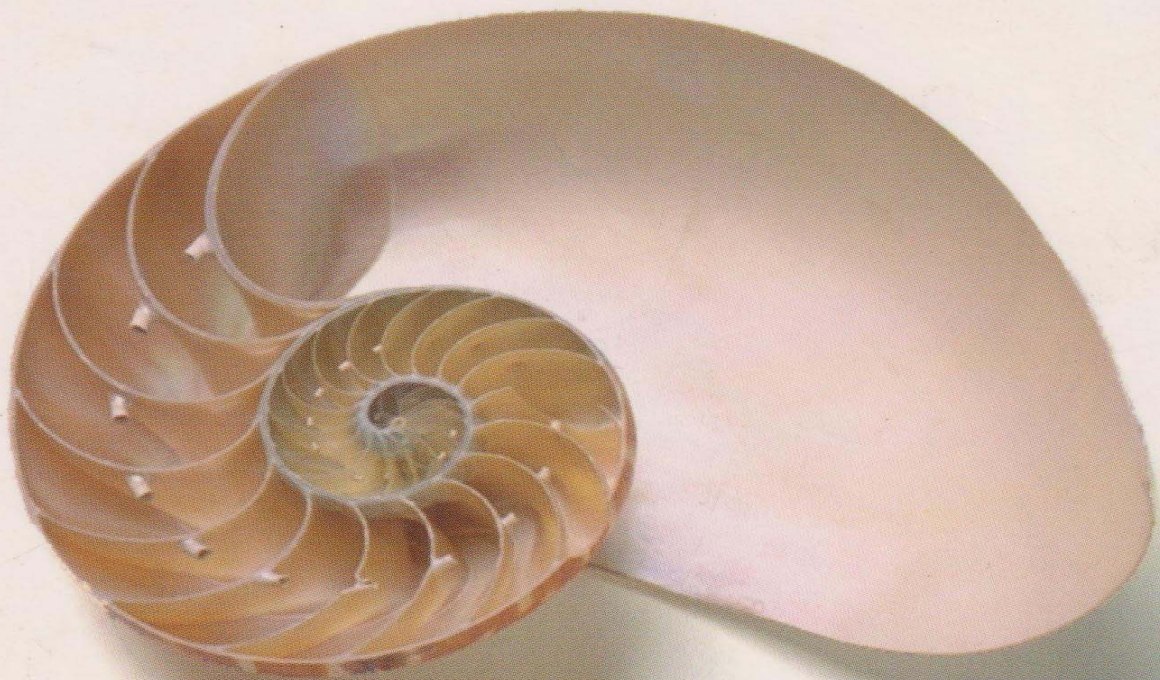


GRILLES, ARBRES ET HYPERCUBES

# INTRODUCTION AUX ALGORITHMES ET ARCHITECTURES PARALLÈLES



F. Thomson Leighton

*Traduction de Pierre Fraigniaud et Éric Fleury*



MORGAN KAUFMANN PUBLISHERS, INC.

- 005-465-1

2-005-465-

F. THOMSON LEIGHTON

# Introduction aux algorithmes et architectures parallèles

*Grilles, arbres, hypercubes*

*Traduction de Pierre Fraigniaud et Éric Fleury*

*Préface de Michel Cosnard*  
*Professeur à L'ENS Lyon*



INTERNATIONAL THOMSON PUBLISHING FRANCE

An International Thomson Publishing Company

e-mail : [contact@itp.fr](mailto:contact@itp.fr)

Paris • Albany • Belmont • Bonn • Boston • Cincinnati • Detroit • Johannesburg  
Londres • Madrid • Melbourne • Mexico • New York • Singapour • Tokyo • Toronto

# Table des matières

---

## Préface à l'édition française

xi

## Préface

xiii

|                                               |       |
|-----------------------------------------------|-------|
| Organisation du texte . . . . .               | xiii  |
| Enseigner à l'aide de ce livre . . . . .      | xv    |
| Exercices et notes bibliographiques . . . . . | xvi   |
| Erreurs . . . . .                             | xvii  |
| Présentation du volume 2 . . . . .            | xvii  |
| Remerciements . . . . .                       | xviii |

