

République Algérienne Démocratique et Populaire
Ministère de l'enseignement supérieur et de la recherche scientifique
UNIVERSITE SAAD DAHLEB BLIDA



Faculté de technologie

Département de mécanique

Mémoire de fin d'études

En vue de l'obtention du diplôme master

En conception mécanique

Thème :

***Recherche de la branche uniforme pour le calcul du
facteur d'intensité de contrainte en mode III***

Présenté par :

ALIOUSALAH

M'hamed karim

Encadré par :

Mr FERDJANI Hicheme

2012/2013

Remerciements

J'adresse mes plus grands remerciements à mes parents qui ont tellement sacrifié pour moi pendant toutes ces longues années et qui ont fait des efforts surhumains pour me permettre d'être là aujourd'hui. Un grand merci à vous et à mes deux frères.

Je témoigne toute ma gratitude envers Monsieur Ferdjani, mon promoteur, pour sa très grande disponibilité et son grand intérêt pour mon travail. Ses connaissances, sa rigueur scientifique et son expérience ont été exemplaire et m'ont permises de faire mon travail dans d'excellentes conditions.

J'aimerai aussi remercier tous les enseignants du département mécanique (USDB), et spécialement ceux de ma spécialité pour les efforts colossaux qu'ils ont fournis afin de nous instruire au mieux.

Aussi je veux remercier tous mes amis qui m'ont tellement aidé au cours de ces dernières années sans contrepartie et je leur serai reconnaissant ma vie entière.

Introduction :

Introduction :

Dans la mécanique de la rupture fragile, les contraintes sont singulières en pointe de fissure. Cette singularité est quantifiée par le Facteur d'Intensité de Contrainte (FIC). Le calcul du FIC est très important car il permet d'estimer la dangerosité d'une fissure pour une structure donnée. Cette estimation est basée sur l'application des critères de rupture directement liés au FIC.

Il existe plusieurs méthodes théoriques, numériques et expérimentales de calcul du FIC. Dans ce travail, nous nous intéressons particulièrement à une méthode numérique particulière : La méthode de collocation de frontière (boundary collocation method). Notre point de départ est une présentation et une application de cette méthode en mode III à un problème simple trouvé dans A.T Zehnder [3]. Dans cette application, l'auteur se base sur la formulation en variables complexes du problème de cisaillement anti-plan. La contrainte complexe est écrite sous forme d'un développement en série de Laurent. Ce développement introduit la fonction complexe « puissance » qui est une fonction multiforme. L'auteur expose les résultats obtenus sans préciser la branche uniforme de la fonction « puissance » choisie dans ses calculs. L'idée de ce travail est née donc de la volonté d'éclaircir ce point laissé obscur dans le travail de A.T. Zehnder : Quelle est la branche uniforme de la fonction complexe « puissance » utilisée dans les calculs ?

Un premier travail a été effectué par K. Serir [7] pour tenter d'éclaircir cette question. Ce premier travail, bien qu'ayant abouti à des résultats intéressants, n'a pas été suffisamment clair faute d'une bonne compréhension de la théorie des fonctions multiformes de la variable complexe. L'objectif de ce travail est de corriger les insuffisances du travail de K.Serir, à l'aide d'une meilleure compréhension et présentation de ladite théorie, ainsi qu'à une comparaison avec une autre méthode basée sur un développement utilisant la fonction « puissance » réelle. Notre travail se divise en quatre chapitres :

Un premier chapitre est consacré à la mécanique de la rupture fragile, les nombres complexes et l'élasticité anti-plane.

Nous introduisons dans le deuxième chapitre, la méthode de collocation de frontière.

Dans le troisième chapitre nous présentons le travail de A.TZehnder. Nous recherchons également la branche uniforme utilisée dans ses calculs. Nous validerons finalement son travail en le comparant à une autre méthode basée sur la formulation réelle.

A titre de confirmation, nous calculons dans le dernier chapitre le FIC d'un autre exemple en mode III en utilisant les deux formulations complexe et réelle.

Nous terminons par une conclusion générale.

Résumé

Résumé :

Ce travail s'intéresse au calcul du facteur d'intensité de contrainte en mode III à l'aide de la méthode de collocation de frontière. Nous nous intéressons particulièrement à un travail traité dans **A.T Zehnder « Lecture notes on fracture mechanics » Department of Theoretical and Applied Mechanics Cornell University (2007)**. Nous nous proposons d'éclaircir son œuvre en cherchant la branche uniforme de la fonction complexe multiforme utilisée dans son développement. Nous validons également son travail en le comparant avec une autre méthode. Nous confirmons le résultat obtenu en l'utilisant pour un autre exemple.

Abstract :

This work focuses on the calculation of the stress intensity factor in Mode III using the boundary collocation method. We are particularly interested in an example given in **A.T Zehnder "Lecture notes on fracture mechanics" Department of Theoretical and Applied Mechanics Cornell University (2007)**. We propose to clarify his work in seeking uniform branch of the multiform complex function used in its development. We also validate its work by comparing it with another method. We confirm the results obtained by using it for another example.

ملخص:

هذا العمل يهتم بحساب معامل شدة الإجهاد في الحالة III باستعمال طريقة الالتقاط الحدودي. نحن نهتم بصفة خاصة بعمل درس في **A.T Zehnder « Lecture notes on fracture mechanics » Department of Theoretical and Applied Mechanics Cornell University (2007)**.

نقترح توضيح عمله بالبحث عن الفرع المعتدل للدالة المركبة المتغيرة الشكل التي استعملها في تطوير حساباته. سنثبت عمله بالمقارنة مع طريقة أخرى للحساب. أخيراً نعيد إثبات النتائج المحصول عليها باستعمال مثال آخر.

Sommaire

Introduction	page 01
<u>Chapitre 01 : Rappels théoriques</u>	page 02
I-1-mécanique de la rupture fragile	page 03
I-1-1-Modes d'ouverture d'une fissure	page 03
I-1-2-Facteur d'intensité de contrainte	page 04
I-2-Rappels sur les nombres complexes	page 05
I-2-1- Le plan complexe	page 05
I-2-2- Fonction d'une variable complexe	page 06
I-2-2-1- Définition de la fonction d'une variable complexe	page 06
I-2-2-2- Fonctions analytiques (ou holomorphes)	page 06
I-2-3- Fonctions multiformes	page 06
I-3-Elasticité anti plane	page 08
I-3-1- Présentation	page 08
I-3-2- Singularité des contraintes en pointe de fissure	page 09
<u>Chapitre 02 : Présentation de la méthode de collocation de frontière</u>	page 11
II-1-Présentation de la méthode de collocation de frontière	page 12
II-2-Formulation complexe	page 12
II-3-formulation réelle	page 14
II-4- méthode des moindres carrés	page 15

<u>Chapitre 03 : Détermination de la branche uniforme</u>	page 18
<u>dans le travail de A.T. Zehnder</u>	
III-1-Présentation du travail de A.T. Zehnder	page 19
III-2-Recherche de la branche uniforme utilisée	page 20
dans le travail de A.T. Zehnder	
III -2-1 Propriétés de la fonction complexe puissance $z^{-\frac{1}{2}+n}$	page 20
III-2-2-Coupures et branches uniformes	page 20
III-3 Reprise du calcul de A.T. Zehnder	page 21
III-3-1-Résultats	page 21
III-3-2-Discussion des résultats	page 23
III-4-calcul du k_{III} par la formulation Réelle	page 23
III-5-Conclusion	page 24
<u>Chapitre 04 : Détermination de K_{III} pour un contour carré</u>	page 25
IV-1 -L'approche réelle	page 26
IV-1-1-Formulation	page 26
IV-1-2-Résultats	page 27
IV-2-L'approche complexe	page 29
IV-2-1-Formulation	page 29
IV-2-2-Résultats	page 29
IV-3-Conclusion	page 30
 Conclusion générale	page 31
 Bibliographie	page 32
 Annexe	page 33

Liste des tableaux

Numéro du tableau	Titre	Page
Tableau III-1	Les valeurs du facteur d'intensité de contrainte en fonction de la coupure	22
Tableau III-2	Les valeurs du facteur d'intensité de contrainte en fonction du nombre de points de collocation m	23
Tableau IV-1	Les valeurs du rayon en fonction de l'angle dans le carré	26
Tableau IV-2	Composantes de la normale en coordonnées polaires pour les différents secteurs du carré	27
Tableau VI-3	Les valeurs du facteur d'intensité de contrainte en fonction du nombre de points m avec l'approche réelle	28
Tableau IV-4	Valeur du vecteur normal en notation complexe et du rayon pour le carré	29
Tableau IV-5	Valeurs de K_{III} en fonction de m pour le carré avec l'approche complexe	30

Liste des figures

Numéro de la figure	Titre	Page
Figure I-1	Illustration des trois modes d'ouverture d'une fissure	3
Figure I-2	Champ de contraintes aux abords du front de fissure	4
Figure I-3	Schématisation d'une coupure	7
Figure I-4	Exemple	7
Figure I-5	Exemple d'élasticité anti-plane	8
Figure I-6	Représentation de la position avec un nombre complexe	9
Figure I-7	Représentation des coordonnées polaires	10
Figure II-1	Exemple de points de collocation, $k=1$, m points ($m = 9$)	13
Figure II-2	illustration du polynôme en pointillés qui approche le plus la fonction en rouge	16
Figure III-1	Schéma du problème étudié par A.T. Zehnder	
Figure III-2	résultats de A.T. Zehnder [3] : variation de K_{III} en fonction du nombre de points de collocation m	19
Figure III-3	Schéma des coupures choisies dans le plan complexe	22
Figure III-4	Diagramme de la variation de K_{III} en fonction du nombre de points m avec la formulation réelle	24
Figure VI-1	Contour sous forme de carré	26
Figure IV-2	Valeurs de K_{III} en fonction de m pour le carré	28
Figure IV-3	figure de convergence du FIC en fonction des nombre de point pour le carré calculé	30

Chapitre I :

Rappels théoriques

Ce chapitre est un rappel des notions théoriques de base utilisées dans ce travail. Il se subdivise en trois paragraphes :

- Un premier paragraphe est consacré à la mécanique de la rupture fragile. Nous rappelons particulièrement les notions de modes d'ouverture et de Facteur d'Intensité de Contrainte.
- Un deuxième paragraphe est consacré à quelques rappels sur les nombres complexes, les fonctions de la variable complexe, ainsi qu'aux concepts de fonctions multiforme, coupure et branche uniforme.
- Un troisième paragraphe est consacré à la présentation des équations de l'élasticité anti-plane.

I-1-MÉCANIQUE DE LA RUPTURE FRAGILE

La mécanique de la rupture fragile est un domaine très vaste. Il n'est pas dans notre intention de la présenter exclusivement dans cette courte introduction. Nous nous intéressons qu'aux notions de modes d'ouverture et de FIC.

I-1-1-Modes d'ouverture d'une fissure

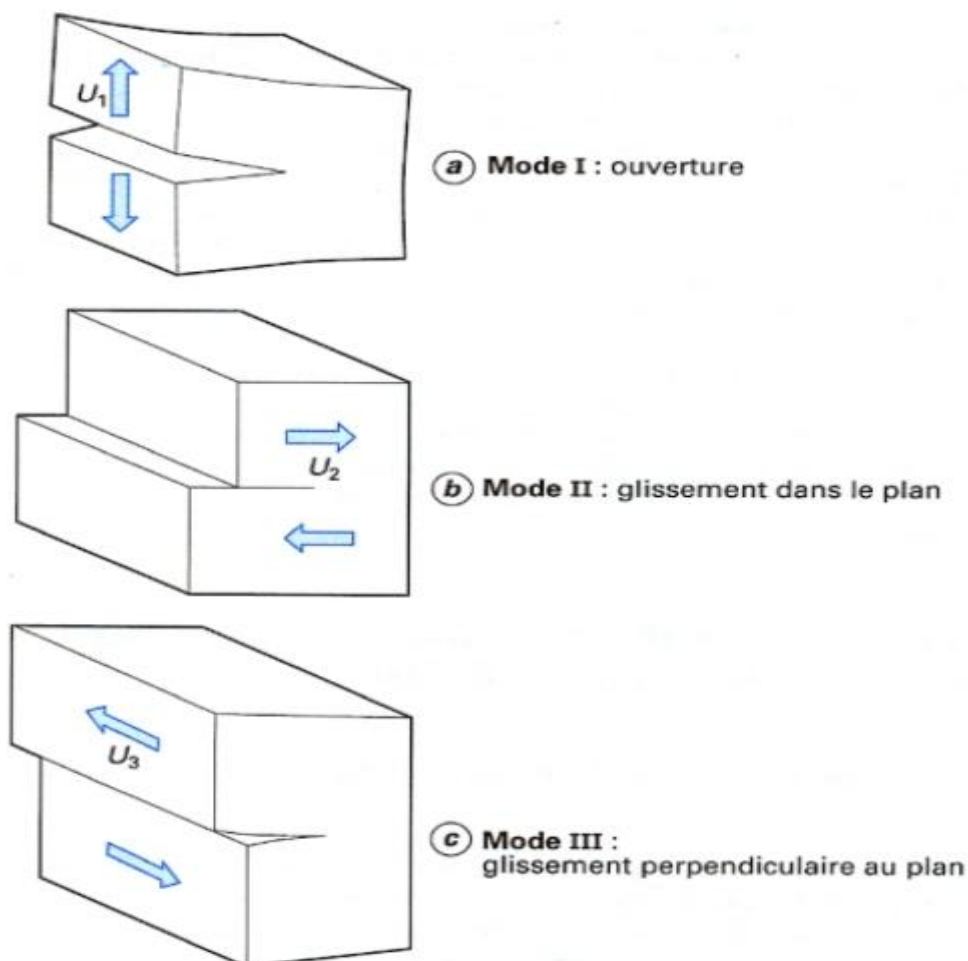


Figure I-1. Illustration des trois modes d'ouverture d'une fissure [2].

Toute ouverture de fissure peut être décomposée en une combinaison de trois modes élémentaires (Figure I-1), définis comme suit : [6]

- Mode I - Une ouverture normale au plan de fissure,
- Mode II - Une ouverture tangentielle parallèlement au plan de la fissure et perpendiculaire au front de fissure,
- Mode III - Une ouverture tangentielle parallèlement au plan de la fissure et parallèlement au front de fissure.

I-1-2-Facteur d'intensité de contrainte

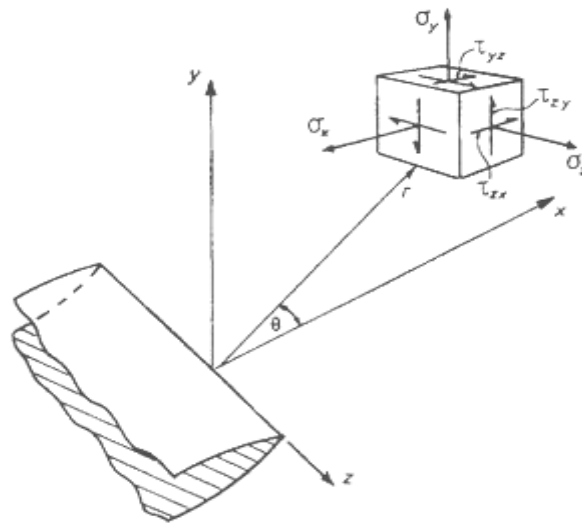


Figure I-2. Champ de contraintes aux abords du front de fissure. [1]

Un résultat bien connu de la mécanique de la rupture fragile est la forme asymptotique des contraintes au voisinage du front de fissure. Nous présentons ci-dessous les formes asymptotiques correspondant à chaque mode d'ouverture.

