

Agrégation
de mathématiques

ÉLÉMENTS D'ANALYSE

2^e édition

Hervé Queffélec
Claude Zuily

DUNOD

Table des matières

Avant-propos	XV
Chapitre I – Notion de plus petite et de plus grande limite	1
I. Introduction	1
II. Théorèmes et définitions	1
1. Limite supérieure et limite inférieure	1
2. Passage à la $\overline{\lim}$ ou $\underline{\lim}$ dans une inégalité	3
III. Applications	5
1. Suites sous-additives	5
2. Un théorème taubérien	6
IV. Énoncés des exercices	8
V. Indications	9
VI. Solutions des exercices	9
Chapitre II – Compléments sur les séries et les séries de fonctions	15
I. Formule d'Abel et applications	15
1. Formule d'Abel. Exemples	15
2. Prolongement de la fonction ζ au demi plan $\operatorname{Re} s > 0$ privé de $\{1\}$	20
3. La fonction θ	20
4. Application aux nombres premiers	21
II. Les séries de Dirichlet	23
1. Abcisses de convergence et de convergence absolue	23
2. Holomorphie	25
3. Produit de Dirichlet	27
III. Retour sur la fonction ζ	28
1. Prolongement holomorphe de la fonction ζ à $\mathbb{C} \setminus \{1\}$	28
2. Commentaires	31
IV. Énoncés des exercices	31
V. Solutions des exercices	34
Chapitre III – Séries entières, propriétés de la somme	40
I. Rappels, définitions, notations	40
1. Rayon de convergence	40
2. Théorème d'Abel non tangentiel	41
II. Propriétés de la somme d'une série entière à l'intérieur du disque de convergence	44
III. Convergence uniforme dans tout le disque de convergence	46
1. Conditions nécessaires de convergence uniforme	46
2. Séries entières uniformément non normalement convergentes	47
IV. Comportement de la somme au voisinage d'un point du cercle de convergence	49
1. Points réguliers et points singuliers	49
2. Critères de régularité	52
3. Séries entières à coefficients positifs	53

4. Séries entières à coefficients lacunaires	54
V. <i>Enoncés des exercices</i>	55
VI. <i>Indications</i>	58
VII. <i>Solutions des exercices</i>	59
Chapitre IV – Séries de Fourier, applications	68
I. <i>Introduction, définitions, premières propriétés</i>	68
1. Fonctions périodiques	68
2. Définitions	68
3. Premières propriétés	70
a) Les espaces U, A, L^1, L^p	70
b) Premières règles de calcul	71
c) Propriétés de $f \mapsto \gamma(f)$	72
II. <i>Les principaux "noyaux" trigonométriques</i>	74
1. Deux définitions	74
2. Le noyau de Dirichlet	74
3. Le noyau de Fejér	76
4. Le noyau de Gibbs	77
5. Le noyau de Jackson	78
III. <i>Les principaux théorèmes de convergence, premières applications</i>	79
1. Les premières difficultés et la solution de Fejér	79
2. Premières applications du théorème de Fejér	83
3. Le théorème de Dirichlet	86
IV. <i>Exemples de développements en série de Fourier</i>	87
1. Remarques préliminaires	87
2. Exemples de développements en série de Fourier	88
V. <i>Comparaison entre le comportement d'une fonction et celui de ses coefficients de Fourier</i>	95
1. Définitions préliminaires	95
2. Théorème de comparaison	95
VI. <i>Applications diverses des séries de Fourier</i>	100
1. Inégalité de Bernstein	100
2. Inégalité isopérimétrique	101
3. Application à la résolution d'équations aux dérivées partielles	103
4. Fonctions continues partout sans dérivée	107
a) Une classe de séries lacunaires sans dérivée	107
b) Modules de continuité	110
c) Fonctions partout sans dérivée arbitrairement proches de $C^{0,1}$	111
VII. <i>Enoncés des exercices</i>	114
VIII. <i>Indications</i>	118
IX. <i>Solutions des exercices</i>	120
Chapitre V – Compacité	131
I. <i>Rappels sur les espaces métriques, définitions et notations</i>	131
1. Métriques comparables, métriques complètes	131

