

RÉPUBLIQUE ALGÉRIENNE DEMOCRATIQUE ET POPULAIRE  
MINISTÈRE DE L'ENSEIGNEMENT SUPERIEUR ET DE LA RECHERCHE  
SCIENTIFIQUE

UNIVERSITE BLIDA 1  
FACULTE DE TECHNOLOGIE  
Département de mécanique



## **MEMOIRE**

Présenté au Département de Mécanique

Pour l'obtention du diplôme de

## **MASTERACADEMIQUE**

Filière : Génie Mécanique

Option : Conception Mécanique

## **THEME**

**Ebavurage des plaques de verre par un robot manipulateur  
à outil en matériau abrasif**

Présenté par

Mr. ZEMOUCHI Abd el chafi

Encadré par:

Professeur Mohammed OUALI

Mr.El Hadi OSMANI

2015-2016

## REMERCIEMENT

**Ce travail entre dans les thèmes proposés au sein du laboratoire de recherche " structures Mécaniques" de l'institut de mécanique, université de Blida 1.**

**Les travaux exposés dans ce mémoire ont été réalisés sous la direction du professeur Mohammed OUALI. Nous tenons à le remercier. Grâce à son aide, à ses conseils éclairés et ses judicieuses orientations, nous avons pu mener à terme ce modeste travail d'initiation à la recherche.**

**Nous sommes également très reconnaissants à l'intérêt que Monsieur El Hadi. OSMANI qui a porté à ce travail et nous le remercions pour son aide et ses conseils.**

## ملخص

يستخدم الزجاج حاليًا في مجالات كثيرة كقطاع البناء نجد جدران مصنوعة من الزجاج ، ودرج من الزجاج والأثاث من الزجاج وغيرها .

بعد عملية قطع الزجاج, تكون حواف المقطوعة حادة أين يتوجب عملية إزالة الأزيز قضاء على هذه حواف خطيرة

في هذا عمل حالي, عملية إزالة الأزيز تكون عن طريق روبوت مناور ذو ستة محاور يملك أداة حادة.

هذه دراسة, أجرينا مجموعة من البرامج لإنشاء نماذج: نموذج هندسي مباشر, نموذج هندسي معاكس, نموذج حركية معاكس, نموذج ديناميكية عكسية. أجرينا تجربة تمثيل قوات قطع اللازمة نموذج هندسي معاكس

...

## Résumé

Le verre est utilisé actuellement dans plusieurs domaine tel que le secteur des bâtiments on trouve des murs réalisés par des verres, des escaliers en verre, les meubles en verre etc..

Après l'opération de coup du verre , les arêtes coupées sont tranchantes d'où la nécessité de l'opération d'ébavurage pour éliminer ces arêtes dangereuses.

Dans le présente travail, l'opération d'ébavurage du verre sera confié à un robot manipulateur à six axes qui port un outil en matériaux abrasifs.

Pour mener cette étude, nous avons réalisé un ensemble de programme Matlab pour établir les modèles: MGD,MGI,MCI,MDI. Nous avons procédé à l'expérience pour modéliser les efforts de coupe nécessaire pour MCI

## Summary

The Glass is currently used in many areas of construction as a sector, we find the walls are made of glass, the staircase made of glass and even furniture and other...

After the process of cutting glass, broken edges are sharp currency Where deburring required to eliminate these dangerous edges

In this current work, the process of removing a sizzling be through the robot manipulator with six axes have itchy tool.

For this study, we conducted a series of programs to create models: a directly geometric model, opposite geometric model, cinematic opposite model , inverse dynamic model. We conducted the experiment to represent the crisis of the model geometry opposite cutting forces

## TABLE DES MATIERES

REMERCIEMENTS.....	2
RESUME.....	3
TABLE DE MATIERE.....	4
LISTE DES FIGURES.....	7
LISTE DES TABLEAUX.....	8
INTRODUCTION-ETAT DE L'ART.....	9
1 LE VERRE ET LES ROBOTS.....	11
1.1 Introduction .....	12
1.2 Production national du verre.....	12
1.3 Types de verre et domaines d'application.....	12
1.4 propriétés mécaniques.....	14
1.4.1 Résistance à la traction et résistance à la compression.....	14
1.4.2 Comparaison de verre avec d'autres matériaux.....	14
1.4.3 Durée superficielle.....	15
1.5 Ebavurage.....	15
1.6 Les composantes d'un robot manipulateur.....	15
1.7 Choix du robot .....	16
1.8 Caractéristiques d'un robot.....	18
2 MODELISATION DU BRAS MANIPULATEUR.....	19
2.1 Introduction .....	20
2.2 Le modèle géométrique directe du robot (MGD).....	20
2.3 Description de la structure géométrique du robot .....	20
2.4 Les paramètres de Denavit Hertenburg.....	23
2.5 Le modèle géométrique inverse (MGI).....	25
2.6 Calculle MGI par la méthode de Paul.....	26
2.7 Modèle cinématique direct (MCD).....	28
2.8 Matrice Jacobienne.....	29
2.9 Modèle cinématique inverse.....	31

2.10 Etude dynamique du robot.....	31
2.10.1 Le Modèle dynamique Inverse (MDI).....	33
2.10.2 Formalisation de Newton Euler.....	34
2.10.3 Formalise de Lagrange.....	37
2.10.4 Formes général des équations quadratique.....	38
2.11 Calcule de l'énergie cinétique.....	39
2.12 Calcule de l'énergie potentielle.....	40
2.13 Espace opérationnel.....	41
2.14 Modélisation de la coupe.....	41
2.14.1 Problématique.....	41
2.14.2 Modélisation de la coupe orthogonal.....	41
•Le modèle de Merchant.....	41
•Hypothèse de la théorie.....	41
• Modèle physique de la coupe.....	42
2.14.3 Détermination de l'angle de cisaillement.....	42
2.14.4 Détermination des efforts de coupe.....	42
2.15 Le modèle mécaniste de coupe tiré du modèle de Merchant.....	44
2.15.1 Introduction à la force de coupe par unité de surface $kc$ .....	44
3 APPLICATION ET RESULTATS .....	46
3.1 Introduction.....	47
3.2 Organigramme de calcul.....	48
3.3 Validation du Programme.....	53
3.4 Modélisation de l'environnement.....	57
3.4.1 Trajectoire de l'opération d'ébavurage.....	57
3.5 Modélisation des efforts de coupe.....	59
3.5.1 Description de l'expérience.....	59
3.5.2 Matériels utilisé pour calculer l'effort de coupe .....	60

3.6 Expérience.....	64
3.6.1 Calcul de force de la coupe verticale.....	65
3.6.2 Expérience sur le verre.....	68
3.7 Résultats obtenus de l'expérience.....	69
3.8 Résultats obtenue à partir de programme de calcul.....	70
3.8.1 Calcul des variables articulaires du bras articulé.....	70
3.8.2 Calcul des vitesses et des accélérations articulaires.....	71
3.8.3 Vitesse articulaire obtenue.....	72
3.8.4 Accélération articulaire obtenue.....	73
3.8.5 Calcul des couples articulaires.....	74
CONCLUSION.....	76
BIBLIOGRAPHIQUE.....	77

## LISTE DES FIGURES

Figure 1.1 Bras manipulateur à six axes avec un outil de plasma.....	17
Figure 1.2 Bras manipulateur à six axes avec un outil du Colle.....	18
Figure 2.1 Robot à structure ouvert simple.....	21
Figure 2.2 Paramètres géométriques dans le cas d'une structure ouverte.....	22
Figure 2.3 Robot manipulateur à six axes.....	23
Figure 2.4 Bilan des efforts au centre de gravité.....	35
Figure 2.5 Configuration géométrique.....	42
Figure 3.1 Bras manipulateur à six axes suspendus.....	47
Figure 3.2 Organigramme de calcul de MGD.....	48
Figure 3.3 Organigramme de calcul de MGI.....	49
Figure 3.4 Organigramme de calcul de la matrice jacobéenne.....	50
Figure 3.5 Organigramme de calcul de MCD.....	51
Figure 3.6 Organigramme de calcul de MDI.....	52
Figure 3.7 Manipulateur plan à deux corps.....	53
Figure 3.8 Etats initiaux et finaux d'un bras plan avec une rotation de $90^\circ$ .....	54
Figure 3.9 Positions, vitesses et accélérations de l'articulation 1 et 2 du bras à 2 ddl.....	55
Figure 3.10. Couple des articulations d'un mécanisme à 2ddl.....	56
Figure 3.11 Ebavurage d'une plaque de verre épaisseur 6mm.....	57
Figure 3.12 Meules en feutre.....	59
Figure 3.13 : Moteur électrique.....	60
Figure 3.14 Batterie de capacité de 5000 mAh.....	61
Figure 3.15 : Radi commande.....	62
Figure 3.16 Récepteur.....	62
Figure 3.17 Moteur de Rotation et translation.....	63
Figure 3.18 Glissière.....	64

Figure 3.19	Qualité de coup en fonction de la Vitesse de coupe.....	65
Figure 3.20	Calcul de la charge utilisée dans l'expérience.....	65
Figure 3.21	Mécanisme pour le déplacement vertical.....	66
Figure 3.22	Moteur avec outil abrasif.....	66
Figure 3.23	expérience sur l'atelier.....	67
Figure 3.24	Opération d'ébavurage.....	67
Figure 3.25	expérience sur le verre en utilisant une meule de densité 480.....	68
Figure 3.26	expérience sur le verre en utilisant une meule de densité 550.....	68
Figure 3.27	expérience sur le verre en utilisant une meule de densité 550.....	69
Figure 3.28	: les six variables articulaires du bras articulé.....	70
Figure 3.29 a	la vitesse désirée de l'organe terminal en fonction du temps.....	71
Figure 3.29b	L'accélération désirée de l'organe terminal en fonction du temps.....	72
Figure 3.30	Les vitesses articulaires en fonction de temps .....	73
Figure 3.31	Les accélérations articulaires en fonction du temps .....	74
Figure 3.32	Les Couples articulaires en fonction de temps.....	75

### *LISTE DES TABLEAUX*

Tableau 2.1	Paramètres géométriques de DH robot à six axes.....	23
Tableau 2.2	Types d'équations rencontrées avec la méthode de Paul.....	28
Tableau 3.1	Paramètres géométriques de D-H du robot à six axes choisi.....	47
Tableau 3.2	Les paramètres de DH pour un bras à 2ddl.....	54
Tableau 3.3	Types de Meule en feutre.....	59
Tableau 3.4	Caractéristiques du moteur électrique.....	60
Tableau 3.5	Caractéristiques de batterie.....	61
Tableau 3.6	Caractéristiques de la radio commande.....	61
Tableau 3.7	caractéristiques du récepteur.....	62
Tableau 3.8	Caractéristiques de moteur de Rotation et translation .....	63
Tableau 3.9	Résultats obtenue par l'opération d'ébavurage.....	64

## *INTRODUCTION – ETAT DE L'ART*

L'origine de la fabrication du verre demeure de nos jours une énigme, d'après les spécialistes, les objets en verre les plus anciens qui ont été découverts comme les glaçures de céramiques, datent du VII<sup>e</sup> siècle avant J-C. On peut parler d'une véritable activité de production à partir de 3500 avant J-C, sous la forme de perles de verre, puis des bagues et des petites figurines fabriquées à l'aide de moules. [1]

Le verre est l'un des matériaux de construction les plus intéressants et attrayants qui se prête aux applications les plus diverses ces dernières décennies. Le verre a connu une évolution technologique spectaculaire dans tous les secteurs, de transport, construction civil, médicale, et même électronique...etc. et ça, à cause de ses nombreuses qualités remarquables et ses multiples propriétés telles la résistance mécanique, la sécurité, contrôle solaire, isolation thermique et acoustique. Et aussi sa beauté.

L'Algérie en ce moment, n'est plus importatrice mais exportatrice de verre grâce à MFG 'Méditerranéen Float Glass' le plus grand producteur du verre plat en Afrique, avec une capacité de production en Algérie de 400 tonnes/jour. [3]

Moyennant plusieurs opérations de transformations, le Verre brut " feuille de différentes dimensions" prend des formes commerciales, après cette opération, les arêtes coupées sont tranchantes d'où la nécessité de l'opération d'ébavurage pour éliminer ces arêtes qui sont dangereuses surtout pour l'être humain.

