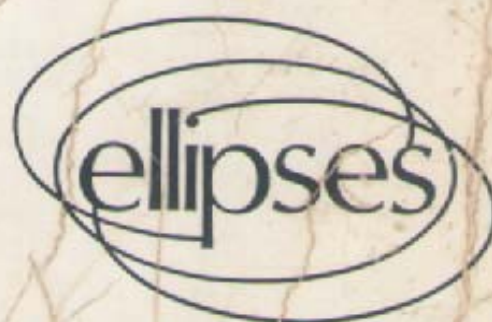
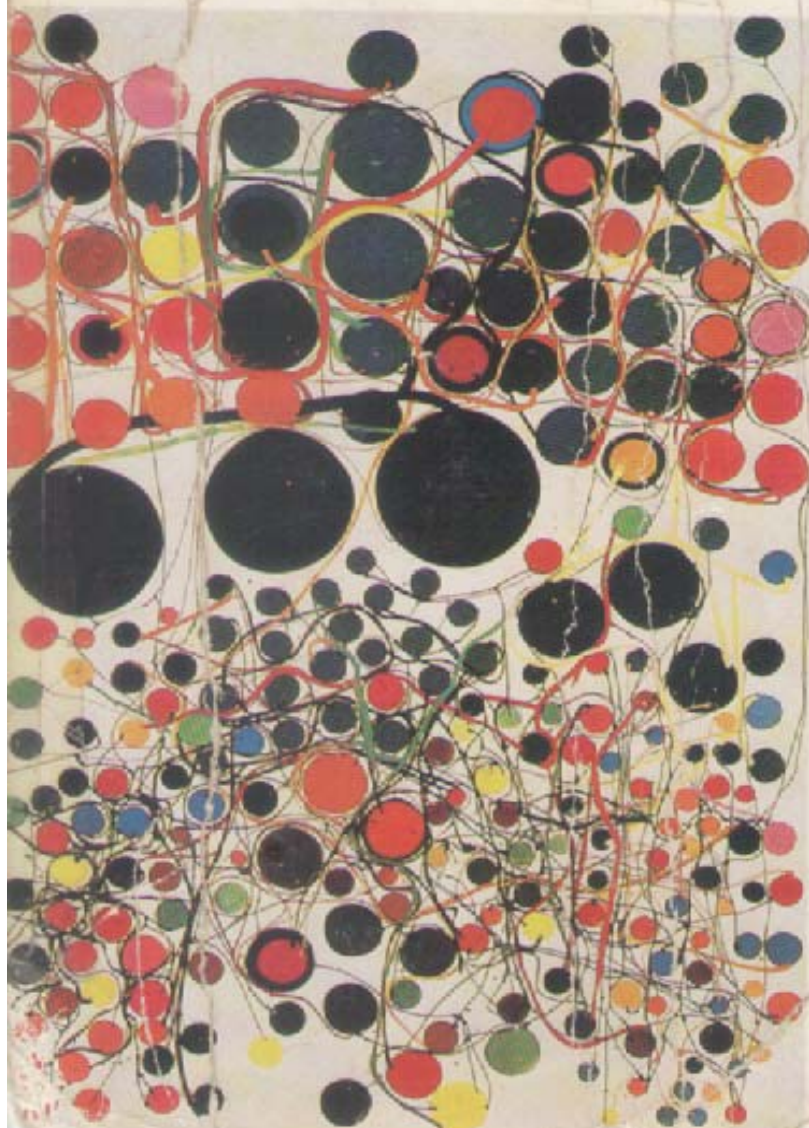