Mode I

$$(I-1) \quad \begin{cases} \sigma_x = K_I \frac{1}{\sqrt{2\pi r}} \cos(\theta/2) \left[1 - \sin \frac{\theta}{2} \sin \frac{3\theta}{2} \right] \\ \sigma_y = K_I \frac{1}{\sqrt{2\pi r}} \cos(\theta/2) \left[1 + \sin \frac{\theta}{2} \sin \frac{3\theta}{2} \right] \\ \tau_{xy} = K_I \frac{1}{\sqrt{2\pi r}} \cos(\theta/2) \sin \frac{\theta}{2} \cos \frac{3\theta}{2} \end{cases}$$

où K_I est le facteur d'intensité de contrainte en mode I, r et θ sont les coordonnées polaires (Figure I-2).

Mode II :

$$(I-2) \quad \begin{cases} \sigma_x = -K_{II} \frac{1}{\sqrt{2\pi r}} \sin(\theta/2) \left[2 + \cos \frac{\theta}{2} \cos \frac{3\theta}{2} \right] \\ \sigma_y = K_{II} \frac{1}{\sqrt{2\pi r}} \sin(\theta/2) \cos \frac{\theta}{2} \cos \frac{3\theta}{2} \\ \tau_{xy} = K_{II} \frac{1}{\sqrt{2\pi r}} \cos(\theta/2) \left[1 - \sin \frac{\theta}{2} \sin \frac{3\theta}{2} \right] \end{cases}$$

où K_{II} est le facteur d'intensité de contrainte en mode II.

Mode III :

$$(I-3) \quad \begin{cases} \tau_{xz} = -K_{III} \frac{1}{\sqrt{2\pi r}} \sin(\theta/2) \\ \tau_{yz} = K_{III} \frac{1}{\sqrt{2\pi r}} \cos \frac{\theta}{2} \end{cases}$$

Où K_{III} est le facteur d'intensité de contrainte en mode III.

Remarques :

- Les contraintes dans les équations (I-1), (I-2) et (I-3) sont représentées sur la Figure (I-2).
- Les modes I et II existent dans le cas de l'élasticité plane. Le mode III existe dans le cas de l'élasticité anti-plane.

I-2-RAPPELS SUR LES NOMBRES COMPLEXES [4]**I-2-1- Le plan complexe****Notions de base :**

Soit C l'ensemble des nombres complexes. Pour tout $z \in C$, $\exists (x, y) \in \mathbb{R}^2$ tel que :

$$z = x + iy. \quad (I-4)$$

On définit le module de z comme

$$|z| = \sqrt{x^2 + y^2}. \quad (I-5)$$

On peut aussi repérer z par des coordonnées polaires, en posant :

$$z = \rho e^{i\theta} \quad \text{avec } \tan \theta = y/x \text{ et } \rho = |z|. \quad (I-6)$$

θ est appelé argument de z .

$$\text{On a :} \quad \begin{cases} \text{Si } z=0, \text{ alors } \theta \text{ n'est pas défini.} \\ \text{Si } z \neq 0, \text{ alors } \theta \text{ est défini à } 2k\pi \text{ près.} \end{cases} \quad (\text{I-7})$$

I-2-2- Fonction d'une variable complexe

I-2-2-1- Définition de la fonction d'une variable complexe:

Soit U une partie de $\mathbb{C}$. On appelle fonction d'une variable complexe une application: $f: U \rightarrow \mathbb{C}$

$$\text{On a} \quad f(x+iy) = u(x,y) + i v(x,y) \quad (\text{I-8})$$

Où u et v sont deux fonctions réelles de deux variables réelles.

$$\text{Exemple :} \quad f: \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C} \text{ tel que : } x + iy \rightarrow x^2 - y^2 + 2i xy \text{ ce qui est même à } z \rightarrow z^2 \quad (\text{I-9})$$

I-2-2-2- Fonctions analytiques (ou holomorphes) :

On dit d'une fonction f qu'elle est analytique dans un ouvert U du plan complexe si et seulement si elle est dérivable en tout point de U .

Soit f analytique sur un domaine Ω . Si u et v sont de classe C^2 sur Ω , alors u et v satisfont l'équation de Laplace dans Ω :

$$(\text{I-10}) \quad \begin{cases} \frac{\partial^2 u}{\partial^2 x} + \frac{\partial^2 u}{\partial^2 y} = 0 \\ \frac{\partial^2 v}{\partial^2 x} + \frac{\partial^2 v}{\partial^2 y} = 0 \end{cases}$$

Remarque :

On appelle fonction entière une fonction analytique sur tout $\mathbb{C}$.

I-2-3- Fonctions multiformes :

On définit la notion de fonction multiforme à travers un exemple :

Soit $x \in \mathbb{R}_+^*$ et $X \in \mathbb{R}$. On a :

$$X = \ln(x) \iff x = e^X. \quad (\text{I-11})$$

Soit $z \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$. On cherche $Z = \ln(z) = X + i Y$ tel que $z = e^Z$.

$$z = |z| e^{i\theta} = e^X e^{iY}$$

Donc :

$$\begin{cases} X = \ln |z| \\ Y = \theta + 2k\pi, \quad k \in \mathbb{Z} \end{cases} \quad (\text{I-12})$$

$$Z = \ln(z) = \ln |z| + i (\theta + 2k\pi)$$

Il existe donc une infinité de valeurs pour $\ln(z)$, selon le choix de k . D'où le nom de fonction multiforme (ou à détermination multiple).

Branche uniforme :

De manière à rendre la fonction uniforme, on peut alors définir une coupure dans le plan complexe (demi-droite partant de l'origine), et un ensemble $C_{\text{coupé}}$ (C privé de la coupure) dans lequel il n'y a plus de contour entourant l'origine:

On choisit $\alpha \in [0, 2\pi[$, par convention, et on impose $\theta \in] - 2\pi + \alpha, \alpha]$.
Les arguments sont ainsi déterminés de façon unique.

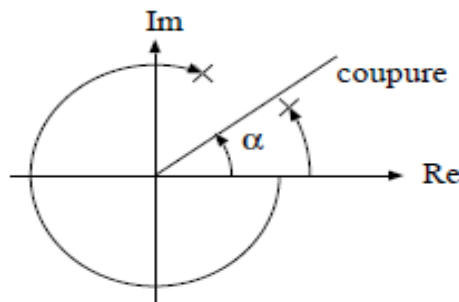


Figure I-3 : Schématisation d'une coupure [3]

On prend souvent $\alpha \neq 0$ pour ne pas se priver de l'axe réel.

On a alors, $Z = \ln |z| + i\theta = \text{Ln}(z)$, $\forall z \in C_{\text{coupé}}$. (I-13)

La fonction $\text{Ln}(z)$ ainsi définie est une branche uniforme de la fonction $\ln(z)$. Le résultat de la fonction Ln dépend du choix de la coupure.

Exemple :

Soit $z = 1 + i$, calculons $\text{Ln}(z)$ en choisissant deux coupures différentes.

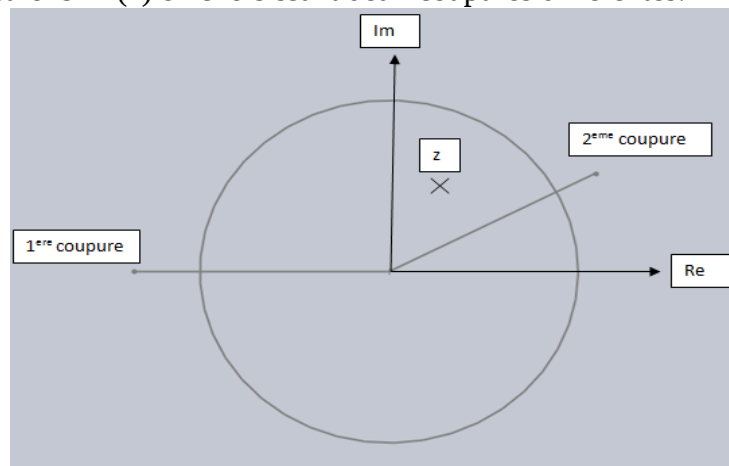


Figure I-4 : Exemple

- Première coupure : $\alpha = \pi$

Dans ce cas $\theta \in] -\pi, \pi]$, et pour le z en question $\theta = \pi/4$. Donc :

$$\text{Ln}(z) = \ln\sqrt{2} + i\frac{\pi}{4}$$

- Première coupure : $\alpha = \pi/8$

Dans ce cas $\theta \in] -15\pi/8, \pi/8]$, et pour le z en question $\theta = -14\pi/8$. Donc :

$$\text{Ln}(z) = \ln\sqrt{2} - i\frac{14\pi}{8}$$

On voit bien que la valeur dépend de la coupure ou de la branche uniforme.

Remarque :

On appelle détermination principale du logarithme la fonction Ln avec pour coupure $\alpha = \pi$.

On a alors $\arg(z) \in] -\pi, \pi[$ et $C_{\text{coupé}} = \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}^*$.

I-3-ELASTICITE ANTI-PLANE [6]

I-3-1- Présentation :

L'élasticité est la capacité d'un corps à reprendre sa forme initiale après déformation. Cela est dans le cas des déformations très petites.

Il est question d'élasticité anti-plane « mode III ou mode de déchirure » quand un corps déformable avec un défaut ou une fissure se caractérise par :

- pas de discontinuité normale,
- discontinuité tangentielle anti-plane

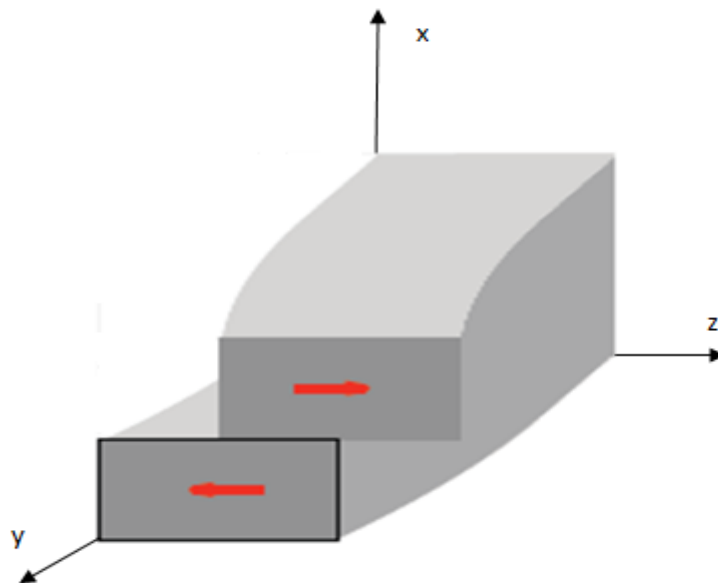


Figure I-5 : Exemple d'élasticité anti-plane [1]

Les composantes du vecteur déplacement se caractérisent par :

$$U_x = U_y = 0 \quad U_z = U_z(x, y) \quad (I-14)$$

Les déformations ont la forme de :

$$\begin{cases} \varepsilon_{xx} = \varepsilon_{yy} = \varepsilon_{xy} = \varepsilon_{zz} = 0 \\ \varepsilon_{xz} = 0.5 \frac{\partial U_z}{\partial x} \\ \varepsilon_{yz} = 0.5 \frac{\partial U_z}{\partial y} \end{cases} \quad (I-15)$$

Nous pouvons écrire les contraintes :

$$\begin{cases} \sigma_{xx} = \sigma_{yy} = \tau_{xy} = \sigma_{zz} = 0 \\ \tau_{xz} = \mu \frac{\partial U_z}{\partial x} \\ \tau_{yz} = \mu \frac{\partial U_z}{\partial y} \end{cases} \quad (I-16)$$

L'application des équations de l'équilibre local donne (en négligeant les forces volumiques selon z):

$$\mu \frac{\partial^2 U_z}{\partial x^2} + \mu \frac{\partial^2 U_z}{\partial y^2} = 0 \quad (I-17)$$

Donc $\Delta U_z = 0$ ce qui nous permet de dire que $U_z(x, y)$ est harmonique.

I-3-2-Singularité des contraintes en pointe de fissure :

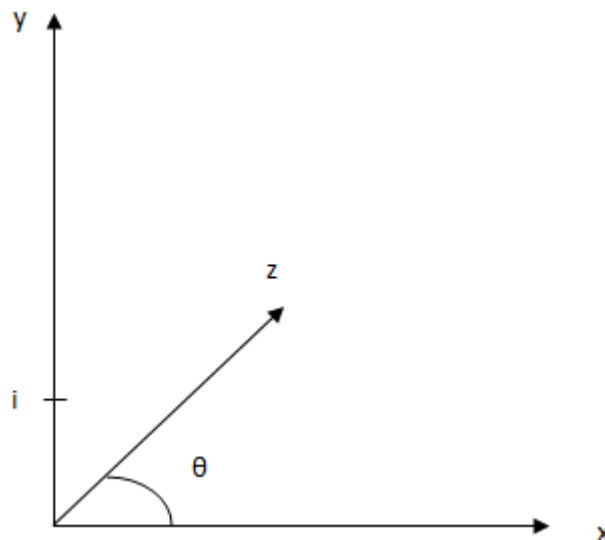


Figure I-6 : Représentation de la position avec un nombre complexe

Soit $z=x+iy$ nous définissons une fonction $f(z)$ tel que $f(z)=g(x,y)+i h(x,y)$ (I-18)

Et $g(x,y)$ est la partie réelle de la fonction et $h(x,y)$ est la partie imaginaire.

Si $f(z)$ est analytique les fonctions g et h sont harmoniques.

Si $\mu U_z = \text{Re}\{f(z)\} = g(x,y)$

Donc $\tau_{xz} = \mu U_{z,x} = g_{,x}$ et $\tau_{zy} = \mu U_{z,y} = g_{,2}$ (I-19)

Ce qui nous laisse dire que $f'(z) = g_{,x} + g_{,2}i = \tau_{xz} + i \tau_{zy}$

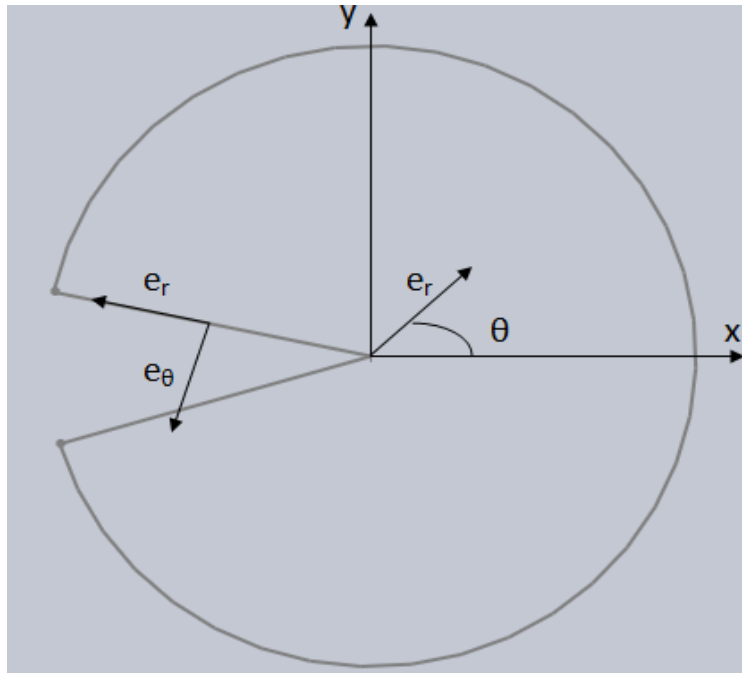


Figure I-7 : Représentation des coordonnées polaires

En utilisant les coordonnées polaires nous donnons la forme asymptotique des contraintes d'après H.Ferdjani [6] :

$$\left. \begin{aligned} \tau_{zx} &= -\frac{k3}{\sqrt{2\pi r}} \sin\left(\frac{\theta}{2}\right) \\ \tau_{zy} &= \frac{k3}{\sqrt{2\pi r}} \cos\left(\frac{\theta}{2}\right) \end{aligned} \right\} \quad (\text{I-17})$$

Chapitre II :

Présentation de la méthode de collocation de frontière

Dans ce chapitre nous présentons la méthode de collocation de frontière. Cette méthode se base sur une expansion des contraintes complexe ou réelle, la résolution se fait par la méthode des moindres carrés. Nous présentons donc également les expansions complexe et réelle et complexe des contraintes ainsi que la méthode des moindres carrés.

