

RÉMI GOBLOT

Algèbre linéaire

Mathématiques
des

MASSON 

Table des matières

Chapitre 1. Introduction	11
1. Sous-espaces supplémentaires	11
2. Familles libres, génératrices, bases	12
3. Modules sur un anneau commutatif unitaire	13
4. Modules sur un anneau unitaire non commutatif	15
5. Notion de module quotient	17
6. Matrices d'applications linéaires	19
7. Exercice	20
Chapitre 2. Espaces vectoriels de dimension finie	23
1. Définition	23
2. Caractérisation des bases	23
3. Espaces vectoriels de dimension finie	25
4. Théorème (Structure des espaces vectoriels de dimension finie)	26
5. Formules sur les dimensions	27
6. Espaces d'applications linéaires	28
7. Application aux extensions algébriques de corps	28
8. Exercices et applications	30
9. Modules libres de rang fini sur un anneau unitaire commutatif	31
10. Espaces qui ne sont pas de dimension finie	34
11. Propriétés topologiques des $\mathbb{R}$ -espaces de dimension finie	34
12. Exercices	36
Chapitre 3. Matrices	41
I. Généralités, opérations sur les matrices	42
1. Le A -module libre A^n	42
2. Les modules de matrices	43
3. Multiplication des matrices	44
4. Matrices de systèmes de vecteurs, d'applications linéaires	45
5. Changements de bases	46
6. Rang d'une matrice à coefficients dans un corps	48
7. Trace d'une matrice	52
8. Remarque sur les conventions d'indices	54
9. Matrice résultant	54
10. Exercice : Polygones réguliers	56
II. Opérations élémentaires, transvections	57
1. Opérations élémentaires	57
2. Applications linéaires associées : transvections	59
3. Génération du groupe des matrices inversibles	61
4. — 7. Exercices	63

Table des matières

Chapitre 1. Introduction	11
1. Sous-espaces supplémentaires	11
2. Familles libres, génératrices, bases	12
3. Modules sur un anneau commutatif unitaire	13
4. Modules sur un anneau unitaire non commutatif	15
5. Notion de module quotient	17
6. Matrices d'applications linéaires	19
7. Exercice	20
Chapitre 2. Espaces vectoriels de dimension finie	23
1. Définition	23
2. Caractérisation des bases	23
3. Espaces vectoriels de dimension finie	25
4. Théorème (Structure des espaces vectoriels de dimension finie)	26
5. Formules sur les dimensions	27
6. Espaces d'applications linéaires	28
7. Application aux extensions algébriques de corps	28
8. Exercices et applications	30
9. Modules libres de rang fini sur un anneau unitaire commutatif	31
10. Espaces qui ne sont pas de dimension finie	34
11. Propriétés topologiques des $\mathbb{R}$ -espaces de dimension finie	34
12. Exercices	36
Chapitre 3. Matrices	41
I. Généralités, opérations sur les matrices	42
1. Le A -module libre A^n	42
2. Les modules de matrices	43
3. Multiplication des matrices	44
4. Matrices de systèmes de vecteurs, d'applications linéaires	45
5. Changements de bases	46
6. Rang d'une matrice à coefficients dans un corps	48
7. Trace d'une matrice	52
8. Remarque sur les conventions d'indices	54
9. Matrice résultant	54
10. Exercice : Polygones réguliers	56
II. Opérations élémentaires, transvections	57
1. Opérations élémentaires	57
2. Applications linéaires associées : transvections	59
3. Génération du groupe des matrices inversibles	61
4. —7. Exercices	63

Chapitre 4. Déterminants	67
I. Modules de formes multilinéaires alternées	68
1. Formes p -linéaires alternées	68
2. Cas où $p = n$, déterminant	69
3. Dimension de $A^p(E)$	70
4. Déterminant d'une matrice carrée	71
5. Conséquences du théorème fondamental	72
II. Méthodes de calculs, applications aux systèmes	74
1. Opérations élémentaires sur les rangées	74
2. Développement par rapport à une rangée	74
3. Matrice adjointe ; matrice inverse	75
4. Systèmes linéaires homogènes	76
5. Développement de Laplace d'un déterminant	79
6. —13. Exercices	81
14. Résultant	86
15. Déterminants en géométrie affine	89
Chapitre 5. Dualité	93
1. Généralités	94
2. Étude du cas où E est de dimension finie	94
3. Exemples, applications et exercices	97
4. Formes linéaires et hyperplans	98
5. Orthogonaux de sous-espaces de E	99
6. Rang d'un système de formes linéaires	101
7. Inclusion de E dans son bidual E^{**}	101
8. Éclairage topologique	103
9. Exemple topologique	105
10. Version projective de la dualité en dimension finie	107
Chapitre 6. Algèbre des endomorphismes d'un espace vectoriel	111
I. Généralités sur l'anneau R	112
1. Idéaux principaux à gauche et à droite	112
2. Idéaux de type fini	113
3. Idéaux bilatères en dimension infinie	114
4. Le centre	115
II. Structure de R -module à gauche sur E	115
1. Fidélité et simplicité	115
2. Problème réciproque	116
3. Étude du R -module $M = E^n$	117
4. Étude de K et H	118
5. Théorème de structure des algèbres d'endomorphismes	119
6. Algèbres avec idéaux bilatères	120
7. Exemple	121
8. Exercice	122
III. L'algèbre des quaternions	122
1. Analyse	122
2. Construction effective de $\mathbb{H}$	124
3. Description géométrique des lois de composition de $\mathbb{H}$	125
4. Injection de $\mathbb{H}$ dans $\mathcal{M}_2(\mathbb{C})$	127
5. Les $\mathbb{R}$ -algèbres finies sans idéaux bilatères	128