## Notation

xxi

## GRILLES ET ARBRES

1

|                                                                   |           |
|-------------------------------------------------------------------|-----------|
| <b>1 Algorithmes simples de tri et d'énumération . . . . .</b>    | <b>5</b>  |
| 1.1 Trier sur un réseau linéaire . . . . .                        | 6         |
| — Évaluer les performances d'un algorithme . . . . .              | 8         |
| — Trier $N$ entiers avec moins de $N$ processeurs . . . . .       | 10        |
| 1.2 Trier dans le modèle binaire . . . . .                        | 12        |
| 1.3 Bornes inférieures . . . . .                                  | 18        |
| 1.4 Un contre exemple : l'énumération . . . . .                   | 22        |
| 1.5 Propriétés des réseaux d'interconnexion . . . . .             | 28        |
| <b>2 Arithmétique entière . . . . .</b>                           | <b>31</b> |
| 2.1 Algorithme d'addition à retenues anticipées . . . . .         | 32        |
| 2.2 Calcul de préfixes . . . . .                                  | 35        |
| — Calcul de préfixes segmentés . . . . .                          | 41        |
| 2.3 Addition à retenues sauvegardées . . . . .                    | 42        |
| 2.4 Multiplication et convolution . . . . .                       | 46        |
| 2.5 Division et itération de Newton $\star$ . . . . .             | 52        |
| <b>3 Algorithmes matriciels . . . . .</b>                         | <b>57</b> |
| 3.1 Produits élémentaires de matrices . . . . .                   | 58        |
| 3.2 Algorithmes spécifiques pour matrices triangulaires . . . . . | 64        |

|          |                                                                                  |            |
|----------|----------------------------------------------------------------------------------|------------|
|          | — Résolution d'un système d'équations triangulaires . . . . .                    | 64         |
|          | — Inversion de matrices triangulaires . . . . .                                  | 66         |
| 3.3      | Algorithmes spécifiques pour matrices tridiagonales . . . . .                    | 69         |
|          | — Réduction pair-impair . . . . .                                                | 69         |
|          | — Algorithmes de préfixe parallèle . . . . .                                     | 74         |
| 3.4      | Élimination de Gauss . . . . .                                                   | 78         |
| 3.5      | Méthodes itératives . . . . .                                                    | 87         |
|          | — La relaxation de Jacobi . . . . .                                              | 87         |
|          | — Relaxation de Gauss-Seidel . . . . .                                           | 89         |
|          | — Méthodes des différences finies . . . . .                                      | 91         |
|          | — Méthodes multigrilles . . . . .                                                | 93         |
| <b>4</b> | <b>Retemporisation et systolisation . . . . .</b>                                | <b>97</b>  |
| 4.1      | La reconnaissance de palindromes . . . . .                                       | 98         |
| 4.2      | Les modèles de calcul systolique et semi-systolique . . . . .                    | 98         |
| 4.3      | Retemporisation des réseaux semi-systoliques . . . . .                           | 103        |
| 4.4      | Transformation d'un réseau semi-systolique en un réseau<br>systolique . . . . .  | 108        |
| 4.5      | Cas particulier de la diffusion . . . . .                                        | 112        |
| 4.6      | Retemporisation de l'hôte . . . . .                                              | 113        |
| 4.7      | Un résumé des techniques de systolisation . . . . .                              | 117        |
| <b>5</b> | <b>Algorithmes pour les graphes . . . . .</b>                                    | <b>119</b> |
| 5.1      | Fermeture transitive . . . . .                                                   | 119        |
| 5.2      | Composantes connexes . . . . .                                                   | 124        |
| 5.3      | Plus courts chemins . . . . .                                                    | 124        |
| 5.4      | Arbres couvrants en largeur d'abord . . . . .                                    | 125        |
| 5.5      | Arbres couvrants de poids minimum . . . . .                                      | 129        |
| <b>6</b> | <b>Trier sur les grilles . . . . .</b>                                           | <b>131</b> |
| 6.1      | Tri par transpositions pairs-impairs sur un réseau linéaire . . . . .            | 132        |
| 6.2      | Un algorithme de tri simple en $\sqrt{N}(\log N + 1)$ étapes . . . . .           | 136        |
| 6.3      | Un algorithme de tri en $(3\sqrt{N} + o(\sqrt{N}))$ étapes $\star$ . . . . .     | 139        |
| 6.4      | La borne inférieure est atteinte . . . . .                                       | 143        |
| <b>7</b> | <b>Routage de paquets . . . . .</b>                                              | <b>145</b> |
| 7.1      | Algorithmes gloutons . . . . .                                                   | 146        |
| 7.2      | Analyse en moyenne d'algorithmes gloutons $\star$ . . . . .                      | 153        |
|          | — Le routage de $N$ paquets vers des destinations aléatoires . . . . .           | 153        |
|          | — Analyse de problèmes de routage dynamiques $\star$ . . . . .                   | 162        |
| 7.3      | Algorithmes de routage probabilistes $\star$ . . . . .                           | 167        |
| 7.4      | Algorithmes déterministes à courtes files d'attente . . . . .                    | 171        |
| 7.5      | Un algorithme pré-calculé . . . . .                                              | 173        |
| 7.6      | Autres problèmes de routage, autres modèles et autres algo-<br>rithmes . . . . . | 183        |
| <b>8</b> | <b>Analyse d'images et géométrie algorithmique . . . . .</b>                     | <b>187</b> |
| 8.1      | Algorithme d'étiquetage des composantes connexes . . . . .                       | 188        |