L'opération d'ébavurage est souvent faite par des outils manuels dans les petites séries telles que des Meules, papiers à verre et des machines d'ébavurage pour les grandes séries, mais cet outil demande l'intervention fréquente de l'opérateur ce qui rend cette tâche très dangereuse pour la santé de l'être humaine à cause de la poussière dégagée l'hors de l'opération

Dans ce travail nous avons confié l'opération d'ébavurage à un robot manipulateur à six axes à l'aide des outils spécifiques à cette opérations car le robot peut travailler pour toute l'opération dans un espace isolé sans l'intervention de l'opérateur d'où protection de la santé et l'environnement.

Plusieurs travaux ont été réalisés dans le domaine de verre tel que découpe par un bras manipulateur et à la molette, découpe des tôles en feuille par un robot et par une tête au plasma ...

La commande et la simulation d'un système multicorps nécessitant sa modélisation en un nombre fini de corps rigides ou flexibles articulés entre eux par des liaisons [2], [3]. Plusieurs niveaux de modélisation sont possibles selon les objectifs, les contraintes de la tâche et les performances recherchées : modèles géométriques, cinématiques et dynamiques. La détermination de ces différents modèles n'est pas facile, la difficulté réside dans la complexité de la cinématique de la chaîne articulée c'est-à-dire, nature de la chaîne, degrés de liberté et le type des articulations.

La modélisation d'un système permet d'obtenir des équations qui représentent le comportement du système étudié. Pour l'obtention de ces équations, il est nécessaire d'opter pour un paramétrage adéquat [4].

La méthode de Lagrange ne donne pas forcément le modèle le plus performant du point de vue du nombre d'opérations. Cette méthode est parmi les plus simples pour l'obtention du modèle dynamique d'un système multicorps [5]. C'est un formalisme qui décrit le modèle en termes de travail et d'énergie du système.

Dans notre travail, nous avons utilisé la méthode de Newton-Euler pour formuler le modèle dynamique inverse.

# CHAPITRE 1

## Le verre et les Robots

### **1.1 Introduction [1]**

Le verre est un matériel ou un alliage dur, fragile (cassant) et transparent à la lumière visible, à base d'oxyde de silicium (silice  $\text{SiO}_2$ , le constituant principal du sable). Cette définition commune était la définition aussi adoptée par la communauté scientifique, il y a encore un siècle. Cela est assez logique, puisqu'il y a encore un peu plus d'un siècle, les verres silicatés étaient pratiquement les seuls matériaux transparents que l'on savait produire industriellement. Les verres les plus produits actuellement restants des verres silicatés transparents (fenêtres, vaisselles, verrerie de laboratoire...) cette définition persiste. Néanmoins, le développement de nouveaux matériaux transparents, depuis un siècle, a rendu cette définition désuète et source de confusion.

### **1.2 Production nationale du verre : [3]**

MéditerranéenFloat Glass par abréviation MFG filiale du groupe Cevital, Installé à Larbâa, créée en 2007, c'est le plus grand producteur de verre plat en Afrique, avec une capacité de production de 600 tonnes/jour.

MFG diversifie sa gamme, en lançant en 2009 une ligne de production du verre feuilleté d'une capacité de 400 tonnes/jour, et une usine de transformation des produits verriers, lancée en début d'octobre 2010.

### **1.3 Types de verre et domaines d'applications : [2][3]**

Selon la composition chimique, on distingue trois grands types de verre :

- *Verresodo-calciques* : destinés principalement aux marchés du bâtiment.
- *Verrebro-silicates* : à cause de leurs faibles coefficients de dilatation, leurs applications sur les marchés nécessitant de supporter des écarts de température et le contact du feu.
- *Verrevitro-céramiques* : caractérisés eux aussi par leurs faible coefficient de dilatation se retrouvent dans l'électroménager (plaques de cuisson, portes de four, inserts de cheminées, etc.).

Et selon les procédures de fabrication, on peut classer le verre en :

- *Verre plat* : Utilisé à 70% dans les bâtiments, 20% dans l'automobile, et 10% dans la décoration. On distingue :

- Verre flotté ;
- Verre à vitres ;
- Verre imprimé ;
- Verre armé ;
- Verre spécial pour des applications particulières.

- *Verre creux* : utilisé surtout pour fabriquer des bouteilles.

- *Verre étiré* : produit semi-fini permettant de réaliser des ampoules, des flacons, ou de la verrerie de laboratoire.

Le verre peut subir des modifications pour le renforcer et le sécuriser :

- *Verre trempé* : deux procédés de trempage :

- Trempe thermique ;
- Trempe chimique.

- *Verre feuilleté* : composé de couches verre-plastique-verre, destiné à la fabrication des pare-brise des automobiles et les vitres blindées.

Le verre peut aussi subir des traitements de surface, les plus fréquents :

- *verre antireflet* : verre de lunette de vue.

- *verre hydrophobe* : pour les pare-brise et miroirs.

## 1.4 Propriétés mécaniques : [1]

### 1.4.1 Résistance à la traction et résistance à la compression

Le verre tire sa dureté et sa résistance de sa base de silicate, mais également sa fragilité connue est indésirable. C'est une propriété à laquelle il faut dédier toute l'attention qui lui a due, quel que soit le type d'application. Contrairement aux métaux, le verre n'a pas de plage plastique : il est élastique jusqu'à sa Limite de rupture. La rupture est soudaine, sans signe préalable visible.

### 1.4.2 Comparaison de verre avec d'autres matériaux

Matériaux	Contrainte de flexion admissible	Resistance à la compression
Verre flotté / verre miroir	12 à 20 N/mm <sup>2</sup>	400 N/mm <sup>2</sup>
Verre de sécurité trempé en verre flotté	50 N/mm <sup>2</sup>	400 N/mm <sup>2</sup>
Aluminium	70 N/mm <sup>2</sup>	70 N/mm <sup>2</sup>
Acier de construction	180 N/mm <sup>2</sup>	180 N/mm <sup>2</sup>
Chêne	50 N/mm <sup>2</sup>	30 N/mm <sup>2</sup>
Hêtre	35 N/mm <sup>2</sup>	70 N/mm <sup>2</sup>

**Tableau 1.1** Comparaison des contraintes de flexion et la résistance des différents matériaux

Matériaux	Contrainte limite d'élasticité
Verre flotté / verre miroir	70 000 N/mm <sup>2</sup>
Verre de sécurité trempé en verre flotté	70 000 N/mm <sup>2</sup>
Acier de construction	210 000 N/mm <sup>2</sup>
Chêne	12 500 N/mm <sup>2</sup>
Hêtre	11 000 N/mm <sup>2</sup>

**Tableau 1.2** Comparaison des Modules d'élasticité de différents matériaux

Matériaux	Masse volumique apparente
Verre sodocalcique	2,5 g/cm <sup>3</sup>
Verre de protection contre les radiations	5 g/cm <sup>3</sup>
Aluminium	2,6 g/cm <sup>3</sup>
<b>Acier</b>	7,9 g/cm <sup>3</sup>
Béton	2 g/cm <sup>3</sup>
Plomb	11,3 g/cm <sup>3</sup>

**Tableau 1.3** : Comparaison de la Masse volumique apparente des différents matériaux

#### **1.4.3 Dureté superficielle**

Par comparaison à d'autres matériaux comme le bois, les métaux et le plastique, le verre présente une dureté superficielle très élevée.

#### **1.5 Ebavurage :**

Après l'opération de découpage de verre, les arêtes coupées sont tranchantes d'où la nécessité de l'opération d'ébavurage pour éliminer ces arêtes qui sont dangereuses surtout pour l'être humain.

L'opération d'ébavurage est souvent faite par des outils manuelles dans les petits séries tel que des Meules papiers à verre et des machines d'ébavurage pour les grandes séries, mais cet outil demande l'intervention fréquente de l'opérateur ce qui rend cette tâche très dangereuse pour la santé de l'être humain à cause de la poussière dégagée l'hors de l'opération. Dans ce travail, l'ébavurage est confié à un robot manipulateur à six axes à l'aide des outils spécifiques à cette opération.

#### **1.6 Les composants d'un robot manipulateur : [5]**

D'après l'association française de Normalisation (AFNOR), un robot est un "manipulateur commandé en position, reprogrammable , polyvalent à plusieurs degrés de liberté , capable de manipuler des matériaux , des pièces, des outils et des dispositifs spécialisés, au cours des mouvements variables et programmés pour l'exécutions d'une variété de taches, il a souvent l'apparence d'un ou plusieurs bras se terminant par un poignet, Son unité de commande utilise, notamment, un dispositif de mémoire et éventuellement de perception et d'adaptation à l'environnement et aux circonstances. Ces machines polyvalentes sont généralement étudiées pour effectuer la même fonction de façon cyclique et peuvent être adaptées à d'autre fonction sans modifications permanentes du matériel .

Dans cette définition, on retrouve les différentes composantes d'une cellule robotisée :

• **Le mécanisme** : ayant une structure plus ou moins proche de celle du bras humain, il permet de remplacer ou de prolonger son action (le terme "manipulateur " exclue implicitement les robots mobiles). Sa motorisation est réalisée par des actionneurs électriques, pneumatiques ou hydrauliques qui transmettent leurs mouvements aux articulations par des systèmes appropriés ;

• **La perception** : qui permet de gérer les relations entre le robot et son environnement. Les organes de perception sont des capteurs dits proprioceptifs lorsqu'ils mesurent l'état interne du robot (positions et vitesses des articulations) et *extéroceptifs*

lorsqu'ils recueillent des informations sur l'environnement (détection de présence, mesure de distance, vision artificielle);

• **La commande** : qui synthétise les consignes des asservissements pilotant les actionneurs, A partir de la fonction de perception et des ordres de l'utilisateur, elle permet d'engendrer les actions du robot ;

• **L'interface homme-machine** : à travers laquelle l'utilisateur programme les tâches que le robot doit exécuter.

• **Le poste de travail et les dispositifs péri robotiques** : qui constituent l'environnement dans lequel évolue le robot

Alors la robotique est une science pluridisciplinaire qui requiert des connaissances en mécanique, automatique, électrotechnique, traitement du signal, communications, informatique...

### **1.7 Choix du robot :**

Un robot non redondant doit disposer de six degrés de liberté pour positionner et orienter un solide quelconque dans l'espace, Toutefois si ce solide présente une symétrie de révolution, cinq degré de liberté suffisent puisqu'il n'est pas nécessaire de spécifier la rotation autour de l'axe de révolution. De même, pour situer un corps dans un plan, il ne faut que trois degrés de liberté : deux fixent les coordonnées d'un point du corps dans le plan et le troisième détermine son orientation dans ce plan. A partir de ces constatations, on déduit que :

-les caractéristiques des objets manipulés par le robot, donc la classe de tâches à réaliser, permettent de déterminer le nombre de degrés de libertés dont il doit disposer.

-une condition nécessaire mais non suffisante pour qu'il y ait compatibilité entre le robot et la tâche est que le nombre de degrés de liberté de l'organe terminal du robot soit supérieur ou égal à celui de la tâche : le mécanisme peut alors placer l'organe terminal dans la situation désirée.



Figure1.1 Bras manipulateur à six axes avec un outil de Plasma



Figure1.2 Bras manipulateur à six axes avec un outil du Colle

### **1.8 Caractéristiques d'un robot :**

La norme ISO 9946 spécifie les caractéristiques que les fabricants de robot doivent fournir. Parmi ces caractéristiques, on peut en mentionner quelques-unes qui permettent de choisir un robot en fonction de l'application envisagée :

-l'espace de travail : il s'agit de l'ensemble des situations de l'espace que l'organe terminal du robot peut atteindre. Il est défini par ses limites, imposées essentiellement par le nombre de degrés de liberté, les débattements articulaires et par la longueur des segments du manipulateur

-la charge utile ou charge maximale transportable par le robot

-Les vitesses et accélérations maximales, qui conditionnent les temps de cycles,

-La résolution : c'est la plus petite modification de la configuration du robot à la fois observable et contrôlable par système de commande.