II-1 PRÉSENTATION DE LA MÉTHODE DE COLLOCATION DE FRONTIÈRE :

La méthode de collocation de frontière est un procédé pour le calcul des facteurs d'intensité de contrainte basé de sur l'expansion de la fonction propre des champs de contrainte en pointe de fissure. L'idée générale est qu'étant donné les conditions aux limites en contraintes pour un certain problème, on exprime les contraintes à un nombre fini de positions, appelés points de collocation, en termes d'expansion de la fonction propre avec des coefficients inconnus. Pour chaque point de collocation, on aura une équation pour les coefficients inconnus.

Aussi longtemps qu'on utilise autant de points de collocation que d'inconnues dans l'expansion, on peut résoudre le système résultant d'équations pour les coefficients de la fonction propre. Pour une meilleure précision, plus de points de collocation que d'inconnues doivent être utilisés. On peut prendre $m \approx 2(p + 1)$ ou plus (m est le nombre de points de collocation et p est le nombre d'inconnues). Dans ce cas, le système est résolu par la méthode des moindres carrés.

La valeur du coefficient correspondant au terme $r^{-\frac{1}{2}}$ de l'expansion du champ de contraintes est le facteur d'intensité de contrainte [3].

Bien que cette méthode puisse être appliquée à des problèmes en Mode I, II ou III, ici nous nous intéresserons aux problèmes en Mode III. Dans ce cas, il existe deux types d'expansion pour la fonction propre : une complexe et une réelle. Dans notre travail, nous nous intéressons particulièrement à la forme complexe. A titre de comparaison, nous utiliserons également la forme réelle. Par conséquent, nous présentons ci-dessous les deux formes.

II-2-FORMULATION COMPLEXE

Rappelons que la formulation en variables complexes pour l'élasticité anti-plane peut s'écrire [3]:

$$(II-1) \quad \begin{cases} \tau = \tau_{yz} + i\tau_{xz} \\ \mathbf{n} = \mathbf{n}_x + i\mathbf{n}_y \\ \mathbf{t} = \mathbf{t}_z = \mathbf{Im}(\tau\mathbf{n}) \end{cases}$$

Où t est une abréviation pour t_z , la composante selon z du vecteur contrainte, $\mathbf{n}$ est le vecteur normal extérieur unitaire (Figure II-1), et n_x et n_y ses composantes selon x et y .

On peut montrer que la contrainte complexe τ peut être développée en une série de Laurent,

$$(II-2) \quad \tau = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} A_n z^{\lambda_n}$$

Pour satisfaire les conditions de bord libre sur les lèvres de la fissure : $\mathbf{Re}(\tau) = 0$ (τ_{yz})
sur $\theta = \pm \pi$:

$$\mathbf{Re}(\tau(r, \pm\pi)) = \sum A_n r^{\lambda_n} \cos \lambda_n \pi = 0 \rightarrow \lambda_n = \frac{-1}{2} + n \quad (\text{II-3})$$

Pour éviter un déplacement infini en pointe de fissure, nous devons éliminer tous les exposants λ_n inférieurs à $-1/2$. On obtient :

$$(\text{II-4}) \quad \tau = \sum_{n=0}^{+\infty} A_n z^{\lambda_n} \quad \text{et} \quad \lambda_n = \frac{-1}{2} + n$$

A partir de là on peut faire : $\tau = A_0 z^{-1/2} + \dots = \tau_{yz} + i\tau_{xz}$

$$= A_0 r^{-1/2} e^{-i\theta/2} + A_1 r^{1/2} e^{i\theta/2} + \dots + \dots$$

En identifiant les parties réelles et imaginaires, de part et d'autre de l'équation, on obtient :

$$\begin{aligned} \tau_{yz} &= A_0 r^{-1/2} \cos(\theta/2) + \dots \quad (\text{II-5}) \\ \tau_{xz} &= -A_0 r^{-1/2} \sin(\theta/2) + \dots \end{aligned}$$

D'autre part, nous savons que le développement asymptotique des contraintes en mode III s'écrit de la manière suivante :

$$\begin{cases} \tau_{yz} = \frac{\cos(\frac{\theta}{2})}{\sqrt{2\pi r}} K_{III} + \dots \\ \tau_{xz} = \frac{-\sin(\frac{\theta}{2})}{\sqrt{2\pi r}} K_{III} + \dots \end{cases}$$

On obtient par identification : $K_{III} = A_0 \sqrt{2\pi}$ (II-6)

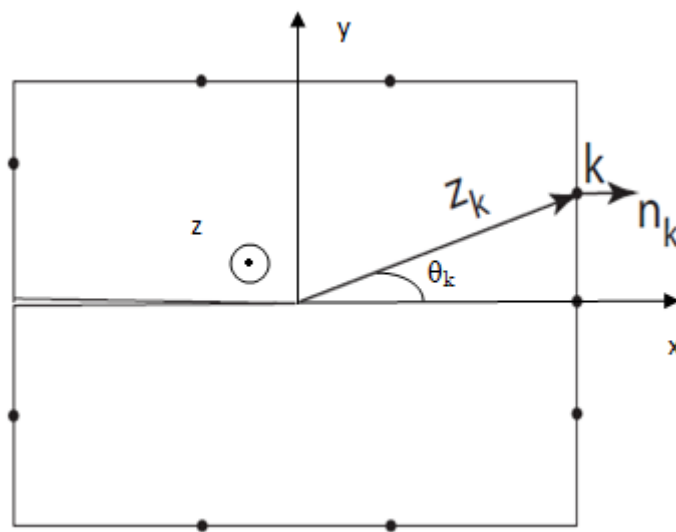


Figure II-1: Exemple de points de collocation, $k=1$, m points ($m = 9$) [3]

Supposons que nous avons m points de collocation et que la contrainte t_k , la position z_k et la normale n_k sont connus en chaque point de collocation (Figure II-1).

En chacun des m points de collocation on met en égalité la contrainte t_k donnée et la contrainte calculée avec (II-1) en utilisant le développement (II-4) tronqué à $(p + 1)$ termes, avec $p + 1 \leq m$. 0

$$(II-7) \quad \text{Im} \left(\sum_{n=0}^p A_n z_k^{(-\frac{1}{2}+n)} n_k \right) = t_k \quad \text{Pour } k=1, m$$

Nous obtenons un système surdéterminé de m équations à $p + 1$ inconnues, $A_0, \dots, A_p$. La valeur du premier terme A_0 correspond au facteur d'intensité de contrainte, $K_{III} = A_0/\sqrt{2\pi}$. Ce système sera résolu par la méthode des moindres carrés.

Remarque :

La fonction de la variable complexe z^{λ_n} intervenant dans (II-4) et (II-7) est une fonction multiforme. Ses propriétés seront étudiées dans le prochain chapitre.

II-3-FORMULATION RÉELLE

Il a été établi dans A.T. Zehnder [3] que le champ de déplacement solution d'une structure fissurée en mode III s'écrit de la manière suivante :

$$\left. \begin{aligned} \mu w(r, \theta) &= \sum_{n=0}^{+\infty} (A_n r^n \cos(n\theta) + B_n r^{n+1/2} \sin(\theta(n+1/2))) \\ &= A_0 + B_0 r^{1/2} \sin(\theta/2) + \sum_{n=1}^{+\infty} (A_n r^n \cos(n\theta) + B_n r^{n+1/2} \sin(\theta(n+1/2))) \end{aligned} \right\} \quad (II-8)$$

Où μ est le module de cisaillement du matériau.

Les contraintes en coordonnées polaires sont données par :

$$\tau_{zr} = \mu \frac{\partial w}{\partial r} \quad \text{et} \quad \tau_{z\theta} = \frac{\mu}{r} \frac{\partial w}{\partial \theta}$$

En y reportant le développement (II-8), on obtient :

$$\tau_{zr} = \sum_{n=0}^{\infty} [(n+0.5) B_n r^{n-0.5} \sin(n+0.5)\theta] + \sum_{n=1}^{\infty} [n A_n r^{n-1} \cos(n\theta)] \quad (II-9)$$

$$\tau_{z\theta} = \sum_{n=0}^{\infty} [(n+0.5) B_n r^{n-0.5} \cos(n+0.5)\theta] + \sum_{n=1}^{\infty} [-n A_n r^{n-1} \sin(n\theta)]$$

La composante selon z du vecteur contrainte est donnée par :

$$t = \tau_{zr} n_r + \tau_{z\theta} n_\theta \quad (\text{II-10})$$

Où n_r et n_θ sont les composantes de la normale externe unitaire. Par définition, le facteur d'intensité de contrainte est donné par :

$$K_{III} = \lim_{r \rightarrow 0} \tau_{z\theta}(r, \theta=0) \sqrt{2\pi r} = \sqrt{\frac{\pi}{2}} B_0 \quad (\text{II-11})$$

De même que pour la formulation complexe, supposons que nous avons m points de collocation et que la contrainte t_k , le rayon r_k , l'angle θ_k et la normale n_k sont connus en chaque point de collocation.

En chacun des m points de collocation on met en égalité la contrainte donnée et la contrainte calculée en utilisant (II-10) et le développement (II-9) tronqué à $p + 1$ termes, avec $p + 1 \leq m$. Nous obtenons le système surdéterminé de m équations à $p+1$ inconnues suivant :

$$k = 1, m$$

$$\begin{aligned} t_k = & \left(\sum_{n=0}^p [(n+0.5) B_n r^{n-0.5} \sin(n+0.5)\theta_k] + \sum_{n=1}^p [n A_n r^{n-1} \cos(n\theta_k)] \right) n_{rk} + \\ & + \left(\sum_{n=0}^p [(n+0.5) B_n r^{n-0.5} \cos(n+0.5)\theta_k] + \sum_{n=1}^p [-n A_n r^{n-1} \sin(n\theta_k)] \right) n_{\theta k} \end{aligned} \quad (\text{II-12})$$

Système qu'on résoudra au sens des moindres carrés. Le terme B_0 donnera K_{III} par l'intermédiaire de (II-11).

Remarque : De par la méthode d'établissement du développement (II-8) dans [3], les angles θ_k appartiennent nécessairement à l'intervalle $[-\pi, \pi]$, il n'y a donc pas de problème d'indétermination de θ dans la formulation réelle.

II -4- MÉTHODE DES MOINDRES CARRÉS [5]

La méthode des moindres carrés, indépendamment élaborée par Legendre en 1805 et Gauss en 1809, permet de comparer des données expérimentales, généralement entachées d'erreurs de mesure, à un modèle mathématique censé décrire ces données.

Ce modèle peut prendre diverses formes. Il peut s'agir de lois de conservation quelles quantités mesurées doivent respecter. La méthode des moindres carrés permet alors de minimiser l'impact des erreurs expérimentales en « ajoutant de l'information » dans le processus de mesure.

Dans le cas le plus courant, le modèle théorique est une famille de fonctions d'une ou plusieurs variables muettes, indexées par un ou plusieurs paramètres inconnus. La méthode des moindres carrés permet de sélectionner parmi ces fonctions, celle qui reproduit le mieux les données expérimentales. On parle dans ce cas d'ajustement par la méthode des moindres carrés. Si les paramètres ont un sens physique, la procédure d'ajustement donne également une estimation indirecte de la valeur de ces paramètres.

Soit $F(x)$ une fonction d'une variable quelconque x (réelle, complexe, vecteur ou autre). L'expression analytique de $F(x)$ est inconnue, mais ses valeurs sont connues en un nombre n de points dont les positions $(x_k, k=1, n)$ sont connues. Cette fonction peut être approchée par un polynôme comme il est couramment utilisé par les méthodes classiques en analyse numérique. Le polynôme choisi est de degré $n-1$, et passe par tous les points en lesquels la fonction est connue :

$$P_n(x) = \sum_{k=0}^{n-1} a_k x^k \quad (\text{II-13})$$

On a donc :

$$F(x_k) = P_n(x_k) \quad k = 1, n \quad (\text{II-14})$$

(II-14) est un système de n équations à n inconnues $a_0, \dots, a_{n-1}$.

Cependant, dans le cas où le nombre de points n est élevé, cette méthode pose problème, car les polynômes de degrés élevés ont un caractère imprévisible. En effet, ils peuvent faire de grandes fluctuations entre les points où la fonction est connue.

Pour éviter ce problème, la méthode des moindres carrés propose de prendre un polynôme de degré $p+1$ inférieur à n ($p+1 < n$). Le système (II-14) obtenue sera un système surdéterminé de n équations à $p+1$ inconnues. Les coefficients a_k seront choisis de telle sorte que le polynôme soit le moins éloigné possible des n valeurs connues de la fonction $F(x)$. Cela revient à minimiser l'erreur.

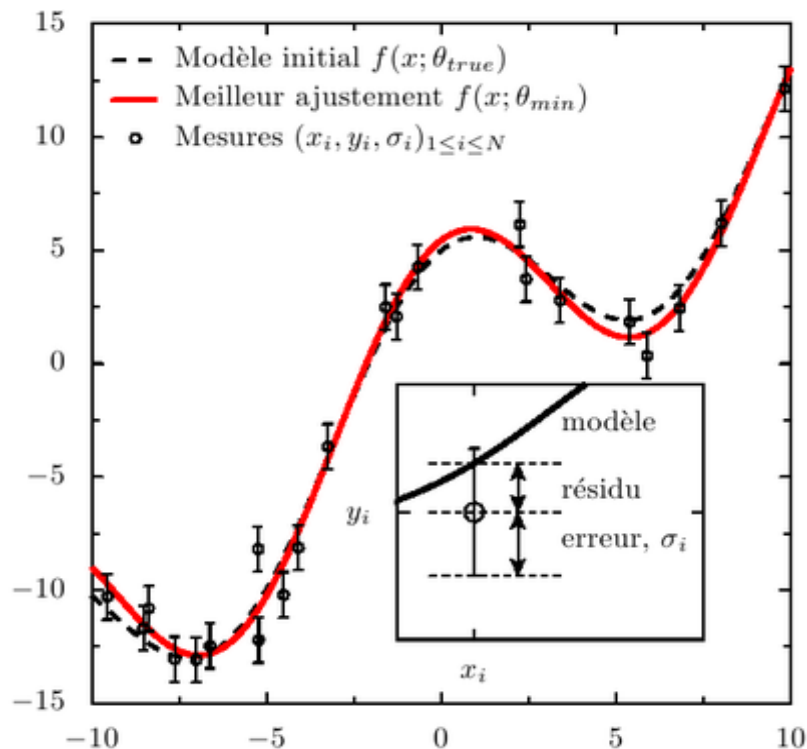


Figure II-2 illustration du polynôme en pointillés qui approche le plus la fonction en rouge [5].

Le polynôme de l'équation II-14 devient de degré p et prend la valeur :

$$P_p(x) = \sum_{k=0}^p a_k x^k \quad \text{et } p+1 < n \quad (\text{II-15})$$

Pour les n points on a :

$$P_p(x_k) = F(x_k) \quad \text{et } k=1 \text{ à } n \quad (\text{II-16})$$

Ce qui nous donne n équations à $p+1$ inconnues $a_0, \dots, a_p$. C'est un système surdéterminé. Pour trouver les coefficients $a_k (k=0, p)$, on introduit une erreur ψ définie par :

$$\Psi = \sum_{k=1}^n (P_p(x_k) - F(x_k))^2 \quad (\text{II-17})$$

La fonction $\psi(a_0, a_1, \dots, a_p)$ est convexe. Une condition nécessaire et suffisante pour la minimiser, est que toutes ses dérivées partielles par rapport à tous les coefficients a_k doivent être nulles. On obtient :

$$\overrightarrow{\text{grad}(\Psi)} = \begin{pmatrix} \frac{\partial \Psi}{\partial a_0} \\ \frac{\partial \Psi}{\partial a_1} \\ \vdots \\ \frac{\partial \Psi}{\partial a_p} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \quad (\text{II-18})$$

Le système (II-18) obtenu est un système de $p+1$ équations à $p+1$ inconnues $a_0, a_1, \dots, a_p$. Il sera résolu par les méthodes classiques.