|                         |                                                                               |            |
|-------------------------|-------------------------------------------------------------------------------|------------|
| —                       | Algorithme de Levaldi ★                                                       | 189        |
| —                       | Un algorithme récursif en $O(\sqrt{N})$ étapes                                | 194        |
| 8.2                     | Calcul de la transformée de Hough                                             | 196        |
| 8.3                     | Recherche des plus proches voisins                                            | 199        |
| 8.4                     | Recherche d'enveloppes convexes ★                                             | 201        |
| <b>9</b>                | <b>Grilles de dimension quelconque ★</b>                                      | <b>207</b> |
| 9.1                     | Définitions et propriétés                                                     | 208        |
| 9.2                     | Multiplication de matrices                                                    | 211        |
| 9.3                     | Tri                                                                           | 213        |
| 9.4                     | Routage de paquets                                                            | 215        |
| 9.5                     | Simulation de grilles de grande dimension par des grilles de petite dimension | 217        |
| <b>10</b>               | <b>Problèmes</b>                                                              | <b>221</b> |
| <b>11</b>               | <b>Notes bibliographiques</b>                                                 | <b>253</b> |
| <b>GRILLES D'ARBRES</b> |                                                                               | <b>259</b> |
| <b>12</b>               | <b>La grille d'arbres bidimensionnelle</b>                                    | <b>263</b> |
| 12.1                    | Définitions et propriétés.                                                    | 263        |
| 12.2                    | Décomposition récursive                                                       | 265        |
| 12.3                    | Construction à partir de $K_{N,N}$                                            | 266        |
| 12.4                    | Variantes                                                                     | 269        |
| 12.5                    | Comparaison avec les pyramides et les multigrilles                            | 269        |
| <b>13</b>               | <b>Algorithmes élémentaires en <math>O(\log N)</math> étapes</b>              | <b>271</b> |
| 13.1                    | Routage                                                                       | 271        |
| 13.2                    | Tri                                                                           | 273        |
| 13.3                    | Produit matrice-vecteur                                                       | 274        |
| 13.4                    | Relaxation de Jacobi                                                          | 275        |
| 13.5                    | Pivot                                                                         | 276        |
| 13.6                    | Convolution                                                                   | 277        |
| 13.7                    | Enveloppe convexe ★                                                           | 278        |
| <b>14</b>               | <b>Arithmétique entière</b>                                                   | <b>281</b> |
| 14.1                    | Multiplication                                                                | 282        |
| 14.2                    | Division et restes chinois                                                    | 284        |
| 14.3                    | Problèmes similaires                                                          | 288        |
| —                       | Produits répétés                                                              | 288        |
| —                       | Extraction de racines                                                         | 290        |
| <b>15</b>               | <b>Algorithmes matriciels</b>                                                 | <b>291</b> |
| 15.1                    | Grille d'arbres tridimensionnelle                                             | 292        |
| 15.2                    | Multiplication de matrices                                                    | 293        |
| 15.3                    | Inversion de matrices triangulaires inférieures                               | 295        |
| 15.4                    | Inversion de matrices quelconques ★                                           | 296        |
| —                       | Algorithme de Csanky                                                          | 298        |
| —                       | Inversion basée sur l'itération de Newton                                     | 300        |