## Chapitre 2

# Modalisation du bras manipulateur

## 2.1. Introduction [6]

Un robot manipulateur se compose d'un ensemble de corps relié par des articulations, ces derniers peuvent être simples « 1ddl » rotoïde ou prismatique, ou bien complexes, « 2 ou 3ddl » une rotule ou un cardan. On suppose que toutes les articulations ont seulement 1ddl, puisque une articulation complexe peut être considérée comme une succession des articulations simples avec des liaisons de longueur zéro, avec cette supposition, l'action de chaque articulation peut être décrit par un nombre réel simple : l'angle de rotation dans le cas d'une articulation rotoïde ou le déplacement dans le cas d'une articulation prismatique.

## 2.2 Le Modèle géométrique direct du robot (MGD)

L'objectif du modèle géométrique direct (MGD) est de déterminer l'effet cumulatif des variables articulaires, dans cette partie nous développons un ensemble de conventions qui fournissent une procédure systématique pour calculer ce modèle. Il est naturellement, possible d'effectuer le MGD même sans respecter ces conventions, mais pour un manipulateur de  $n$  liaisons le MGD peut être extrêmement complexe et les conventions présentées ci-dessous simplifient largement la modélisation et donnent une langue universelle avec laquelle les ingénieurs de la robotique peuvent communiquer.

On peut tout simplement dire que le modèle géométrique directe d'un robot permet de calculer les coordonnées opérationnelles donnant la situation de l'organe terminal en fonction des coordonnées articulaires.

## 2.3 Description de la structure géométrique du robot (paramètres de Denavit-Hartenberg): [5]

Une structure ouverte simple est composée de  $n+1$  corps notés  $C_0, \dots, C_n$  et de  $n$  articulations. Le Corps  $C_0$  Désigne la base du robot et le corps  $C_n$  le corps qui porte l'organe terminal. L'articulation  $j$  connecte le corps  $C_j$  au corps  $C_{j-1}$ .

La méthode de description est fondée sur les règles et conventions suivantes :

- les corps sont supposés parfaitement rigides. Ils sont connectés par des articulations considérées comme idéales (pas de jeu mécanique, pas d'élasticité), soit rotoïdes, soit prismatique.

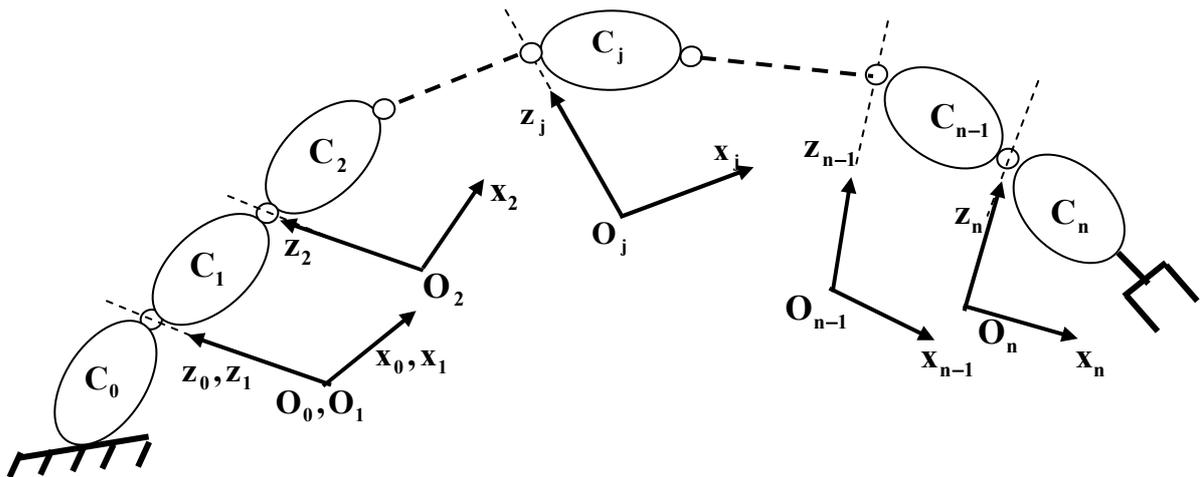


Figure 2.1. Robot à structure ouverte simple

-le repère  $R_j$  est lié au corps  $C_j$

-la variable de l'articulation  $j$  est notée  $q_j$

Le repère  $R_j$ , fixé au corps  $C_j$ , est défini de sorte que :

-l'axe  $z_j$  est porté par l'axe de l'articulation  $j$

-l'axe  $x_j$  est porté par la perpendiculaire commune aux axes  $z_j$  et  $z_{j+1}$ . Si les axes  $z_j$  et  $z_{j+1}$  sont parallèles ou colinéaires, le choix de  $x_j$  n'est pas unique : des considérations de système ou de simplicité permettent alors un choix rationnel.

Le passage du repère  $R_{j-1}$  au repère  $R_j$  s'exprime en fonction des quatre paramètres géométriques suivantes (figure 2) :

-  $\alpha_j$ : angle entre les axes  $z_{j-1}$  et  $z_j$  correspondant à une rotation autour  $x_{j-1}$ .

-  $d_j$  : distance entre  $Z_{j-1}$  et  $Z_j$  le long de  $x_{j-1}$ .

-  $\theta_j$ : angle entre les axes  $x_{j-1}$  et  $x_j$  correspondant à une rotation autour  $z_j$ .

-  $r_j$ : Distance entre  $x_{j-1}$  et  $x_j$  le long de  $z_j$ .

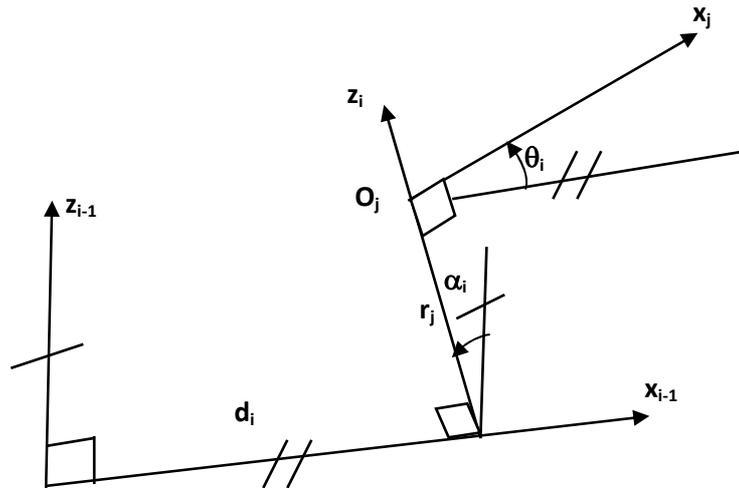


Figure 2.2 Paramètres géométrique dans le cas d'une structure ouverte simple  
(Paramètres de Denavit et Hartenber)

Le variable d'articulation  $q_j$  associée à la  $j^{ème}$  articulation est soit  $\theta_j$  ou  $r_e$  respectivement articulation de type rotoïde ou prismatique ce qui se traduit par la relation :

$$q_j = \sigma_j \theta_j + \bar{\sigma}_j r_j$$

Avec  $\sigma_j=0$  Si l'articulation j est rotoïde.

$\sigma_j=1$  Si l'articulation j est prismatique

Et enfin la matrice de transformation définissant le repère  $\mathbf{R}_j$  dans le repère  $\mathbf{R}_{j-1}$  est donnée par :

$${}^{j-1}\mathbf{T}_j = \mathbf{Rot}(x, \alpha_j) \mathbf{Trans}(x, d_j) \mathbf{Rot}(z, q_j) \mathbf{Trans}(z, r_j) \quad (2.1)$$

$${}^{j-1}\mathbf{T}_j = \begin{bmatrix} C\theta_j & -S\theta_j & 0 & d_j \\ C\alpha_j S\theta_j & C\alpha_j C\theta_j & -S\alpha_j & -r_j S\alpha_j \\ S\alpha_j S\theta_j & S\alpha_j C\theta_j & C\alpha_j & r_j C\alpha_j \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (2.2)$$

Avec :  $C\theta_j = \cos(\theta_j)$  et  $S\theta_j = \sin(\theta_j)$

## 2.4 Les paramètres de Denavit-Hartenberg. [7]

Les paramètres de Denavit-Hartenberg sont résumés dans le tableau 2.1

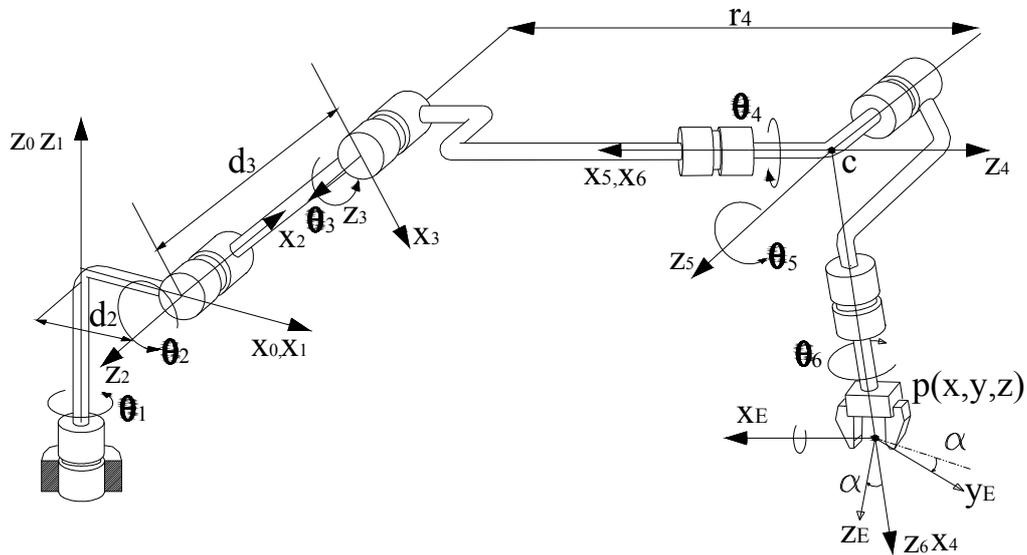


Figure 2.3 robot manipulateur à six axes

$i$	$\sigma_i$	$\alpha_i$	$d_i$	$\theta_i$	$r_i$
1	0	0	0	$\theta_1$	0
2	0	$\alpha_1$	$d_2$	$\theta_2$	0
3	0	0	$d_3$	$\theta_3$	0
4	0	$\alpha_2$	0	$\theta_4$	$r_4$
5	0	$\alpha_3$	0	$\theta_5$	0
6	0	$\alpha_4$	0	$\theta_6$	0

Tableau 2.1 Paramètres géométriques de D-H robot à six axes

### Notations

On note :

$$c1 = \cos(\theta_1)$$

$$s1 = \sin(\theta_1)$$

$$c12 = \cos(\theta_1 + \theta_2)$$

$$s12 = \sin(\theta_1 + \theta_2)$$

En utilisant la relation (2.1) on a

$$T_1^0 = \begin{bmatrix} c1 & -s1 & 0 & 0 \\ s1 & c1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad T_2^1 = \begin{bmatrix} c2 & -s2 & 0 & d2 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ s2 & c2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad T_3^2 = \begin{bmatrix} c3 & -s3 & 0 & d3 \\ s3 & c3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$T_4^3 = \begin{bmatrix} c4 & -s4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & r4 \\ -s4 & -c4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad T_5^4 = \begin{bmatrix} c5 & -s5 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ s5 & c5 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad T_6^5 = \begin{bmatrix} c6 & -s6 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ -s6 & -c6 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$E = \begin{bmatrix} c\alpha & 0 & s\alpha & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -s\alpha & 0 & c\alpha & e \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$E$  est la matrice de transformation homogène définissant le repère outil.

