

**J. M. Arnaudiès
H. Fraysse**

Cours de mathématiques - 1

Algèbre

*Classes préparatoires
1^{er} cycle universitaire*

DUNOD

TABLE DES MATIÈRES

CHAPITRE I. Vocabulaire de théorie des ensembles	1
§ 1 Un peu de logique	1
§ 2 Construction d'ensembles	7
§ 3 Correspondances et applications	14
§ 4 Familles	22
§ 5 Relations d'équivalence. Ensemble quotient	28
§ 6 Relations d'ordre	33
CHAPITRE II. Nombres entiers. Nombres rationnels	41
§ 1 Axiomes de Peano ; Récurrence	41
§ 2 Ordre naturel dans $\mathbb{N}$	49
§ 3 Ensembles finis, Ensembles infinis ; Ensembles dénombrables .	54
§ 4 Lois de composition. Structure de groupe	62
§ 5 L'anneau des entiers relatifs, Structure d'anneau	70
§ 6 Les nombres rationnels, Structure de corps	78
CHAPITRE III. Bases du calcul algébrique et combinatoire	86
§ 1 Itération d'une loi de composition	86
§ 2 Calcul dans un anneau	91
§ 3 Composé de familles à support fini. Numération	93
§ 4 Dénombrement	95
§ 5 Formule du binôme	107
§ 6 Sous-groupes additifs de $\mathbb{Z}$. Application aux groupes	111
§ 7 Notion d'idéal d'un anneau commutatif	113
CHAPITRE IV. Notions d'arithmétique	119
§ 1 Congruences dans $\mathbb{Z}$, Anneaux $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$	119
§ 2 Arithmétique dans $\mathbb{Z}$ et $\mathbb{N}$	126
§ 3 Eléments inversibles des anneaux $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$	135
§ 4 Nombres premiers	139
§ 5 Décomposition en facteurs premiers	145

CHAPITRE V. Groupes	153
§ 1 Génération de groupes	153
§ 2 Ordre d'un élément	159
§ 3 Classes suivant un sous-groupe. Indice	162
§ 4 Groupes de permutations	168
§ 5 Cycles dans les groupes $\mathfrak{S}_E$ (E fini)	176
§ 6 Opération d'un groupe sur un ensemble	184
§ 7 Sous-groupes distingués. Groupe quotient	192
CHAPITRE VI. Structure d'espace vectoriel et d'algèbre ; nombres complexes	202
§ 1 Structure d'espace vectoriel	202
§ 2 Applications linéaires	206
§ 3 Combinaisons linéaires ; indépendance linéaire ; bases	211
§ 4 Structure d'algèbre sur un corps commutatif	215
§ 5 Le corps des nombres complexes	220
§ 6 Racines carrées d'un nombre complexe	224
§ 7 Nombres complexes de module 1	226
§ 8 Arguments d'un nombre complexe ; racines n -ièmes	232
§ 9 Nombres complexes et géométrie	239
§ 10 Nombres complexes et similitudes	245
§ 11 Nombres complexes, droites et cercles	252
CHAPITRE VII. Polynômes sur un corps commutatif	256
§ 1 Polynômes à une indéterminée	256
§ 2 L'anneau euclidien $K[X]$	261
§ 3 L'anneau factoriel $K[X]$	271
§ 4 Fonctions polynômes, racines	278
§ 5 Racines d'un polynôme. Formule de Taylor	291
§ 6 Factorisation dans $\mathbb{R}[X]$	303
§ 7 Congruences dans $K[X]$. Anneaux quotients	306
CHAPITRE VIII. Fractions rationnelles. Notions sur les séries formelles ..	315
§ 1 Le corps $K(X)$	315
§ 2 Décomposition en éléments simples	322
§ 3 Fonctions rationnelles. Dérivation	334
§ 4 Notions sur les séries formelles à une indéterminée	343
§ 5 Applications des séries formelles	351
CHAPITRE IX. Espaces vectoriels. Dimension des espaces vectoriels	365
§ 1 Sous-espaces supplémentaires, projecteurs	365
§ 2 Produits et sommes d'espaces vectoriels	369
§ 3 Espaces de dimension finie	377
§ 4 Propriétés des espaces de dimension finie	383
§ 5 Hyperplans	391