|                                            |                                                                                  |            |
|--------------------------------------------|----------------------------------------------------------------------------------|------------|
| 15.5                                       | Problèmes de même nature *                                                       | 301        |
| <b>16</b>                                  | <b>Algorithmes sur les graphes</b>                                               | <b>305</b> |
| 16.1                                       | Arbre couvrant de poids minimum *                                                | 306        |
| 16.2                                       | Composantes connexes                                                             | 318        |
| 16.3                                       | Fermeture transitive                                                             | 319        |
| 16.4                                       | Plus courts chemins                                                              | 320        |
| 16.5                                       | Problèmes de couplage *                                                          | 320        |
| <b>17</b>                                  | <b>Évaluation rapide de programmes sans branchement conditionnel *</b>           | <b>333</b> |
| 17.1                                       | Addition et multiplication sur un semi-anneau                                    | 334        |
| 17.2                                       | Extension aux programmes avec soustractions et divisions                         | 345        |
| 17.3                                       | Applications                                                                     | 349        |
| <b>18</b>                                  | <b>Grilles d'arbres de dimensions supérieures</b>                                | <b>351</b> |
| 18.1                                       | Définitions et propriétés                                                        | 351        |
| 18.2                                       | L'arbre de mélange                                                               | 352        |
| <b>19</b>                                  | <b>Problèmes</b>                                                                 | <b>355</b> |
| <b>20</b>                                  | <b>Notes bibliographiques</b>                                                    | <b>363</b> |
| <b>HYPERCUBES ET RÉSEAUX HYPERCUBIQUES</b> |                                                                                  | <b>365</b> |
| <b>21</b>                                  | <b>L'hypercube</b>                                                               | <b>369</b> |
| 21.1                                       | Définitions et propriétés                                                        | 370        |
| 21.2                                       | Plongement de grilles                                                            | 373        |
|                                            | — Plongement de grilles de plus grande dimension                                 | 374        |
|                                            | — Grilles dont la taille n'est pas une puissance de 2                            | 378        |
| 21.3                                       | Plongement d'arbres binaires complets                                            | 380        |
| 21.4                                       | Plongement d'arbres binaires quelconques *                                       | 386        |
|                                            | — Plongement avec une dilatation 1 et une charge en $O(\frac{M}{2N} + \log N)$   | 387        |
|                                            | — Plongement avec une dilatation en $O(1)$ et une charge en $O(\frac{M}{N} + 1)$ | 391        |
|                                            | — Codes 1-correcteurs *                                                          | 393        |
|                                            | — Plongement de $P_{\log N}$ dans $H_{\log N}$                                   | 400        |
| 21.5                                       | Plongement de grilles d'arbres                                                   | 403        |
| 21.6                                       | Autres résultats de plongement                                                   | 409        |
| <b>22</b>                                  | <b>Les réseaux papillon, cycles connectés en cube et de Beneš</b>                | <b>411</b> |
| 22.1                                       | Définitions et propriétés                                                        | 412        |
| 22.2                                       | Simulation de réseaux quelconques *                                              | 427        |
| 22.3                                       | Simulation des algorithmes standards de l'hypercube *                            | 431        |
| 22.4                                       | D'autres résultats de plongement et de simulation                                | 435        |
| <b>23</b>                                  | <b>Les graphes mélange-parfait et de de Bruijn</b>                               | <b>443</b> |
| 23.1                                       | Définitions et propriétés                                                        | 444        |
| 23.2                                       | Les tours de cartes de Diaconis                                                  | 452        |