Le modèle géométrique directe est donné par la relation (2.1).

$$T = T_6^0 E = T_1^0 T_2^1 T_3^2 T_4^3 T_5^4 T_6^5 E$$

où

$$T_6^0(1.1) = c1((c4c5c6-s4s6)c23-s23s5c6)-s1(s4c5c6+c4s6)$$

$$T_6^0(2.1) = s1(c23(c4c5c6-s4s6)-s23s5c6)+c1(s4c5c6+c4s6)$$

$$T_6^0(3.1) = s23(c4c5c6-s4s6)+c23s5c6$$

$$T_6^0(1.2) = c1(-c23(c4c5s6+s4c6)+s23s5s6)+s1(s4c5s6-c4c6).$$

$$T_6^0(2.2) = s1(-c23(c4c5s6+s4c6)+s23s5s6)-c1(s4c5s6-c4c6).$$

$$T_6^0(3.2) = -s23(c4c5s6+s4c6)-c23s5s6.$$

$$T_6^0(1.3) = -c1(c23c4s5+s23c5)+s1s4s5.$$

$$T_6^0(2.3) = -s1(c23c4s5+s23c5)-c1s4s5.$$

$$T_6^0(3.3) = -s_2 s_3 c_4 s_5 + c_2 s_3 c_5$$

$$T_6^0(1.4) = -c_1 (s_2 s_3 r_4 - c_2 d_3 - d_2)$$

$$T_6^0(2.4) = -s_1 (s_2 s_3 r_4 - c_2 d_3 - d_2)$$

$$T_6^0(3.4) = c_2 s_3 r_4 + s_2 d_3$$

## 2.5 Le modèle géométrique inverse : [5][6]

Le modèle géométrique directe d'un robot permet de calculer les coordonnées opérationnelles donnant la situation de l'organe terminal en fonction des coordonnées articulaires. Le problème inverse consiste à calculer les coordonnées articulaires correspondant à une situation donnée de l'organe terminal. Lorsqu'elle existe, la forme explicite qui donne toutes les solutions possibles consiste ce que l'on appelle le modèle géométrique inverse (MGI).

La résolution du MGI, c'est-à-dire l'existence d'un nombre fini de solution, est fondamentale en matière de conception. Supposons que la situation  $P$  d'un bras manipulateur à  $n$  liaisons soit exprimée par un nombre  $m$  minimal de paramètres. Supposons par ailleurs que  $P$  soit une situation accessible par le bras manipulateur, c'est-à-dire que la situation appartient à l'espace de travail. Alors (dans la majorité des cas) :

- si  $n < m$ , il n'existe pas de solution au modèle géométrique inverse (MGI) ;
- si  $n = m$ , il existe un nombre fini de solutions en dehors de certaines configurations, appelées configurations singulières ;
- si  $n > m$ , il existe une infinité de solutions.

Et seul le calcul du MGI qui permet de connaître le nombre de solutions. [9]

Il existe plusieurs méthodes de calculer le modèle géométrique telles que : [10]

-la méthode de Paul qui traite séparément chaque cas particulier et convient pour la plupart des robots industriels

-La méthode de Peiper qui permet de résoudre le problème pour les robots à six degrés de liberté possédant trois articulations rotoides d'axes concourantes ou trois articulations prismatique

-La méthode générale de Raghavan et Roth, donnant la solution générale de robots à six articulations à partir d'un polynôme de degré au plus égal à 16

-Dans le calcul du MGI, trois cas se présentent :

**A/** absence de solution lorsque la situation désirée est en dehors de la zone accessible du robot. Celle-ci est limitée par le nombre de degrés de liberté, les débattements articulaires et la dimension des segments.

**B/** infinité de solutions lorsque :

-le robot est redondant vis-à-vis de la tâche

-le robot se trouve dans certaines configurations singulières

**C/** solution en nombre fini, on dit que le robot est résoluble lorsqu'on peut calculer toutes les configurations possibles. Ce nombre de solutions dépend de l'architecture du robot. [10] [11]

## 2.6. Calcul du MGI par la méthode de Paul [5]

### • Principe

La situation de l'organe terminal d'un robot manipulateur à  $n$  degrés de liberté est décrite par le modèle géométrique directe qui a pour expression :

$${}^0T_n = {}^0T_1(q_1) {}^1T_2(q_2) \dots {}^{n-1}T_n(q_n) \quad (2.3)$$

Cette même situation désirée sera notée par la matrice de transformation homogène

$U_0$  telle que :

$$U_0 = \begin{bmatrix} \mathbf{A} & \mathbf{P} \\ \mathbf{0} & \mathbf{1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} s_x & n_x & a_x & p_x \\ s_y & n_y & a_y & p_y \\ s_z & n_z & a_z & p_z \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & 1 \end{bmatrix} \quad (2.4)$$

On cherche à résoudre le système d'équation suivante :

$$U_0 = {}^0T_1(q_1) {}^1T_2(q_2) \dots {}^{n-1}T_n(q_n) \quad (2.5)$$

Pour trouver les solutions du système [2.5], Paul a proposé une méthode qui consiste à pré multiplier successivement les deux membres de l'équation [2.5] par les matrices  ${}^{j-1}\mathbf{T}_j$  pour  $j$  variant de  $1$  à  $n-1$ , opérations qui permettent d'isoler et d'identifier l'une après l'autre les variables articulaires que l'on cherche.

Pour un robot à 6 dll à titre d'exemple, on procède comme suite :

- on multiplie à gauche l'expression (II-7) [2.5] par  ${}^0\mathbf{T}_1$  :
- 

$${}^0\mathbf{T}_1 \mathbf{U}_0 = {}^1\mathbf{T}_2 {}^2\mathbf{T}_3 {}^3\mathbf{T}_4 {}^4\mathbf{T}_5 {}^5\mathbf{T}_6 \quad (2.6)$$

- par identification terme à terme des deux membres de l'équation (2.6), On se ramène à un système d'équations, fonction de  $\mathbf{q}_1$  uniquement, qu'on résout selon le Tableau 2.2
- ensuite on multiplie à gauche l'expression (II-8) par  ${}^2\mathbf{T}_1$  et on calcule  $\mathbf{q}_2$ ,

La succession des équations permettant le calcul de tous les  $\mathbf{q}_i$  est la suivante :

$$\begin{aligned} U_0 &= {}^0T_1(q_1) {}^1T_2(q_2) {}^2T_3(q_3) {}^3T_4(q_4) {}^4T_5(q_5) {}^5T_6(q_6) \\ {}^1T_0(q_1)U_0 &= {}^1T_2(q_2) {}^2T_3(q_3) {}^3T_4(q_4) {}^4T_5(q_5) {}^5T_6(q_6) \\ {}^2T_1(q_2)U_1 &= {}^2T_3(q_3) {}^3T_4(q_4) {}^4T_5(q_5) {}^5T_6(q_6) \\ {}^3T_2(q_3)U_2 &= {}^3T_4(q_4) {}^4T_5(q_5) {}^5T_6(q_6) \\ {}^4T_3(q_4)U_3 &= {}^4T_5(q_5) {}^5T_6(q_6) \\ {}^5T_4(q_5)U_4 &= {}^5T_6(q_6) \end{aligned} \quad (2.7)$$

Avec :  $U_{j+1} = {}^{j+1}T_6 = {}^{j+1}T_j U_j$  pour  $j = 0, \dots, 4$

Ces équations peuvent avoir des solutions évidentes, ou se ramènent aux principaux types rencontrés en robotique, mentionnés dans le tableau (2.2) ci-dessous

Type 1	$Xr_i=Y$
Type 2	$XSq_i+YCq_i=Z$
Type 3	$X_1Sq_i+YCq_i=Z_1$ $X_2Sq_i+Y_2Cq_i=Z_2$
Type 4	$X_1r_jSq_i=Y_1$ $X_2r_jCq_i=Y_2$
Type 5	$X_1Sq_i=Y_1+Z_1r_j$ $X_2Cq_i=Y_2+Z_2r_j$
Type 6	$WSq_j=XCq_i+YSq_i+Z_1$ $WCq_j=XSq_i-YCq_i+Z_2$
Type 7	$W_1Cq_j+W_2Sq_j=XCq_i+YSq_i+Z_1$ $W_1Sq_j-W_2Cq_j=XSq_i-YCq_i+Z_2$
Type 8	$XCq_i+YC(q_i+q_j)=Z_1$ $XSq_i+YS(q_i+q_j)=Z_2$

$r_i$  : variable de l'articulation prismatique  $i$

$Sq_i, Cq_i$ :sinus et cosinus de la variable articulaire rotoïde  $i$

Tableau 2.2 Types d'équations rencontrées avec la Méthode de Paul

### 2.7 Model cinématique direct (MCD) :

Model cinématique directe d'un robot manipulateur décrit les vitesses des coordonnées opérationnelles en fonction des vitesses articulaires, il est noté :

$$X = J(q). \dot{q} \quad (2.8)$$

Ou  $J(q)$  désigne la matrice jacobéenne de dimension  $(m \times n)$  du mécanisme.

La même matrice jacobéenne intervient dans le calcul du modèle différentiel direct qui donne les variations élémentaires  $dX$  des coordonnées opérationnelles en fonction des variations élémentaires  $dq$  des coordonnées articulaires, soit :

$$dX = J(q). dq \quad (2.9)$$

## 2.8 La matrice Jacobéenne : [5] [7]

L'intérêt de la matrice jacobéenne est multiple :

- Elle est à la base du modèle différentiel inverse, permettant de calculer une solution locale des variables articulaires  $q$  connaissant les coordonnées opérationnelles  $x$
- En statique, on utilise le jacobéen pour établir la relation liant les efforts exercés par l'organe terminal sur l'environnement aux forces et couples des actionneurs
- Elle facilite le calcul des singularités et de la dimension de l'espace opérationnel accessible du robot.

On peut obtenir la matrice jacobéenne par une méthode de calcul direct, fondée sur la relation entre les vecteurs des vitesses de translation et de rotation  $Vn$  et  $Wn$  du repère  $Rn$ , représentant les éléments de réduction du torseur cinématique du repère  $Rn$ , et les vitesses articulaires  $\dot{q}$

$$\begin{pmatrix} Vn \\ \Omega \end{pmatrix} = J(q) \cdot dq \quad (2.10)$$

$\dot{p}$  : vitesse linéaire absolue de l'organe terminal par rapport à  $R_0$ .

$\Omega$  : vitesse de rotation absolue de l'organe terminal par rapport à  $R_0$ .

$J(q)$  : matrice jacobéenne en fonction des variables articulaires de taille  $(m \times n)$  avec :

$m$  : nombre de degrés de liberté de la structure articulaire.

$n$  : nombre de degrés de liberté de l'organe terminal.

La vitesse linéaire de l'organe terminal est déterminée par la dérivée par rapport au temps du vecteur de positionnement du robot :

$$\dot{p} = \frac{\partial p}{\partial t} = \frac{\partial p}{\partial q_i} \frac{\partial q_i}{\partial t} = \frac{\partial p}{\partial q_i} \dot{q} \quad (2.11)$$

De (2.10) et (2.11) on a:

Les vitesses linéaires de l'organe terminal :

$$\dot{p} = \begin{bmatrix} \dot{p}_x \\ \dot{p}_y \\ \dot{p}_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sum_{i=1}^n \frac{\partial p_x}{\partial q_i} \dot{q}_i \\ \sum_{i=1}^n \frac{\partial p_y}{\partial q_i} \dot{q}_i \\ \sum_{i=1}^n \frac{\partial p_z}{\partial q_i} \dot{q}_i \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial p_x}{\partial q_1} & \dots & \frac{\partial p_x}{\partial q_i} & \dots & \frac{\partial p_x}{\partial q_n} \\ \frac{\partial p_y}{\partial q_1} & \dots & \frac{\partial p_y}{\partial q_i} & \dots & \frac{\partial p_y}{\partial q_n} \\ \frac{\partial p_z}{\partial q_1} & \dots & \frac{\partial p_z}{\partial q_i} & \dots & \frac{\partial p_z}{\partial q_n} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \dot{q}_1 \\ \vdots \\ \dot{q}_i \\ \vdots \\ \dot{q}_n \end{bmatrix} \quad (2.12)$$

Et les vitesses de rotation de l'organe terminal :

$$\Omega = \begin{bmatrix} \Omega_x \\ \Omega_y \\ \Omega_z \end{bmatrix} = [\bar{\sigma}_1 * a_1^0 * a_1 \dots \bar{\sigma}_j * a_j^0 * a_j \dots \bar{\sigma}_n * a_n^0 * a_n] = \begin{bmatrix} \dot{q}_1 \\ \vdots \\ \dot{q}_i \\ \vdots \\ \dot{q}_n \end{bmatrix} \quad (2.13)$$

$a_j^0$  : Matrice de rotation exprime le repère  $R_j$  dans le repère  $R_0$ .