CHAPITRE III :

Détermination de la branche uniforme dans le travail de A.T. Zehnder [3]

Dans son travail, A.T. Zehnder[3] a utilisé la méthode de collocation de frontière pour calculer le facteur d'intensité de contrainte K_{III} pour une structure simple, dans le cas de l'élasticité anti-plane. La formulation utilisée dans son travail est la formulation complexe. A.T. Zehnder a présenté son résultat sans préciser la branche uniforme choisie pour la fonction multiforme « puissance ». Le but de ce chapitre est de déterminer cette branche uniforme. La méthode choisie est de refaire les calculs en testant plusieurs choix de branche uniforme jusqu'à retrouver son résultat. On validera ensuite le choix de A.T. Zehnder, en comparant son résultat à celui obtenu avec la formulation réelle.

III-1-PRESENTATION DU TRAVAIL DE A.T. ZEHNDER

Le problème traité est une fissure dans un cylindre de rayon $R = 1$ (Figure III-1). La surface latérale du cylindre est chargée par des efforts dans la direction z , $t = F(\theta)$. Des points de collocation équidistants sont placés autour du cylindre. Les calculs ont été effectués dans le cas $F(\theta) = \sin\theta$. Les résultats présentés sur la Figure (III-2) montrent qu'à partir d'un nombre de points de collocation $m \approx 20$ la valeur de K_{III} a pratiquement convergée à la valeur de 2,1 (approximativement).

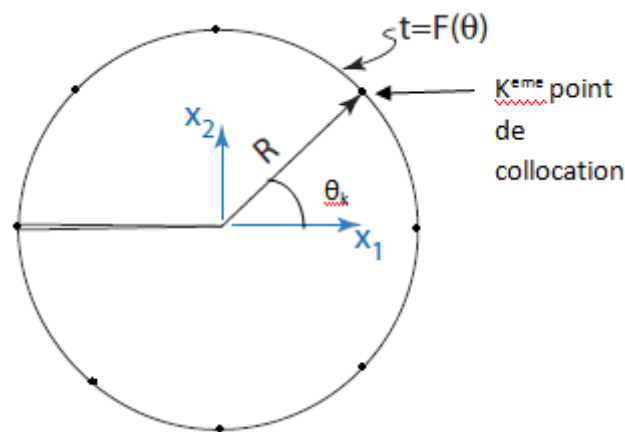


Figure III-1: Schéma du problème étudié par A.T. Zehnder

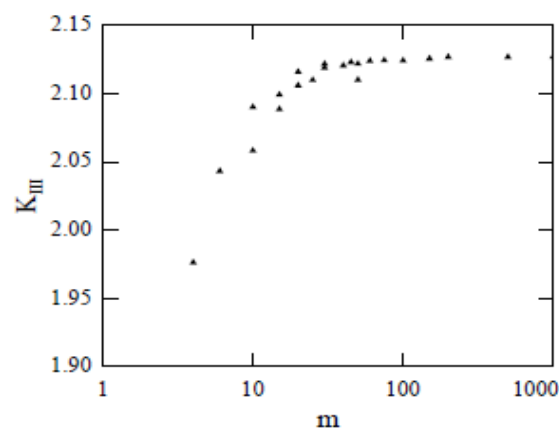


Figure III-2 : résultats de A.T. Zehnder [3] : variation de K_{III} en fonction du nombre de points de collocation m .

Remarque

Dans ses calculs, A.T. Zehnder ne précise pas le nombre de termes (p+1) utilisé dans le développement (II-7).

III-2-RECHERCHE DE LA BRANCHE UNIFORME UTILISEE DANS LE TRAVAIL DE A.T. ZEHNDER

Nous commençons tout d'abord par étudier les propriétés de la fonction « puissance » intervenant dans la formulation complexe.

III-2-1 Propriétés de la fonction complexe puissance $z^{-\frac{1}{2}+n}$

Nous avons vu au chapitre précédent que le développement complexe introduit la fonction $z^{-\frac{1}{2}+n}$. Montrons tout d'abord que c'est une fonction multiforme :

$$z^{-\frac{1}{2}+n} = r^{-\frac{1}{2}+n} e^{(-\frac{1}{2}+n)i(\theta+2k\pi)} = r^{-\frac{1}{2}+n} e^{(-\frac{1}{2}+n)i\theta} e^{(-\frac{1}{2}+n)i2\pi k} \quad k \in \mathbb{R} \quad (\text{III-1})$$

$$e^{(-\frac{1}{2}+n)i2\pi k} = \cos((2n-1)\pi k) + i \sin((2n-1)\pi k) = \cos((2n-1)\pi k), \quad (\text{III-2})$$

dans l'équation précédente, la partie imaginaire s'annule car $(2n-1)k$ est un entier.

On a donc :

$$e^{(-\frac{1}{2}+n)i2\pi k} = \begin{cases} 1 & \text{si } k \text{ est pair} \\ -1 & \text{si } k \text{ est impair} \end{cases} \quad (\text{III-3})$$

Finalement la fonction $z^{-\frac{1}{2}+n}$ possède deux valeurs possibles :

$$z^{-\frac{1}{2}+n} = \pm r^{-\frac{1}{2}+n} e^{(-\frac{1}{2}+n)i\theta}, \quad (\text{III-4})$$

C'est donc une fonction multiforme.

III-2-2-Coupures et branches uniformes

A titre d'illustration, on calcule les valeurs de $z^{-\frac{1}{2}+n}$ pour un z particulier et pour deux coupures différentes (cf. Chapitre I paragraphe I-2-3).

On prend $z = 1 + i$, et $n=1$.

- Première branche uniforme (Figure I-4)

On choisit l'angle de coupure $\alpha = -\pi$, le domaine de variation de θ est $]-\pi, \pi]$, et pour notre cas $\theta = \pi/4$. On a donc :

$$z^{-\frac{1}{2}+1} = (\sqrt{2})^{\frac{1}{2}} e^{i\frac{\pi}{8}}$$

- Deuxième branche uniforme (Figure I-4)

On choisit l'angle de coupure $\alpha = \pi/8$, le domaine de variation de θ est : $]-15\pi/8, \pi/8]$, et pour notre cas $\theta = -14\pi/8$. On a donc :

$$z^{-\frac{1}{2}+1} = (\sqrt{2})^{\frac{1}{2}} e^{-i\frac{7\pi}{8}} = -(\sqrt{2})^{\frac{1}{2}} e^{i\frac{\pi}{8}}$$

On a donc deux valeurs opposées, selon le choix de la coupure.

III-3 Reprise du calcul de A.T. Zehnder [3]

On reprend l'équation (II-7) :

$$\text{Im} \left(\sum_{n=0}^p A_n z_k^{\left(-\frac{1}{2}+n\right)} n_k \right) = t_k, \quad t_k = \sin \theta_k$$

$$k=1, m$$

Dans le cas du cercle (Figure III-1), $z_k = R e^{i\theta_k}$ ($R=1$) et $n_k = e^{i\theta_k}$

En reportant dans (II-7), on obtient :

$$\text{Im} \left(\sum_{n=0}^p A_n e^{i\theta_k \left(-\frac{1}{2}+n\right)} e^{i\theta_k} \right) = \text{Im} \left(\sum_{n=0}^p A_n e^{i\theta_k (n+0.5)} \right) = \sum_{n=0}^p A_n \sin(n+0.5) \theta_k \quad (\text{III-5})$$

Finalement (II-7) devient :

$$\sum_{n=0}^p A_n \sin((n+0.5)\theta_k) = \sin \theta_k \quad k=1, m \quad (\text{III-6})$$

Dans un travail précédent, K. Serir [7] a étudié la convergence du K_{III} calculé en résolvant le système surdéterminé (III-6). Plusieurs tests ont été effectués et l'influence des deux paramètres, p et m , a été mise en évidence. Une des conclusions de cette étude est qu'en prenant $p=0$, c'est-à-dire avec un seul coefficient (A_0) dans le développement, la convergence est obtenue en augmentant le nombre de points de collocations à partir de $m=2$. Le nombre final m à la convergence dépend fortement de la branche uniforme choisie. Nous adopterons cette approche dans nos calculs. On augmentera à chaque fois le nombre de points de collocation jusqu'à convergence de K_{III} avec une précision de 10^{-2} .

III-3-1-Résultats :

Nous avons vu précédemment que le choix de la coupure influe sur la valeur de la fonction $z^{-\frac{1}{2}+n}$, et par conséquent, influera sur la valeur de K_{III} . Nous effectuons le calcul du K_{III} pour 8 coupures différentes. Ces coupures sont distantes entre elles d'un angle de $\pi/4$, comme le montre la Figure III-3 ci-dessous :

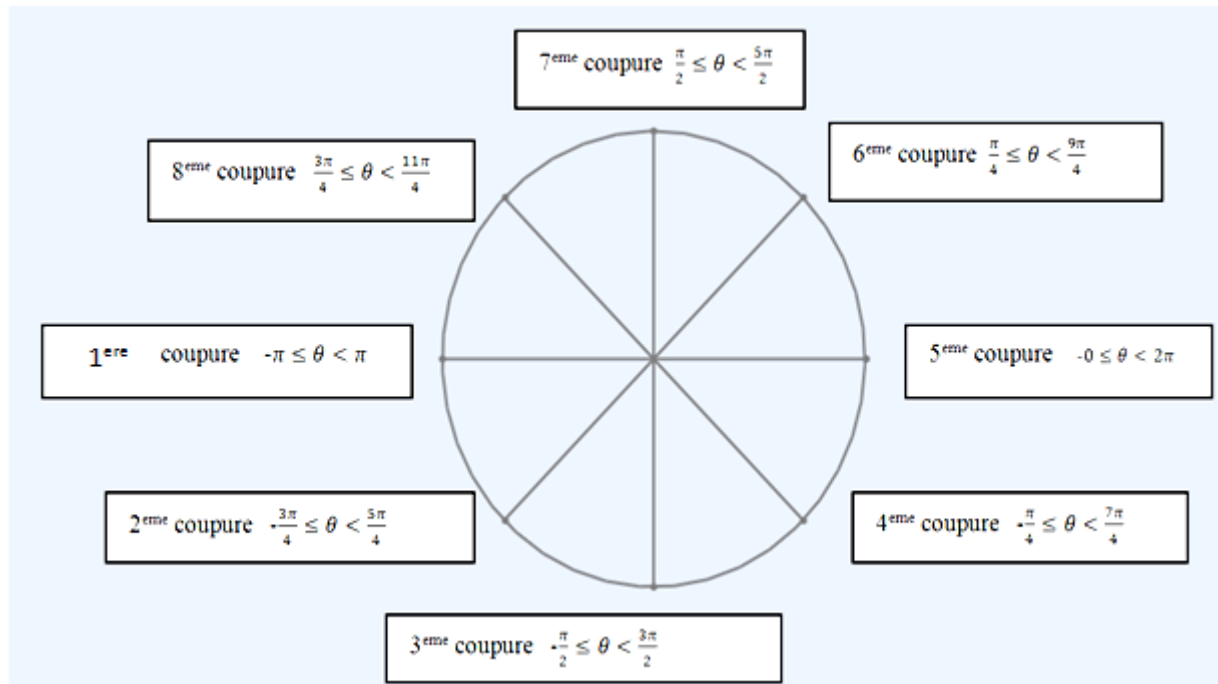


Figure III-3 : Schéma des coupures choisies dans le plan complexe.

Nous présentons dans le Tableau ci-dessous, les valeurs de K_{III} obtenues pour chacune des coupures. La mise en évidence de la convergence dans chaque cas est présentée en Annexe. Les calculs ont été effectués à l'aide d'un programme Matlab présenté en Annexe.

La coupure	Valeur du facteur d'intensité de contrainte K_{III}	Nombre de point m lors de la convergence
$-\pi \leq \theta < \pi$	2.117	23
$-\frac{3\pi}{4} \leq \theta < \frac{5\pi}{4}$	1.734	57
$-\frac{3\pi}{4} \leq \theta < \frac{5\pi}{4}$	0.810	61
$-\frac{3\pi}{4} \leq \theta < \frac{5\pi}{4}$	0.155	40
$-\frac{3\pi}{4} \leq \theta < \frac{5\pi}{4}$	0	3
$-\frac{3\pi}{4} \leq \theta < \frac{5\pi}{4}$	-0.083	35
$-\frac{3\pi}{4} \leq \theta < \frac{5\pi}{4}$	-0.693	60
$-\frac{3\pi}{4} \leq \theta < \frac{5\pi}{4}$	-1.621	59

Tableau III-1 : Les valeurs du facteur d'intensité de contrainte en fonction de la coupure

III-3-2-Discussion des résultats :

Nous remarquons comme prévu une forte dépendance K_{III} par rapport au choix de la coupure. Nous constatons également que la valeur correspondant à la première coupure est celle obtenue par A.T. Zehnder. Nous en concluons que c'est la première coupure qui a été utilisée par lui dans ses calculs. C'est un résultat prévisible, car la première coupure est par convention appelée « branche principale » pour la fonction puissance. C'est généralement la branche utilisée par défaut.

Ce résultat constitue une validation de nos calculs. Cependant, la question qui se pose est la suivante : est ce que A.T. Zehnder a eu raison d'utiliser la « branche principale » dans ces calculs ? Autrement dit, est ce que la valeur de $K_{III} \approx 2.1$ est la bonne valeur pour ce problème ?

Nous proposons de répondre à cette question en recalculant le K_{III} avec la formulation réelle et comparer les résultats. C'est l'objet du prochain paragraphe.

III-4-CALCUL DU K_{III} PAR LA FORMULATION RÉELLE

Dans le cas du cylindre fissuré (Figure III-1), les composantes de la normale unitaire externe au contour en coordonnées polaires sont données par :

$$n_r = 1, n_\theta = 0.$$

En injectant ce résultat dans (II-12), et sachant que $t = \sin\theta$ et $r = 1$, on obtient :

$$\sin\theta_k = \left(\sum_{n=0}^p [(n+0.5) B_n \sin(n+0.5)\theta_k] + \sum_{n=1}^p [n A_n \cos(n\theta_k)] \right), k=1,m \text{ (III-7)}$$

On fixe $p=5$, car la formulation réelle n'a pas été traitée par K. Serir [7]. On résout le système à partir de $m=12$, par la méthode des moindres carrés, en augmentant m jusqu'à convergence de K_{III} avec une précision de 10^{-2} .

Résultats et discussion :

Le travail expliqué dans le paragraphe précédent sera programmé à l'aide du logiciel Matlab (voir annexe). Nous présentons les résultats obtenus ci-dessous (Figure III-4) :

m	12	13	14	15	16	17
FIC	2.090	2.115	2.122	2.125	2.126	2.127

Tableau III-2 : Les valeurs du facteur d'intensité de contrainte en fonction du nombre de points de collocation m.

