

ALAIN PLANCHE

Mathématiques pour économistes

Algèbre



ECONOMIE
MODULE

DUNOD

Table des matières

Avant-propos

XIII

1. Les nombres et les structures

I.	La genèse des nombres : les notions essentielles	1
1.	Raisonnement et logique	2
	Éléments de logique	2
2.	Objets et éléments	3
	Ensembles et sous-ensembles	4
3.	Correspondance et application	8
	Applications d'un ensemble dans un ensemble	9
4.	Calculer sans les nombres : l'algèbre des ensembles	12
	Algèbre des ensembles	13
II.	Des entiers aux rationnels	15
1.	Structure des nombres entiers naturels	15
1)	L'ensemble $\mathbb{N}$ des nombres entiers naturels	15
2)	Ordre sur $\mathbb{N}$	16
	Ensemble produit et relation binaire	16
	Structure d'ordre	17
	Plus petit élément, plus grand élément	18
3)	L'addition dans $\mathbb{N}$	19
	Loi de composition interne	19
4)	La multiplication dans $\mathbb{N}$	20
2.	Mesure en nombre entier ou dénombrement	21
1)	Cardinaux des ensembles finis	21
2)	Division euclidienne	22
3)	Analyse combinatoire	23
3.	L'anneau $\mathbb{Z}$ des entiers relatifs	26
1)	Symétriser $\mathbb{N}$	26
2)	Éléments de construction de $\mathbb{Z}$	27
	Relation d'équivalence	28
3)	Structure de $\mathbb{Z}$	29
	Structure de groupe	29
	Structure d'anneau	30

4. Le corps $\mathbb{Q}$ des nombres rationnels	30
1) Éléments de construction de $\mathbb{Q}$	30
2) Structure des nombres rationnels	31
Structure de corps commutatif	31
3) Notion de densité	31
Activité : numération	32

2. Le calcul algébrique réel

I. Le corps $\mathbb{R}$ des nombres réels	35
1. Principe de construction	36
2. Structure des nombres réels	37
1) $\mathbb{R}$ est un corps commutatif totalement ordonné	37
2) Les ensembles de nombres	39
3) $\mathbb{R}$ est archimédien	40
4) $\mathbb{R}$ est complet	40
Borne supérieure, borne inférieure	40
5) Unicité de la structure de $\mathbb{R}$	41
6) Valeur absolue dans $\mathbb{R}$	41
II. Algèbre dans $\mathbb{R}$	42
1. Calcul réel	42
1) Traitement des inégalités	42
2) Puissance d'un nombre réel	42
3) Binôme de Newton	44
4) Factorisation de $a^n - b^n$	44
2. Polynômes réels	45
1) Opérations sur les applications d'un ensemble quelconque E dans $\mathbb{R}$	45
2) Monômes et polynômes	46
3) Opérations sur les polynômes	47
4) Division euclidienne des polynômes	47
5) Décomposition d'un polynôme en produits de facteurs	48
3. Équations et inéquations à une inconnue	51
1) Définitions	51
2) Équations et inéquations du premier degré	52
3) Équations et inéquations du second degré	53
4) Autres équations et inéquations	56

3. Le plan euclidien

I. Le plan vectoriel $\mathbb{R}^2$	60
1. Structure d'espace vectoriel	60
1) L'ensemble $\mathbb{R}^2$	60
2) Addition dans $\mathbb{R}^2$	60

