

A. MANSOURI

M.K. BELBAHI

425

ELEMENTS D'ANALYSE

COURS ET EXERCICES RESOLUS

PREMIER CYCLE UNIVERSITAIRE

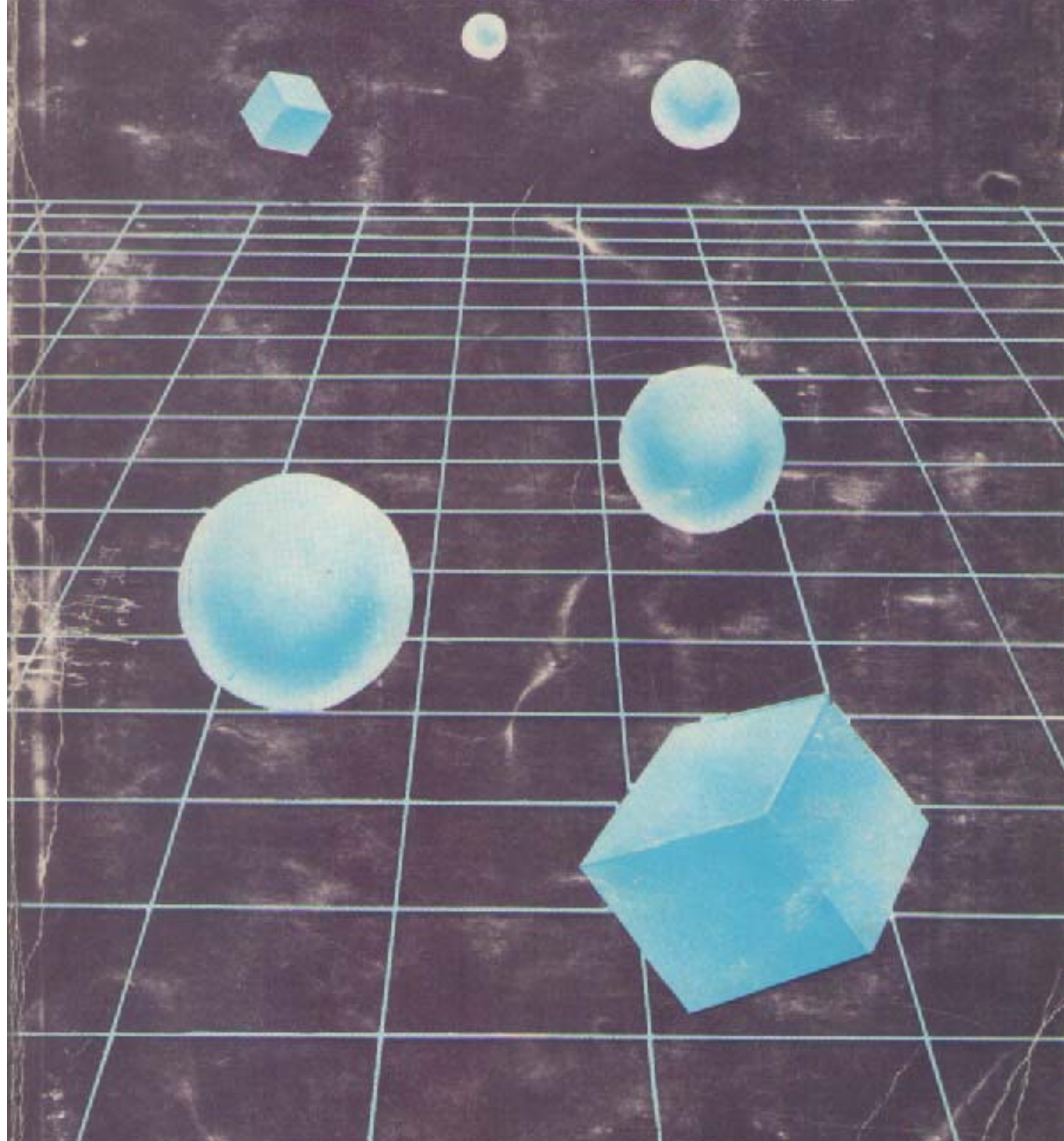


TABLE DES MATIERES

CHAPITRE I: Analyse Vectorielle.