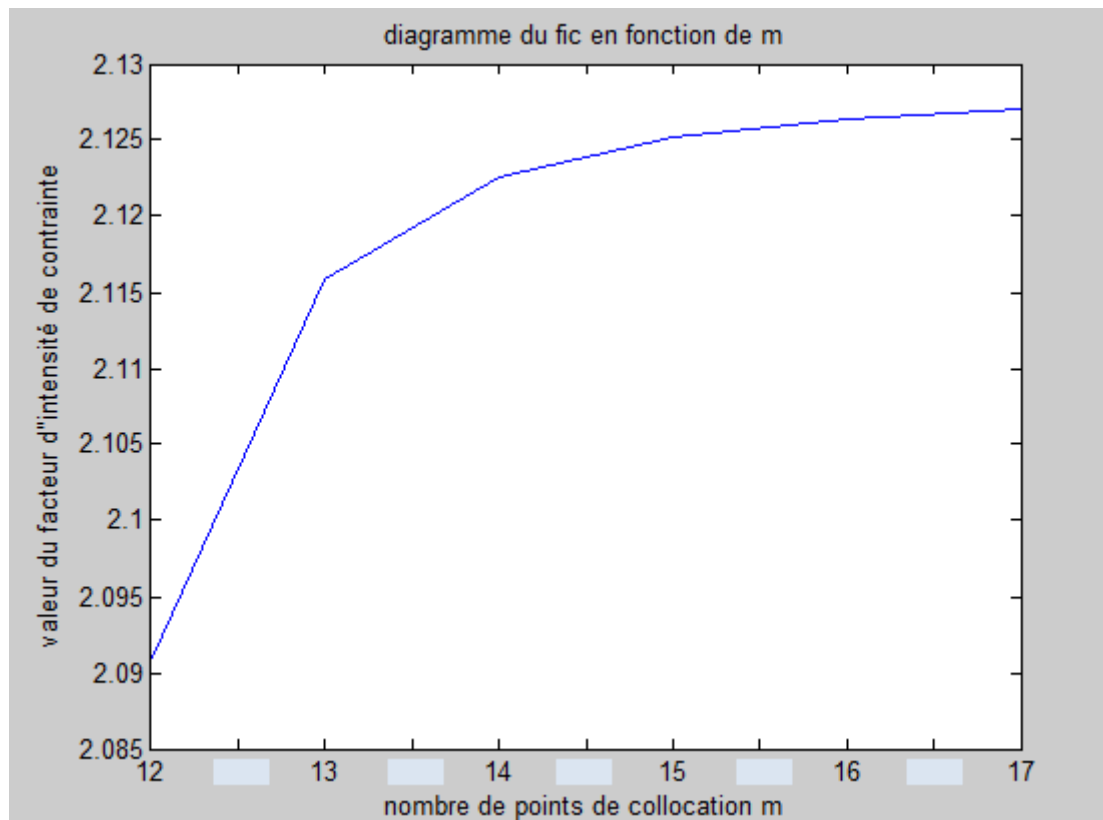


Figure III-4 : Diagramme de la variation de K_{III} en fonction du nombre de points m avec la formulation réelle.

Nous observons sur la Figure et sur le Tableau, que K_{III} converge vers la valeur de 2.127 à partir d'un nombre de points de collocation $m=17$. En comparant avec les résultats de A.T. Zehnder (Figure III-2) et nos résultats pour la première coupure (Figure et Tableau) nous constatons qu'avec la formulation réelle nous trouvons le même résultat avec la formulation complexe en utilisant la « branche principale » pour la fonction « puissance ». Ce résultat valide définitivement le calcul de A.T. Zehnder et le nôtre.

III-5-CONCLUSION :

Nous remarquons que notre travail, celui de Zehnder, ainsi que la formulation réelle convergent tous vers la valeur 2.1 donc nous concluons que **la 1^{ère} coupure est la branche uniforme** que nous recherchions.

CHAPITRE IV :

Détermination de K_{III} pour un contour carré

A titre de confirmation du choix de la branche uniforme effectuée au Chapitre précédent, nous nous proposons de refaire le calcul du K_{III} pour un contour de forme carrée en utilisant les deux approches réelle et complexe.

Le problème traité est une fissure dans un cylindre prismatique de côté $a=2$ (Figure IV-1). La pointe de la fissure est au centre du carré. La surface latérale du cylindre est chargée par des efforts dans la direction z , $t = F(\theta)$. Des points de collocation équidistants sont placés autour du cylindre. Les calculs ont été effectués dans le cas $F(\theta) = \sin\theta$.

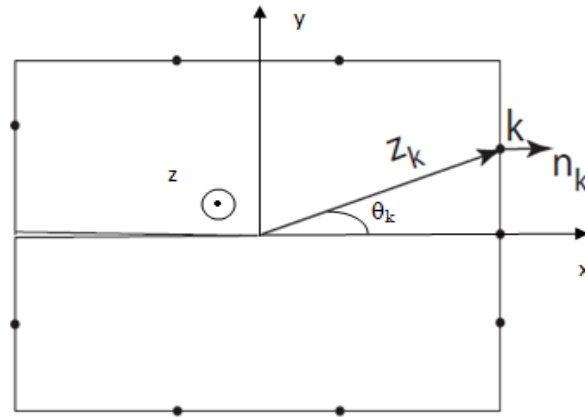


Figure VI-1 : Contour sous forme de carré [3]

Puisque nous utilisons les coordonnées polaires dans nos calculs, nous donnons ci-dessous (Tableau IV-1) la formule du rayon r pour chaque secteur du carré.

Les angles	Valeur du rayon
$(-\pi/4 < \theta < \pi/4)$ ou $(3\pi/4 < \theta < \pi)$ ou $(-\pi < \theta < -3\pi/4)$	$r = 1/\cos(\theta) $
$(\pi/4 < \theta < 3\pi/4)$ ou $(-3\pi/4 < \theta < -\pi/4)$	$r = 1/\sin(\theta) $

Tableau IV-1 : Les valeurs du rayon en fonction de l'angle dans le carré

IV-1 -L'approche réelle :

IV-1-1-Formulation :

On reprend l'équation (II-12) :

Au k^{eme} point :

$$t_k = \left(\sum_{n=0}^p [(n+0.5) B_n r^{n-0.5} \sin(n+0.5)\theta_k] + \sum_{n=1}^p [n A_n r^{n-1} \cos(n\theta_k)] \right) n_{rk} + \\ + \left(\sum_{n=0}^p [(n+0.5) B_n r^{n-0.5} \cos(n+0.5)\theta_k] + \sum_{n=1}^p [-n A_n r^{n-1} \sin(n\theta_k)] \right) n_{0k}$$

Avec $t_k = \sin\theta_k$

La valeur de r est donnée dans le tableau (IV-1)

Les composantes n_r et n_θ ont déterminées d'après le tableau suivant :

Valeur de θ	Valeur de n_r	Valeur de n_θ
$0 < \theta < \frac{\pi}{4}$	$\cos \theta$	$-\sin \theta$
$\frac{\pi}{4} < \theta \leq \frac{\pi}{2}$	$\cos (\pi/2 - \theta)$	$\sin (\pi/2 - \theta)$
$\frac{\pi}{2} \leq \theta < \frac{3\pi}{4}$	$\cos (\theta - \pi/2)$	$-\sin(\theta - \pi/2)$
$\frac{3\pi}{4} < \theta < \pi$	$\cos (\pi - \theta)$	$\sin (\pi - \theta)$
$-\pi < \theta < \frac{-3\pi}{4}$	$\cos (\pi + \theta)$	$-\sin(\pi + \theta)$
$\frac{-3\pi}{4} < \theta \leq \frac{-\pi}{2}$	$\cos (\theta + \pi/2)$	$-\sin (\theta + \pi/2)$
$\frac{-\pi}{2} \leq \theta < \frac{-\pi}{4}$	$\cos (\theta + \pi/2)$	$-\sin(\theta + \pi/2)$
$\frac{-\pi}{4} < \theta \leq 0$	$\cos \theta$	$-\sin \theta$

Tableau IV-2 : Composantes de la normale en coordonnées polaires pour les différents secteurs du carré

Remarque : aux points anguleux les vecteurs normaux ne sont pas définis donc nous évitons ses points dans nos calculs.

Le système d'équations (II-12) est un système de m équations à $2p+1$ inconnues avec $m \geq 2p+1$. On choisit $p=5$ (11 inconnus), m débute à la valeur 12.

On augmentera à chaque fois le nombre de points de collocation m jusqu'à convergence de K_{III} avec une précision de 10^{-2} .

IV-1-2-Résultats :

Le travail expliqué dans le paragraphe précédent est programmé à l'aide du langage de programmation Matlab (voir annexe). Les résultats obtenus sont présentés sur la Figure IV-2 et sur le Tableau IV-3 ci-dessous. On observe que K_{III} converge à la valeur de 2.50 à partir de $m = 161$.

Nous avons pris un pas de 10 car il s'avère que le nombre de points pour la convergence est assez grand.

M	FIC	M	FIC
21	2.625	121	2.502
31	2.579	131	2.503
41	2.514	141	2.508
51	2.511	151	2.510
61	2.520	161	2.502
71	2.522	171	2.503
81	2.503	181	2.508
91	2.504	191	2.507
101	2.511	201	2.502
111	2.513	211	2.503

Tableau VI-3 : Les valeurs du facteur d'intensité de contrainte en fonction du nombre de points m avec l'approche réelle.

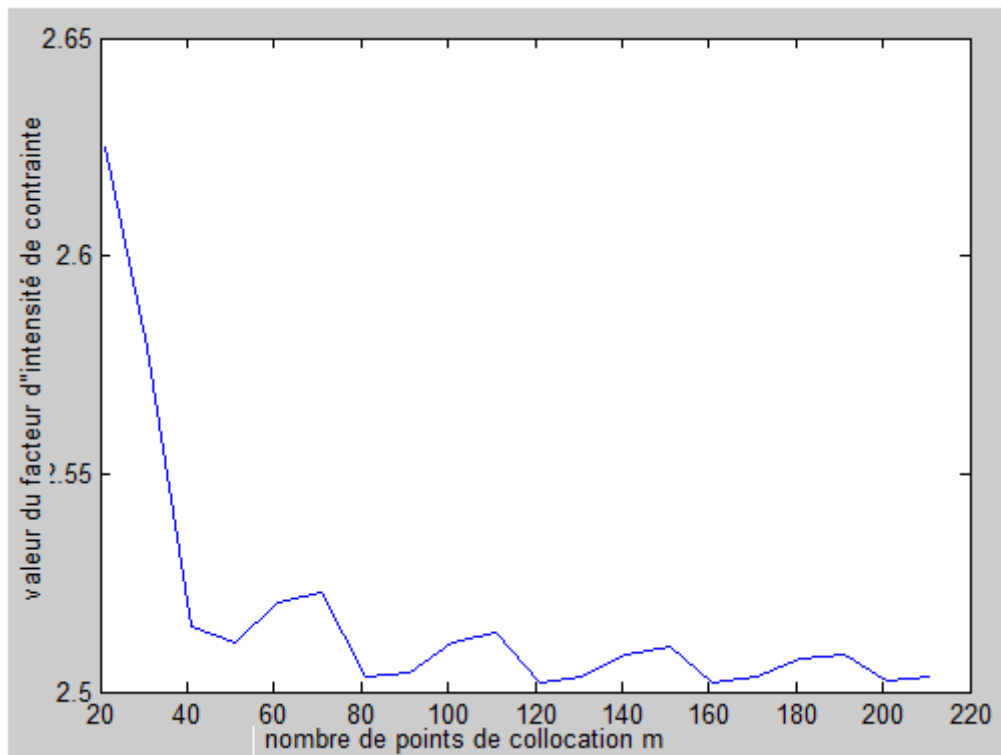


Figure IV-2 : Valeurs de K_{III} en fonction de m pour le carré

IV-2-L'approche complexe :

En se basant sur le résultat du Chapitre précédent, nous utilisons la branche principale pour la fonction complexe, c'est-à-dire $\theta \in [-\pi, \pi[$.

IV-2-1-Formulation :

On reprend l'équation (II-7) : $\text{Im} \left(\sum_{n=0}^p A_n z_k^{\left(\frac{1+n}{2}\right)} n_k \right) = t_k \quad k=1, m$

On a $Z_k = r_k e^{i\theta_k}$

Et $t_k = \sin \theta_k$, le rayon r_k et le vecteur normale au contour n_k sont déterminés en fonction de l'angle θ d'après le tableau suivant :

Valeur de l'angle θ	Valeur du vecteur normal n_k	Valeur du rayon r_k
$(-\pi/4 < \theta < \pi/4)$	1	$1/\cos(\theta)$
$(\pi/4 < \theta < 3\pi/4)$	i	$1/\sin(\theta)$
$(3\pi/4 < \theta < \pi)$ et $(-\pi < \theta < -3\pi/4)$	-1	$1/\cos(\theta)$
$(-3\pi/4 < \theta < -\pi/4)$	-i	$1/\sin(\theta)$

Tableau IV-4 : Valeur du vecteur normal en notation complexe et du rayon pour le carré

On prend $p=10$ ce qui nous donne 11 inconnus, afin de les déterminer on introduit l'erreur :

$$\Psi = \sum_{k=1}^m \left(\sin \theta_k - \text{Im} \left(\sum_{n=0}^p A_n z_k^{\left(\frac{1+n}{2}\right)} n_k \right) \right)^2 \quad (\text{IV-2})$$

En minimisant l'erreur Ψ au sens de moindres carrés comme il est présenté précédemment dans le paragraphe III-4 on trouvera les 11 coefficients inconnus et par suite le facteur d'intensité de contrainte K_{III} en appliquant la formule (III-11) :

$$K_{III} = \sqrt{2\pi} B_0$$

On augmentera à chaque fois le nombre de points jusqu'à convergence de K_{III} avec une précision de 10^{-2} .

IV-2-2-Résultats :

Le travail expliqué dans le paragraphe précédent sera programmé par Matlab (voir annexe). Le programme qu'on a élaboré effectue le calcul du K_{III} pour la première coupure car nous avons démontré dans le chapitre 3 que c'était la bonne coupure. Nous observons une convergence du FIC vers la valeur de 2,60 à partir de $m = 49$.

M	FIC	m	FIC	m	FIC	M	FIC
12	0.313	23	2.567	34	2.584	45	2.599
13	2.441	24	2.541	35	2.586	46	2.600
14	2.481	25	2.561	36	2.589	47	2.602
15	2.552	26	2.569	37	2.591	48	2.597
16	2.308	27	2.573	38	2.593	49	2.600
17	2.513	28	2.576	39	2.595	50	2.602
18	2.528	29	2.580	40	2.586	51	2.603
19	2.543	30	2.583	41	2.590	52	2.605
20	2.547	31	2.586	42	2.593	53	2.606
21	2.554	32	2.570	43	2.596	54	2.607
22	2.560	33	2.579	44	2.597	-	-

Tableau IV-5 : Valeurs de K_{III} en fonction de m pour le carré avec l'approche complexe

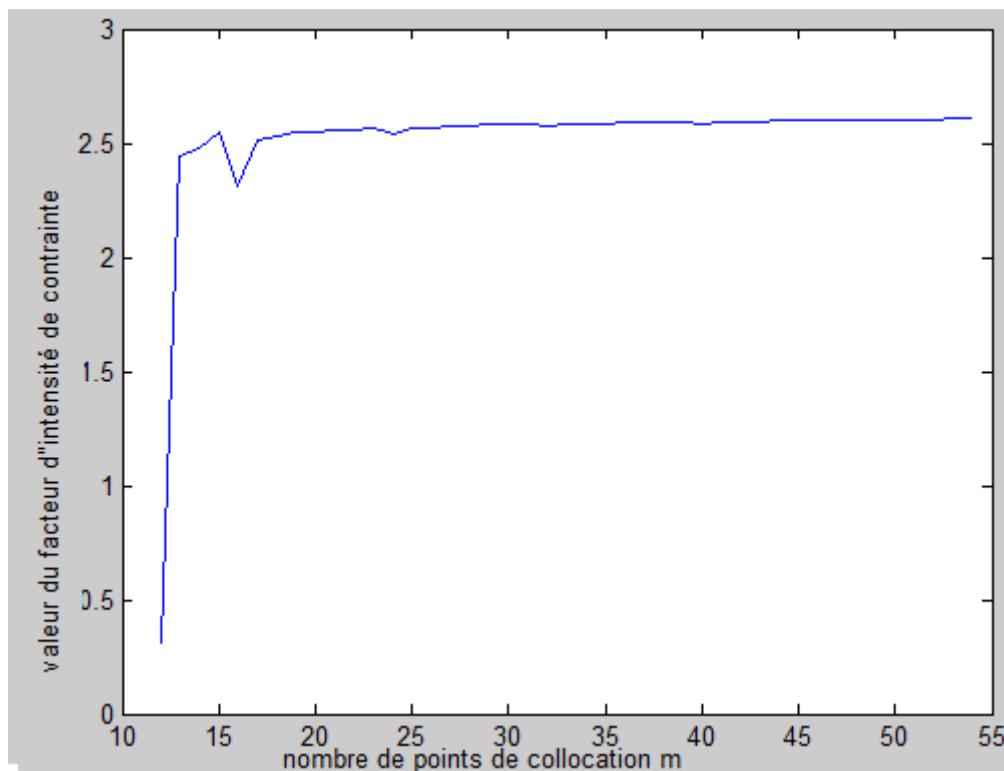


Figure IV-3 : figure de convergence du FIC en fonction des nombre de point pour le carré calculé

IV-3-Conclusion :

L'approche réelle a donné une valeur de 2,50. L'approche complexe a donné une valeur de 2,60. Ce qui fait une erreur de 4%. C'est une erreur acceptable, on peut donc dire que les deux approches convergent vers le même résultat. Ce résultat confirme donc celui du chapitre précédent.

