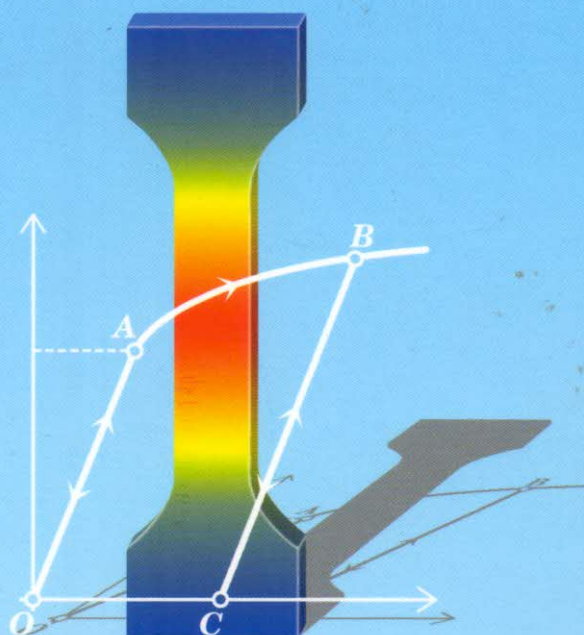


Cours de l'École nationale des ponts et chaussées

Patrick de Buhan

# Plasticité et calcul à la rupture



# Table des matières

|                    |   |
|--------------------|---|
| Avant propos ..... | 3 |
|--------------------|---|

## ÉLASTOPLASTICITÉ

### Chapitre I

#### Le comportement élastoplastique

|                                                                                                              |    |
|--------------------------------------------------------------------------------------------------------------|----|
| 1. Mise en évidence expérimentale du comportement élastoplastique :<br>l'expérience de charge-décharge ..... | 13 |
| 2. Décomposition de la transformation élastoplastique ; notion de configuration relâchée .....               | 18 |
| 3. Critère de plasticité en transformation infinitésimale ; fonction de charge .....                         | 19 |
| 3.1. Domaines d'élasticité initial et actuel et fonction de charge .....                                     | 19 |
| 3.2. Cas des matériaux isotropes .....                                                                       | 21 |
| 4. Formulation de la loi de comportement ; règle d'écoulement plastique .....                                | 22 |
| 4.1. Décomposition additive de la déformation totale linéarisée .....                                        | 22 |
| 4.2. Principe de travail plastique maximal ; règle de normalité .....                                        | 25 |
| 4.3. Le cas de la plasticité parfaite .....                                                                  | 28 |
| 4.4. Cas du matériau isotrope .....                                                                          | 29 |
| 4.5. Formulation « en vitesse » .....                                                                        | 29 |
| 5. Quelques aspects thermodynamiques du comportement élastoplastique .....                                   | 30 |
| Annexe. Deux critères de plasticité usuels : von Mises et Tresca .....                                       | 36 |

### Chapitre II

#### Problèmes d'évolution élastoplastique

|                                                                                         |    |
|-----------------------------------------------------------------------------------------|----|
| 1. Un exemple simple de structure .....                                                 | 43 |
| 1.1. Phase de comportement élastique .....                                              | 45 |
| 1.2. Phase élastoplastique .....                                                        | 46 |
| 1.3. Charge limite et ruine plastique .....                                             | 47 |
| 1.4. Décharge de la structure ; état résiduel .....                                     | 49 |
| 1.5. Récapitulatif .....                                                                | 50 |
| 2. Généralisation au cas des systèmes en milieu continu tridimensionnel .....           | 51 |
| 3. Cas des systèmes soumis à un mode de chargement à un nombre fini de paramètres ..... | 54 |
| 4. Un exemple de résolution : la flexion élastoplastique d'une poutre cylindrique ..... | 56 |
| 4.1. Phase élastique .....                                                              | 57 |
| 4.2. Phase élastoplastique .....                                                        | 58 |
| 4.3. Solution en zone élastique .....                                                   | 59 |
| 4.4. Solution en zones plastiques .....                                                 | 60 |
| 4.5. Analyse de la décharge ; état résiduel .....                                       | 61 |



