

**J. Lelong-Ferrand
J.M. Arnaudiès**

Cours de mathématiques

Tome 1

Algèbre

3^e édition

DUNOD

Table des matières

CHAPITRE I. Vocabulaire de théorie des ensembles.	1
§ 1 Notions sur la formalisation.	1
§ 2 Règles de logique formelle.	3
§ 3 Quantificateurs	6
§ 4 Opérations sur les ensembles.	8
§ 5 Correspondances et applications.	12
§ 6 Familles	17
§ 7 Produits	20
§ 8 Relations d'équivalence et ensemble quotient	22
§ 9 Relations d'ordre.	26
§ 10 Dénombrément	31
§ 11 Les ensembles de base.	39
CHAPITRE II. Lois de composition. Groupes.	40
§ 1 Généralités.	40
§ 2 Propriétés d'une loi de composition.	45
§ 3 Axiomes de la structure de groupe. Exemples de groupes. Homomorphismes.	48
§ 4 Sous-groupe. Groupe engendré. Groupe produit.	52
§ 5 Groupe quotient dans le cas abélien.	57
§ 6 Groupes quelconques : classes. Sous-groupes distingués. Quotient.	62
§ 7 Groupes finis. Groupe symétrique.	65
§ 8 Groupes opérant sur un ensemble.	69
CHAPITRE III. Structures algébriques faisant intervenir plusieurs lois.	77
§ 1 Généralités.	77
§ 2 Généralités sur les anneaux.	79
§ 3 Sous-anneaux et anneaux produits.	87
§ 4 Homomorphismes, idéaux et anneaux quotients.	89
§ 5 Divisibilité dans un anneau.	95
§ 6 Corps	99
§ 7 Calcul dans le corps des nombres complexes.	104
§ 8 Structure de module sur un anneau.	111
§ 9 Structure d'algèbre sur un anneau commutatif.	118
CHAPITRE IV. Polynômes à une ou plusieurs indéterminées.	120
§ 1 Définition de $A[X]$. Propriétés générales.	120
§ 2 Division euclidienne. Propriétés arithmétiques de $K[X]$ lorsque K est un corps commutatif.	125
§ 3 Algorithme d'Euclide.	131
§ 4 Polynômes irréductibles sur un corps	135
§ 5 Fonction polynôme. Racines. Formule de Taylor.	137
§ 6 Relations entre les coefficients et les racines. Décomposition dans $\mathbf{C}[X]$ et $\mathbf{R}[X]$	144
§ 7 Notions sur $K[X_1, \dots, X_n]$	149

CHAPITRE V. Fonctions symétriques. Equations algébriques (Théorie élémentaire)	159
§ 1 Polynômes symétriques	159
§ 2 Formules de Newton	166
§ 3 Equations du deuxième et du troisième degré	172
§ 4 Equation du quatrième degré	178
§ 5 Equations de degré ≥ 5	182
CHAPITRE VI. Elimination	187
§ 1 Résultant de deux polynômes à une variable	187
§ 2 Méthode de Cayley. Exemples de calcul du résultant	194
§ 3 Application de l'élimination à la transformation de Tschirnhaus	200
§ 4 Discriminant d'un polynôme	206
§ 5 Expressions des racines communes à deux équations lorsque leur résultant est nul	210
CHAPITRE VII. Fractions rationnelles	217
§ 1 Le corps $K(X)$	217
§ 2 Décomposition en éléments simples sur un corps quelconque K	221
§ 3 Recherche des parties polaires relatives à des facteurs de la forme $(X - a)^\alpha$	224
§ 4 Notions sur les séries formelles	227
§ 5 Exemples de calculs pratiques	232
§ 6 Intégration des fractions rationnelles	239
CHAPITRE VIII. Espaces vectoriels	245
§ 1 Généralités	245
§ 2 Caractérisation des bases d'un espace vectoriel	250
§ 3 Théorème de la dimension finie	253
§ 4 Espaces vectoriels et applications linéaires. Rang d'une application linéaire	259
§ 5 Dualité	262
§ 6 Langage de la géométrie affine	270
CHAPITRE IX. Matrices	275
§ 1 Propriétés générales	275
§ 2 Matrices et applications linéaires	285
§ 3 Changement de base	293
CHAPITRE X. Les déterminants et leurs applications	298
§ 1 Applications et formes multilinéaires	298
§ 2 Déterminants	304
§ 3 Exemples de calcul de déterminants	314
§ 4 Application des déterminants à l'étude du rang d'une matrice	320
§ 5 Equations linéaires	323

