
Amédée LE GOFF

COURS D'ALGÈBRE

premier cycle universitaire
et classes préparatoires
aux grandes écoles.



TABLE DES MATIÈRES

CHAPITRE I. GROUPES	13
I. GÉNÉRATION	13
1. Sous-groupes	15
Intersection de sous-groupes — Sous-groupe engendré	16
2. Sous-groupes distingués	17
3. Groupes quotients	18
4. Ordres d'un groupe	19
II. MORPHISMES DE GROUPES	19
1. Noyau d'un morphisme	19
2. Automorphismes. Automorphismes intérieurs	21
III. GROUPES DE TRANSFORMATION	22
1. Groupes opérateurs	22
2. Orbites et Conjugaison	23
3. Sous-groupes d'isotropie	23
IV. GROUPES DE PERMUTATION	24
1. Support d'une permutation	25
2. Cycles et transpositions	25
3. Signature d'une permutation	27
CHAPITRE II. ANNEAUX	29
I. GÉNÉRATION	29
Sous-anneau — Anneau commutatif — Anneau unitaire	30
1. Éléments remarquables d'un anneau	31
2. Morphismes d'anneaux	32
II. IDÉAUX	33
1. Noyau d'un morphisme	33
2. Générateurs d'un idéal	33
3. Anneau quotient	34
4. Factorisation d'un morphisme	35
5. Idéaux premiers et Idéaux maximaux	36
III. ANNEAUX PRINCIPAUX	37
1. Relation de Bezout	37
2. Étude de $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$	38
IV. ANNEAUX INTÈGRES	39
1. Les corps. Caractéristique d'un corps — Corps usuels	39
2. Les anneaux de fractions	40

CHAPITRE III. ESPACES VECTORIELS	42
I. GÉNÉRATION	42
1. Définition	42
2. Sous-espace vectoriel	44
3. Sous-espace engendré	44
4. Indépendance linéaire. Liberté	45
5. Bases d'un espace vectoriel. — Dimension	46
6. Rang d'un système de vecteurs	48
II. APPLICATIONS LINÉAIRES	50
1. Définition	50
2. Espaces vectoriels d'applications linéaires	50
3. Composition des applications linéaires	51
4. Noyau, Image et Rang	51
5. Espace quotient	53
6. Somme d'espaces vectoriels. Somme de sous-espaces — Projecteurs	54
7. Somme directe d'espaces vectoriels	55
CHAPITRE IV. MATRICES ET REPRÉSENTATIONS	57
I. MATRICES	57
1. Somme de matrices	59
2. Produit de matrices	59
3. Loi externe	60
4. Inverse d'une matrice	60
II. REPÈRES	61
1. Inverse d'un repère	62
2. Changement de repère	64
III. REPRÉSENTATIONS MATRICIELLES	65
1. Représentation et changement de repères	66
2. Composition et Représentation	67
3. Représentation des endomorphismes	67
4. Représentation de sommes directes	68
5. Applications	68
Angles d'Euler — Droite relativiste	
CHAPITRE V. DUALITÉ	72
I. GÉNÉRATION	72
1. Bases et repères duaux	73
2. Espace bidual	74
3. Formule de dualité	75
4. Changement de repère dans le dual	76
5. Traces d'un endomorphisme	77
II. TRANSMUTATION ET CONJUGAISON	78
1. Transmuée d'une application linéaire	78
2. Transmuée et lois vectorielles	78
3. Représentation de la transmuée	79
4. Conjugaison	80
5. Conjugaison d'une transmutation	81
Rang d'une matrice	
6. Équations de sous-espaces vectoriels	83

7. Résolution d'un système d'équations linéaires	84
a. Système non surjectif	85
b. Système surjectif	86
c. Système de Cramer	87
CHAPITRE VI. DÉTERMINANTS	88
I. DÉTERMINANT DE VECTEUR	88
1. Formes multilinéaires	88
2. Déterminant dans K^n	90
3. Développement du déterminant	91
a. Méthode des cofacteurs	91
Règle des signes	
b. Méthode des combinaisons linéaires	93
c. Déterminant de Van Der Monde	93
4. Déterminant dans un espace vectoriel	94
5. Déterminant dans $(K^n)^*$	95
II. DÉTERMINANT D'UN ENDOMORPHISME	95
1. Propriétés du déterminant	96
2. Déterminant d'une matrice carrée	96
3. Changement de repère	97
4. Déterminant et Somme directe	97
III. APPLICATION DES DÉTERMINANTS	98
1. Indépendance linéaire de vecteurs de K^n	98
2. Inversion d'une matrice carrée	99
3. Résolution des systèmes d'équations linéaires	101
a. Système de Cramer	102
b. Systèmes homogènes	103
CHAPITRE VII. POLYNÔMES	106
I. ANNEAU DES POLYNÔMES	106
1. Notation courante	106
2. Algèbre des polynômes	107
3. Morphisme d'algèbre	108
4. Degré d'un polynôme	108
5. Fonctions polynômes	109
6. Racines d'un polynôme	110
7. Multiplicité des racines	110
8. Dérivation. Dérivée en un point	111
II. DIVISION	112
1. Division euclidienne	112
2. Division selon les puissances croissantes	114
Division exacte	115
III. IDÉAUX DE $K[X]$	116
1. Relation de Bezout. P.G.C.D.	116
2. Polynômes normalisés	116
3. Calcul de la relation de Bezout	117
4. Polynômes étrangers	118
5. Polynômes irréductibles	118