Mathématiques supérieures
Première année d'enseignement supérieur

ANALYSE

369 exercices corrigés



Marie-Pascale
AVIGNON

Jacques
ROGNIAUX

Table des matières

Chapitre 1 : Pour commencer	11
1-1 Sommes et produits de rationnels et d'irrationnels	11
1-2 $x, y \in \mathbb{Q}^+, \sqrt{x} \in \mathbb{Q} \Rightarrow \sqrt{x} + \sqrt{y} \in \mathbb{Q}$	11
1-3 $\sqrt{n} \in \mathbb{N} \Rightarrow \sqrt{n} \in \mathbb{Q}$	11
1-4 Racines rationnelles de polynômes à coefficients entiers	12
1-5 Densité dans $\mathbb{R}$ de l'ensemble des irrationnels	13
1-6 Manipulation d' ε	13
*1-7 Endomorphisme du corps $\mathbb{R}$	13
*1-8 Image et image réciproque d'une partie	14
*1-9 Image et image réciproque d'une intersection, d'une réunion, ...	15
*1-10 Caractérisation du "sup" dans un ensemble totalement ordonné $\times$	16
1-11 Propriété de la borne supérieure $\Rightarrow$ Propriété de la borne inférieure $\times$	16
1-12 Bornes supérieures et inférieures de parties de $\mathbb{R}$ $\times$	16
1-13 Corps ordonnés	17
1-14 Ordre lexicographique dans $\mathbb{C}$	18
1-15 Fermeture	19
1-16 Point fixe d'une application croissante	20
1-17 Classification des sous-groupes du groupe additif $\mathbb{R}$	21
1-18 Il n'y a pas de surjection de $\mathbb{E}$ dans $\wp(\mathbb{E})$	22
*1-19 Injections et bijections entre $\mathbb{N}, \mathbb{Z}, \mathbb{Q}$	23
1-20 $\mathbb{Q}$ est dénombrable	24
1-21 L'ensemble des nombres algébriques est dénombrable	25
1-22 Théorème de Cantor-Bernstein	26
1-23 Existence d'une bijection de $[0, 1]$ dans $\mathbb{R}$	27
1-24 Une bijection de $[0, 1]$ dans $]0, 1[$	27
1-25 $\mathbb{R}$ n'est pas dénombrable	28
Chapitre 2 : Espaces métriques, Espaces vectoriels normés	29
2-1 Normes dans $\mathbb{R}^n$ et boules ouvertes	29
2-2 Normes équivalentes	30
2-3 Distance associée à une norme	31
2-4 Applications de l'inégalité triangulaire	31
2-5 Adhérence d'une boule ouverte dans un espace vectoriel normé	32
2-6 $(x, y) \mapsto f(x) - f(y) $ est-elle une distance	32
2-7 Exemples de distances dans $\mathbb{R}$	33
2-8 Une distance dans $\mathbb{R}$, boules et convergence de suites	34
2-9 Une distance dans $\mathbb{R}^2$, boules ouvertes	34
2-10 Distances bornées dans le plan	35
2-11 Distance dans l'ensemble des nombres complexes de module 1	36
2-12 $A + B$ est-il ouvert, fermé ...	38
2-13 Adhérence, intérieur, et complémentaire, intersection, réunion	38
2-14 Intérieur de l'adhérence de l'intérieur ...	40
2-15 Approfondissement du 2-14	40
2-16 Points d'accumulation d'une partie de $\mathbb{R}$	40
2-17 Distance de deux parties	41
2-18 Diamètre d'une partie	43
2-19 Exemple de distance ultramétrique	44
2-20 Quelques propriétés des ultramétriques	46
Chapitre 3 : Généralités sur les suites	49
3-1 Suite de Cauchy dans $\mathbb{Z}$: $\mathbb{Z}$ est complet $\times$	49
3-2 Valeur d'adhérence d'une suite : définition et exemples $\times$	49
3-3 Théorème de Bolzano-Weierstrass et suites bornées de $\mathbb{R}^k$ $+$	50
3-4 Deux fermés de $\mathbb{R}$ à distance nulle	51

3-5	Adhérence d'un sous-espace vectoriel dans un espace vectoriel normé	52
3-6	Suite de Cauchy dans un ultramétrique	52
3-7	L'ensemble des valeurs d'adhérence d'une suite est fermé	53
3-8	Ensemble des valeurs d'une suite croissante $\times$	53
3-9	Limite supérieure d'une suite réelle bornée $\times$	54
3-10	Une suite dont tout nombre réel est valeur d'adhérence $\times$	55

