

Mathématiques **L3** Analyse

Sous la direction de
Jean-Pierre Marco

Hakim Boumaza
Benjamin Collas
Stéphane Collion
Marie Dellinger
Zoé Faget
Laurent Lazzarini
Florent Schaffhauser



**CURSUS
LMD**

**Cours complet avec 600 tests
et exercices corrigés**

PEARSON
Education

Table des matières

Les auteurs	v
Avant-propos	xix
Remerciements	xx
Partie I Topologie	1
1 Espaces topologiques	5
I Topologies, notions ensemblistes associées	5
I.1 Définitions et exemples	5
I.2 Bases de topologie	8
I.3 Un exemple fondamental : la topologie naturelle d'un espace métrique	10
I.4 Intérieur, adhérence, frontière d'une partie	11
I.5 Voisinages	14
I.6 Parties denses	16
I.7 Espaces séparés	17
II Continuité et limite	17
II.1 Continuité globale et locale	17
II.2 Opérations sur la continuité	20
II.3 Continuité et densité, prolongements des égalités et inégalités	22
II.4 Homéomorphismes	22
II.5 Limite d'une application en un point	23
III Construction d'espaces topologiques	24
III.1 Espaces produits	25
III.2 Espaces quotients	27
IV Exercices	29
2 Espaces topologiques compacts	31
I Espaces topologiques compacts	31
I.1 Définitions et premières propriétés	31
I.2 Les compacts de $\mathbb{R}^n$	33
II Compacité et continuité	34
II.1 Propriétés des applications continues définies sur un compact	34
II.2 Applications : théorèmes classiques d'existence d'extrema	35
III Espaces localement compacts	36
III.1 Compacité locale	36
III.2 Compactification d'Alexandroff	37
IV Exercices	39
3 Espaces topologiques connexes	41
I Espaces connexes	41
I.1 Définitions, premières propriétés et exemples	41
I.2 Composantes connexes	44
II Connexité et continuité	45
III Connexité par arcs	46
IV Applications pratiques de la connexité	47
IV.1 Résultats d'existence	48

IV.2	Résultats d'unicité	48
V	Connexité locale	49
VI	Exercices	50
4	Dénombrabilité et suites dans les espaces topologiques	51
I	Rappels de notions ensemblistes	51
I.1	Dénombrabilité	51
I.2	Suites	53
II	Suites à valeurs dans un espace topologique	53
II.1	Limites de suites	53
II.2	Suites et espace topologique compact	56
II.3	Convergence simple d'une suite d'applications	56
III	Dénombrabilité et espace topologique	57
III.1	Espace topologique à base dénombrable	58
III.2	Espace topologique à base dénombrable de voisinages	59
III.3	Espace séparable	60
IV	Suites à valeurs dans un espace topologique à base dénombrable de voisinages	61
V	Exercices	63
5	Espaces métriques	65
I	Distances et espaces métriques	65
I.1	Rappels et exemples	65
I.2	Isométries et transport de distances	66
I.3	Espaces vectoriels normés	66
II	Topologie d'un espace métrique	67
II.1	Topologie naturelle sur un espace métrique	67
II.2	Diamètre d'une partie, distance entre deux parties	68
III	Espaces semi-métriques, espaces vectoriels semi-normés	69
IV	Espaces métrisables	71
IV.1	Espaces métrisables	71
IV.2	Propriétés de séparation des espaces métrisables	73
IV.3	Propriétés de dénombrabilité des espaces métrisables	74
V	Continuité uniforme dans les espaces métriques	75
VI	Limites dans les espaces métriques	77
VI.1	Limites d'applications, limites de suites	77
VI.2	Convergence uniforme d'une suite d'applications	77
VII	Compacité dans les espaces métriques	78
VII.1	Suites et espaces métriques compacts	78
VII.2	Espaces métriques précompacts	80
VII.3	Continuité et espaces métriques compacts	81
VIII	Exercices	82
6	Espaces complets	83
I	Espaces métriques complets	83
I.1	Oscillation d'une fonction	83
I.2	Suites de Cauchy	84
I.3	Espaces complets	86
I.4	Premières propriétés des espaces complets	88
I.5	Exemples	90
I.6	Espaces semi-métriques complets	91
II	Précompacité, complétude et compacité	91
III	Applications aux problèmes de convergence	93