3) Multiplication par un nombre réel	61
4) Base canonique. Identification au plan vectoriel	61
2. Étude du plan vectoriel	62
1) Droites vectorielles de $\mathbb{R}^2$	62
2) Colinéarité	64
3) Critère de colinéarité	65
4) Notion de dimension. Autres bases de $\mathbb{R}^2$	66
II. Le plan affine $\mathbb{R}^2$	68
1. Variétés affines	68
1) Translations	68
2) Image d'un sous-espace vectoriel par une translation	68
3) Variétés affines et représentations graphiques	68
4) Équation d'une droite	70
5) Demi-plans de $\mathbb{R}^2$	71
2. Calcul barycentrique, parties convexes de $\mathbb{R}^2$	73
1) Barycentre de deux points pondérés	73
2) Position d'un point sur une droite	74
3) Parties convexes de $\mathbb{R}^2$	74
III. Structure euclidienne du plan	76
1. Produit scalaire dans $\mathbb{R}^2$	76
1) Définition	76
2) Propriétés	76
3) Orthogonalité	77
2. Norme et distance	78
1) Norme euclidienne	78
2) Distance euclidienne	79
3) Équation du cercle	79
3. Trigonométrie	80
1) Rappels succincts	80
2) Formules de trigonométrie	81
3) Interprétation géométrique du déterminant	82
IV. Calcul à deux variables	84
1. Formes linéaires	84
1) Définition	84
2) Interprétation	84
3) Image réciproque d'un nombre réel	84
4) Écriture matricielle	85
2. Endomorphismes de $\mathbb{R}^2$	85
1) Définition	85
2) Image réciproque d'un élément de $\mathbb{R}^2$	86
3) Écriture matricielle	87
3. Formes quadratiques	88
1) Définition	88

2) Réduction d'une forme quadratique	88
3) Signe d'une forme quadratique	89
Activité : le plan complexe	90

4. Systèmes linéaires

I. Première analyse des systèmes linéaires	96
1. Définitions. Généralités	96
1) Partons d'un exemple	96
2) Le cas général	97
3) Systèmes triangulaires	98
2. Étude de l'ensemble des solutions d'un système linéaire	100
1) L'espace vectoriel $\mathbb{R}^n$	100
2) Sous-espaces vectoriels et variétés affines de $\mathbb{R}^n$	101
3) Sous-espace vectoriel des solutions d'un système linéaire homogène	102
4) Variété affine des solutions d'un système linéaire	103
II. Résolution des systèmes linéaires	105
1. Systèmes équivalents	105
1) Définitions	105
2) Opérations élémentaires sur les lignes	105
3) Systèmes symétriques	106
2. Méthode de Gauss	108
1) Principe	108
2) Exemples	109
3) Méthode de Gauss-Jordan	112
3. Systèmes paramétrés	113
1) Une seule des inconnues a des coefficients comportant un paramètre	113
2) Systèmes symétriques	115

5. Espaces vectoriels. Applications linéaires

I. Définitions et théorèmes généraux	118
1. Espaces vectoriels	118
1) Exemple introductif	118
2) Définition	119
3) Sous-espaces vectoriels	121
4) Variétés affines	122
2. Opérations sur les sous-espaces vectoriels	123
1) Intersection de deux sous-espaces vectoriels	123
2) Somme de deux sous-espaces vectoriels	124
3) Somme directe. Sous-espaces supplémentaires	124
3. Applications linéaires	126
1) Définitions	126
2) Noyau d'une application linéaire	127

3) Image d'une application linéaire	128
4) Exemple	129
5) Formes linéaires	129
Espaces vectoriels de dimension finie	130
1. Familles génératrices, familles libres	130
1) Notion de famille finie	130
2) Familles génératrices	131
3) Familles libres	133
2. Propriétés des espaces vectoriels de dimension finie	136
1) Existence d'une base	136
2) Dimension d'un espace vectoriel de dimension finie	138
3) Supplémentaire d'un sous-espace vectoriel	140
3. Propriétés des applications linéaires	141
1) Rang d'une famille de vecteurs	141
2) Rang d'une application linéaire	141
3) Théorème des dimensions	143