$a_j = [0 \ 0 \ 1]^T$  : vecteur unitaire porté par l'axe  $z_j$  de l'articulation  $q_j$ .

$\sigma_j$  : Coefficient binaire de l'articulation  $q_j$ .

De (3.18) et (3.19) on aura :

$$\begin{pmatrix} \dot{p} \\ \Omega \end{pmatrix} = J(q) \cdot \begin{bmatrix} \dot{q}_1 \\ \vdots \\ \dot{q}_i \\ \vdots \\ \dot{q}_n \end{bmatrix} \quad (2.14)$$

C'est-à-dire :

$$J(q) = \begin{bmatrix} \frac{\partial p_x}{\partial q_1} & \dots & \frac{\partial p_x}{\partial q_i} & \dots & \frac{\partial p_x}{\partial q_n} \\ \frac{\partial p_y}{\partial q_1} & \dots & \frac{\partial p_y}{\partial q_i} & \dots & \frac{\partial p_y}{\partial q_n} \\ \frac{\partial p_z}{\partial q_1} & \dots & \frac{\partial p_z}{\partial q_i} & \dots & \frac{\partial p_z}{\partial q_n} \\ \bar{\sigma}_1 * a_1^0 * a_1 & \dots & \bar{\sigma}_j * a_j^0 * a_j & \dots & \bar{\sigma}_n * a_n^0 * a_n \end{bmatrix} \quad (2.15)$$

## 2.9 Modèle cinématique inverse (MCI) :

L'idée du modèle cinématique inverse est de calculer, à partir d'une configuration  $q$  donnée, les vitesses articulaires  $\dot{q}$  qui assurent à l'organe terminal une vitesse opérationnelle  $\dot{X}$  imposée. Pour obtenir le modèle cinématique inverse de notre structure, on inverse le modèle cinématique directe en résolvant un système d'équations linéaire dont la solution est donnée par la relation (2.16).

$$\dot{q} = J^{-1} * \dot{X} \quad (2.16)$$

Soit :

$$\begin{bmatrix} \dot{q}_1 \\ \vdots \\ \dot{q}_i \\ \vdots \\ \dot{q}_n \end{bmatrix} = J^{-1}(q) \cdot \begin{pmatrix} \dot{p} \\ \dot{\rho} \end{pmatrix} \quad (2.17)$$

## 2.10 L'étude dynamique du robot [6]

Tandis que les équations cinématiques décrivent le mouvement du robot sans considération des forces et des moments produisant le mouvement, les équations dynamiques décrivent explicitement le rapport entre les couples (et/ou forces) appliqués aux actionneurs et le mouvement (positions, vitesses et accélérations articulaires).

Les principaux problèmes dans la dynamique du robot sont :

- **La dynamique directe** : (donner les forces et établir les accélérations), elle est employée principalement pour la simulation.

$$\ddot{q} = g(q, \dot{q}, \Gamma, f_e)$$

- **La dynamique inverse** : (donner les accélérations, établir les forces), elle a des diverses utilisations, incluant : commande en ligne des mouvements et des forces de robot, conception de trajectoire et optimisation, conception du mécanisme du robot et le calcul des coefficients de l'équation du mouvement.

□ **L'identification des paramètres inertiels.**

Notation :

Les principales notations utilisées sont les suivantes :

$m_j$  : La masse du corps  $C_j$

$\mathbf{g}$  : Accélération de la pesanteur.

$L_{0,j}$  : vecteur d'origine  $O_0$  et d'extrémité  $O_j$  égal à  ${}^0P_j$ .

$L_j$  : vecteur d'origine  $O_{j-1}$  et d'extrémité  $O_j$  égal à  ${}^{j-1}P_j$ .

$\omega_j$  et  $\dot{\omega}_j$  : vitesse et accélération de rotation du corps  $C_j$ .

$\mathbf{V}_i$  et  $\dot{\mathbf{V}}_i$  : vitesse et accélération du point  $O_i$

$V_{G_j}$  et  $\dot{V}_{G_j}$  : vitesse et accélération du centre de gravité ( $G_j$ ) du corps  $C_j$

$$a_j = [0 \ 0 \ 1]^T$$

$F_j$  Résultante des forces extérieures sur le corps  $C_j$ .

$C_j$  Moment des efforts extérieurs exercés sur le corps  $C_j$  autour d' $O_j$ .

$S_j$  Vecteur d'origine  $O_j$  et d'extrémité  $G_j$ .

$\hat{\mathbf{h}}$  le tenseur du vecteur  $\mathbf{h}$  tel que :

$$\hat{\mathbf{h}} = \begin{bmatrix} \mathbf{0} & -\mathbf{h}_z & \mathbf{h}_y \\ \mathbf{h}_z & \mathbf{0} & -\mathbf{h}_x \\ -\mathbf{h}_y & \mathbf{h}_x & \mathbf{0} \end{bmatrix}$$

$\times$  : désigne le produit vectoriel.

$\mathbf{k}_i$  Tenseur d'inertie du corps  $C_i$  par rapport au repère  $\mathbf{R}_i$  qui s'exprime par :

$$k_j = \begin{bmatrix} \int (y^2 + z^2) dm & -\int xy dm & -\int xz dm \\ -\int xy dm & \int (x^2 + z^2) dm & -\int yz dm \\ -\int xz dm & -\int yz dm & \int (x^2 + y^2) dm \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Ix_j & Ixy_j & Ixz_j \\ Ixy_j & Iy_j & Iyz \\ Ixz_j & Iyz & Iz_j \end{bmatrix}$$

$I_{G_j}$  Tenseur d'inertie du corps  $C_j$  par rapport à un repère parallèle à  $R_j$  et d'origine  $G_j$ .

$f_j$  Et  $c_j$  résultante et moment du torseur dynamique exercé sur le corps  $C_j$  par son antécédent et par l'actionneur  $i$ .

$f_{ej}$  Et  $c_{ej}$  résultante et moment du torseur dynamique exercés par le corps  $C_j$  sur l'environnement.

$F_s = [F_{s1} \dots F_{sn}]^T$ , avec  $F_{sj}$  le paramètre de frottement sec de l'articulation  $j$ .

$F_v = [F_{v1} \dots F_{vn}]^T$ , avec  $F_{vj}$  le paramètre de frottement visqueux de l'articulation  $j$

### 2.10.1 Le modèle dynamique inverse (MDI) [5][6]

Le modèle dynamique inverse (ou le modèle dynamique tout court) d'un robot permet de déterminer les équations du mouvement, c'est-à-dire : la relation entre les couples appliqués aux actionneurs et les positions, vitesses et accélérations articulaires

Il est exprimé sous la forme :

$$\Gamma = f(q, \dot{q}, \ddot{q}, f_e) \quad (2.18)$$

avec :

$\Gamma$  : Vecteur des couples/forces des actionneurs, selon que l'articulation est rotoïde ou prismatique. Dans la suite, on écrira tout simplement *Couples* ;

$q$  : Vecteur des positions articulaires ;

$\dot{q}$  : Vecteur des vitesses articulaires ;

$\ddot{q}$  : Vecteur des accélérations articulaires ;

$f_e$  : est un vecteur représentant l'effort extérieur (force et moments) qu'exerce le robot

sur l'environnement.

Les deux principaux formalismes utilisés pour obtenir les équations différentielles qui décrivent le comportement d'un mécanisme à plusieurs corps articulés sont le formalisme de Newton (théorèmes généraux de la mécanique classique)

### 2.10.2 Formalisation de Newton-Euler [5] [6]

Les équations de Newton-Euler expriment le torseur dynamique en  $\mathbf{G}_j$  des efforts extérieurs sur un corps  $j$  par les équations :

$$\begin{cases} F_j = m_j \dot{V}_{Gj} \\ M_{Gj} = I_{Gj} \dot{\omega}_j + \omega_j \times (I_{Gj} \omega_j) \end{cases} \quad (2.19)$$

Cette méthode permet d'obtenir un MDI non linéaire par rapport aux paramètres inertiels, pour qu'il soit linéaire, le MDI doit être calculé en exprimant le torseur dynamique des efforts extérieurs en  $\mathbf{O}_i$  plutôt que  $\mathbf{G}_i$ .

Les équations de Newton Euler ainsi modifiées s'écrivent :

$$\begin{cases} F_j = M_j \dot{V}_j + \dot{\omega}_j MS_j + \omega_j \times (\omega_j \times MS_j) \\ M_j = J_j \dot{\omega}_j + \omega_j \times (J_j \omega_j) + MS_j \times \dot{V}_j \end{cases} \quad (2.20)$$

- **Récurrence avant** : elle permet de calculer  $F_j$  et  $C_j$  à partir de la relation (2.20). Pour ce faire, il faut calculer  $\omega_j$ ,  $\dot{\omega}_j$  et  $\dot{V}_j$ .

Les formules de composition des vitesses donnent :

$$\begin{cases} \omega_j = \omega_{j-1} + \bar{\sigma}_j \dot{q}_j a_j \\ V_j = V_{j-1} + (\omega_{j-1} \times^{j-1} P_j) + \sigma_j \dot{q}_j a_j \end{cases} \quad j = 1 \dots n \quad (2.21)$$

La dérivée de l'équation [2.13] par rapport au temps s'écrit :

$$\begin{cases} \dot{\omega}_j = \dot{\omega}_{j-1} + \bar{\sigma}_j (\ddot{q}_j a_j + \omega_{j-1} \times \dot{q}_j a_j) \\ \dot{V}_j = \dot{V}_{j-1} + \dot{\omega}_{j-1} \times L_j + \omega_{j-1} \times (\omega_{j-1} \times L_j) + \sigma_j (\ddot{q}_j a_j + 2\omega_{j-1} \times \dot{q}_j a_j) \end{cases} \quad j = 1 \dots n \quad (2.22)$$

On peut finalement calculer  $F_j$  et  $M_j$ , on initialise cette récurrence par  $\omega_0 = 0, \dot{V}_0 = 0$  et  $\dot{\omega}_0 = 0$ .

- **Récurrence arrière** : Les équations composant la récurrence arrière sont obtenues à partir du bilan des efforts sur chaque corps, écrit à l'origine  $O_j$ , on obtient (Figure 2.3)

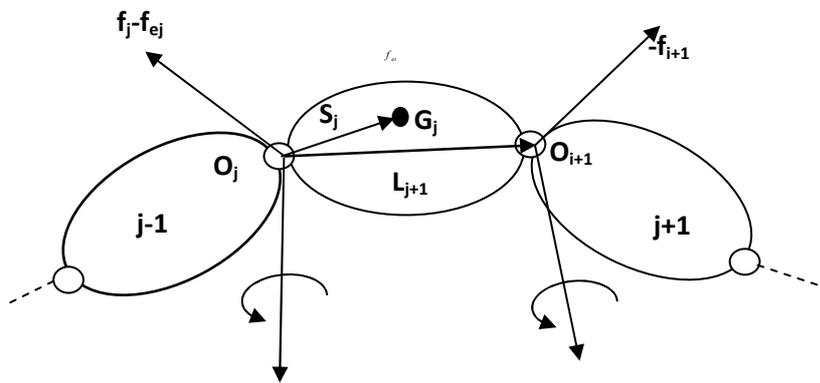


Figure 2.4 Bilan des efforts au centre de gravité

$$\begin{cases} F_i = f_i + f_{i+1} + m_i g - f_{ei} \\ M_j = m_j - m_{j+1} - L_{j+1} \times f_{j+1} + S_j \times m_j g - c_{ej} \end{cases}$$

On peut faire intervenir l'effet de la gravité sans avoir à la prendre en compte dans le bilan des efforts, pour cela on prend :

$$\dot{V}_0 = -g \quad (\text{IV-8}) \quad (2.23)$$

D'où l'on tire les équations suivantes :

$$\begin{cases} f_j = F_j + f_{j+1} + f_{ej} \\ m_j = M_j + m_{j+1} + L_{j+1} \times f_{j+1} + m_{ej} \end{cases} \quad (2.24) \text{ et } (2.25)$$

On obtient alors les couples aux actionneurs  $\Gamma_i$  en projetant, suivant la nature de l'articulation  $\mathbf{j}$ , les vecteurs  $f_j$  ou  $m_j$  sur l'axe du mouvement. On ajoute les termes correctifs représentant l'effet des frottements et des inerties des actionneurs, ce qui donne

$$\Gamma_j = (\sigma_j f_j + \bar{\sigma}_j m_j)^T a_j + F_{s_j} \text{Sign}(\dot{q}_j) + F_{v_j} \dot{q}_j + I a_j \ddot{q}_j \quad (2.26)$$

On déduit directement de l'équation [2.24] et [2.25] que les termes  $f_j$  et  $m_j$  ne dépendent que des paramètres inertiels du corps  $\mathbf{j}$  et de ceux des corps situés en aval qui sont introduit par les termes  $f_{j+1}$  et  $m_{j+1}$  de la récurrence.