2. Précompacité	132
II. Critère fondamentaux de compacité, convergence des suites, dimension métrique	134
1. Le critère fondamental de compacité	134
2. Suites convergentes, dimension métrique	137
a) Rappel.....	137
b) Dimension métrique	138
3. Etude détaillée de quelques exemples	138
4. Le théorème de Tychonoff et ses applications	143
a) Le théorème de Tychonoff	143
b) Le théorème de Banach-Alaoglu	145
c) Un théorème de point fixe	146
III. Le théorème d'Ascoli et quelques applications	147
1. Le théorème d'Ascoli	147
2. Le théorème des familles normales.....	150
a) L'espace métrique $H(\Omega)$	150
b) Le théorème.....	152
c) Une application du théorème des familles normales	153
IV. Compacité dans un espace de Banach E	156
1. Enveloppe convexe d'une partie compacte	156
2. Description des compacts d'un espace de Banach.....	158
3. Bases pseudo-orthonormées.....	159
V. Applications linéaires compactes	160
1. L'idéal bilatère $K(E)$	160
2. Un critère de compacité	162
3. Exemples d'applications linéaires compactes.....	163
4. Adjoint d'une application linéaire compacte	165
5. Couples (E, F) tels que $\mathcal{L}(E, F) = K(E, F)$	166
VI. Etude individuelle d'un opérateur compact	167
1. Rappels de théorie spectrale.....	167
2. Un lemme fondamental	168
3. Applications injectives d'image fermée	168
4. Ascente et descente d'un opérateur	169
5. Perturbations compactes de l'identité.....	170
6. Spectre ponctuel d'un opérateur compact	172
7. Etude spectrale d'un opérateur compact	173
8. Une application des opérateurs compacts à l'Analyse	175
VII. Enoncés des exercices	175
VIII. Indications	180
IX. Solutions des exercices	183
Chapitre VI – Espaces vectoriels normés	193
1. Introduction	193
II. Théorèmes généraux	195
1. Le théorème de Banach-Steinhaus	195

2. Le théorème de l'application ouverte	196
3. Le théorème du graphe fermé	199
4. Les théorèmes de Hahn-Banach	199
a) La forme analytique	199
b) La forme géométrique	201
III. Exemples d'espaces de Banach et de leurs duaux	202
1. Supplémentaire d'un sous-espace fermé	202
a) Sous-espaces de ℓ^∞	202
b) Sous-espaces de C	206
2. Suites faiblement convergentes	207
3. Rappels sur les espaces ℓ^p	209
IV. Espaces de Hilbert	210
1. Propriétés générales	210
2. Une application	211
V. Topologies faible et préfaible	213
1. Le théorème général de Banach-Alaoglu	213
2. Une application de la topologie faible	213
VI. Énoncés des exercices	217
VII. Indications	220
VIII. Solutions des exercices	222
Chapitre VII – Espaces vectoriels normés de dimension finie	232
I. Introduction et définitions	232
II. Normes sur K^n	232
1. Parties compactes de K^n	232
2. Normes équivalentes	234
3. Compacité de la boule unité	235
4. Description géométrique des normes	236
III. Normes sur E	237
IV. Exemples	238
1. Inégalité de Khintchine	238
2. Polynômes trigonométriques	240
3. Opérateurs	241
V. Applications	242
1. Théorème de Riesz	242
2. Continuité automatique	243
VI. Énoncés des exercices	244
VII. Indications	246
VIII. Solutions des exercices	246
Chapitre VIII – Espaces fonctionnels	250
I. Les espaces $C^k(\Omega)$, Ω ouvert de $\mathbb{R}^n$	250
1. Espaces $C^k(\Omega)$, $k \in \mathbb{N}$	250
a) Définitions	250