Conclusion générale:

Ce travail a pour but de rechercher la branche uniforme utilisée dans le travail de A.T. Zehnder [3]. Nous avons appliqué le résultat trouvé pour calculer le FIC pour un autre exemple.

Le calcul numérique a été effectué grâce au langage de programmation MATLAB R2011b.

Les résultats obtenus ont été validés par une comparaison avec les résultats de la littérature.

Dans le cadre de l'élasticité anti-plane, nous avons utilisé le développement en série de Laurent. Cela a induit une fonction multiforme que nous avons étudiée.

Nous avons remarqué pour la fonction multiforme « puissance », que pour une coupure donnée la valeur de la fonction en un point donné ne fait que changer de signe si on tourne de 2π autour de l'origine. Donc il suffisait d'étudier les coupures se trouvant dans le domaine $[-\pi, \pi[$.

Nous avons décidé de faire l'étude pour 8 coupures.

Les résultats sont plus que satisfaisant car nous avons pu déterminer la coupure utilisée par Zhender. Cette coupure correspond à la branche principale de la fonction « puissance ». Nous avons également confirmé le choix de Zhender en comparant avec une approche réelle.

Nous concluons que pour faire le calcul du FIC en élasticité anti-plane avec la méthode de collocation de frontière en utilisant la formulation complexe, il faut prendre la coupure correspondant à la branche uniforme.

Une perspective que l'on peut dégager pour la poursuite de ce travail est de refaire notre étude à des problèmes en modes I et II.

Nomenclatures

$*A_n, B_n$	facteurs réels
$*\alpha$	angle de coupure.
$*\sigma$	la contrainte.
$*\varepsilon$	déformation.
$*FIC$	facteur d'intensité de contrainte.
$*i$	nombre imaginaire.
$*Im$	partie imaginaire
$*K_I, K_{II}$ et K_{III}	facteurs d'intensité de contrainte respectivement en mode 1, 2 et 3.
$*m$	nombre de points de collocation.
$*n$	vecteur normale.
$*\mu$	coefficient de cisaillement.
$*P_n$	polynôme d'approximation.
$*\pi$	le nombre ascendant 3,14.
$*\psi$	erreur.
$*r, \theta$	composantes du repère polaire.
$*Re$	partie réelle.
$*t$	composante du vecteur contrainte.
$*\tau$	contrainte de cisaillement.
$*U$	déplacement.
$*w$	puissance.
$*x, y$	composantes du repère cartésien.
$*z$	nombre complexe.

Annexe

1-Programme pour le calcul du facteur d'intensité de contrainte pour le cercle en utilisant l'approche réelle :

```

clc
clear
syms b0 b1 b2 b3 b4 b5 real
syms a1 a2 a3 a4 a5 real
b=[b0 b1 b2 b3 b4 b5 a1 a2 a3 a4 a5]';
fic=0;fict=1;m=11;l1l=1;
while abs(fic-fict)>0.001
    m=m+1;fict=fic;er=0;
    for k=1:m
        teta=-pi+((k-1)*2*pi/m);cont=0;
        for n=1:5
            cont=cont+((n+0.5)*b(n+1)*sin((n+0.5)*teta))+(n*b(n+6)*cos(n*teta));
        end
        cont=cont+(0.5*b0*sin(0.5*teta));
        er=er+((cont-sin(teta))^2);
    end
    d=[diff(er,b0) diff(er,b1) diff(er,b2) diff(er,b3)
        diff(er,b4) diff(er,b5) diff(er,a1) diff(er,a2) diff(er,a3)
        diff(er,a4) diff(er,a5)]';
    bs=-
subs(d,{b0,b1,b2,b3,b4,b5,a1,a2,a3,a4,a5},{0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0});
    for n=1:11
        for rar=1:11
            mlp=[0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0];
            mlp(rar)=1;
            a(n,rar)=(subs(d(n),{b0,b1,b2,b3,b4,b5,a1,a2,a3,a4,a5},mlp))+bs(n);
        end
    end
    x=inv(a)*bs;
    fic=x(1)*((pi/2)^0.5)
    m
    xxx(l1l)=m;yyy(l1l)=fic;
    l1l=l1l+1;
end
plot(xxx,yyy)
xlabel('nombre de points de collocation m')
ylabel('valeur du facteur d"intensité de contrainte')
title('diagramme du fic en fonction de m')

```

2-Programme pour le calcul du facteur d'intensité de contrainte pour le cercle en utilisant l'approche complexe :

```

clc
clear
syms a0 real
for s=0:7
    coup=-pi+(pi*s/4);
    fic=0;fict=1;m=2;
    while abs(fic-fict)>1e-3
        m=m+1;fict=fic;er=0;
        for k=1:m
            teta=coup+((k-1)*2*pi/m);cont=0;
            cont=cont+(a0*sin((0.5)*teta));
            er=er+((cont-sin(teta))^2);
        end
        d=diff(er,a0);
        bs=-subs(d,a0,0);
        a=subs(d,a0,1)+bs;
        x=bs/a;
        fic=x(1)*((pi*2)^0.5);
    end
    fic
    m
end

```

3-Programme pour le calcul du facteur d'intensité de contrainte pour le carré en utilisant l'approche réelle :

```

clc
clear
syms b0 b1 b2 b3 b4 b5 real
syms a1 a2 a3 a4 a5 real
b=[b0 b1 b2 b3 b4 b5 a1 a2 a3 a4 a5]';
fic=0;rrr=0.2 ;fict=1;m=11;lll=1;
while abs(fic-fict)>0.001
    m=m+10;fict=fic;er=0;
    for k=1:m
        teta=-pi+((k-1)*2*pi/m);cont=0;
        if (teta>-pi/4 && teta<pi/4)
            r=1/cos(teta);nr=cos(teta);nt=-sin(teta);
        end
        if (teta<pi/2 && teta>pi/4)
            r=1/cos((pi/2)-teta);nr=cos((pi/2)-
teta);nt=sin((pi/2)-teta);
        end
        if (teta<3*pi/4 && teta>pi/2)
            r=1/cos((pi/2)-teta);nr=cos(teta-(pi/2));nt=-
sin(teta-(pi/2));
        end
        if (teta<pi && teta>3*pi/4)
            r=1/cos(pi-teta);nr=cos(pi-teta);nt=sin(pi-teta);
        end
        if (teta<-3*pi/4 && teta>-pi)

```

Annexe

```

r=1/cos((pi*3)-teta);nr=cos(pi+teta);nt=-
sin(pi+teta);
end
if (teta<-pi/2 && teta>-3*pi/4)
r=1/cos((pi/2)+teta);nr=cos(teta+(pi/2));nt=-
sin(teta+(pi/2));
end
if (teta<-pi/4 && teta>-pi/2)
r=1/cos((pi/2)+teta);nr=cos(teta+(pi/2));nt=-
sin(teta+(pi/2));
end
if (teta==pi || teta==3*pi/4 || teta==pi/2 || teta==pi/4
|| teta==0 || teta==pi/4 || teta==pi/2 || teta==3*pi/4 || teta==pi)
r=1;nt=0;nr=1;
end
cont=(nr*(b0/2)*(r^-0.5)*sin(teta/2))+(nt*(b0/2)*(r^-
0.5)*cos(teta/2));
for n=1:5
cont=cont+(((n+0.5)*(b(n+1))*(r^(n-
0.5))*sin((n+0.5)*teta))+(n*(b(n+6))*(r^(n-
1))*cos(n*teta))*nr)+(((n+0.5)*(b(n+1))*(r^(n-
0.5))*cos((n+0.5)*teta))+(n*(b(n+6))*(r^(n-1))*sin(n*teta))*nt);
end
er=er+((cont-sin(teta))^2);
end
d=[diff(er,b0) diff(er,b1) diff(er,b2) diff(er,b3) diff(er,b4)
diff(er,b5) diff(er,a1) diff(er,a2) diff(er,a3) diff(er,a4)
diff(er,a5)]';
bs=-
subs(d,{b0,b1,b2,b3,b4,b5,a1,a2,a3,a4,a5},{0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0});
for n=1:11
for rar=1:11
mlp=[0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0];
mlp(rar)=1;

a(n,rar)=(subs(d(n),{b0,b1,b2,b3,b4,b5,a1,a2,a3,a4,a5},mlp))+bs(n);
end
end
x=a\bs;
fic=x(1)*((pi/2)^0.5);
m;
xxx(111)=m+rrr;yyy(111)=fic;
111=111+1;
end
fic
m
plot(xxx,yyy)
xlabel('nombre de points de collocation m')
ylabel('valeur du facteur d"intensité de contrainte')
title('diagramme du fic en fonction de m')

```

4-Programme pour le calcul du facteur d'intensité de contrainte pour le carré en utilisant l'approche complexe :

```

clc
clear
syms a0 a1 a2 a3 a4 a5 a6 a7 a8 a9 a10 real
a=[a0 a1 a2 a3 a4 a5 a6 a7 a8 a9 a10]';
s=0 ;
beta=-pi+(pi*s/4);
p=10;ab=1;m=11;delta=0;
fic=0;lkj=1;
while (abs(fic-lkj)>0.001)
    m=m+1;
    z=zeros(m,11);
    lkj=fic;
    for k=1:m
        for n=0:p
            teta=beta+(2*pi*k/m);
            l=teta*4/pi;
            if (l>-1 && l<1) || (l>7 && l<9)
                nk=1;al=1/cos(teta);
            end
            if (l<-3 && l>-5)
                nk=-1;al=1/cos(3*pi-teta);
            end
            if (l<5 && l>3)
                nk=-1;al=1/cos(pi-teta);
            end
            if (l<3 && l>1)
                nk=i;al=1/cos((pi/2)-teta);
            end
            if (l<11 && l>9)
                nk=i;al=1/cos((5*pi/2)-teta);
            end
            if (l<-1 && l>-3)
                nk=-i;al=1/cos(teta+(pi/2));
            end
            if (l<7 && l>5)
                nk=-i;al=1/cos(teta+(5*pi/2));
            end
            if (l==1 || l==9)
                nk=(2^(-(1/2))+i*(2^(-(1/2))));al=1;
            end
            if (l==3 || l==11)
                nk=(-2^(-(1/2))+i*(2^(-(1/2))));al=1;
            end
            if (l==-3 || l==5)
                nk=(-2^(-(1/2))-i*(2^(-(1/2))));al=1;
            end
            if (l==-1 || l==7)
                nk=(2^(-(1/2))-i*(2^(-(1/2))));al=1;
            end
            z(k,n+1)=imag(nk*(al^(-(1/2)+n))*((cos(teta*(n-
(1/2))))+i*(sin(teta*((-1/2)+n)))));
        end
    end
    fic=z(lkj);
end

```

Annexe

```
end
f=z*a;
for H=1:m
    delta=delta+(f(H)-sin(beta+(2*pi*H/m)))^2;
end

d0=[diff(delta,a0);diff(delta,a1);diff(delta,a2);diff(delta,a3);diff
(delta,a4);diff(delta,a5);diff(delta,a6);diff(delta,a7);diff(delta,a
8);diff(delta,a9);diff(delta,a10)];
bs=-
(subs(d0,{a0,a1,a2,a3,a4,a5,a6,a7,a8,a9,a10},{0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0}
));
    for H=1:11
        for G=1:11
            mlp=[0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0];
            mlp(G)=1;

d1(H,G)=(subs(d0(H),{a0,a1,a2,a3,a4,a5,a6,a7,a8,a9,a10},mlp))+bs(H);
        end
    end
X=(inv(d1))*bs;
fic=X(1)*((2*pi)^0.5);
ficc(m-11)=fic ;mm(m-11)=m ;
end
fic
m
plot(mm,ficc)
```

5- Les tableaux et figures de convergence de chaque coupure traitées dans le chapitre 3 (disque) par l'approche complexe :

Nombre de points m	Valeur du FIC	Nombre de points m	Valeur du FIC
3	1.447	14	2.100
4	1.772	15	2.104
5	1.907	16	2.107
6	1.976	17	2.109
7	2.017	18	2.111
8	2.044	19	2.113
9	2.061	20	2.114
10	2.074	21	2.115
11	2.083	22	2.116
12	2.090	23	2.117
13	2.096	-	-

Tableau de valeurs de convergence du fic en fonction de m pour la 1^{ère} coupure.

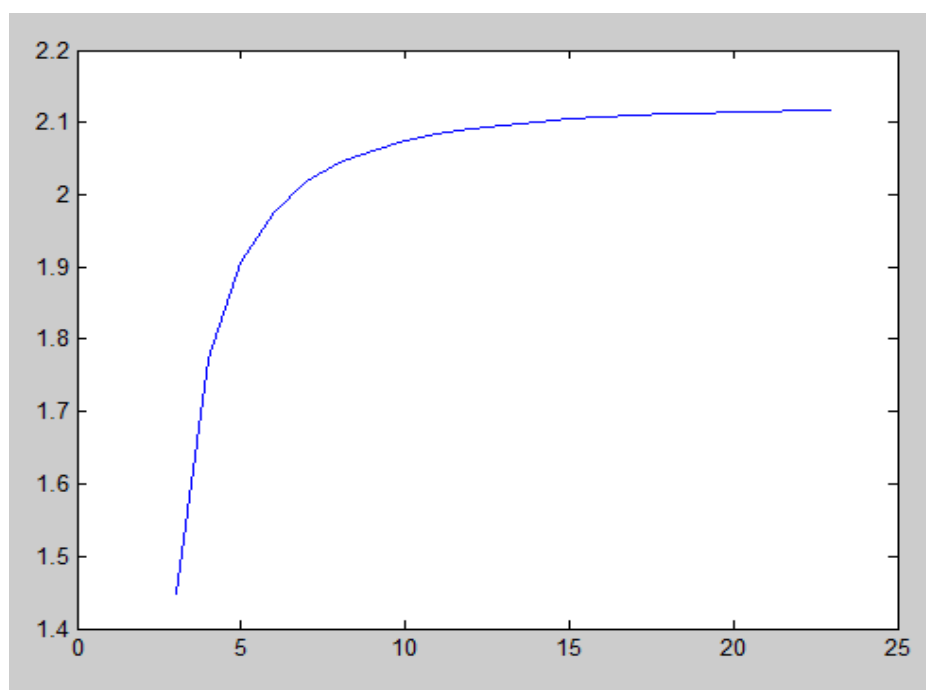


Figure de convergence du fic en fonction de m pour la 1^{ère} coupure.