6. Calcul matriciel

Matrices	145
1. Calcul matriciel élémentaire	145
1) Matrice d'une application linéaire	146
2) Opérations sur les matrices	147
3) Pratique du calcul	150
4) Transposée d'une matrice	152
2. Matrices carrées	153
1) Définition	153
2) L'algèbre $\mathcal{M}(n)$	154
3) Matrices inversibles (ou régulières)	155
4) Matrices de changement de base	156
3. Matrices équivalentes, matrices semblables	158
1) Matrices d'une application linéaire dans des bases différentes	158
2) Exemple	159
3) Matrices semblables	161
Déterminants	162
1. Définition et premières propriétés	162
1) Présentation du problème	162
2) Résolution	165
3) Notations et premières propriétés	167
2. Calcul des déterminants	170
1) Déterminants d'ordre 3	170
2) Déterminants d'ordre supérieur à 3	173
3) Simplification des calculs	174
3. Étude pratique du rang d'une famille de vecteurs, d'une matrice	175
1) Critère d'indépendance linéaire de p vecteurs dans un espace de dimension n	176

2) Détermination du rang	177
3) Matrices équivalentes	178

7. Retour aux systèmes linéaires. Inversion d'une matrice

I. Analyse des systèmes linéaires	180
1. Système linéaire et équation linéaire	180
1) Les différentes formes d'un système linéaire	180
2) Analyse d'une équation linéaire	182
3) Exemple élémentaire	183
2. Application à l'étude d'un système linéaire	184
1) Rang d'un système linéaire	184
2) Existence d'une solution	185
3) Ensemble des solutions	185
4) Exemples	186
II. Résolution par les déterminants	187
1. Système de Cramer. Inversion d'une matrice	187
1) Système et formules de Cramer	187
2) Exemple	189
3) Application au calcul de l'inverse d'une matrice	190
2. Systèmes quelconques	193
1) Solution générale d'un système	193
2) Caractérisation de l'espace des solutions	196
III. Complément de calcul matriciel : utilisation des matrices équivalentes	200
1. Opérations sur les lignes et les colonnes d'une matrice	200
1) Interprétation des opérations licites	200
2) Opérations sur les colonnes	205
3) Critère d'appartenance d'un vecteur à un sous-espace vectoriel	207
2. Calcul de l'inverse d'une matrice	209
1) Inversion « à la main » par résolution d'un système	210
2) Méthode du pivot (Gauss-Jordan)	211
Activité : autres problèmes linéaires	214

8. Valeurs propres. Vecteurs propres

I. Diagonalisation des matrices carrées	220
1. Définitions et premières propriétés	220
1) Valeurs propres, vecteurs propres	220
2) Sous-espaces propres	221
3) Polynôme caractéristique	222
2. Matrices diagonalisables	225
1) Définition	225
2) Caractérisation des matrices diagonalisables	227

3. Calcul de la puissance n -ième d'une matrice	230
1) Matrices diagonalisables	230
2) Utilisation du théorème de Cayley-Hamilton	232
Applications : matrices symétriques et matrices positives	235
1. Matrices symétriques	235
1) Définition et premières propriétés	235
2) Formes bilinéaires symétriques, formes quadratiques	236
3) Autres produits scalaires sur $\mathbb{R}^n$	239
2. Matrices positives	239
1) Définitions et premières propriétés	239
2) Matrices de production	240
3) Matrices de Markov	242



Mathématiques pour économistes

Algèbre

Cet ouvrage est un manuel de mathématiques consacré à l'algèbre, et plus particulièrement à l'algèbre linéaire. Spécialement conçu pour les étudiants en sciences économiques et gestion – DEUG de sciences économiques, administration économique et sociale (AES), sciences sociales ; BTS et IUT tertiaires, préparations aux concours des grandes écoles commerciales, des écoles normales supérieures, des ENSAE –, ce livre a pour ambition de proposer une formation mathématique complète et adaptée à la discipline économique.

Plutôt qu'un catalogue de recettes, ni succession de démonstrations, il s'inscrit dans la continuité de l'enseignement dispensé au lycée. L'auteur, s'appuyant sur une marche pédagogique progressive et avec une très grande clarté, présente ainsi successivement :

- le calcul algébrique élémentaire ;
- les grands principes d'algèbre linéaire ;
- l'ensemble du calcul linéaire, y compris le calcul bilinéaire.

Les principales notions abordées sont rendues plus accessibles grâce à de très nombreux exemples commentés.