Formes pratiques des équations de Newton-Euler :

Pour utiliser pratiquement l'algorithme de Newton Euler exposé ci-dessus, il faut projeter dans un même repère les vecteurs et tenseurs qui apparaissent dans une même équation

Les équations de la récurrence avant peuvent être présentées par l'algorithme suivant :

- **Récurrence avant :**

Conditions initiales :  ${}^0\omega_0 = [0 \ 0 \ 0]^T$ ,  ${}^0\dot{\omega}_0 = [0 \ 0 \ 0]^T$  et  ${}^0\dot{V}_0 = -g\mathbf{a}_i$

$$\begin{aligned} & \text{Do } j = 1, 2, \dots, n \\ & {}^j\omega_{j-1} = {}^jA_{j-1} {}^{j-1}\omega_{j-1} \\ & {}^j\omega_j = {}^j\omega_{j-1} + \bar{\sigma}_j \dot{q}_j a_j \\ & {}^j\dot{\omega}_j = {}^jA_{j-1} {}^{j-1}\dot{\omega}_{j-1} + \bar{\sigma}_j (\ddot{q}_j {}^j a_j + {}^j\omega_{j-1} \times \dot{q}_j {}^j a_j) \\ & {}^j\dot{V}_j = {}^jA_{j-1} ({}^{j-1}\dot{V}_{j-1} + {}^{j-1}U_{j-1} {}^{j-1}P_j) + \sigma_j (\ddot{q}_j {}^j a_j + 2 {}^j\omega_{j-1} \times \dot{q}_j {}^j a_j) \\ & {}^jF_j = M_j {}^j\dot{V}_j + {}^jU_j {}^jM S_j \\ & {}^jM_j = {}^jJ_j {}^j\dot{\omega}_j + {}^j\omega_j \times ({}^jJ_j {}^j\omega_j) + {}^jMS_j \times {}^j\dot{V}_j \\ & \text{End do} \end{aligned} \quad (2.27)$$

$${}^jU_j = {}^j\hat{\omega}_j + {}^j\hat{\omega}_j {}^j\hat{\omega}_j \quad (2.28)$$

Les équations de la récurrence arrière peuvent être présentées par l'algorithme suivant :

- **Récurrence arrière :**

$$\begin{aligned}
 &\text{Do } j = n, n-1, \dots, 1 \\
 &\quad {}^j f_j = {}^j F_j + {}^j f_{j+1} + {}^j f_{ej} \\
 &\quad {}^{j-1} f_j = {}^{j-1} A_j {}^j f_j \\
 &\quad {}^j m_j = {}^j M_j + {}^j A_{j+1} + {}^{j+1} m_{j+1} + {}^j P_{j+1} \times {}^j f_{j+1} + {}^j m_{ej} \quad (2.29) \\
 &\quad {}^{j-1} M_j = {}^{j-1} A_j {}^j m_j \\
 &\quad \Gamma_j = (\sigma_j {}^j f_j + \bar{\sigma}_j {}^j m_j)^T {}^j a_j + F_{s_j} \text{Sign}(\dot{q}_j) + F_{v_j} \dot{q}_j + I a_j \ddot{q}_j \\
 &\text{End do}
 \end{aligned}$$

Dans cette formulation (Newton Euler), l'effet de la pesanteur est introduit par une accélération verticale de la base du robot. Si le robot manipulateur est situé sur un véhicule dont le mouvement est connu, on peut donc également introduire les fonctions du temps correspondantes (vitesses et accélérations) dans les premières récurrences directes qui partent de la base.

### 2.10.3 Formalisme de Lagrange :

Les équations de Lagrange permettent d'obtenir directement les relations entre les efforts moteurs aux articulations et les mouvements. Par rapport aux équations de Newton, on perd au passage les informations sur les efforts de réaction aux articulations qui sont utiles au dimensionnement des parties mécaniques, mais n'interviennent pas dans un modèle utile à la commande automatique puisque les corps sont supposés indéformables [CHE 03].

Il s'agit de  $n$  équations différentielles non linéaires du second ordre obtenues à partir de :

$$\Gamma_i = \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} - \frac{\partial L}{\partial q_i} \quad i = 1 \dots n \quad (2.30)$$

Avec :

**L** : Lagrangien du système égal à **E-U**;

$E$  : Energie cinétique totale du système ;

$E_p$  Energie potentielle totale du système ;

#### 2.10.4 Forme générale des équations quadratique :

L'énergie cinétique du système est une fonction quadratique des vitesses articulaires :

$$E = \frac{1}{2} \dot{q}^T A \dot{q} \quad (2.31)$$

Où  $A$  est une matrice ( $n \times n$ ) de l'énergie cinétique, d'élément générique  $A_{jj}$ , appelée aussi matrice d'inertie du robot, qui est symétrique et définie positive. Ses éléments sont fonction des variables articulaires  $q$ .

L'énergie potentielle étant fonction des variable articulaires  $q$ , le couple  $\Gamma$  peut se mettre, à partir des équations [2.30] et [2.31] sous forme :

$$\Gamma = A(q)\ddot{q} + C(q, \dot{q})\dot{q} + Q(q) \quad (2.32)$$

Et on a vu que les vitesses de translation et de rotation de chaque corps sont des fonctions linéaires des vitesses articulaires.

D'autre part, l'énergie potentielle est fonction de la configuration du mécanisme :

Il en résulte que les équations de Lagrange peuvent s'écrire :

$$\Gamma = M(q)\ddot{q} + C(q, \dot{q})\dot{q} + Q(q) \quad (2.33)$$

Avec

$C(q, \dot{q})\dot{q}$  : Vecteur de dimension ( $n \times 1$ ) représentant les couples/forces de Coriolis et des forces centrifuges, tel que :

$$C\dot{q} = \dot{A}\dot{q} - \frac{\partial E}{\partial q}$$

Et

$$Q = [Q_1, \dots, Q_n]^T$$

Plusieurs formes sont possibles pour la matrice  $C$ . On peut par exemple calculer ces

éléments à partir du symbole de Christoffel  $c_{i,jk}$  tel que :

$$\begin{cases} C_{ij} = \sum_{k=1}^n c_{i,jk} \dot{q}_k \\ c_{i,jk} = \frac{1}{2} \left[ \frac{\partial A_{ij}}{\partial q_k} + \frac{\partial A_{ik}}{\partial q_j} - \frac{\partial A_{jk}}{\partial q_i} \right] \end{cases} \quad (2.34)$$

Le calcul de  $\mathbf{Q}$  se fait à partir de l'énergie potentielle :

$$\mathbf{Q}_i = \frac{\partial \mathbf{E}_p}{\partial \mathbf{q}_i} \quad (2.35)$$

Les éléments de  $\mathbf{A}$ ,  $\mathbf{C}$  et  $\mathbf{Q}$  sont fonction des paramètres géométriques et inertiels du mécanisme. Les équations dynamiques d'un système mécanique articulé forment donc un système de  $n$  équations différentielles du second ordre, couplées et non linéaires.

Il est évident que pour trouver les éléments de  $\mathbf{M}$ ,  $\mathbf{C}$  et  $\mathbf{Q}$ , il faut tout d'abord calculer les énergies cinétique et potentielle de tous les corps du robot.

### 2.11 Calcul de l'énergie cinétique :

L'expression de l'énergie cinétique totale d'un système composé de  $n$  corps rigides est :

$$E_C = \sum_{j=1}^n E_j \quad (2.36)$$

Où  $E_j$  désigne l'énergie cinétique du corps  $C_j$ , qui s'exprime par :

$$E_j = \frac{1}{2} (\omega_j^T I_{Gj} \omega_j + m_j V_{Gj}^T V_{Gj}) \quad (2.37)$$

Etant donné que :

$$V_{Gj} = V_j + \omega_j \times S_j \quad (2.38)$$

Et sachant que :

$$J_j = I_{Gj} - M_j \hat{S}_j \hat{S}_j \quad (2.39)$$

La relation [2.38] devient :

$$E_j = \frac{1}{2}(\omega_j^T J_j \omega_j + M_j V_j^T V_j + 2M_j S_j^T (V_j \times \omega_j)) \quad (2.40)$$

la relation [2.37] n'est pas linéaire par rapport aux paramètres du vecteurs  $S_j$ , contrairement à la relation [2.40] qui est linéaire vis-à-vis des éléments de  $M_j$ ,  $ME_j$  et  $J_j$ , appelés paramètres inertiels standard, Le calcul de  $V_j$  et de  $w_j$  se fait par les équations de composition des vitesses :

$$\omega_j = \omega_{j-1} + \bar{\sigma}_j \dot{q}_j a_j \quad (2.41)$$

$$V_j = V_{j-1} + \omega_{j-1} \times L_j + \sigma_j \dot{q}_j a_j \quad (2.42)$$

Pour un robot dont la base est fixe, les conditions initiales sont telles que

$$V_0 = 0 \text{ et } \omega_0 = 0.$$

Dans l'équation [2.30], tous les éléments doivent être exprimés dans le même repère. La façon la plus simple est de les exprimer dans le repère  $R_j$ . On réécrit donc les équations [2.30],[9.31] et [9.32] donnant  $E_j$ ,  ${}^j \omega_j$  et  ${}^j V_j$  comme suit :

$$E_j = \frac{1}{2}({}^j \omega_j^T J_j {}^j \omega_j + M_j {}^j V_j^T {}^j V_j + 2M_j S_j^T ({}^j V_j \times {}^j \omega_j)) \quad (2.43)$$

$${}^i \omega_i = {}^j A_j {}^{j-1} \omega_{j-1} + \bar{\sigma}_j \dot{q}_j {}^j a_j = {}^j \omega_{j-1} + \bar{\sigma}_j \dot{q}_j {}^j a_j \quad (2.44)$$

$${}^j V_j = {}^j A_{j-1} ({}^{j-1} V_{j-1} + {}^{j-1} \omega_{j-1} {}^{j-1} P_j) + \sigma_j \dot{q}_j {}^j a_j \quad (2.45)$$

## 2.12 Calcul de l'énergie potentielle :

L'énergie potentielle s'écrit :

$$U = \sum_{j=1}^n U_j = \sum_{j=1}^n -M_j g^T (L_{0j} + S_j) \quad (2.46)$$

En projetant les vecteurs de cette relation dans  $\mathbf{R}_0$ , on obtient :

$$U_j = -M_j {}^0 g^T ({}^0 P_j + {}^0 A_j {}^j S_j) \quad (2.47)$$

Les énergies cinétiques et potentielles étant linéaires par rapport aux paramètres inertiels, le modèle dynamique l'est également.

### **2.13 Espace opérationnel : [5]**

L'espace opérationnel est celui dans lequel est représentée la situation de l'organe terminal

### **2.14 Modélisation de la coupe [9]**

#### **2.14.1 Problématique :**

Une étape importante de l'analyse des phénomènes de coupe consiste à rechercher les relations entre les propriétés mécaniques des matériaux, les caractéristiques de la partie active de l'outil et les paramètres définissant les conditions de coupe.

C'est là qu'intervient la modélisation en coupe orthogonale. Cette modélisation met en place les conditions de cisaillement du copeau d'un point de vue géométrique (plans de cisaillement, zones de cisaillement). Elle pose les bases de modèles plus riches comme la modélisation en coupe oblique et tridimensionnelle.

#### **2.14.2 Modélisation du coup orthogonal :**

##### **•Le modèle de Merchant (1940-1945)**

Le plus simple et le plus connu des modèles est un modèle analytique établi par Merchant.

##### **•Hypothèses de la théorie :**

-On se place dans le cadre de la coupe orthogonale (pour se ramener à un problème plan)

-Le rayon de bec de l'outil est nul.