Chapitre 7. Réduction des endomorphismes	129
I. Généralités	130
1. Triangulation et diagonalisation par blocs	130
2. Sous-espaces vectoriels propres, polynôme caractéristique	132
3. Polynôme minimal	132
4. Triangulation	133
5. Théorème de Cayley-Hamilton	133
6. Propriétés des polynômes caractéristique et minimal	135
7. Remarque : Cas où les valeurs propres sont distinctes	137
8. Exercice	138
II. Jordanisation des endomorphismes	139
1. Théorème de décomposition des noyaux	139
2. Application au polynôme caractéristique	140
3. Décomposition de Dunford	141
4. Critère de diagonalisabilité	145
5. Exercice	146
6. Application au polynôme minimal	147
7. Cas d'une racine simple du polynôme minimal	148
8. Place des endomorphismes diagonalisables	151
9. Réduction simultanée d'applications linéaires commutant entre elles	154
10. Endomorphismes nilpotents	155
11. Forme matricielle de Jordan	157
12. Exercices sur la diagonalisabilité	158
13. Utilisation du polynôme minimal pour le calcul des puissances d'une matrice	161
14. Exercice	162
III. Décomposition en somme directe de sous-espaces cycliques	164
1. Sous-espaces cycliques	164
2. Lemme	165
3. Matrice compagnon	165
4. Théorème fondamental	166
5. Similitude d'une matrice et de sa transposée	170
6. Commutant d'un endomorphisme	172
7. Exercice	174
8. Sous-espaces stables des espaces cycliques	174
9. Exercice	176
IV. Compléments et exercices	177
1. Endomorphismes d'ordre fini d'un $\mathbb{Q}$ -espace vectoriel	177
2. Sous-groupes de Sylow de $GL(\mathbb{F}_5, 2)$	180
Chapitre 8. Modules de type fini sur un anneau principal	183
I. Sous-modules d'un module libre	184
1. Théorème	184
2. Exercice	185
II. Le théorème fondamental (point de vue matriciel)	187
1. Opérations sur une colonne	187
2. Opérations sur les lignes et les colonnes	189
3. Théorème fondamental	190
4. Cas où l'anneau est euclidien	192
5. Application aux sous-modules d'un module libre	194

III. Facteurs invariants d'un A -module de type fini	195
1. Théorème fondamental	195
2. Application aux invariants de similitudes	199
IV. Intervention des éléments premiers	205
1. Décomposition d'un module de torsion	205
2. Décomposition d'une fraction rationnelle en éléments simples	206
3. Cas d'un A -module de torsion M de type fini	208
4. Modules indécomposables	209
V. Réseaux vectoriels	210
1. Sous-groupes additifs de $\mathbb{R}$	210
2. Bases d'un réseau	210
3. Groupe quotient	212
4. Image d'un réseau par une application linéaire	214
5. Exemple des anneaux d'entiers quadratiques imaginaires ..	215
Chapitre 9. Décomposition d'un module en composants élémentaires	217
I. Modules de longueur finie	217
1. Module simple	217
2. Ensembles ordonnés inductifs, théorème de Zorn	218
3. Types de modules simples	219
4. Modules de longueur finie	221
5. Théorème de Jordan-Hölder :	222
6. Modules indécomposables	224
7. Anneaux commutatifs artiniens	227
8. Application aux modules de longueur finie sur un anneau commutatif	230
II. Modules semi-simples de longueur finie	231
1. Théorème de structure des modules semi-simples	231
2. Unicité de la décomposition	232
3. Modules semi-simples isotypiques	232
4. Théorème de la base incomplète	233
5. Composants isotypiques d'un module semi-simple	234
III. Modules semi-simples de longueur infinie	236
1. Cas des espaces vectoriels sur un corps	236
2. Modules semi-simples	238
Chapitre 10. Formes quadratiques	241
I. Généralités : étude du cône isotrope	243
1. Formes bilinéaires	243
2. Formes symétriques et antisymétriques	245
3. Forme quadratique, cône isotrope, orthogonalité	246
4. Bases orthogonales	247
5. Formes quadratiques en dimension 2	248
6. Place d'un hyperplan vectoriel relativement au cône isotrope	250
7. Cas d'un cône isotrope non réduit à ses vecteurs singuliers	253
II. Décomposition en carrés, bases orthogonales	255
1. Méthode de Gauss	255
2. Polynômes orthogonaux	259
3. Types de formes quadratiques	263
4. Cas où $K = \mathbb{R}$, loi de Sylvester	264