### Chapitre III

#### Élastoplasticité des systèmes de barres en flexion

|                                                                             |    |
|-----------------------------------------------------------------------------|----|
| 1. Calcul élastoplastique d'une poutre-console sous charge concentrée ..... | 63 |
| 1.1. Phase de comportement élastique .....                                  | 65 |
| 1.2. Phase élastoplastique ; notion de rotule plastique .....               | 66 |
| 1.3. Charge limite et mécanisme de ruine plastique.....                     | 69 |
| 1.4. Phase de décharge et état résiduel.....                                | 70 |
| 2. Méthode de résolution énergétique.....                                   | 73 |
| 2.1. Principe de minimum en contrainte .....                                | 73 |
| 2.2. Retour sur l'exemple de la poutre-console.....                         | 74 |

### Chapitre IV

#### Problèmes d'élastoplasticité avec solutions

|                                                                                                                          |     |
|--------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|-----|
| 1. Comportement (thermo)élastoplastique d'une structure réticulée.....                                                   | 77  |
| 1.1. Chargement mécanique isotherme .....                                                                                | 78  |
| 1.2. Chargement thermique .....                                                                                          | 80  |
| 1.3. Chargement mécanique à partir de l'état résiduel précédent .....                                                    | 82  |
| 2. Analyse élastoplastique de l'essai de compression simple d'une éprouvette .....                                       | 83  |
| 2.1. Phase élastique .....                                                                                               | 84  |
| 2.2. Charge limite et écoulement plastique libre.....                                                                    | 85  |
| 3. Compression isotrope en déformation plane d'un cube.....                                                              | 91  |
| 3.1. Phase élastique .....                                                                                               | 91  |
| 3.2. Phase élastoplastique.....                                                                                          | 92  |
| 3.3. Phase de déchargement .....                                                                                         | 92  |
| 4. Simulation du tassement d'un massif de sol élastoplastique .....                                                      | 94  |
| 4.1. Définition de l'état initial .....                                                                                  | 94  |
| 4.2. Tassement en phase élastique.....                                                                                   | 95  |
| 4.3. Phase élastoplastique.....                                                                                          | 95  |
| 4.4. Phase de décharge .....                                                                                             | 97  |
| 4.5. Application numérique .....                                                                                         | 98  |
| 5. Comportement d'un composite sous chargement thermique.....                                                            | 99  |
| 5.1. Phase thermoélastique.....                                                                                          | 100 |
| 5.2. Phase thermoélastoplastique .....                                                                                   | 101 |
| 5.3. Phase « thermoplastique ».....                                                                                      | 105 |
| 6. Comportement élastoplastique d'un tube sous pression : application à la modélisation de l'essai pressiométrique ..... | 107 |
| 6.1. Phase de comportement élastique .....                                                                               | 107 |
| 6.2. Phase de comportement élastoplastique.....                                                                          | 108 |
| 6.3. Décharge ; état résiduel .....                                                                                      | 111 |
| 7. Convergence d'une galerie souterraine.....                                                                            | 113 |
| 7.1. Phase de comportement élastique .....                                                                               | 115 |
| 7.2. Phase de comportement élastoplastique.....                                                                          | 115 |
| 7.3. Convergence d'un tunnel .....                                                                                       | 119 |

|                                                                                                       |     |
|-------------------------------------------------------------------------------------------------------|-----|
| 8. Torsion d'un arbre cylindrique.....                                                                | 121 |
| 8.1. Phase élastique .....                                                                            | 122 |
| 8.2. Phase élastoplastique.....                                                                       | 123 |
| 8.3. Décharge ; état résiduel .....                                                                   | 125 |
| 9. Comportement d'un fil en traction-torsion : interprétation du phénomène<br>de « relaxation » ..... | 126 |
| 9.1. Évolution élastique.....                                                                         | 126 |
| 9.2. Comportement sous sollicitation de traction-torsion .....                                        | 128 |
| 9.3. Cas du matériau élastiquement incompressible .....                                               | 129 |
| 9.4. Exploitation des résultats .....                                                                 | 130 |
| 10. Structure sous chargement thermique .....                                                         | 132 |
| 10.1. Phase de comportement élastique .....                                                           | 133 |
| 10.2. Phase élastoplastique.....                                                                      | 133 |
| 10.3. Phase de refroidissement.....                                                                   | 134 |
| 11. Calcul d'un portique en élastoplasticité .....                                                    | 136 |
| 11.1. Analyse statique.....                                                                           | 136 |
| 11.2. Calcul élastique .....                                                                          | 137 |
| 11.3. Évolution élastoplastique .....                                                                 | 138 |
| 11.4. Charge limite et mécanisme de ruine plastique.....                                              | 139 |
| 11.5. Décharge et état résiduel de la structure.....                                                  | 140 |
| 11.6. Interprétation de l'état résiduel .....                                                         | 141 |