1. Champ Scalaire

1.1. Définition	10
1.2. Lignes isoscalaires	10
1.3. Liaison entre champ scalaire et fonction de plusieurs variables	11

2. Champ de vecteurs

2.1. Définition	13
2.2. Lignes de champ	13
2.3. Liaison entre champ de vecteurs et fonction vectorielle	14

3. Intégrale curviligne.

Intégrale de surface. Circulation et flux	15
3.1. Intégrale curviligne	15
3.2. Circulation scalaire d'un vecteur le long d'un arc orienté	16
3.3. Intégrale de surface	17
3.4. Flux d'un vecteur à travers une surface	18

4. Fonction de points pour un champ scalaire et un champ de vecteurs

4.1. Gradient d'un scalaire en un point	19
4.2. Divergence d'un vecteur en un point	24
4.3. Rotationnel d'un vecteur en un point	28

4. Exercices corrigés

33

CHAPITRE II: Séries

1. Séries numériques

1.1. Convergence d'une série numérique	43
1.2. Critères essentiels de convergence et de divergence des séries à termes positifs	47
1.3. Séries alternées. Théorème de Leibniz	51
1.4. Série à termes de signes quelconques. Convergence absolue et semi-convergence	52

TABLE DES MATIERES

CHAPITRE I. Analyse Vectorielle.

1. Champ Scalaire	10
1.1. Définition	10
1.2. Lignes isoscalaires	10
1.3. Liaison entre champ scalaire et fonction de plusieurs variables	11
2. Champ de vecteurs	13
2.1. Définition	13
2.2. Lignes de champ	13
2.3. Liaison entre champ de vecteurs et fonction vectorielle	14
3. Intégrale curviligne.	15
Intégrale de surface, Circulation et flux	15
3.1. Intégrale curviligne	15
3.2. Circulation scalaire d'un vecteur le long d'un arc orienté	16
3.3. Intégrale de surface	17
3.4. Flux d'un vecteur à travers une surface	18
4. Fonction de points pour un champ scalaire et un champ de vecteurs	19
4.1. Gradient d'un scalaire en un point	19
4.2. Divergence d'un vecteur en un point	24
4.3. Rotationnel d'un vecteur en un point	28
4. Exercices corrigés	31

CHAPITRE II. Séries

1. Séries numériques	43
1.1. Convergence d'une série numérique	43
1.2. Critères essentiels de convergence et de divergence des séries à termes positifs	47
1.3. Séries alternées. Théorème de Leibniz	51
1.4. Série à termes de signes quelconques. Convergence absolue et semi-convergence	52

1.5.Séries à termes complexes	56
1.6.Opérations algébriques sur les séries	56
2.Séries de fonctions	57
2.1.Définitions	57
2.2.Propriétés des séries de fonctions	59
2.2.1.Convergence simple	
2.2.2.Convergence uniforme	59
2.2.3.Critères de convergence	61
2.2.4.Séries majorantes	
2.2.5.Critère de convergence normale	61
2.2.6.Propriétés générales	62
3.Exercices corrigés	65

CHAPITRE III: Les intégrales multiples

1.Intégrales doubles	76
1.1.Somme intégrale et intégrale double	76
1.2.Propriétés de l'intégrale double	77
1.3.Calcul des intégrales doubles en coordonnées cartésiennes	77
2.Changement de variables dans l'intégrale double	80
2.1.Changement de variables: $x = \rho \cos \theta, y = \rho \sin \theta$	80
2.2.Changement de variable: $x = x(u, v), y = y(u, v)$	83
3.Intégrales triples	84
3.1.Définition	84
3.2.Propriétés	84
3.3.Calcul des intégrales triples en coordonnées cartésiennes	85
3.4.Centre de gravité d'un volume	86
3.5.Changement de variables dans une intégrale triple:	
$x = x(u, v, w), y = y(u, v, w), z = z(u, v, w)$	86
4.Exercices corrigés	89

CHAPITRE IV: Intégrale curviligne.