III.1	Interversion des limites	93
III.2	Applications uniformément continues	95
IV	Approximations successives et point fixe	96
IV.1	Dynamique liée à une application	96
IV.2	Le théorème du point fixe	97
V	La propriété de Baire	99
V.1	Définitions et premières propriétés	99
V.2	Le théorème de Baire	101
V.3	Espace maigre, espace résiduel, exemples	101
VI	Le complété d'un espace métrique	104
VI.1	Définitions et propriétés	104
VI.2	Existence du complété	105
VII	Exercices	106
7	Espaces vectoriels normés	107
I	Espaces vectoriels normés	107
I.1	Rappels et définitions	107
I.2	Exemples	109
I.3	Sous-espaces, produits et quotients	113
I.4	Parties denses et parties totales	114
II	Applications linéaires continues	115
II.1	Espaces d'applications linéaires continues	115
II.2	Formes linéaires continues et dual topologique	119
III	Espaces d'applications multilinéaires continues	120
IV	Espaces normés de dimension finie	121
IV.1	Propriétés générales	121
IV.2	Le théorème de Riesz	123
V	Exercices	124
8	Exemples d'espaces topologiques	125
I	Propriétés topologiques des groupes classiques	125
I.1	Fonctions polynômes	125
I.2	Polynômes et matrices	126
II	Propriétés topologiques des groupes classiques	127
III	Groupes topologiques	127
III.1	Définitions et premières propriétés	127
III.2	Sous-groupes d'un groupe topologique	129
IV	Groupes opérant sur des espaces topologiques	129
IV.1	Définitions et premières propriétés	129
IV.2	Connexité et groupes classiques	131
V	Les tores	133
VI	L'espace projectif réel	134
VII	La structure des ouverts de $\mathbb{R}^n$	135
9	Espaces de fonctions continues	137
I	Espaces de fonctions continues	137
I.1	Espaces de fonctions continues	137
I.2	Le théorème de prolongement de Tietze-Urysohn	138
II	Le théorème de Stone-Weierstrass	141
III	Le théorème d'Ascoli	145
III.1	La notion d'équicontinuité	145
III.2	Le théorème d'Ascoli	146

IV Exercices	148
Partie II Intégration et théorie de la mesure	151
10 L'intégrale de Riemann	153
I Intégrale de Riemann d'une fonction en escalier	153
I.1 Fonctions en escalier	154
I.2 Intégrale d'une fonction en escalier	154
II Intégrale de Riemann d'une fonction réglée	156
II.1 Fonctions réglées	157
II.2 Intégrale d'une fonction réglée	158
III L'intégrale de Riemann	159
III.1 Fonctions Riemann-intégrables	160
III.2 Intégrale d'une fonction Riemann-intégrable	162
IV Sommes de Riemann	163
V Intégrales de Riemann généralisées	168
V.1 Intégrale d'une fonction $f : [a, b] \rightarrow E$	168
V.2 Quelques difficultés de la théorie de Riemann	169
VI Exercices	170
Complément 1 L'intégrale de Henstock-Kurzweil	172
11 Mesure de Lebesgue sur $\mathbb{R}^n$	179
I Mesure extérieure sur $\mathbb{R}^n$	179
I.1 Pavés et cubes	180
I.2 Mesure extérieure sur $\mathbb{R}^n$	181
I.3 Propriétés de la mesure extérieure	183
II Ensembles mesurables et mesure de Lebesgue sur $\mathbb{R}^n$	185
II.1 Ensembles mesurables	185
II.2 Mesure de Lebesgue sur $\mathbb{R}^n$	187
III Sous-ensembles remarquables de $\mathbb{R}$ et de $\mathbb{R}^n$	193
III.1 Ensembles de mesure nulle	193
III.2 Quelques sous-ensembles remarquables	196
III.3 Le théorème de Lebesgue	200
IV Exercices	204
12 Théorie géométrique de la mesure	205
I Espaces mesurables	205
I.1 Tribus sur un ensemble	205
I.2 Algèbres et classes monotones	207
I.3 Applications mesurables	208
I.4 Tribus produit	210
I.5 Fonctions numériques mesurables	212
II Espaces mesurés	217
II.1 Mesures	217
II.2 Ensembles négligeables, Espaces mesurés complets	219
III Construction de mesures	221
III.1 Mesures extérieures	222
III.2 Prémures, Théorème de prolongement	225
III.3 Mesures boréliennes	226
III.4 Un théorème général d'unicité	230
IV Exercices	232