-Le système machine/pièce/ outil + porte-d 'outil est supposé parfaitement rigide.

-L'épaisseur du copeau est constante

-La vitesse de coupe est choisie de façon à obtenir une formation du copeau sans zone morte



-coefficient de frottement outil/copeau  $\mu$

-profondeur de passe  $a_p$

-régime permanent et statique.

D'ou le calcul de  $F_f$  et  $F_v$ . La surface de la section coupée vaut :

$$A_0 = h \cdot a_p$$

La surface de la zone de cisaillement vaut :

$$A_0 = \frac{h \cdot a_p}{\sin \phi}$$

Par définition, on a  $\tau_{sh} = \frac{F_{sh}}{A_s}$  et  $\sigma_{sh} = \frac{F_{shn}}{A_s}$  ainsi que le frottement  $\mu = \tan \xi$

D'ou

$$F_v = A_0 \cdot \tau_{sh} \cdot \frac{\sin(\xi - \gamma)}{\cos(\phi + \xi - \gamma)}$$

et

$$F_f = \frac{A_0}{\sin \phi} \cdot \tau_{sh} \cdot \frac{\sin(\xi - \gamma)}{\cos(\phi + \xi - \gamma)}$$

On suppose que le travail de coupe est minimal. On obtient alors une expression linéaire de  $\tau_{sh}$  en fonction de  $\sigma$ . Soit  $\tau_{sh} = \tau_{sh0} + \sigma \cdot \cotan(C)$  (loi d'écoulement de Caquot-Bridgman) et  $\sigma = \sigma_{sh} \cdot \tan(\phi + \xi - \gamma)$  donc :

$$\tau_{sh} = \frac{\tau_{sh0}}{1 - \tan(\phi + \xi - \gamma) - \cotan(C)}$$

Les efforts s'expriment alors uniquement en fonction des données :

$$F_v = \frac{2A_0 \cdot \tau_{sh0} \cdot \sin(C) \cdot \cos(\xi - \gamma)}{\cos(2\phi - C + \xi - \gamma) - \cos(C - \xi + \gamma)}$$

$$F_f = \frac{2A_0 \cdot \tau_{sh0} \cdot \sin(C) \cdot \sin(\xi - \gamma)}{\cos(2\phi - C + \xi - \gamma) - \cos(C - \xi + \gamma)}$$

De ces résultats, il reste possible de trouver une autre expression de l'angle  $\phi$ , En minimisant l'énergie  $\omega$ , tel que  $W = F_f \cdot V_c$  mise en jeu mors de la coupe ( on supposant les parametres  $A_0, \tau_{sh0}, \xi$  et  $\gamma$  constants), en développant, nous obtenons  $\frac{\partial W}{\partial \phi} = 0$ . On se ramène à déterminer :  $\frac{\partial}{\partial x}(F_v) \cdot V_c = 0$

Ceci conduit à la relation suivante :  $2\phi - C + \xi - \gamma = 0$

en simplifiant ainsi l'expression des efforts, il deviennent :

$$F_v = \frac{2 \cdot \tau_{sh0} \cdot \sin(C) \cdot \cos(\xi - \gamma)}{1 - \cos(2\phi)} \cdot A_0$$

$$F_f = \frac{2 \cdot \tau_{sh0} \cdot \sin(C) \cdot \sin(\xi - \gamma)}{1 - \cos(2\phi)} \cdot A_0$$

De ces relations donnant  $F_f$  et  $F_v$  on peut déduire que :

- Les composantes  $F_f$  et  $F_v$  sont proportionnelles à l'avance et à la profondeur de passe ;
- Les composantes  $F_f$  et  $F_v$  sont proportionnelles à la contrainte de cisaillement du matériau usiné ;
- Les composantes  $F_f$  et  $F_v$  diminuent quand C décroît ;
- Les composantes  $F_f$  et  $F_v$  diminuent quand  $\gamma$  augmente ;
- Les composantes  $F_f$  et  $F_v$  diminuent quand l'angle de frottement entre le copeau et la face de coupe de l'outil décroît

## 2.15 Le modèle mécaniste de coupe tiré du modèle de Merchant

### 2.15.1 Introduction à la force de coupe par unité de surface $k_c$ [9]

Le modèle analytique de Merchant ne peut pas être utilisé directement pour les outils de coupe réels dotés de rayons de bec, d'angles divers, voire de formes variées de briscopeaux, il est pratique, à l'aide de quelques expériences, de construire un modèle «mécaniste» utilisant les travaux de Merchant. La force de cisaillement peut s'exprimer comme une fonction de la contrainte de cisaillement et de l'angle de cisaillement

$$A_0 = h \cdot a_p A_s = \frac{h \cdot a_p}{\sin \emptyset} F_{sh} = \tau_{sh} \frac{h \cdot a_p}{\sin \emptyset} = \tau_{sh} \frac{A_0}{\sin \emptyset}$$

La force résultante  $F_{shi}$  peut être exprimée grâce à la contrainte de cisaillement aux angles de frottement et de cisaillement, à la profondeur de passe et à la vitesse d'avance:

$$F_{shi} = \frac{F_{sh}}{\cos(\emptyset + \xi - \gamma)} = \tau_{sh} \cdot \frac{h \cdot a_p}{\sin \emptyset \cos(\emptyset + \xi - \gamma)} = \tau_{sh} \cdot \frac{A_0}{\sin \emptyset \cos(\emptyset + \xi - \gamma)}$$

De cette équation, on peut exprimer les efforts  $F_f$  et  $F_v$

Soit  $F_f = F_{sh} \cdot \cos(\xi - \gamma)$  et  $F_v = F_{sh} \cdot \sin(\xi - \gamma)$ :

$$F_v = h \cdot a_p \cdot \tau_{sh} \frac{\cos(\xi - \gamma)}{\sin \emptyset \cos(\emptyset + \xi - \gamma)} = \tau_{sh} \cdot A_0 \frac{\cos(\xi - \gamma)}{\sin \emptyset \cos(\emptyset + \xi - \gamma)}$$

$$F_f = h \cdot a_p \cdot \tau_{sh} \frac{\sin(\xi - \gamma)}{\sin \emptyset \cos(\emptyset + \xi - \gamma)} = \tau_{sh} \cdot A_0 \frac{\sin(\xi - \gamma)}{\sin \emptyset \cos(\emptyset + \xi - \gamma)}$$

Dans le modèle <<mécaniste>>, il existe alors un paramètre noté <<pression spécifique de coup>>  $k_c$  ou encore <<force de coup par unité de surface>>, exprimé en N/mm<sup>2</sup> et qui est défini comme :

$$k_c = \tau_{sh} \frac{\cos(\xi - \gamma)}{\sin \emptyset \cos(\emptyset + \xi - \gamma)}$$

• Introduction au rapport  $k_f$  liant l'effort d'avance aux paramètres de coupe

Il existe un paramètre semblable pour l'avance, noté  $k_f$

$$k_f = \tau_{sh} \frac{\sin(\xi - \gamma)}{\sin \emptyset \cos(\emptyset + \xi - \gamma)}$$

Notons que  $k_f$  est un rapport sans dimension qui peut être exprimé de la façon suivante :

$$k_f = \frac{F_f}{F_v} \cdot \tan(\xi - \gamma)$$

# **Chapitre 3**

## **Applications et résultats**

### 3.1 Introduction :

Nous avons choisi un robot manipulateur à six axes suspendu à outil abrasif pour répondre à différentes tâches d'ébavurage : Horizontal, Vertical Figure3.1

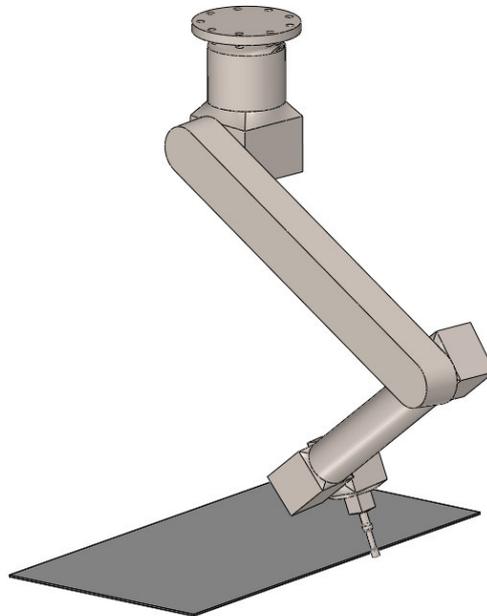


Figure3.1 : Bras manipulateur à six axes suspendu

Les paramètres géométriques du robot choisi sont résumés dans le tableau 3.1

$i$	$\sigma_i$	$\alpha_i$	$d_i$	$\theta_i$	$r_i$
1	0	0	0	$\theta_1$	0
2	0	90°	$d_2$	$\theta_2$	0
3	0	0	0.9	$\theta_3$	0
4	0	-90°	0	$\theta_4$	0.6
5	0	90°	0	$\theta_5$	0
6	0	-90°	0	$\theta_6$	0

Tableau 3.1 Paramètres géométriques de D-H du robot à six axes choisi

### 3.2 Organigrammes de Calcul :

-Le modèle géométrique direct est basé sur le paramétrage de DH, pour la construction de ce modèle, nous avons réalisé un programme sur MATLAB dont l'organigramme est représenté par la figure 3.1

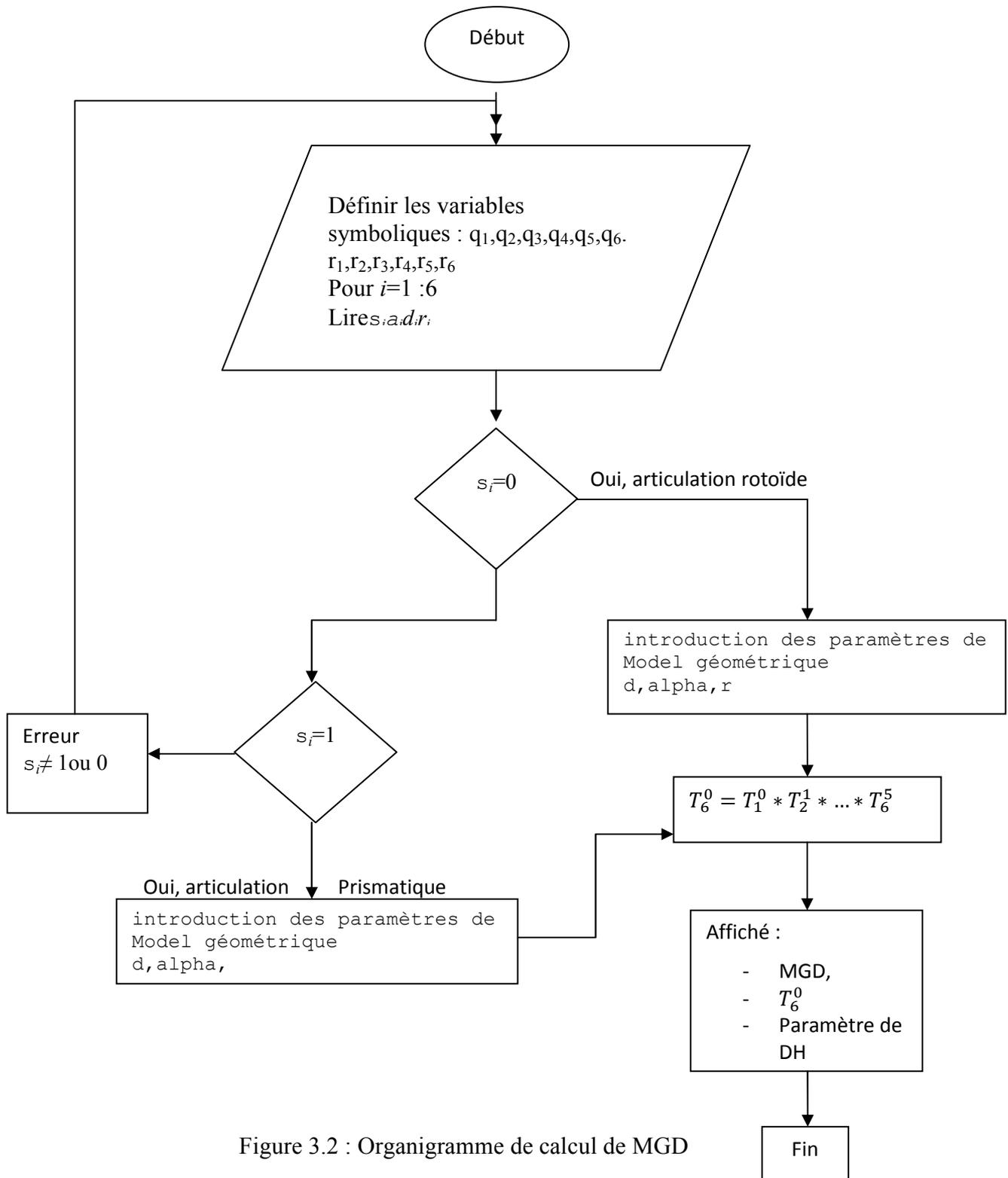


Figure 3.2 : Organigramme de calcul de MGD

-Le calcul du modèle dynamique inverse exige la connaissance des paramètres géométriques et cinématiques à savoir les vitesses et les accélérations articulaires,