Chapitre 4 : Suites numériques $\times$ 57

4-1	Constante d'Euler $\times$	57
4-2	Suite récurrente croissante $\times$	58
4-3	Suite récurrente croissante $\times$	58
4-4	Suite arithmético-géométrique	59
4-5	Suite définie par une relation du type $u_{n+2} = a u_{n+1} + b u_n$	59
4-6	Une suite récurrente qui converge vers $\sqrt{a}$	60
4-7	$u_n = \sqrt{1 + \dots + \sqrt{n}}$	61
4-8	Une suite définie par une intégrale	62
4-9	Famille de suites récurrentes	63
4-10	Suite récurrente et rapidité de la convergence	65
4-11	Suite récurrente et suites extraites	66
4-12	Etude d'une suite à l'aide du rapport u_{n+1}/u_n	68
4-13	Suites adjacentes convergeant vers e	69
4-14	Suites adjacentes	70
4-15	Suites adjacentes	70
4-16	Volume d'un cône	71
4-17	Fonctions contractantes, suites de Cauchy et point fixe	71
4-18	Suite dont chaque terme est moyenne arithmétique des 2 termes précédents	73
4-19	Suite dont chaque terme est moyenne géométrique des 2 termes précédents	73
4-20	Convergence au sens de Césaro	74

Chapitre 5 : Limites et continuité $\times$ 75

5-0	Rappel de définitions	75
5-1	Limite d'une fonction de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}$	75
5-2	Fonctions continues, lipschitziennes, uniformément continues	76
5-3	Continuité d'une projection	76
5-4	Continuité de la distance	77
5-5	Continuité de la norme	77
5-6	Continuité de : $x \mapsto d(x, A)$	77
5-7	Continuité d'une fonction de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}$	78
5-8	Continuité établie avec la définition	78
5-9	Autre ε -définition de la continuité	79
5-10	Continuité de $ f $, de $\sup(f, g)$, et de $\inf(f, g)$	80
5-11	Exemple de fonction discontinue en tout point rationnel, continue ailleurs	80
5-12	Continuité et limites de suites	81
5-13	Application de 5-12 au problème de la limite d'une fonction composée	81
5-14	Endomorphisme continu du groupe additif $\mathbb{R}$, et un contre-exemple	82
5-15	Image de l'adhérence d'une partie par une fonction continue	83
5-16	Ensemble des zéros et graphe d'une fonction continue	83
5-17	Point fixe pour une fonction continue de $[0, 1]$ dans $[0, 1]$ (Th de Brouwer)	84
5-18	Fonction continue et injective sur un intervalle	84
5-19	Séparation des zéros d'une équation	85
5-20	Fonction croissante vérifiant la propriété de la valeur intermédiaire	86
5-21	Une étude de fonction	87
5-22	Intervalle homéomorphe	88
5-23	Non-continuité uniforme et suites	89
5-24	Continuité uniforme : applications du théorème de Heine et de 5-23	90
5-25	Image d'une partie bornée par une fonction uniformément continue	91
5-26	Fonction continue admettant 1 et $\sqrt{2}$ pour périodes	91
5-27	Graphe d'une fonction continue	92

Chapitre 6 : Etude locale des fonctions *

93

6-1	Infiniment petits ; infiniment grands	93
6-2	Notation de Landau "o" (fonction négligeable devant une autre)	93
6-3	Utilisation de "o"	94
6-4	Asymptote oblique	94
6-5	Tangente et position de la courbe	95
6-6	Simplification des calculs avec les "o"	95
6-7	Notation de Landau "O" et propriétés	96
6-8	Fonctions équivalentes au voisinage de x_0	96
6-9	Utilisation des fonctions équivalentes pour les limites	97
6-10	Equivalence et produit de fonctions	97
6-11	Equivalence et quotient de fonctions	97
6-12	Equivalence et somme de fonctions	97
6-13	Equivalence et composition : ce qui n'est pas permis	97
6-14	Equivalence et composition : ce qui est permis	97
6-15	Equivalences usuelles au voisinage de 0	98
6-16	Equivalents d'un polynôme en 0 et en ∞	98
6-17	Application de 6-14	98
6-18	Etude d'une fonction quand x tend vers $+\infty$	99
6-19	Exemple de calculs de limites à l'aide des fonctions équivalentes	99
6-20	Partie principale d'un infiniment petit	100
6-21	Partie principale d'un infiniment petit	100
6-22	Partie principale d'un infiniment grand	100