17 Théorème de Baire et applications linéaires	313
I Le théorème de Banach-Steinhaus	313
II Le théorème de l'application ouverte	315
III Le théorème du graphe fermé	317
IV Exercices	319
18 Espaces de Hilbert	321
I Produits scalaires et espaces de Hilbert	322
II Projection orthogonale	326
III Le théorème de représentation de Riesz-Fréchet	330
IV Bases hilbertiennes	331
V Isomorphismes d'espaces de Hilbert	336
VI Sommes hilbertiennes	338
VII Produit tensoriel de deux espaces de Hilbert	341
VIII Exercices	343
19 Opérateurs bornés	345
I L'espace des opérateurs bornés	345
II Adjoint d'un opérateur borné	347
III Opérateurs positifs	350
IV Opérateurs compacts	355
IV.1 Généralités	355
IV.2 L'alternative de Fredholm	358
V Exercices	361
20 Spectre des opérateurs bornés	363
I Spectre, résolvante et rayon spectral	363
II Spectre des opérateurs compacts	368
II.1 Spectre des opérateurs compacts	368
II.2 Diagonalisation des opérateurs compacts auto-adjoints	370
II.3 Calcul fonctionnel des opérateurs compacts auto-adjoints	373
II.4 Réduction des opérateurs compacts auto-adjoints	374
III Le théorème spectral pour les opérateurs bornés	375
IV Exemples de calculs de spectres	379
IV.1 Le spectre des opérateurs auto-adjoints positifs	379
IV.2 Le laplacien discret en dimension un	380
IV.3 Un exemple d'opérateur non borné	381
V Exercices	382
Partie IV Fonctions d'une variable complexe	385
21 Les fonctions analytiques	391
I Rappels et compléments sur les séries entières	391
I.1 Polynômes et séries formelles	391
I.2 Rappels sur les séries entières	393
I.3 Opérations sur les séries formelles	396
II Les fonctions analytiques	400
II.1 Définitions et premiers exemples	401
II.2 Propriétés élémentaires des fonctions analytiques	402
III Exemples fondamentaux : exponentielle et logarithme	404
III.1 La fonction exponentielle complexe	404