|           |                                                                                                           |            |
|-----------|-----------------------------------------------------------------------------------------------------------|------------|
| 23.3      | Simulation d'algorithmes hypercubiques standards . . . . .                                                | 460        |
| 23.4      | Ressemblances avec le papillon * * . . . . .                                                              | 463        |
| 23.5      | Quelques résultats de plongement et de simulation . . . . .                                               | 475        |
| <b>24</b> | <b>Algorithmes de routage de paquets . . . . .</b>                                                        | <b>477</b> |
| 24.1      | Définitions et modèles de routage . . . . .                                                               | 479        |
| 24.2      | Algorithmes de routage gloutons et pires cas . . . . .                                                    | 481        |
| —         | Une borne inférieure générale pour le routage autonome                                                    | 486        |
| 24.3      | Problèmes de concentration, de dispersion et de routage mo-<br>notone . . . . .                           | 489        |
| —         | Réduction d'un problème de multi-diffusion partielle en<br>un problème de rassemblement partiel . . . . . | 498        |
| —         | Réduction d'un problème de routage en un problème de<br>tri . . . . .                                     | 500        |
| 24.4      | Comportement moyen de l'algorithme glouton * . . . . .                                                    | 502        |
| —         | Bornes sur la congestion . . . . .                                                                        | 505        |
| —         | Bornes sur le temps d'exécution . . . . .                                                                 | 509        |
| —         | Étude de protocoles de résolution des conflits sans pré-<br>diction . . . . .                             | 517        |
| 24.5      | Conversion de pires cas de problèmes de routage en cas<br>moyens . . . . .                                | 522        |
| —         | Hachage . . . . .                                                                                         | 522        |
| —         | Routage aléatoire . . . . .                                                                               | 527        |
| 24.6      | Borner la taille des files d'attente * . . . . .                                                          | 529        |
| —         | Routage sur des réseaux multi-étages quelconques * . . . . .                                              | 545        |
| 24.7      | Routage par fusion . . . . .                                                                              | 548        |
| 24.8      | Routage par dispersion de l'information . . . . .                                                         | 554        |
| —         | Utilisation de la dispersion de l'information pour la to-<br>lérance aux pannes . . . . .                 | 560        |
| —         | Théorie des codes et corps finis * . . . . .                                                              | 563        |
| 24.9      | Algorithmes de commutation de circuits . . . . .                                                          | 566        |
| <b>25</b> | <b>Tri . . . . .</b>                                                                                      | <b>575</b> |
| 25.1      | Tri par fusion pairs-impairs . . . . .                                                                    | 576        |
| —         | Construction d'un circuit de tri de profondeur<br>$\log N(\log N + 1)/2$ . . . . .                        | 581        |
| 25.2      | Tri de petits ensembles * . . . . .                                                                       | 586        |
| 25.3      | Un algorithme de tri déterministe en<br>$O(\log N \log \log N)$ * * . . . . .                             | 595        |
| 25.4      | Algorithmes de tri probabilistes en $O(\log N)$ étapes * * . . . . .                                      | 608        |
| —         | Un circuit probabiliste de tri de profondeur $7.45 \log N$ . . . . .                                      | 612        |
| <b>26</b> | <b>Simulation de PRAM . . . . .</b>                                                                       | <b>643</b> |
| 26.1      | Le modèle PRAM et le modèle à mémoire partagée . . . . .                                                  | 644        |
| 26.2      | Simulation probabiliste basée sur le hachage . . . . .                                                    | 646        |
| 26.3      | Simulation déterministe basée sur la duplication des données * . . . . .                                  | 648        |

|           |                                                                                         |            |
|-----------|-----------------------------------------------------------------------------------------|------------|
| 26.4      | Utilisation de la dispersion de l'information pour accroître les performances . . . . . | 654        |
| <b>27</b> | <b>La transformée de Fourier rapide . . . . .</b>                                       | <b>657</b> |
| 27.1      | L'algorithme . . . . .                                                                  | 657        |
| 27.2      | Mise en œuvre sur le papillon et sur le réseau mélange-parfait . . . . .                | 659        |
| 27.3      | Application à la convolution et à l'arithmétique polynomiale                            | 661        |
| 27.4      | Application à la multiplication entière * * . . . . .                                   | 667        |
| <b>28</b> | <b>Autres réseaux hypercubiques . . . . .</b>                                           | <b>675</b> |
| 28.1      | Les réseaux de type papillon . . . . .                                                  | 675        |
|           | — Le réseau oméga . . . . .                                                             | 675        |
|           | — Le réseau oméga retourné . . . . .                                                    | 676        |
|           | — Les réseaux base et base retourné . . . . .                                           | 676        |
|           | — Les réseaux de Banyan et les réseaux delta . . . . .                                  | 681        |
|           | — Papillon $k$ -aire . . . . .                                                          | 684        |
| 28.2      | Les réseaux apparentés au graphe de de Bruijn . . . . .                                 | 684        |
|           | — Le graphe de de Bruijn $k$ -aire . . . . .                                            | 684        |
|           | — Le graphe mélange-parfait généralisé . . . . .                                        | 684        |
| <b>29</b> | <b>Problèmes . . . . .</b>                                                              | <b>689</b> |
| <b>30</b> | <b>Notes bibliographiques . . . . .</b>                                                 | <b>719</b> |
|           | <b>Bibliographie . . . . .</b>                                                          | <b>725</b> |
|           | <b>Index . . . . .</b>                                                                  | <b>739</b> |
|           | <b>Théorèmes, lemmes et corollaires . . . . .</b>                                       | <b>741</b> |
|           | <b>Autheurs . . . . .</b>                                                               | <b>744</b> |
|           | <b>Index thématique . . . . .</b>                                                       | <b>748</b> |