Chapitre 7 : Dérivées *

101

7-1	Valeur maximale d'une suite	101
7-2	Dérivée seconde et convexité	101
7-3	Fonctions ayant la même dérivée sur un intervalle	102
7-4	Exemple de fonction pour laquelle $M_1^2 = 4 M_0 M_2$	103
7-5	Un "raccordement" de classe C^2	104
7-6	Calcul d'une dérivée $n^{\text{ème}}$ et une propriété des coefficients binômiaux	105
7-7	Calcul d'une dérivée $n^{\text{ème}}$	106
7-8	Fonction vérifiant $f'' + (f')^2 = 0$	106
7-9	Un calcul de dérivée d'une fonction composée	107
7-10	Méthode de Newton et méthode des parties proportionnelles	107
7-11	Fonction à dérivée bornée et construction d'une bijection de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$	109
7-12	Encadrement de $\text{Arcsin } 0,6$	109
7-13	Encadrements de e et de e^n	110
7-14	Etude d'une suite définie par $v_n = f(u_n)$, où (u_n) tend vers 0	110
7-15	Comportement en $+\infty$ d'une fonction et de sa dérivée	111
7-16	Tangente passant par l'origine	112
7-17	Zéros d'une fonction et de ses dérivées successives ; application	112
7-18	Une fonction dérivée possède la propriété de la valeur intermédiaire	113
7-19	Contre-exemple pour 7-18 si la fonction est à valeurs dans $\mathbb{R}^2$	114
7-20	Zéros de $x^3 - 3x + 1$ (Newton et parties proportionnelles)	114
7-21	Applications de la formule de Taylor	115
7-22	Inégalités sur e^x	116
7-23	Fonction vérifiant $f(x+y)f(x-y) \leq [f(x)]^2$	116
7-24	Développement de e^x "en série entière"	117
7-25	$M_1^2 \leq 4 M_0 M_2$	118
7-26	Etude de la proximité d'une courbe et de sa tangente	119
7-27	Fonction dont le θ des accroissements finis est égal à $1/2$	120
7-28	Limite de $\theta(h)$ quand h tend vers 0 (Accroissements finis et Taylor)	121

Chapitre 8 : Développement limités *

123

8-0	Quelques conseils	123
8-1	Attention à ne manipuler que des développements limités de même ordre	123
8-2	Un développement limité	124

8-3	Développements limités et dérivation	124
8-4	Erreur à éviter dans le développement limité d'un quotient	125
8-5	Développement limité d'un quotient	125
8-6	Développement limité de $\log - \log$	126
8-7	Développement limité de fonction composée	127
8-8	Développement limité de fonction composée	127
8-9	Développement limité de fonction composée	128
8-10	Calcul de limite à l'aide des développements limités	128
8-11	Calcul de limite à l'aide des développements limités	129
8-12	Calcul de limite à l'aide des développements limités	129
8-13	Ordre et partie principale d'un infiniment petit (développement limité)	129
8-14	Ordre et partie principale d'un infiniment petit (développement limité)	130
8-15	Deux fonctions différentes peuvent avoir le même développement limité	130
8-16 à		
8-22	Calculs de développements limités	131
8-23	Application d'un développement limité à l'étude locale d'une fonction (tangente)	134
8-24	Application d'un développement limité à l'étude locale d'une fonction (tangente)	135
8-25	Développement limité généralisé en $+\infty$	135
8-26	Développement limité en $+\infty$	136
8-27	Développement limité en $+\infty$, et calcul de limite	136
8-28	Développement limité en $+\infty$, et asymptote oblique	137
8-29	Développement limité en $+\infty$, et parabole asymptote	137
8-30	Une asymptote oblique	138
8-31	Etude de $\cotan x$ au voisinage de 0	139
8-32	Développement limité et nombre de solutions de l'équation $p + 2q = n$	140
Chapitre 9 : Intégrale		141
9-1	Valeur moyenne d'une distance	141
9-2	Un produit scalaire	141
9-3	Fonction des bornes d'une intégrale	142
9-4	Sommes de Riemann (suites)	144
9-5	Intégrale d'une fonction périodique	145
9-6	Calcul approché d'une intégrale avec des sommes de Darboux	145
9-7	Méthode des trapèzes : préliminaires	146
9-8	Valeur approchée d'une intégrale par la méthode des trapèzes	147
9-9	Méthode de Simpson : préliminaires	148
9-10	Valeur approchée d'une intégrale par la méthode de Simpson	149
9-11	Utilisation et comparaison des deux méthodes précédentes	150
9-12	Calcul d'une intégrale comme limite d'une suite	151
9-13	Inégalité de Hölder	152
9-14	Formule de Taylor avec reste intégral	153
9-15	Suite d'intégrales et sommation de séries	154
9-16	Suite d'intégrales et formule de Wallis	155
9-17	Etude en $+\infty$ d'une fonction des bornes d'une intégrale	156
9-18	La borne supérieure d'une fonction comme limite d'une suite	157
9-19	Fonction des bornes d'une intégrale	158
9-20	Suite de l'exercice précédent	160
9-21	Une équation fonctionnelle	161
9-22	Une fonction dérivée non intégrable	162
9-23	Calcul de l'intégrale d'une fonction intégrable ayant des primitives	162
9-24	Une fonction intégrable n'ayant de primitive sur aucun intervalle	163
9-25	Démonstration de la transcendance de e	165
Chapitre 10 : Calcul de primitives et d'intégrales		169
10-0	Rappel de cours : primitives d'une fraction rationnelle	169
10-1 à		
10-13	Calculs de primitives et d'intégrales de fractions rationnelles	170
10-14	Calcul de primitives et d'intégrales de polynômes en $\sin x$ et $\cos x$	180
10-15	Calcul de primitives et d'intégrales de polynômes en $\sin x$ et $\cos x$	180
10-16	Calcul de primitives et d'intégrales de polynômes en $\sin x$ et $\cos x$	180
10-17	Démonstration d'une règle de Bioche	181