M	FIC	M	FIC	M	FIC	M	FIC
3	2.428	17	1.861	31	1.780	45	1.749
4	2.315	18	1.851	32	1.777	46	1.747
5	2.219	19	1.842	33	1.774	47	1.746
6	2.146	20	1.834	34	1.771	48	1.744
7	2.089	21	1.827	35	1.769	49	1.743
8	2.044	22	1.821	36	1.766	50	1.742
9	2.007	23	1.815	37	1.764	51	1.741
10	1.977	24	1.809	38	1.762	52	1.739
11	1.952	25	1.804	39	1.760	53	1.738
12	1.931	26	1.799	40	1.758	54	1.737
13	1.913	27	1.795	41	1.756	55	1.736
14	1.897	28	1.791	42	1.754	56	1.735
15	1.884	29	1.787	43	1.752	57	1.734
16	1.871	30	1.784	44	1.750	-	-

Tableau de valeurs de convergence du fic en fonction de m pour la 2^{ème} coupure.

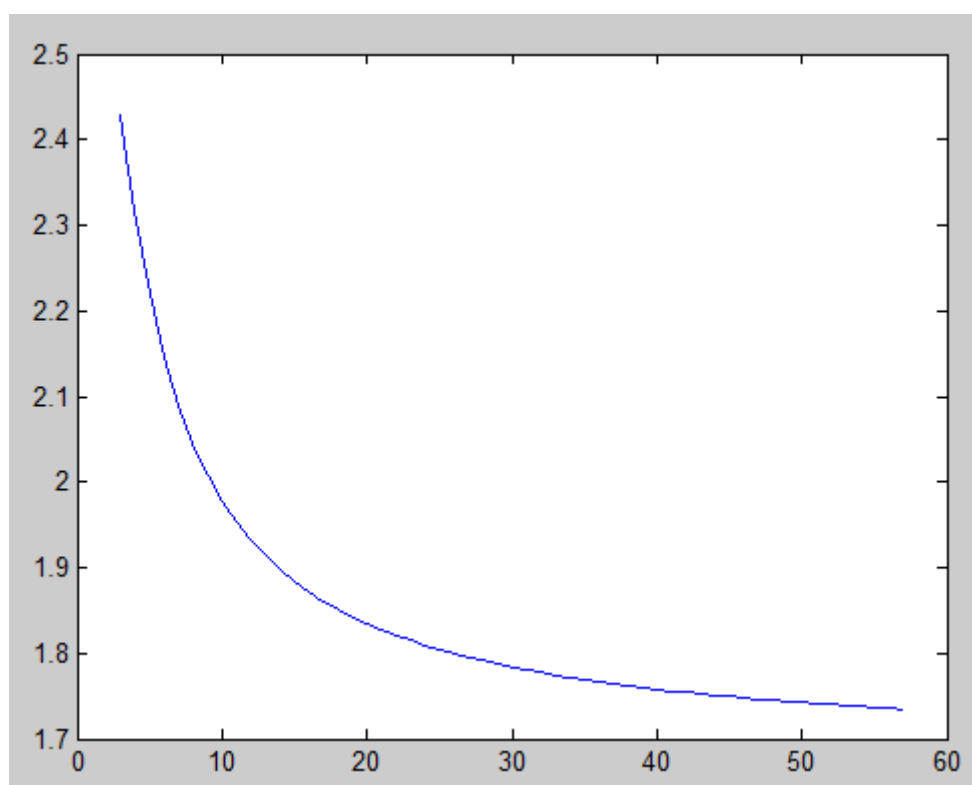


Figure de convergence du fic en fonction de m pour la 2^{ème} coupure.

M	FIC	M	FIC	M	FIC	M	FIC
3	2.205	18	0.955	33	0.861	48	0.826
4	1.772	19	0.944	34	0.858	49	0.825
5	1.542	20	0.934	35	0.855	50	0.823
6	1.397	21	0.925	36	0.852	51	0.822
7	1.298	22	0.917	37	0.849	52	0.821
8	1.225	23	0.909	38	0.846	53	0.819
9	1.169	24	0.903	39	0.844	54	0.818
10	1.125	25	0.897	40	0.842	55	0.817
11	1.090	26	0.891	41	0.839	56	0.816
12	1.060	27	0.886	42	0.837	57	0.815
13	1.036	28	0.881	43	0.835	58	0.813
14	1.015	29	0.876	44	0.833	59	0.812
15	0.996	30	0.872	45	0.831	60	0.811
16	0.981	31	0.868	46	0.830	61	0.810
17	0.967	32	0.864	47	0.828	-	-

Tableau de valeurs de convergence du fic en fonction de m pour la 3^{eme} coupure.

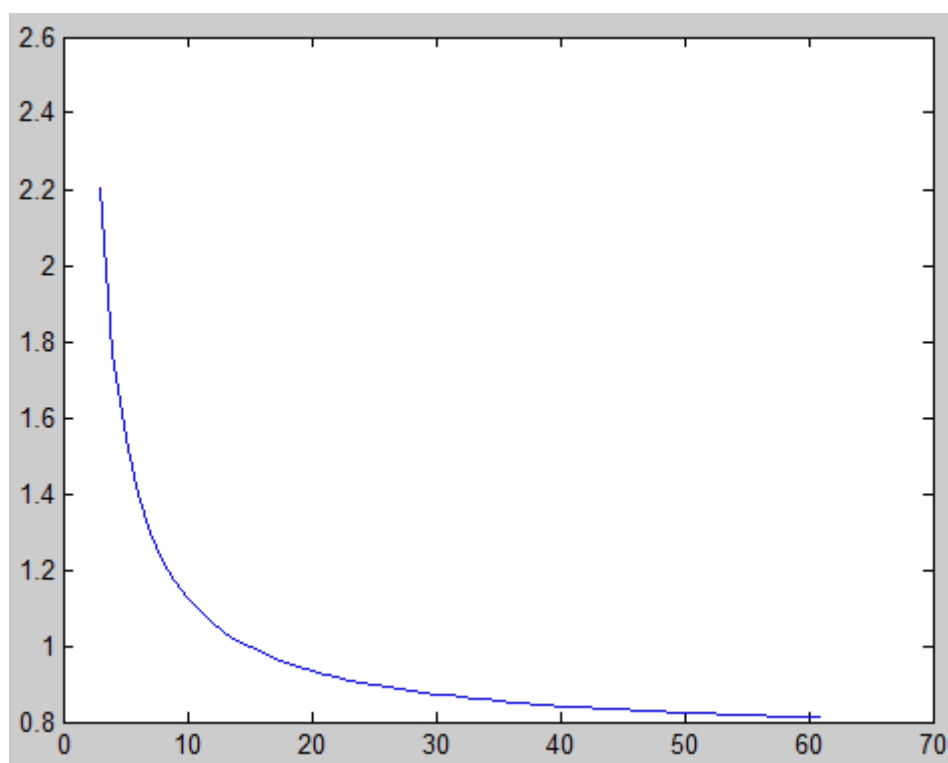


Figure de convergence du fic en fonction de m pour la 3^{eme} coupure.

M	FIC	M	FIC	M	FIC	M	FIC
3	1.006	13	0.242	23	0.184	33	0.163
4	0.678	14	0.232	24	0.181	34	0.161
5	0.525	15	0.223	25	0.178	35	0.160
6	0.436	16	0.216	26	0.176	36	0.159
7	0.379	17	0.210	27	0.173	37	0.158
8	0.339	18	0.204	28	0.171	38	0.157
9	0.309	19	0.199	29	0.169	39	0.156
10	0.286	20	0.194	30	0.168	40	0.155
11	0.268	21	0.191	31	0.166	-	-
12	0.254	22	0.187	32	0.164	-	-

Tableau de valeurs de convergence du fic en fonction de m pour la 4^{eme} coupure.

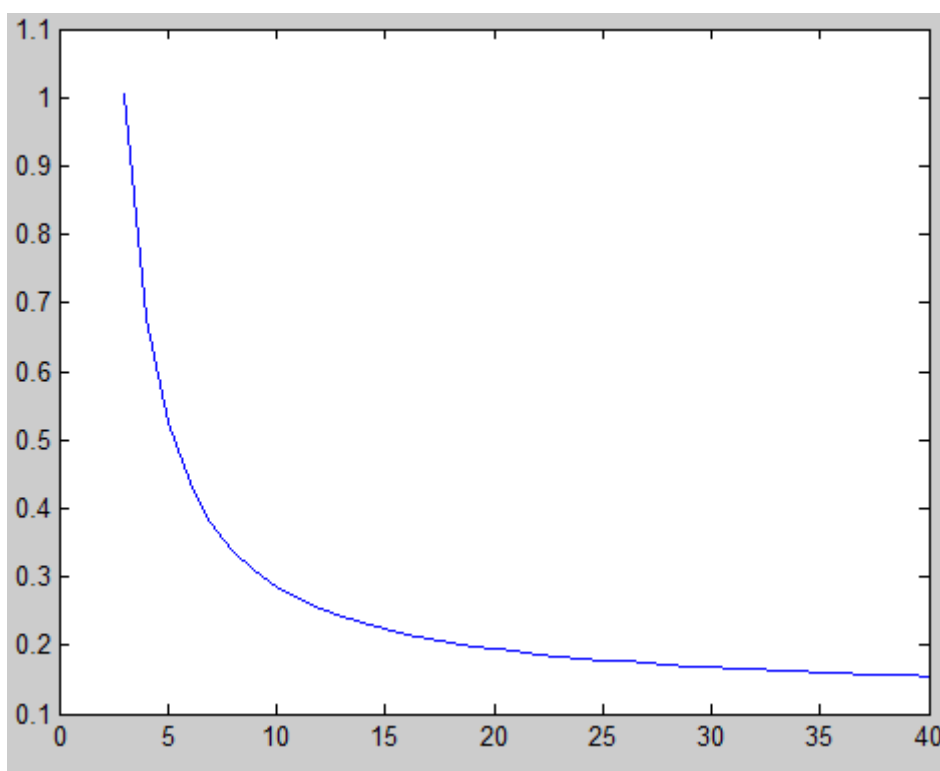


Figure de convergence du fic en fonction de m pour la 4^{eme} coupure.

M	FIC
3	0
4	0

Tableau de valeurs de convergence du fic en fonction de m pour la 5^{eme} coupure.

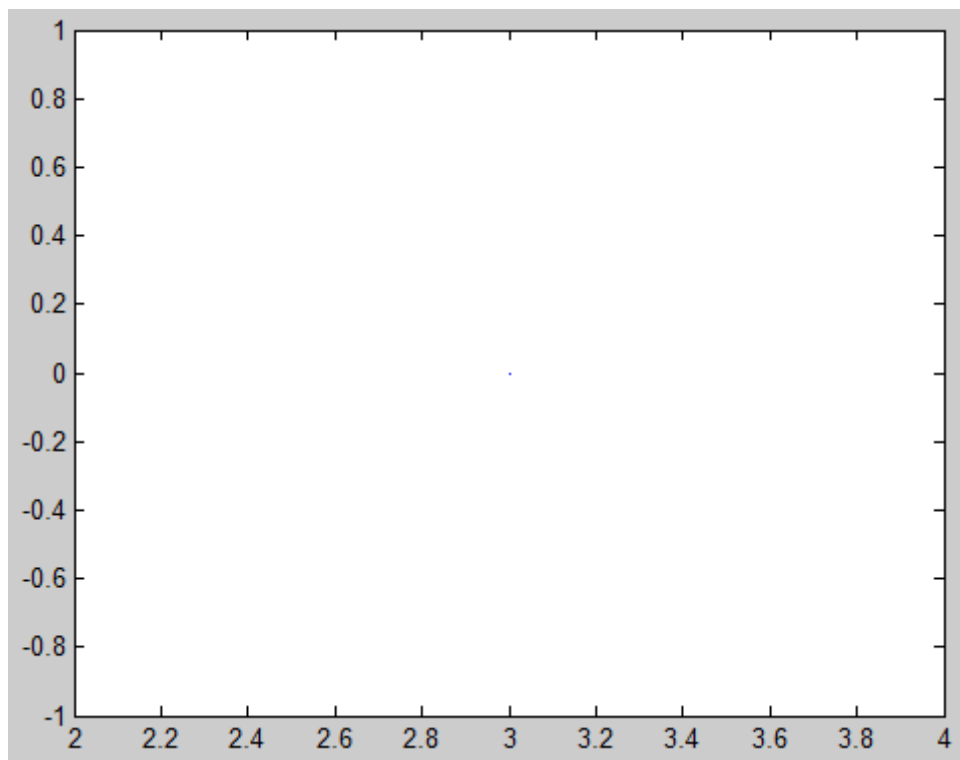


Figure de convergence du fic en fonction de m pour la 5^{eme} coupure.

M	FIC	M	FIC	M	FIC	M	FIC
3	-0.101	12	-0.028	21	-0.061	30	-0.077
4	0.000	13	-0.033	22	-0.064	31	-0.078
5	0.017	14	-0.038	23	-0.066	32	-0.079
6	0.015	15	-0.042	24	-0.068	33	-0.081
7	0.008	16	-0.046	25	-0.070	34	-0.082
8	0.000	17	-0.050	26	-0.071	35	-0.083
9	-0.008	18	-0.053	27	-0.073	-	-
10	-0.015	19	-0.056	28	-0.074	-	-
11	-0.022	20	-0.059	29	-0.076	-	-

Tableau de valeurs de convergence du fic en fonction de m pour la 6^{eme} coupure.

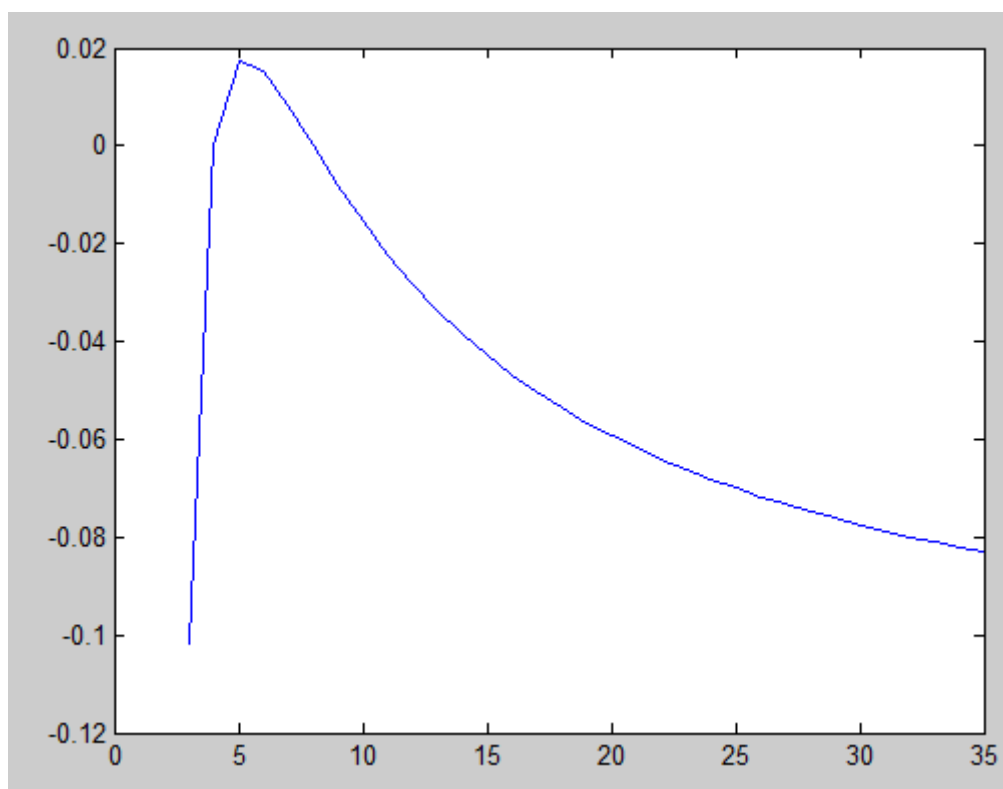


Figure de convergence du fic en fonction de m pour la 6^{eme} coupure.