b) Formule de Leibniz.....	251
c) Formule de Faà-di-Bruno	251
d) Topologie. Métrisabilité. Complétude	251
e) Non normabilité.....	254
2. L'espace $C^\infty(\Omega)$	255
a) Topologie. Métrisabilité. Complétude	255
b) Propriété de Montel	255
c) Non normabilité.....	257
3. L'espace $C_b^k(\Omega)$, Ω ouvert de $\mathbb{R}^n$	257
4. Autour de la continuité et de la dérivabilité	258
a) Points de continuité d'une fonction	258
b) Application	258
c) Points de continuité de la limite simple d'une suite de fonctions.....	260
d) Construction d'une fonction continue nulle part dérivable.....	261
e) Densité dans C^0 des fonctions continues nulle part dérivables.....	263
II. Les espaces $C^k(F)$, $k \in \mathbb{N}$ F fermé de $\mathbb{R}^n$	264
1. Définition. Normabilité. Complétude	264
2. Propriétés des espaces $C^k(F)$	267
III. Les espaces de Hölder	268
1. Les espaces $C^{0,\alpha}(\Omega)$	269
a) Définitions et exemples.....	269
b) Propriétés des espaces $C^{0,\alpha}(\Omega)$	270
2. Applications	273
a) Régularité de la fonction nulle part dérivable de I.4.d)	273
b) Régularité des fonction convexes	275
3. Les espaces $C^{k,\alpha}(\Omega)$, $k \in \mathbb{N}$	275
a) Propriétés.....	275
4. Résolution d'équations différentielles dans les espaces de Hölder	279
IV. Fonctions réel-analytiques	283
1. Généralités et exemples	283
2. Opérations sur les fonctions réel-analytiques	284
3. Lien avec les séries entières	286
4. Exemples	288
a) Lemme de Bernstein	288
b) Lemme de Borel	288
5. Principe du prolongement analytique	290
6. Lien avec les fonctions holomorphes.....	291
7. Commentaires.....	291
V. Énoncés des exercices	291
VI. Solutions des exercices	295
Chapitre IX – Etude des fonctions définies par des intégrales	299
1. Etude de la régularité	299
1. Rappels	299

a) Continuité.....	299
b) Dérivabilité.....	300
c) Holomorphie.....	301
d) Cas des intégrales semi-convergentes.....	301
e) Démonstrations des théorèmes.....	303
II. Exemples et premières applications.....	305
1. La fonction Gamma.....	305
a) Prolongement de la fonction Γ au plan complexe.....	306
2. Exemples.....	308
III. Le produit de convolution.....	311
1. Définitions et premières propriétés.....	311
2. Applications de la convolution.....	314
a) Construction de fonctions plateaux.....	314
b) Théorèmes de densité.....	316
IV. La transformée de Fourier.....	320
V. Etude de la fonction d'Airy.....	325
VI. Etude asymptotique.....	331
1. La méthode de Laplace.....	331
a) Application : formule de Stirling.....	333
2. La méthode de la phase stationnaire.....	334
a) Application : étude asymptotique de la fonction d'Airy.....	339
VII. Enoncés des exercices.....	342
VIII. Solutions des exercices.....	343
Chapitre X – Equations différentielles.....	346
1. Généralités.....	346
1. Définitions.....	346
2. Le lemme de Gronwall.....	347
II. Théorie locale.....	348
1. Existence et unicité.....	348
a) Le théorème de Cauchy Lipschitz précisé.....	348
b) Le théorème de Arzela-Péano.....	351
2. Dépendance par rapport aux paramètres et aux données initiales.....	355
a) Continuité.....	355
b) Dérivabilité.....	357
c) Différentiabilité d'ordre supérieur.....	360
d) Application : redressement des champs de vecteurs.....	361
e) Commentaires.....	362
III. Théorie globale.....	363
1. Existence et unicité de la solution maximale.....	363
2. Critère de prolongement.....	364
3. Exemples et applications.....	366
IV. Introduction à l'étude qualitative des systèmes différentiels autonomes.....	373
1. Introduction.....	373

2. Définitions et notations	374
3. Etude qualitative des systèmes linéaires dans $\mathbb{R}^2$	375
4. Etude des systèmes non linéaires au voisinage d'un point d'équilibre	379
a) Stabilité des solutions	380
b) Le théorème de linéarisation	382
5. Méthode d'étude géométrique des systèmes 2×2	383
a) Protocole d'étude	383
b) Affinement du protocole	386
V. Application : un théorème de Hadamard	391
VI. Equations différentielles $y'' + py' + qy = r$	395
1. Introduction, définition, rappels	395
2. Zéros des solutions	396
3. Développement en série entière des solutions	400
4. Stabilité. Equation de Hill-Mathieu	402
VII. Enoncés des exercices	415
VIII. Solutions des exercices	429
Chapitre XI – Principes du maximum et applications	455
0. Introduction	455
I. Les principes du maximum	455
1. Le principe du maximum faible	456
2. Le principe du maximum fort	457
3. Extensions	461
II. Applications	462
1. Application aux fonctions holomorphes	462
2. Application au problème de Dirichlet	463
3. Le théorème des trois cercles de Hadamard	464
4. Le théorème des trois droites	466
5. Le théorème de Riesz-Thorin	467
6. Applications du théorème de Riesz-Thorin	472
a) Transformée de Fourier	472
b) Convolution	473
Chapitre XII – Le théorème des nombres premiers	474
1. La fonction dzéta de Riemann	474
2. Les fonctions φ et Φ	477
3. Preuves du théorème des nombres premiers et du corollaire	481
4. Preuve du lemme 2.5	482
Chapitre XIII – Théorèmes limites en Probabilité. Applications à l'Analyse ..	486
1. Rappels et compléments	486
1. Le modèle de Kolmogorov	486
a) Définitions	486
b) Théorème d'unicité; semi-continuité	487
c) Espace produit et fubinisation	488