10-18 à	
10-21 Calcul de primitives et d'intégrales de fractions rationnelles en $\sin x$ et $\cos x$	182
10-22 Rappel de cours : primitives de fonctions de types particuliers	185
10-23 à	
10-36 Calculs de primitives et d'intégrales de fonctions de types particuliers	185
Chapitre 11 : Intégrales généralisées	193
11-1 Premiers exemples d'intégrales d'une fonction continue sur $[a, b[$	193
11-2 Intégrale de $x^{-\alpha}$, sur $[1, +\infty[$	194
11-3 Intégrale de $x^{-\alpha}$ sur $]0, 1]$, et de $(x-a)^{-\alpha}$ sur $]a, b]$	194
11-4 Intégrale d'une fonction continue sur $]a, b[$	195
11-5 Application de 11-4	196
11-6 Application de 11-4	196
11-7 Utilisation de fonctions majorantes ou minorantes	197
11-8 Application de 11-7	198
11-9 Intégrale absolument convergente	198
11-10 Utilisation des fonctions équivalentes	199
11-11 Convergence d'une intégrale dépendant de deux paramètres	200
11-12 Convergence d'une intégrale dépendant d'un paramètre	200
11-13 Quelques exemples ; cas de l'intégrale sur $]a, b]$ d'une fonction ayant une limite finie en a	201
11-14 Convergence et calcul d'une intégrale généralisée	202
11-15 Convergence d'une intégrale généralisée	202
11-16 Convergence et calcul d'une intégrale généralisée (par parties)	203
11-17 Convergence et calcul d'une intégrale généralisée (par parties)	204
11-18 Fonctions équivalentes et intégrales de natures différentes	204
11-19 Intégrale généralisée convergeant vers $n!$, et fonction Gamma	205
11-20 Changement de variable dans une intégrale généralisée	206
11-21 Application de 11-20	207
11-22 Application de 11-20	207
11-23 Application de 11-20	208
11-24 Intégrale définie devenant généralisée par changement de variable	208
11-25 Intégrale sur $[a, +\infty[$ d'une fonction ayant une limite en $+\infty$	209
11-26 Intégrale convergente en $+\infty$, bien que la fonction, positive, ne tende pas vers 0	210
11-27 Convergence absolue et convergence	210
11-28 Intégrale sur $]0, \pi/2]$ de $\ln(\sin x)$ (convergence et calcul)	211
11-29 Intégrales intervenant en probabilité (loi de Laplace-Gauss)	212
11-30 Convergence et calcul d'intégrales généralisées	214
11-31 Formule de Taylor et intégrales généralisées	215
Chapitre 12 : Construction de courbes	217
12-1 à	
12-10 Courbes données par une équation du type $y = f(x)$	217
12-11 Courbes en paramétriques : rappels	228
12-12 Etude locale d'une courbe paramétrée	229
12-13 Etude locale d'une courbe paramétrée et points doubles	229
12-14 Astroïde	231
12-15 Courbe de Lissajous	232
12-16 Construction de courbe et d'asymptote	234
12-17 Construction de courbe et d'asymptote	235
12-18 Construction de courbe et concavité	236
12-19 Courbes en polaires : rappels	238
12-20 Spirale d'Archimède	239
12-21 Spirale logarithmique	239
12-22 Lemniscate de Bernoulli	240
12-23 Epicycloïdes et hypocycloïdes	241
12-24 Cardioïde et limaçon de Pascal	244
12-25 Suite de 12-24	245
12-26 Courbe en polaires, asymptotes obliques	247
12-27 Une spirale	249