III.2	Argument et logarithme complexe	407
IV	Exercices	412
22 Fonctions holomorphes et théorie de Cauchy		415
I	La notion d'holomorphie	415
I.1	Fonctions holomorphes	416
I.2	Conditions de Cauchy-Riemann	417
II	Intégration le long des chemins de $\mathbb{C}$	419
II.1	Chemins de $\mathbb{C}$	419
II.2	Intégration complexe le long de chemins	421
II.3	De l'intégrale sur les chemins à l'existence de primitives	424
III	Les théorèmes de Cauchy	426
III.1	Le théorème de Cauchy pour le bord d'un triangle	427
III.2	Existence de primitives sur les ouverts convexes	429
IV	Indice et théorème de Cauchy	430
IV.1	Indice d'un chemin fermé	430
IV.2	Formule de Cauchy	432
IV.3	Analyticité des fonctions holomorphes	432
V	Exercices	434
23 Les propriétés fondamentales des fonctions holomorphes		437
I	Le théorème d'identité	437
II	Les inégalités de Cauchy et leurs applications	440
II.1	Propriété de la moyenne et principe du maximum	442
II.2	Comportement local	444
III	Exercices	447
24 Théorie de Cauchy homotopique		449
I	Intégration sur chemins continus	449
I.1	Intégrales	449
I.2	Homotopie de chemins	451
II	Théorie de Cauchy homotopique	453
II.1	Indice et détermination continue de l'argument	453
II.2	Théorème de Cauchy homotopique	455
III	Simple connexité	457
IV	Exercices	459
25 Singularités des fonctions holomorphes - Théorème des résidus		461
I	Classification des singularités isolées	461
I.1	Singularités de fonctions holomorphes	461
I.2	Séries de Laurent	464
I.3	Développement de Laurent d'une fonction holomorphe	467
II	Primitives et résidus	468
II.1	Résidu d'une fonction	468
II.2	Indice et nombre de zéros et de pôles	470
II.3	Calculs d'intégrales	474
III	Fonctions méromorphes	478
IV	Quelques mots sur la sphère de Riemann	480
IV.1	Fonctions méromorphes sur $\hat{\mathbb{C}}$	481
IV.2	Résidu à l'infini	483
V	Exercices	485

26	Espaces de fonctions holomorphes et méromorphes	489
I	Problèmes de convergence	489
I.1	Suites de fonctions holomorphes	489
I.2	Topologie de la convergence compacte	492
I.3	Compacité	496
II	Séries de fonctions holomorphes et méromorphes	498
II.1	Séries de fonctions holomorphes	498
II.2	Séries de fonctions méromorphes	499
III	Produits infinis de fonctions	501
III.1	Produits infinis de nombres complexes	501
III.2	Produits infinis de fonctions	503
IV	Interpolation de fonctions holomorphes et méromorphes	505
IV.1	Le théorème d'interpolation de Mittag-Leffler	506
IV.2	Le théorème d'interpolation de Weierstrass	508
IV.3	Conséquences algébriques	511
V	Exercices	514

Partie V Analyse de Fourier 517

27	Analyse fonctionnelle sur le tore	529
I	Espaces de fonctions périodiques	529
I.1	Deux réductions utiles	529
I.2	La droite réelle $\mathbb{R}$, le tore $\mathbb{T}$ et le groupe unitaire U	530
I.3	Fonctions périodiques et opérateurs de translation	532
I.4	Fonctions périodiques continues	533
I.5	Les espaces $\mathcal{C}^k(\mathbb{T})$, $1 \leq k < +\infty$	535
I.6	Fonctions périodiques boréliennes	537
I.7	Mesure de Haar sur le tore	538
I.8	Les espaces $L^p(\mathbb{T})$, pour $1 \leq p \leq +\infty$	542
I.9	Espaces de Banach homogènes sur le tore	547
II	Produits de convolution	548
II.1	Construction du produit de convolution	550
II.2	Propriétés analytiques	558
II.3	Propriétés algébriques	559
III	Premières applications	560
III.1	Coefficients de Fourier	560
III.2	Fonctions de corrélation	562
III.3	Approximations de l'unité	565
III.4	Fonctions harmoniques	575
IV	Exercices	585
Complément 1	Groupes et convolution	587
Complément 2	Interpolation entre espaces L^p	590
28	Analyse et synthèse spectrales sur le tore	595
I	Analyse spectrale	597
I.1	Continuité	597
I.2	Coefficients de Fourier et symétries	598
I.3	Coefficients de Fourier et dérivation	601
I.4	Comportements asymptotiques	603
I.5	Séries de Fourier et équations différentielles	605
II	Convergence en norme	607

