étudiants en sciences économiques et gestion.

Cette nouvelle édition entièrement revue et corrigée propose une étude approfondie des suites et fonctions, du calcul différentiel et intégral, des fonctions de plusieurs variables, des problèmes d'optimisation.

Il s'attache plus particulièrement aux aspects mathématiques des problèmes rencontrés en économie et en gestion :

- calcul financier et actualisation ;
- modèles de croissance ;
- utilisation des élasticités ;
- recherche de courbes enveloppes.



2^e édition

MANUEL

ALAIN PLANCHE
Professeur agrégé
de mathématiques
à l'université
Montesquieu
(Bordeaux IV).

- DEUG Économie et gestion, AES, MASS
- Préparations aux concours des grandes écoles commerciales, ENS, ENSAE



9 782100 044092

ISBN 2 10 004409 5
Code 044409