Chapitre 13 : Equations différentielles	251
13-1 Champ de vecteurs, éléments de contact	251
13-2 Isoclines d'un champ de vecteurs ; notions sur les systèmes différentiels	252
13-3 Lignes intégrales d'un champ de vecteurs	254
13-4 Théorème d'existence et d'unicité pour l'équation $y' = f(x, y)$	255
13-5 Etude graphique de l'équation $y' = y^2 - x$	256
13-6 Intégration d'une équation différentielle à variables séparées	260
13-7 à 13-10 Applications de 13-6	261
13-11 à 13-15 Exemples d'équations différentielles linéaires du premier ordre	264
13-16 à 13-21 Equations différentielles linéaires du second ordre, à coefficients constants	266
Chapitre 14 : Fonctions de deux variables	271
14-1 Différentiabilité établie à l'aide de la définition	271
14-2 Différentiabilité établie à l'aide de la définition	271
14-3 Calcul de dérivées partielles	272
14-4 Dérivée de $t \mapsto f(x(t), y(t))$	272
14-5 Etude de la différentiabilité d'une fonction	273
14-6 Continuité, différentiabilité, continuité des dérivées partielles	274
14-7 Différentielle de $(u, v) \mapsto f(x(u, v), y(u, v))$	275
14-8 Dérivées partielles par rapport à ρ et θ	276
14-9 Laplacien, fonction harmonique, laplacien en coordonnées polaires	276
14-10 Une fonction continue sur une partie fermée bornée de $\mathbb{R}^2$ atteint ses bornes	278
14-11 Valeurs extrémales d'une fonction de deux variables	279
14-12 Valeurs extrémales d'une fonction de deux variables	280
14-13 Valeurs extrémales d'une fonction de deux variables	281
14-14 Une fonction harmonique	282
14-15 Une équation aux dérivées partielles	283
14-16 Théorème des fonctions implicites et applications	284
14-17 Tracé d'une courbe définie implicitement	286
Chapitre 15 : Etude métrique des courbes planes	289
15-1 Longueur d'un arc de parabole	289
15-2 Longueur d'un cercle	289
15-3 Longueur d'une courbe en polaires ; longueur de la cardioïde	290
15-4 Longueur d'un arc de cycloïde droite	291
15-5 Abscisse curviligne ; chaînette et spirale d'Archimède	292
15-6 Formules donnant le rayon de courbure	293
15-7 Rayon de courbure de la cardioïde	294
15-8 Rayon de courbure et centre de courbure d'une parabole	295
15-9 Cercle osculateur d'une parabole	295
15-10 Longueur et rayon de courbure d'une astroïde	296
15-11 Rayon de courbure aux points extrémaux de $y = x^2 e^{-x}$	297
15-12 Rayon de courbure d'une courbe en polaires	298
15-13 Roulement sans glissement de la tangente à une spirale logarithmique	299
15-14 Une définition des cycloïdes droites (et définition du paramétrage normal)	300
15-15 Equation intrinsèque d'une chaînette	301
15-16 Développante d'une chaînette (tractrice)	302
Chapitre 16 : Florilège de fonctions et de fonctions réciproques	305
16-1 à 16-6 Fonctions Arcsinus, Arccosinus, Arctangente	305
16-7 Formules de Machin et de Störmer	309
16-8 à 16-14 Fonctions hyperboliques directes et réciproques	311
16-15 Une fonction à simplifier et étudier (Arcsin et Arccos)	316
Index	319