II.1	Deux critères simples de convergence	607
II.2	Non-convergence dans $L^1(T)$	609
II.3	Convergence dans $L^2(T)$	610
II.4	Convergence dans $L^p(T)$, pour $1 < p < +\infty$	611
II.5	Non-convergence dans $\mathcal{C}^0(T)$	612
III	Synthèses spectrales	613
III.1	L'espace $A(T) \subset \mathcal{C}^0(T)$ des séries absolument convergentes	614
III.2	L'isométrie $L^2(T) = \ell_2(\mathbb{Z})$	616
III.3	Les espaces $A_p(T) \subset L^p(T)$, pour $2 \leq p \leq +\infty$	617
III.4	Convergence dans $\mathcal{C}^k(T)$, $0 \leq k < +\infty$	620
III.5	Convergence dans $\mathcal{C}^\infty(T)$	621
IV	Convergence ponctuelle	621
IV.1	Convergence en moyenne de Césaro	622
IV.2	Le théorème de Dirichlet et ses satellites	623
IV.3	Non-convergence en un point, convergence presque partout	624
V	Une série trigonométrique est-elle une série de Fourier?	625
V.1	Une condition nécessaire	625
V.2	Une condition suffisante	626
VI	Exercices	629

29 Analyse de Fourier sur la droite réelle 633

I	Rappels et compléments sur la droite numérique réelle	633
I.1	Quelques espaces fonctionnels utiles	633
I.2	Espaces de Banach homogènes et convolution	635
I.3	Approximations de l'unité	639
I.4	L'espace $\mathcal{S}(\mathbb{R})$	640
I.5	Caractères boréliens bornés sur $\mathbb{R}$	641
II	Analyse de Fourier dans $L^1(\mathbb{R})$	642
II.1	L'intégrale de Fourier	642
II.2	Continuité	643
II.3	Premiers exemples	644
II.4	Transformation de Fourier et symétries	649
III	La classe des fonctions à décroissance rapide	651
III.1	Propriétés topologiques	651
III.2	Des séries aux intégrales de Fourier	656
III.3	Analyse de Fourier dans $\mathcal{S}(\mathbb{R})$	657
IV	La synthèse spectrale dans $L^1(\mathbb{R})$	659
IV.1	Deux résultats de dualité	659
IV.2	Injectivité de la transformation de Fourier	660
IV.3	Inversion dans l'algèbre $A(\mathbb{R})$ de Wiener	661
IV.4	Convergence ponctuelle	663
V	Analyse de Fourier dans $L^2(\mathbb{R})$	664
V.1	Le théorème de Plancherel	664
V.2	Exemples	667
VI	Exercices	668

Partie VI Calcul différentiel 671

30 La différentielle 677

I	Définitions et premières propriétés	677
I.1	Définition	677

I.2	Premières propriétés	679
I.3	Application différentielle	679
II	Quelques exemples et théorèmes classiques	679
II.1	Exemples	680
II.2	Opérations sur les fonctions différentiables	681
III	Différentielles et dérivées partielles	683
IV	Matrice jacobienne	684
V	Exercices	684
31	Le théorème des accroissements finis	687
I	Théorème des accroissements finis	687
I.1	Théorème des accroissements finis, cas réel	687
I.2	Théorème des accroissements finis, cas général	687
I.3	Une forme forte du théorème des accroissements finis	689
II	Applications du théorème des accroissements finis	689
II.1	Fonctions à dérivées nulles	689
II.2	Différentielles partielles et différentiabilité	690
II.3	Gâteaux-différentiabilité	691
II.4	Un théorème de convergence	691
III	Exercices	692
32	Les différentielles d'ordre supérieur	695
I	Dérivées successives et différentielles successives	695
II	Premiers exemples et résultats classiques	696
III	Théorème de Schwarz	698
III.1	Différentielle seconde	698
III.2	Cas particulier : $E = E_1 \times \dots \times E_k$	699
IV	Matrice hessienne	701
V	Formules de Taylor	702
V.1	Préliminaires	702
V.2	Énoncé des formules	703
V.3	Unicité de la formule de Taylor	704
VI	Exercices	704
33	Théorèmes d'inversion locale, des fonctions implicites et du rang	707
I	Difféomorphisme	707
II	Théorème d'inversion locale	709
II.1	Énoncé et exemples	709
II.2	Preuve du théorème d'inversion locale	710
II.3	Applications du théorème d'inversion locale	714
III	Théorème des fonctions implicites	715
IV	Théorème du rang constant	719
IV.1	Rang, submersion, immersion, plongement	719
IV.2	Théorème du rang constant	725
V	Exercices	727
34	Problèmes d'extrema	729
I	Extrema libres	729
I.1	Définitions générales sur les extrema	729
I.2	Préliminaires sur les formes bilinéaires continues	730
I.3	Conditions nécessaires à l'existence d'un extremum	731
I.4	Condition suffisante à l'existence d'un extremum	734