d) Variable aléatoire et loi image.....	489
e) Probabilité conditionnelle	490
f) Espérance, variance, fonction caractéristique	490
g) Inégalités de Markov et de Tchebycheff.....	492
2. Le concept d'indépendance	493
a) Définitions.....	493
b) Critères d'indépendance	494
c) Modèles pour l'indépendance et structure produit	
d) Le lemme de Borel-Cantelli et loi du zéro-un	
3. Lois classiques.....	
a) L'air du catalogue	
b) Lois gaussiennes	
4. Inégalités fondamentales.....	
a) Inégalité de Paley-Zygmund	
b) Inégalités de Khintchine pour les Rademacher.....	
c) Inégalités de Khintchine pour variables centrées bornées.....	
d) Théorème de majoration	
e) Théorème de minoration	
II. Convergences et outils associés	
1. Convergence en probabilité	
a) Définitions et propriétés	
b) Loi faible des grands nombres.....	
c) Polynômes de Bernstein.....	
2. Convergence presque sûre	
a) Définition et propriétés	
b) Inégalités maximales.....	
c) Théorèmes de Kolmogorov	
d) Loi forte des grands nombres.....	
e) Loi du logarithme itéré.....	
3. Convergence en loi	
a) Définitions équivalentes	
b) Théorème de P. Lévy.....	
c) Comparaison des modes de convergence	
d) Théorème central limite	
III. Applications des Probabilités à l'Analyse	
1. Séries entières avec une coupure.....	
2. Suites équidistribuées sur un compact	
3. Sommes tronquées de l'exponentielle.....	
4. Sous-espaces hilbertiens de ℓ^2_∞	
5. Conjecture de Bloch-Nevalinna	
6. Nombres normaux	
7. Séries trigonométriques lacunaires	
IV. Enoncés des exercices	
V. Solutions des exercices	
Bibliographie	
Index	

CAPES/AGREG

Hervé Queffélec
Claude Zuily

ÉLÉMENTS D'ANALYSE

La préparation à l'agrégation constitue généralement une période de bilan et de synthèse. Elle est aussi l'occasion, pour le futur candidat, d'enrichir et de dépasser les connaissances de base qu'il a acquises au cours de ses précédentes années d'étude. L'objectif de ce livre d'analyse est de tenter de l'aider dans cette tâche, en lui proposant :

- des développements rigoureux sur des thèmes classiques tels que la notion de limite supérieure, la précompacité, la théorie globale des systèmes différentiels non linéaires, etc.
- de nombreux exemples et applications originaux : fonction d'Airy, équations de Hill-Mathieu, sommes de Gauss, etc.
- des compléments ouvrant la voie à des théories plus avancées comme le principe du maximum, l'interpolation, la géométrie des Banach, etc.
- enfin, plus de cent trente exercices et problèmes tous entièrement corrigés.

Dans cette deuxième édition revue et augmentée, les auteurs ont, d'une part, simplifié et complété un certain nombre de preuves et d'énoncés et, d'autre part, ajouté un chapitre sur la théorie des nombres et un chapitre sur les probabilités, afin de répondre de façon optimale aux exigences du concours.

Conçu initialement pour les agrégatifs, cet ouvrage pourra également être utilisé avec profit par les étudiants en licence et en maîtrise de mathématiques.

HERVÉ QUEFFÉLEC
est professeur à
l'université de Lille 1.

CLAUDE ZUILY
est professeur à
l'université de
Paris XI-Orsay.



9 782100 065356

ISBN 2 10 006535 1

<http://www.dunod.com>