M	FIC	M	FIC	M	FIC	M	FIC
3	0.158	18	-0.561	33	-0.646	48	-0.679
4	0.000	19	-0.570	34	-0.649	49	-0.680
5	-0.124	20	-0.579	35	-0.652	50	-0.682
6	-0.216	21	-0.587	36	-0.655	51	-0.683
7	-0.285	22	-0.595	37	-0.657	52	-0.684
8	-0.339	23	-0.601	38	-0.660	53	-0.686
9	-0.381	24	-0.607	39	-0.662	54	-0.687
10	-0.416	25	-0.613	40	-0.664	55	-0.688
11	-0.445	26	-0.618	41	-0.666	56	-0.689
12	-0.469	27	-0.623	42	-0.668	57	-0.690
13	-0.490	28	-0.628	43	-0.670	58	-0.691
14	-0.508	29	-0.632	44	-0.672	59	-0.692
15	-0.524	30	-0.636	45	-0.6744	60	-0.693
16	-0.538	31	-0.639	46	-0.676	-	-
17	-0.550	32	-0.643	47	-0.677	-	-

Tableau de valeurs de convergence du fic en fonction de m pour la 7^{ème} coupure.

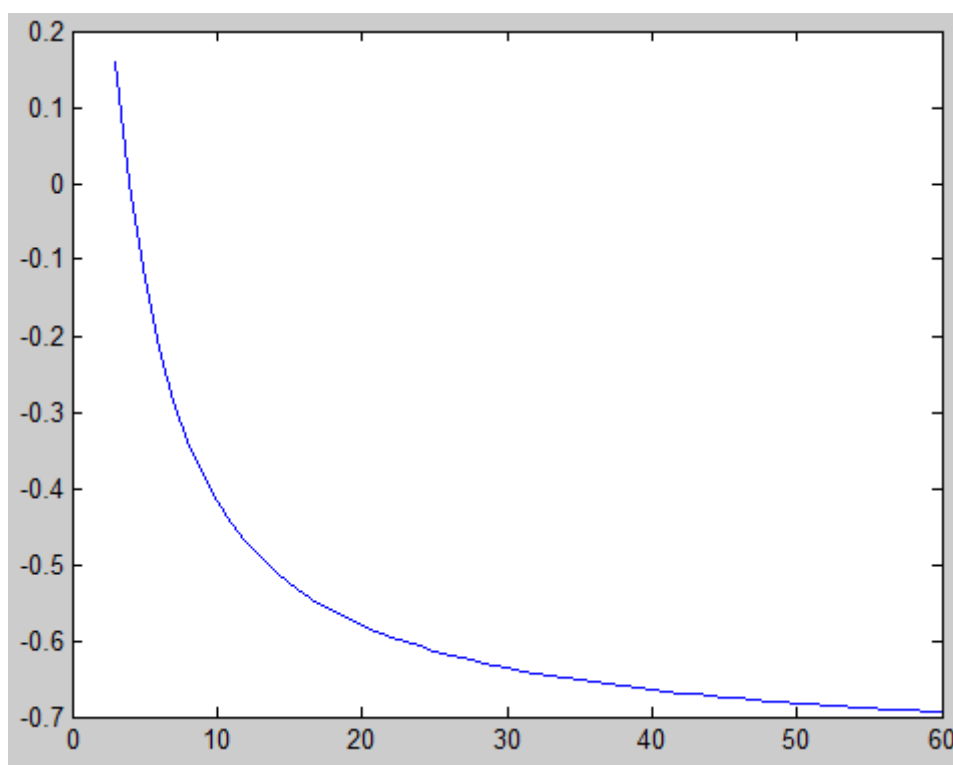


Figure de convergence du fic en fonction de m pour la 7^{ème} coupure.

M	FIC	M	FIC	M	FIC	M	FIC
3	-0.245	18	-1.487	33	-1.576	48	-1.608
4	-0.678	19	-1.497	34	-1.579	49	-1.609
5	-0.909	20	-1.507	35	-1.582	50	-1.611
6	-1.054	21	-1.515	36	-1.584	51	-1.612
7	-1.153	22	-1.523	37	-1.587	52	-1.613
8	-1.225	23	-1.530	38	-1.589	53	-1.615
9	-1.280	24	-1.536	39	-1.592	54	-1.616
10	-1.322	25	-1.542	40	-1.594	55	-1.617
11	-1.357	26	-1.547	41	-1.596	56	-1.618
12	-1.385	27	-1.552	42	-1.598	57	-1.619
13	-1.409	28	-1.557	43	-1.600	58	-1.620
14	-1.430	29	-1.561	44	-1.602	59	-1.621
15	-1.447	30	-1.565	45	-1.603	-	-
16	-1.462	31	-1.569	46	-1.605	-	-
17	-1.475	32	-1.572	47	-1.606	-	-

Tableau de valeurs de convergence du fic en fonction de m pour la 8^{ème} coupure.

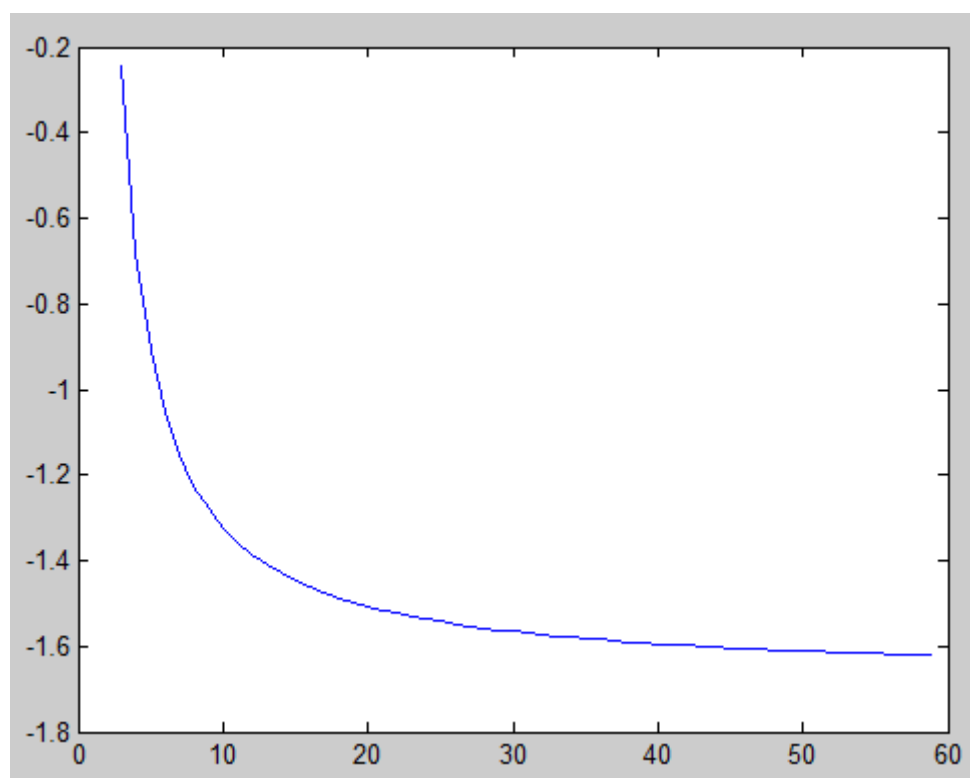


Figure de convergence du fic en fonction de m pour la 8^{ème} coupure.

6- Algorithmes logique utilisés comme base pour les programmes Matlab

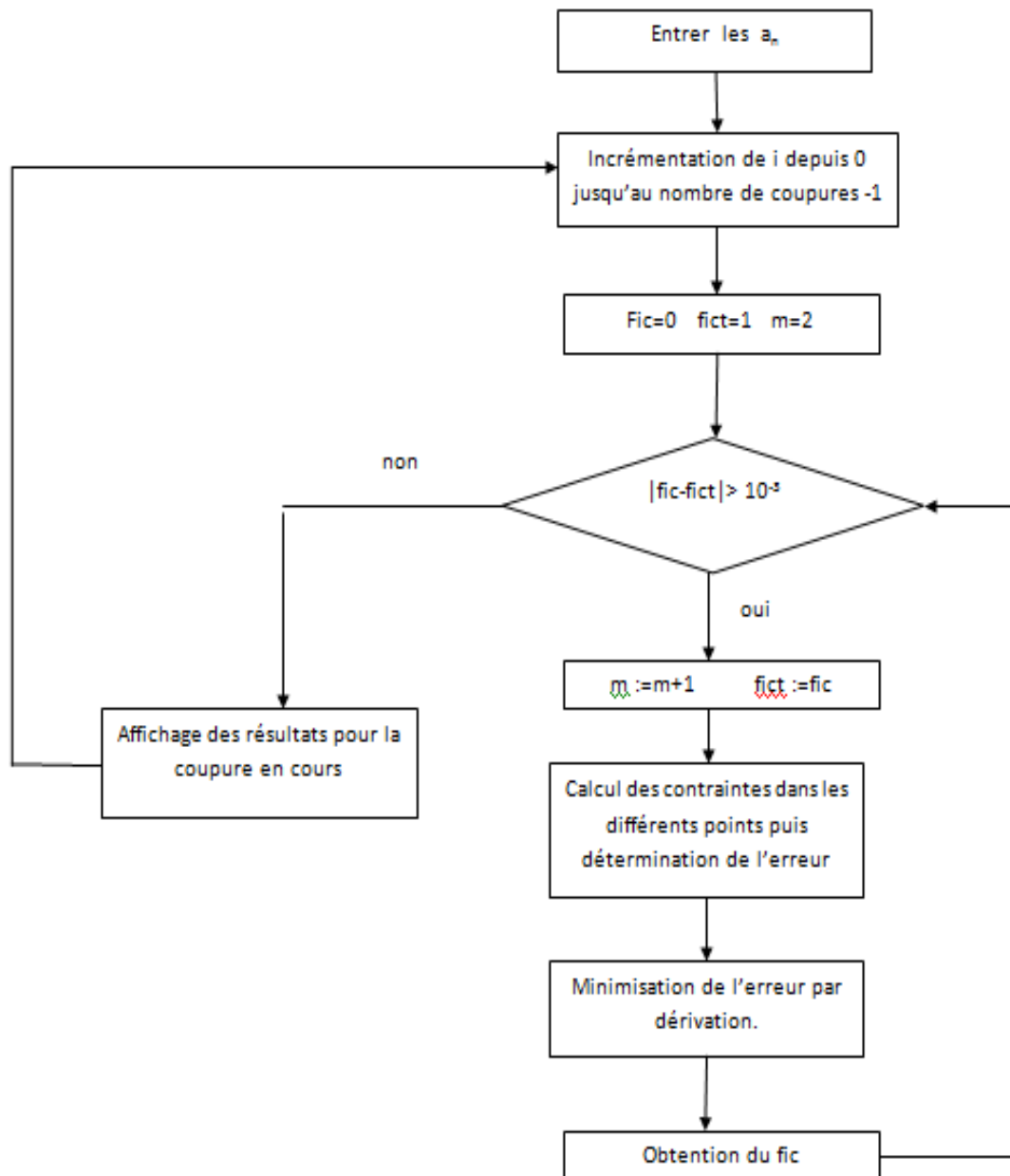


Diagramme représentant l'algorithme de calcul par l'approche complexe.

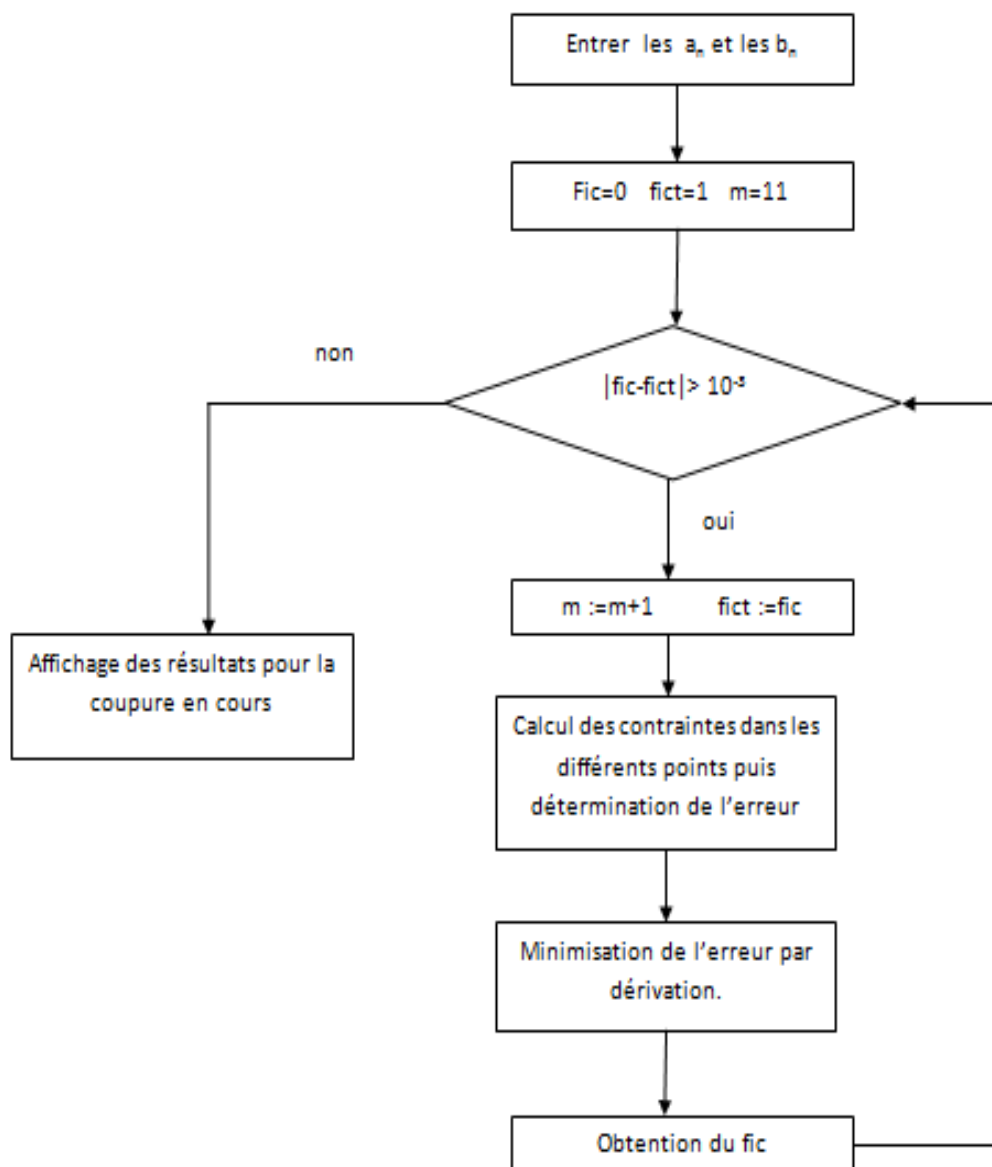


Diagramme représentant l'algorithme de calcul par l'approche réelle.

Bibliographie:

- [1] Cours 3^e année Jean-Jacques Marigo. Département de Mécanique
« **Mécanique, Innovation Technologique, Energies du XXI^e siècle** »
(Jul 2012)

- [2] Sih, G.S. *Handbook of Stress Intensity Factors*. Lehigh University,
Bethlehem (USA) (1973).

- [3] Alan T. Zehnder, Ph.D. « **Lecture notes on fracture mechanics** »
Department of Theoretical and Applied Mechanics Cornell University,
Ithaca, NY 14853, (2007)

- [4] Cours Elie Raphaël- Méthodes Mathématiques. E.S.P.C.I (2005– 2006)

- [5] Cours Tony Bourdier. Mathématiques Numériques. ESIAL (2007 - 2008)

- [6] Cours H.Ferdjani- Mécanique de la rupture – USDB (2012)

- [7] Khireddine. Serir -Thèse en vue de l'obtention du diplôme Master en
conception mécanique- Exemple de calcul du facteur d'intensité de
contrainte par la méthode de collocation de frontière en élasticité anti-
plane USDB (2012)