II	Extrema liés	734
II.1	Énoncé du théorème des multiplicateurs de Lagrange et exemples	735
II.2	Preuve du théorème des multiplicateurs de Lagrange	737
III	Exercices	739
35	La notion de sous-variété	741
I	Sous-variétés de $\mathbb{R}^n$	741
I.1	Une première définition des sous-variétés	741
I.2	Niveaux de fonctions et sous-variétés	744
I.3	Images de fonctions et sous-variétés	747
II	L'espace tangent à une sous-variété de $\mathbb{R}^n$	748
III	Exercices	752
Partie VII Équations différentielles		755
36	Les solutions d'une équation différentielle	761
I	Équations différentielles et solutions	761
I.1	Équations différentielles et solutions	761
I.2	Équations autonomes et non autonomes	762
I.3	Solutions maximales, points d'existence, points d'unicité	766
I.4	Ensembles α et ω limites, bouts d'une solution	768
I.5	Vers des équations plus générales	769
II	Les théorèmes d'existence et d'unicité	770
II.1	Les théorèmes	770
II.2	Premières applications	776
III	Exercices	778
37	Exemples explicites et études qualitatives	779
I	Équations linéaires autonomes et exponentielle	779
II	Les équations à variables séparées	781
III	Intégrabilité	782
III.1	Intégrales premières et conséquences	783
III.2	Le système de Lotka-Volterra	786
IV	Quelques inéquations différentielles et intégrales	787
IV.1	Inéquations intégrales	787
IV.2	Application : comparaison des solutions d'une équation différentielle	789
V	Équations non autonomes sur la droite	790
VI	Introduction à l'étude qualitative des champs plans	792
VI.1	Esquisse d'une méthode d'étude	792
VI.2	Le système de Van der Pol	796
VII	Exercices	798
38	Le flot d'un champ de vecteurs	799
I	Le flot : définitions et exemples	799
I.1	Première approche de la notion de flot : le cas autonome	799
I.2	Le cas non autonome	801
I.3	Les changements de variables et le flot	803
II	Le flot des équations linéaires	805
II.1	Retour sur la résolution d'une équation linéaire	805
II.2	Flot et résolvante	806
II.3	Dépendance du flot relative aux paramètres	808

II.4	Retour sur l'exponentielle	809
III	Propriétés de régularité	810
III.1	Topologie du domaine et continuité du flot	810
III.2	La régularité du flot	811
IV	Exercices	814
39	Étude locale d'un champ de vecteurs	815
I	Le théorème de redressement du flot	815
II	Quelques questions de stabilité	816
III	Le théorème de conjugaison de Grobman-Hartman	820
III.1	Endomorphismes hyperboliques	820
III.2	Un théorème de point fixe hyperbolique	821
III.3	Le théorème de conjugaison pour les difféomorphismes	823
III.4	Le théorème de conjugaison pour les champs	825
IV	Le théorème de la variété invariante	827
V	Le système de Van der Pol	831
VI	Exercices	833
Partie VIII	Solutions des tests	835
Partie IX	Solutions des exercices	859
Index		927