Intégrale de surface

1. Intégrale curviligne	96
2. Intégrale de surface	102
2.1. Notion de surface	102
2.2. Intégrale de surface	107
3. Formules de Stokes et d'Ostrogradsky	
3.1. Formule de Green-Riemann	110
3.2. Formule de Stokes	113
3.3. Formule d'Ostrogradsky	117
4. Exercices corrigés	120

CHAPITRE V: Equations différentielles

1. Définition	126
2. Théorème d'existence et d'unicité de la solution d'une équation différentielle du premier ordre	127
2.1. Fonction lipschitzienne	127
2.2. Théorème d'existence et d'unicité	128
3. Equations différentielles d'ordre supérieur	134
3.1. Définition	134
3.2. Cas d'une fonction linéaire	134
3.3. Théorème	134
3.4. Equations différentielles du second ordre	134
4. Exercices corrigés	140

CHAPITRE VI: Notions sur les distributions

1. Mesure et intégration	149
1.1. Algèbre Tribu	149
1.2. Mesure sur une tribu	149
1.3. Intégration de Lebesgue	150
1.4. Propriétés	152
1.5. Espaces L^r	154
1.6. Les mesures en tant que fonctionnelles linéaires	154

2. Distributions	156
2.1. Exemple de distributions de charge électrostatique	156
2.2. Espace vectoriel D	157
2.3. Les distributions	159
2.4. Opérations sur les distributions	161
2.5. Convergence	164
3. Exercices corrigés	166
 <u>CHAPITRE VII: Les séries de Fourier</u>	
1. Les séries trigonométriques	172
1.1. Définition	172
1.2. Convergence	172
1.3. Calcul des coefficients	173
1.4. Remarque sur les formules de calcul des coefficients	173
1.5. Généralisation	173
2. Les séries de Fourier	175
2.1. Définition	175
2.2. Théorème de Dirichlet	175
3. Exercices corrigés	176
 <u>CHAPITRE VIII: Les transformations de Fourier</u>	
1. Intégrale de Fourier	184
2. Forme complexe de l'intégrale de Fourier	185
3. Transformations de Fourier	185
4. Interprétation de la TF des fonctions non périodiques	186
5. Propriétés de la TF	187
5.1. Inversion	187
5.2. Linéarité	187
5.3. Similitude	187

5.4. Translation	188
5.5. Dérivation	188
5.6. Convoilution	188

6. Exercices corrigés	191
-----------------------	-----

CHAPITRE IX: Transformation de Laplace

1. Définition et existence	194
1.1. Généralités	194
1.2. Fonctions d'ordre exponentiel	
2. Propriétés	196
2.1. Linéarité	196
2.2. Homothétie	197
2.3. Dérivation	197
2.4. Intégration	198
2.5. Propositions	198
2.6. Théorème du retard	199
3. Applications	
3.1. Equations différentielles	199
3.2. Systèmes différentiels	200
4. Exercices corrigés	204

CHAPITRE X: Equations aux dérivées partielles du second ordre

1. Classification	
2. Problèmes aux limites	211
2.1. Problème elliptique	211
2.2. Problème hyperbolique	212
2.3. Problème parabolique	212
3. Méthode de séparation des variables	

4. Cas de la corde vibrante	213
4.1. Méthode des caractéristiques	213
4.2. Méthode de séparation des variables	214
5. Equation de la chaleur	
5.1. Problème de Cauchy	216
5.2. Problème aux limites	216
6. Exercices corrigés	219

CHAPITRE XI: Calcul des variations

1. Problème de la brachistochrone	225
2. Problème pour une intégrale multiple	226
3. Lemmes fondamentaux	227
4. Equation d'Euler dans le cas simple	227
5. Equation d'Euler dans le cas d'une fonctionnelle $\mathcal{J}$ du type $\mathcal{J} = \int_{x_0}^x f(x, y, y', \dots, y^{(n)}) dx = 0$	228
6. Equation d'Euler dans le cas d'une fonctionnelle $\mathcal{J}$ du type $\mathcal{J} = \int_{x_0}^x f(x, x_1, \dots, x_n, x_1', x_2', \dots, x_n') dx = 0$	229
7. Extremes liés. Problèmes isopérimétriques	229
8. Remarques relatives aux équations d'Euler	
9. Exercices corrigés	

CHAPITRE XII: Exercices et problèmes non résolus.