## CALCUL À LA RUPTURE

### Chapitre V

#### De l'élastoplasticité au calcul à la rupture : l'exemple des systèmes de poutres en flexion

|                                                                                                           |     |
|-----------------------------------------------------------------------------------------------------------|-----|
| 1. Charge limite d'une structure simple .....                                                             | 145 |
| 2. De l'analyse limite au calcul à la rupture.....                                                        | 147 |
| 3. Calcul à la rupture de structures planes chargées dans leur plan : approche statique .....             | 149 |
| 4. Expression du principe des puissances virtuelles pour un système de poutres droites<br>en flexion..... | 150 |
| 5. Approche cinématique : notion de puissance résistante maximale .....                                   | 151 |
| 6. Retour sur l'exemple de la poutre-console .....                                                        | 153 |
| 7. Application au cas des systèmes plans soumis à des charges concentrées .....                           | 154 |
| 8. Un exemple de calcul de la charge de ruine d'un portique.....                                          | 158 |

### Chapitre VI

#### Calcul à la rupture des systèmes en milieu continu 3D

|                                                                          |     |
|--------------------------------------------------------------------------|-----|
| 1. Domaine $K$ des chargements potentiellement supportables.....         | 161 |
| 2. Approche statique par l'intérieur de $K$ .....                        | 162 |
| 3. Un exemple illustratif : l'essai de compression d'une éprouvette..... | 164 |

|                                                                                                            |     |
|------------------------------------------------------------------------------------------------------------|-----|
| 4. Approche statique par l'extérieur .....                                                                 | 165 |
| 5. Dualisation par les puissances virtuelles : le principe de l'approche cinématique par l'extérieur ..... | 168 |
| 6. Calcul des fonctions « $\pi$ » : condition de pertinence des champs de vitesse .....                    | 170 |
| 6.1. Matériau de Tresca .....                                                                              | 170 |
| 6.2. Matériau de Coulomb .....                                                                             | 171 |
| 7. Fonctions « $\pi$ » pour les critères usuels .....                                                      | 172 |
| 8. Retour sur l'exemple de la compression simple de l'éprouvette .....                                     | 173 |
| 8.1. Approche cinématique par champs de déformation homogènes .....                                        | 173 |
| 8.2. Approche cinématique par champs de vitesse « par blocs » .....                                        | 173 |
| 8.3. Cas du matériau de Coulomb .....                                                                      | 174 |

## Chapitre VII

### Calcul à la rupture des plaques et dalles minces en flexion

|                                                                                             |     |
|---------------------------------------------------------------------------------------------|-----|
| 1. Le modèle « plaque » : efforts intérieurs et extérieurs ; équations de la statique ..... | 179 |
| 2. Critères de résistance et position d'un problème de calcul à la rupture .....            | 182 |
| 3. L'approche cinématique par l'extérieur .....                                             | 183 |
| 3.1. Principe des puissances virtuelles .....                                               | 183 |
| 3.2. Approche cinématique par l'extérieur .....                                             | 185 |
| 3.3. Prise en compte des « charnières » .....                                               | 187 |
| 4. Un exemple de mise en œuvre .....                                                        | 189 |