X *Table des matières*

CHAPITRE XI. Réduction des matrices carrées et application	332
§ 1 Valeurs propres, polynôme caractéristique	332
§ 2 Sous-espaces propres	336
§ 3 Polynômes d'endomorphismes. Le théorème de Cayley-Hamilton ..	342
§ 4 Sous-espaces caractéristiques	348
§ 5 Endomorphismes diagonalisables	353
§ 6 Endomorphismes nilpotents. Facteurs invariants. Réduction de Jordan	355
CHAPITRE XII. Formes bilinéaires et formes quadratiques	361
§ 1 Généralités sur les formes bilinéaires	361
§ 2 Formes bilinéaires symétriques et formes quadratiques	363
§ 3 Orthogonalité	367
§ 4 Problème de la classification. Solution lorsque $K = \mathbf{C}$ ou $K = \mathbf{R}$..	371
§ 5 Espace euclidien	376
§ 6 Projections et symétries	384
§ 7 Groupe orthogonal, le groupe orthogonal réel	386
CHAPITRE XIII. Formes hermitiennes. Théorie spectrale. Isométries de $\mathbf{R}^n$..	394
§ 1 Généralités	394
§ 2 Classification des formes hermitiennes sur un espace de dimension finie	397
§ 3 Espaces préhilbertiens de dimension finie	398
§ 4 Projections et symétries	402
§ 5 Groupe unitaire	403
§ 6 Théorie spectrale (formes hermitiennes)	407
§ 7 Théorie spectrale (formes quadratiques réelles)	411
§ 8 Théorie spectrale (formes quadratiques sur un corps quelconque) ..	416
§ 9 Isométries de E_n (espace euclidien de dimension n)	422
§ 10 Isométries vectorielles	425
§ 11 Isométries affines : théorème de prolongement	431
CHAPITRE XIV. Polynômes à plusieurs indéterminées et applications géométriques	436
§ 1 Anneaux factoriels	436
§ 2 Factorialité des anneaux de polynômes	440
§ 3 Correspondances algébriques. Homographies (en caractéristique 0) ..	444
§ 4 Hypersurfaces algébriques dans $\mathbf{C}^n$ ($n \geq 2$)	448
§ 5 Courbes algébriques et courbes algébriques unicursales dans $\mathbf{C}^2$	453
EXERCICES	459
PROBLÈMES	506
BIBLIOGRAPHIE	525
SYMBOLES UTILISÉS DANS CE TRAITÉ	526
INDEX ALPHABÉTIQUE	529

J. Lelong-Ferrand

J. M. Arnaudiès

Cours de mathématiques - Tome 1

Algèbre

Dû à la collaboration de deux mathématiciens ayant la double expérience de l'enseignement dans les Universités et dans les classes préparatoires scientifiques, cet ouvrage réunit en un seul volume les notions d'algèbre qui doivent être acquises au cours du premier cycle universitaire et qui sont exigées aux concours d'entrée aux Grandes Ecoles.

Donnant des démonstrations claires, rapides et rigoureuses, sans faire appel à des théories hors programme, cet ouvrage *pratique* est également un livre *vivant* qui montre, en ménageant une ouverture sur des théories plus vastes, que les mathématiques sont une science en marche.

On trouvera en fin d'ouvrage une longue série d'exercices classés par chapitres : les uns sont originaux, les autres constituent une synthèse des questions fréquemment posées aux concours d'entrée aux Grandes Ecoles.

La présentation vise avant tout à la clarté et à la commodité : l'ouvrage est *clairement structuré* ; les développements qui peuvent être laissés de côté lors d'une première lecture sont signalés ; un lexique placé en fin d'ouvrage permet de trouver rapidement le sujet cherché.

Cet *ouvrage de base* intéresse, outre les étudiants des premiers cycles universitaires, les futurs enseignants et les candidats à l'agrégation ; mais c'est aussi un ouvrage de référence pour un plus large public.

Ce *cours de mathématiques* comprend 4 tomes :

- 1- Algèbre
- 2- Analyse
- 3- Géométrie et cinématique
- 4- Equations différentielles, intégrales multiples.



Code 007074
ISBN 2-04-007074-5