5. Cas où $K = \mathbb{F}_q$ est un corps fini de cardinal q	266
III. Morphismes liés à une forme quadratique	268
1. Forme attachée à un endomorphisme f	268
2. Isométries	269
3. Similitudes	270
4. Caractérisation des similitudes	273
5. Isométries et similitudes d'un plan hyperbolique	274
6. Adjointe d'une application linéaire	274
7. Groupe des isométries en dimension 2	275
IV. Décomposition de Witt	277
1. Indice d'une forme bilinéaire symétrique	277
2. Formes hyperboliques	278
3. Décomposition de Witt	279
4. Exemples	281
5. Exercice de dénombrement	283
6. Théorème de Witt	285
7. Propriétés spéciales aux formes hyperboliques	288
8. Conclusion	290
V. Étude des formes antisymétriques	291
1. Généralités	291
2. Décomposition en somme directe orthogonale de plans symplectiques	291
3. Identité de Pfaffien	292
VI. Structures euclidiennes	293
1. Définitions	293
2. Inégalités de Schwarz et du triangle	294
3. Matrices orthogonales	295
4. Isométries comme produits de réflexions	296
5. Isométries directes comme produits de retournements	297
6. Sous-espaces stables par une isométrie	298
7. Morphismes symétriques	299
8. Forme quadratique attachée à un morphisme symétrique	300
9. Morphismes symétriques positifs	301
10. Norme d'une application linéaire	303
11. Décomposition d'un morphisme en une isométrie et un mor- phisme positif	304
12. Applications linéaires conservant les volumes	305
13. Morphismes normaux	306
14. Application aux quadriques	307
15. Exemple : Énergie cinétique d'un solide	311
16. Directions principales en un point régulier d'une surface	313
17. Exercice	314
18. Exercice : système de vecteurs faisant entre eux des angles obtus	315
Index	317

Bibliographie

- ARNAUDIES J. M., FRAYSSE H. : *Cours de mathématiques*. Dunod (1987).
- BOURBAKI N. : *Algèbre*. Hermann.
Chap. 2 : *Algèbre linéaire* (3^e éd., 1970).
Chap. 7 : *Modules sur les anneaux principaux* (1964).
Chap. 8 : *Modules et anneaux semi-simples* (1958).
- CHAMBADAL L. : *Cours de mathématiques*. Gauthier-Villars (1985).
- DEHEUELS R. : *Formes quadratiques et groupes classiques*. P.U.F. (1981).
- FRESNEL J. : *Géométrie*. Université de Bordeaux.
- GANTMACHER F. R. : *Théorie des matrices*. Gabay (1990).
- GODEMENT R. : *Cours d'algèbre*. Hermann (1993).
- LELONG-FERRAND J., ARNAUDIES J. M. : *Cours de mathématiques*. Dunod (1977).
- PERRIN D. : *Cours d'algèbre*. Publications de l'École normale supérieure de jeunes filles (1982).
- QUERRÉ J. : *Algèbre*. Masson (1977).
- TAUVEL P. : *Mathématiques générales pour l'agrégation*. Masson (3^e tirage, 1992).

RÉMI GOBLOT

Algèbre linéaire

M
Enseignement
des
Mathématiques

Cet ouvrage traite plusieurs aspects du programme de maîtrise et d'agrégation de mathématiques. Chaque chapitre est précédé d'un bref résumé qui a pour but de donner une idée rapide de son contenu et de son insertion dans l'ensemble. Bien que s'adressant à un public déjà familiarisé avec l'algèbre linéaire, cet ouvrage rappelle toutes les définitions de manière explicite et fournit des démonstrations complètes et détaillées. Ce cours est illustré de nombreux exercices corrigés.

1. Introduction
2. Espaces vectoriels de dimension finie
3. Matrices
4. Déterminants
5. Dualité
6. Algèbre des endomorphismes d'un espace vectoriel
7. Réduction des endomorphismes
8. Modules de type fini sur un anneau principal
9. Décomposition d'un module en composants élémentaires
10. Formes quadratiques

Ancien élève de l'Ecole normale supérieure de Cachan, Rémi GOBLOT est professeur à l'université de Lille I, où il est notamment chargé de la préparation à l'agrégation.

ISBN : 2-225-84848-3



9 782225 848483

LES EDITIONS NOMBRILOUPE