## Chapitre VIII

### Problèmes de calcul à la rupture avec solutions

|                                                                                                                    |     |
|--------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|-----|
| 1. Charge de ruine d'une structure fléchie .....                                                                   | 195 |
| 2. Poutre-console sous charge répartie .....                                                                       | 197 |
| 3. Charge de ruine d'un portique en forme d'arc circulaire .....                                                   | 200 |
| 3.1. Approche statique par l'intérieur .....                                                                       | 200 |
| 3.2. Approche cinématique par l'extérieur .....                                                                    | 201 |
| 4. Essai de compression simple en présence de la pesanteur .....                                                   | 203 |
| 4.1. Paramétrage de chargement du système .....                                                                    | 203 |
| 4.2. Définition du chargement extrême .....                                                                        | 204 |
| 4.3. Approche statique par l'intérieur .....                                                                       | 204 |
| 4.4. Approches cinématiques par l'extérieur .....                                                                  | 205 |
| 4.5. Interprétation et commentaires .....                                                                          | 207 |
| 5. Critère de résistance d'une poutre soumise à une sollicitation combinée de traction (compression)-flexion ..... | 208 |
| 5.1. Mode de chargement et définition du domaine $K$ .....                                                         | 208 |
| 5.2. Approche statique par l'intérieur .....                                                                       | 209 |
| 5.3. Approche cinématique par l'extérieur .....                                                                    | 210 |



|                                                                                                        |     |
|--------------------------------------------------------------------------------------------------------|-----|
| 6. Capacité portante d'un massif en sol purement cohérent .....                                        | 212 |
| 6.1. Approches statiques par l'intérieur.....                                                          | 213 |
| 6.2. Approches cinématiques par l'extérieur.....                                                       | 215 |
| 6.3. Prise en compte de la pesanteur .....                                                             | 218 |
| 7. Analyse de stabilité sous poids propre d'un talus vertical .....                                    | 219 |
| 7.1. Approche statique par l'intérieur.....                                                            | 220 |
| 7.2. Approches cinématiques par l'extérieur.....                                                       | 222 |
| 7.3. Prise en compte d'un renforcement.....                                                            | 224 |
| 8. Coefficients de poussée et de butée d'un sol sur une paroi.....                                     | 227 |
| 8.1. Paramètres de chargement du système.....                                                          | 227 |
| 8.2. Approche statique par l'intérieur.....                                                            | 228 |
| 8.3. Approche cinématique par l'extérieur .....                                                        | 229 |
| 9. Pression limite d'un tube circulaire .....                                                          | 231 |
| 9.1. Approche statique par l'intérieur.....                                                            | 231 |
| 9.2. Approche cinématique par l'extérieur .....                                                        | 232 |
| 10. Modélisation d'un procédé d'extrusion .....                                                        | 234 |
| 10.1. Préliminaire .....                                                                               | 234 |
| 10.2. Approches statiques par l'intérieur.....                                                         | 235 |
| 10.3. Approche cinématique par l'extérieur.....                                                        | 236 |
| 11. Stabilité d'une galerie souterraine.....                                                           | 238 |
| 11.1. Approche statique par l'intérieur.....                                                           | 238 |
| 11.2. Approches cinématiques par l'extérieur .....                                                     | 239 |
| 12. Vitesse limite d'un anneau en rotation.....                                                        | 242 |
| 12.1. Approche statique par l'intérieur.....                                                           | 242 |
| 12.2. Approches cinématiques par l'intérieur .....                                                     | 243 |
| 12.3. Encadrement de la vitesse limite de rotation.....                                                | 244 |
| 13. Capacité portante d'un sol avec prise en compte de la résistance<br>de la dalle de fondation ..... | 245 |
| 13.1. Généralités.....                                                                                 | 246 |
| 13.2. Approche statique par l'intérieur.....                                                           | 247 |
| 13.3. Approche cinématique par l'extérieur.....                                                        | 248 |
| 13.4. Récapitulatif des résultats .....                                                                | 250 |
| 14. Évaluations de la charge de ruine de dalles minces par la méthode cinématique.....                 | 251 |
| 14.1. Dalle rectangulaire .....                                                                        | 251 |
| 14.2. Dalle carrée en appui ponctuel.....                                                              | 254 |
| 14.3. Dalle triangulaire en appui unilatéral .....                                                     | 255 |
| 15. Charge de ruine d'un dalle circulaire.....                                                         | 257 |
| 15.1. Approche cinématique par l'extérieur à l'aide d'un mécanisme de cône .....                       | 257 |
| 15.2. Approche statique par l'intérieur.....                                                           | 259 |
| 15.3. Cas particuliers.....                                                                            | 260 |
| Bibliographie sommaire.....                                                                            | 263 |