CHAPITRE VIII. POLYNÔMES (suite)	120
I. POLYNÔMES SYMÉTRIQUES	120
II. ÉLIMINATION ET RÉSULTANT	123
1. Résultant	123
a. Méthode du P.G.C.D.	124
b. Méthode de la dépendance linéaire	124
2. Généralisation	125
3. Transformation des équations	126
III. ÉQUATIONS ALGÈBRIQUES	127
1. Équations rationnelles	127
2. Équations réciproques	128
3. Équation du troisième degré	128
a. Résolution	129
b. Discussion	130
c. Cas réel	131
d. Racines doubles	131
4. Équation du quatrième degré	132
a. Équations auxiliaires	132
b. Résolution	133
c. Variante	134
CHAPITRE IX. FRACTIONS RATIONNELLES	137
I. CONSTRUCTION	137
1. Représentation irréductible	138
2. Pôles et décomposition des fractions rationnelles	138
3. Décomposition des fractions rationnelles de $C(x)$	140
4. Décomposition des fractions rationnelles de $R(x)$	140
II. CALCUL DE LA DÉCOMPOSITION	140
1. Méthode d'identification	141
2. Méthode des valeurs particulières	141
3. Détermination locale	142
a. Emploi de la formule de Taylor	142
b. Simplicité des racines	142
4. Division et Développements limités	143
5. Propriétés d'invariance	143
III. ALGÈBRE $C'(x)$	144
CHAPITRE X. THÉORIE SPECTRALE	
I. ALGÈBRE D'UN ENDOMORPHISME	146
II. CASSATION	148
III. VALEURS ET VECTEURS PROPRES	152
Calcul des vecteurs propres	153
IV. HAMILTON-CALEY	155
CHAPITRE XI. DÉVELOPPEMENTS	157
I. DIAGONALISATION	157
II. FORMULE DE TAYLOR	159
1. Formule de Taylor pour les polynômes	159
Calcul des projecteurs et des nilpotents	

a. Formule du binôme	159
b. Calcul direct	160
2. Fractions rationnelles	161
3. Séries entières	162
III. EXPONENTIELLE	163
Dérivation de l'exponentielle	163
Généralisation	165
CHAPITRE XII. ÉQUATIONS ET SYSTÈMES DIFFÉRENTIELS	166
I. ÉQUATIONS DIFFÉRENTIELLES	166
1. Équations homogènes	167
Variante	169
2. Équations non homogènes	170
a. Convolution	170
b. Algèbre A	171
c. Résolution	172
II. SYSTÈME D'ÉQUATIONS DIFFÉRENTIELLES	173
1. Systèmes différentiels homogènes	175
Variante	175
2. Systèmes non homogènes	175
CHAPITRE XIII. ÉQUATIONS ET SYSTÈMES DE RÉCURRENCE	178
I. ÉQUATIONS DE RÉCURRENCE	178
1. Équations homogènes de récurrence	179
Variante	182
2. Équations de récurrence non homogènes	182
a. Convolution	182
b. Algèbre L	184
c. Résolution	186
II. SYSTÈMES LINÉAIRES DE RÉCURRENCE	186
1. Systèmes homogènes de récurrence	186
Variante	190
2. Systèmes non homogènes	192
CHAPITRE XIV. FORMES DU SECOND ORDRE	192
I. FORMES BILINÉAIRES	192
1. Représentation matricielle	195
2. Changement de représentation	196
3. Congruence et Similitude	196
II. FORMES BILINÉAIRES SYMÉTRIQUES	197
1. Rang et Noyau d'une forme bilinéaire symétrique	198
2. Conjugaison et diagonalisation	198
3. Formes sesquilinéaires et formes hermitiennes	199
a. Formes sesquilinéaires	199
b. Formes hermitiennes	199
III. FORMES QUADRATIQUES	200
1. Formes polaires	201
2. Représentation des formes quadratiques	202
Rang et Noyau — Formes quadratiques séparantes — Formes quadratiques définies	

IV. DIAGONALISATION DES FORMES QUADRATIQUES	203
1. Théorème du rang	203
2. Théorème de Gauss	204
3. Théorème d'inertie de Sylvester	206
Signature	
CHAPITRE XV. ESPACES EUCLIDIENS. ESPACES HERMITIENS	208
I. ESPACES EUCLIDIENS	208
Produit scalaire — Espace euclidien	
1. Inégalité de Schwarz	210
2. Norme euclidienne	210
3. Orthogonalité de vecteurs. Procédé d'orthogonalisation de Schmidt	211
4. Produit scalaire et Dualité	212
5. Orthogonalité de sous-espaces	212
6. Applications transposées	213
7. Morphismes orthogonaux	214
8. Groupe orthogonal	215
9. Matrices orthogonales	216
10. Représentation orthogonale	216
11. Changement de repère orthogonal	217
II. ESPACES HERMITIENS	217
Produit hermitien. Espace hermitien	
1. Inégalité de Schwarz	218
Norme hermitienne. Orthogonalité	
2. Produit hermitien et Dualité	219
3. Applications adjointes	219
4. Morphismes unitaires	220
5. Groupe unitaire	221
6. Représentation hermitienne	221
Changement de repère unitaire	
III. ENDOMORPHISMES NORMAUX	222
1. Décomposition des endomorphismes normaux	224
2. Représentation des endomorphismes normaux	225
3. Calcul des valeurs propres	226
a. Matrices hermitiennes	226
b. Matrices unitaires	228
c. Matrices normales	229