§ 6	Endomorphismes, groupe linéaire	393
§ 7	Éléments algébriques d'une extension d'un corps	397
CHAPITRE X. Fonctions polynomiales sur K^n; équations algébriques		405
§ 1	Polynômes à n lettres	405
§ 2	Dérivées partielles. Degré partiel	414
§ 3	Fonctions symétriques	418
§ 4	Formules de Newton	428
§ 5	Equations algébriques. Equations de degré 3	434
§ 6	Equations de degré 4. Equations particulières	442
CHAPITRE XI. Matrices		453
§ 1	Matrices de type (m, n)	453
§ 2	Matrices carrées	462
§ 3	Matrices et applications linéaires	470
§ 4	Rang d'une matrice	481
§ 5	Opérations élémentaires	486
§ 6	Similitude d'endomorphismes ou de matrices	491
CHAPITRE XII. Dualité. Espaces vectoriels quotients		494
§ 1	Dual ; forme bilinéaire canonique	494
§ 2	Dualité en dimension finie	497
§ 3	Quotients d'espaces vectoriels	507
§ 4	Quotients, produits et sommes directes	514
CHAPITRE XIII. Déterminants		518
§ 1	Applications multilinéaires	518
§ 2	Formes n -linéaires alternées sur E de dimension n	525
§ 3	Déterminants de n vecteurs dans une base ; déterminant d'un endomorphisme	528
§ 4	Déterminant d'une matrice carrée	533
§ 5	Exemples de déterminants	544
CHAPITRE XIV. Equations linéaires sur un corps		559
§ 1	Langage de la Géométrie affine dans un espace vectoriel	559
§ 2	Equations linéaires sur un corps ; cas d'un système de Cramer	567
§ 3	Equations linéaires sur un corps : cas général	578
§ 4	Méthodes directes de résolution ; pivot partiel	589
CHAPITRE XV. Réduction d'endomorphismes ou de matrices carrées ...		603
§ 1	Valeurs propres et polynôme caractéristique	603
§ 2	Trigonalisation	610
§ 3	Sous-espaces propres	616
§ 4	Polynômes d'endomorphismes ou de matrices	630

§ 5	Sous-espaces caractéristiques	637
§ 6	Suites définies par une relation de récurrence linéaire	654
CHAPITRE XVI. Complément : réduction de Jordan		660
§ 1	Etude des endomorphismes nilpotents	660
§ 2	Réduction de Jordan quand $\chi_u(X)$ est dissocié	666
§ 3	Sous-espaces monogènes	673
BIBLIOGRAPHIE		681
INDEX ALPHABÉTIQUE		683

Le **COURS DE MATHÉMATIQUES** réunit toutes les notions de base de l'algèbre fondamentale et de l'algèbre linéaire indispensables tant aux concours d'entrée aux grandes écoles que pour entreprendre des études scientifiques à dominante mathématique.

De conception très élaborée, ce livre se veut avant tout un outil de travail. Plus de mille exercices qui collent au texte paragraphe par paragraphe, près de trois cents exemples développés, permettent une lecture active et une assimilation progressive.

Le texte est structuré pour rendre le repérage facile et rapide : les notions de base sont introduites progressivement. Les sujets enseignés en première années de classe préparatoire peuvent être étudiés séparément.

Les futurs élèves des grandes écoles, mais aussi les candidats à l'agrégation et les professeurs de lycées trouveront, en petits caractères, tous les approfondissements désirables.

Ce Cours de mathématiques se compose de 4 tomes :

1. Algèbre
2. Analyse
3. Compléments d'analyse
4. Algèbre bilinéaire et géométrie

4 volumes d'exercices complètent ce cours :

- *Exercices résolus d'analyse, 1993 ;*
- *Exercices résolus d'algèbre, 1994 ;*
- *Exercices résolus d'analyse (compléments), 1995, à paraître ;*
- *Exercices résolus d'algèbre bilinéaire et géométrie, 1996, à paraître.*



Code 016450

ISBN 2-04-016450-2