Pour le calcul des paramètres géométriques  $q_i$  qui font l'objet de modèle géométrique inverse, nous avons effectué un programme Matlab, Figure 3.2

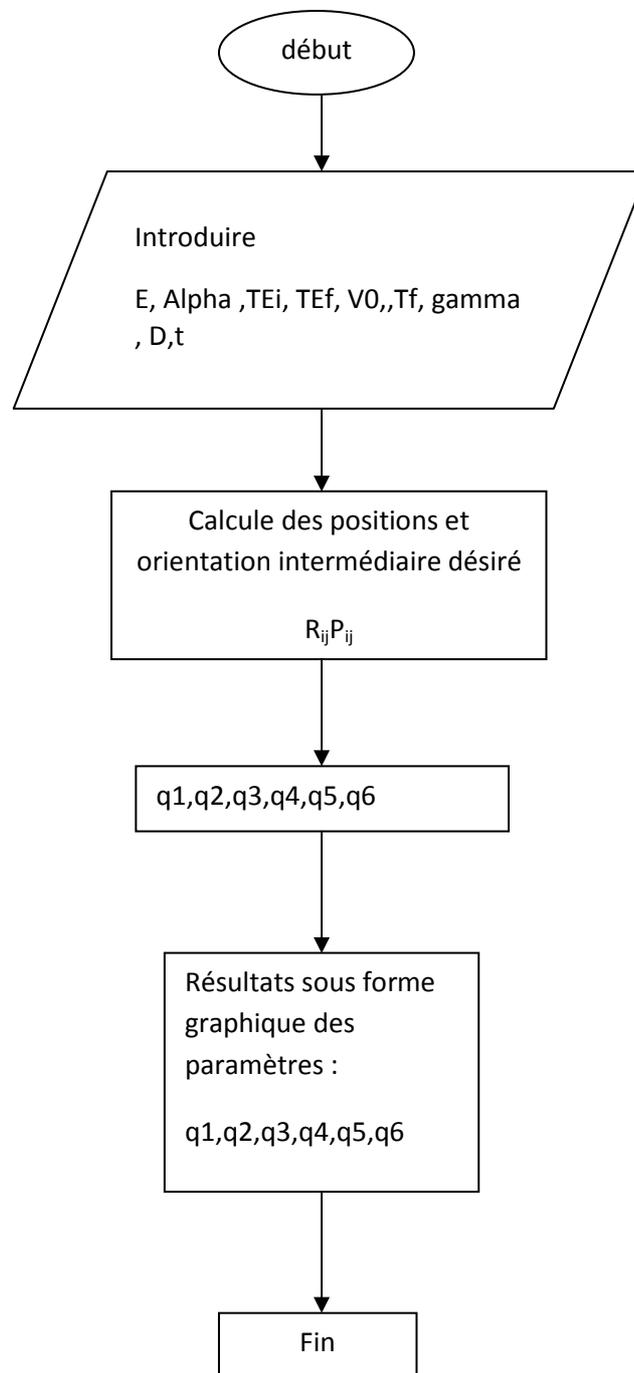


Figure 3.3 : Organigramme de calcul de MGI

-Pour le calcul des vitesses articulaire nous avons fait un programme Matlab basé sur la matrice jacobéenne les torseurs cinématique dont l'organigramme et sur la figure 3.3

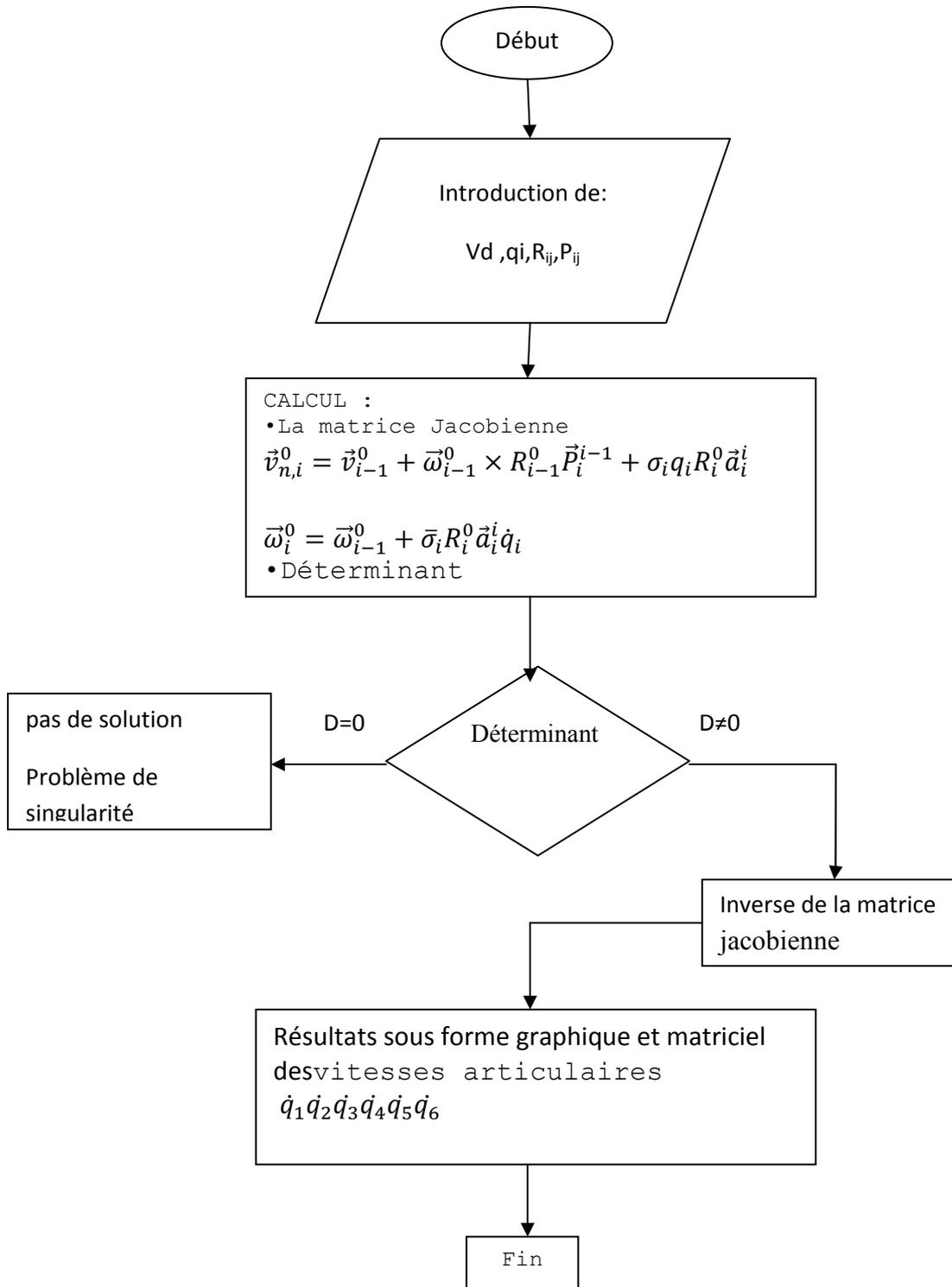


Figure 3.4 Organigramme de calcul de la matrice jacobéenne

-Modèle cinématique 2ème ordre , calcul des accélérations articulaires Figure 3.4

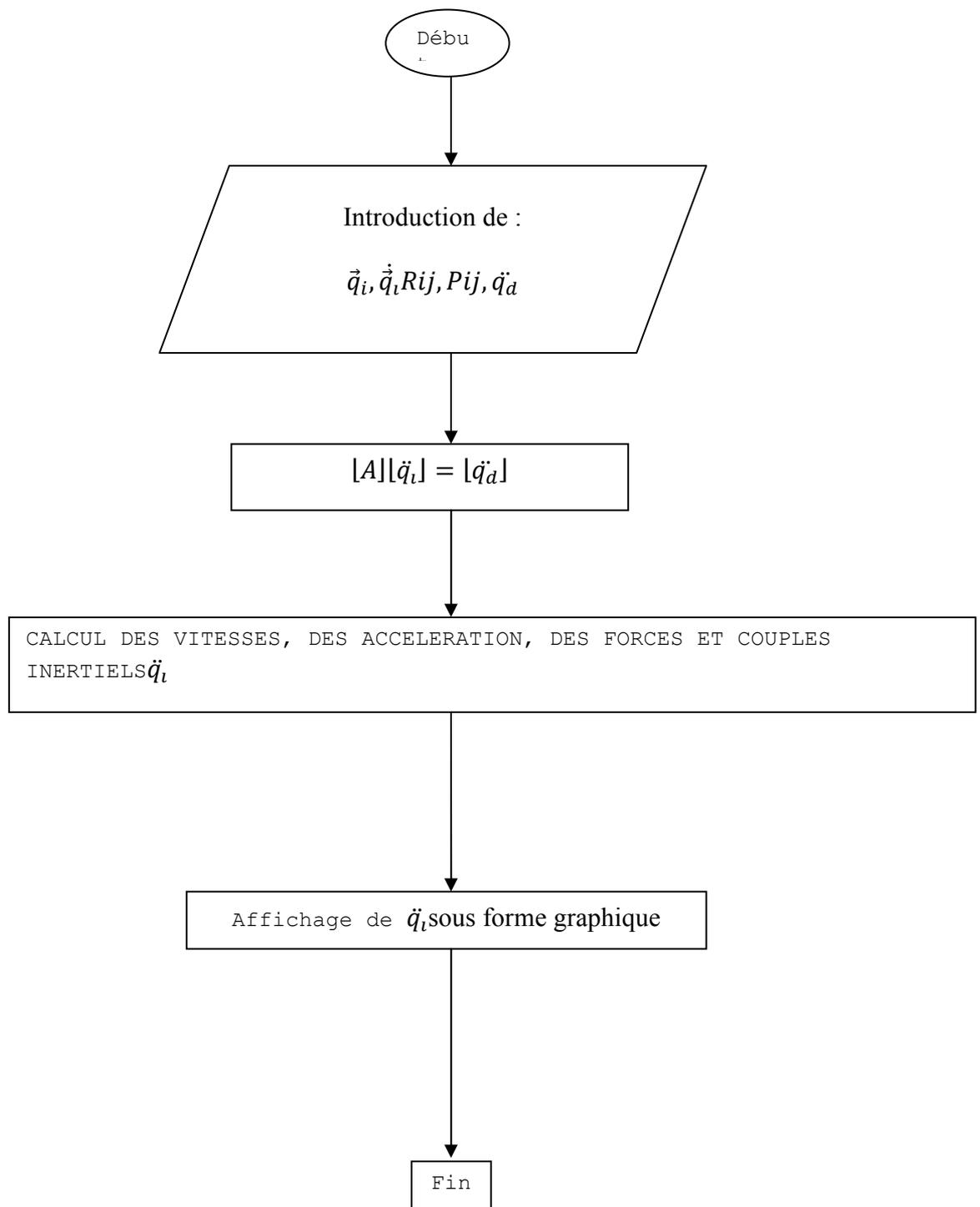


Figure 3.5 Organigramme de calcul de MCD

-Calcul de modèle dynamique inverse, Figure 3.5

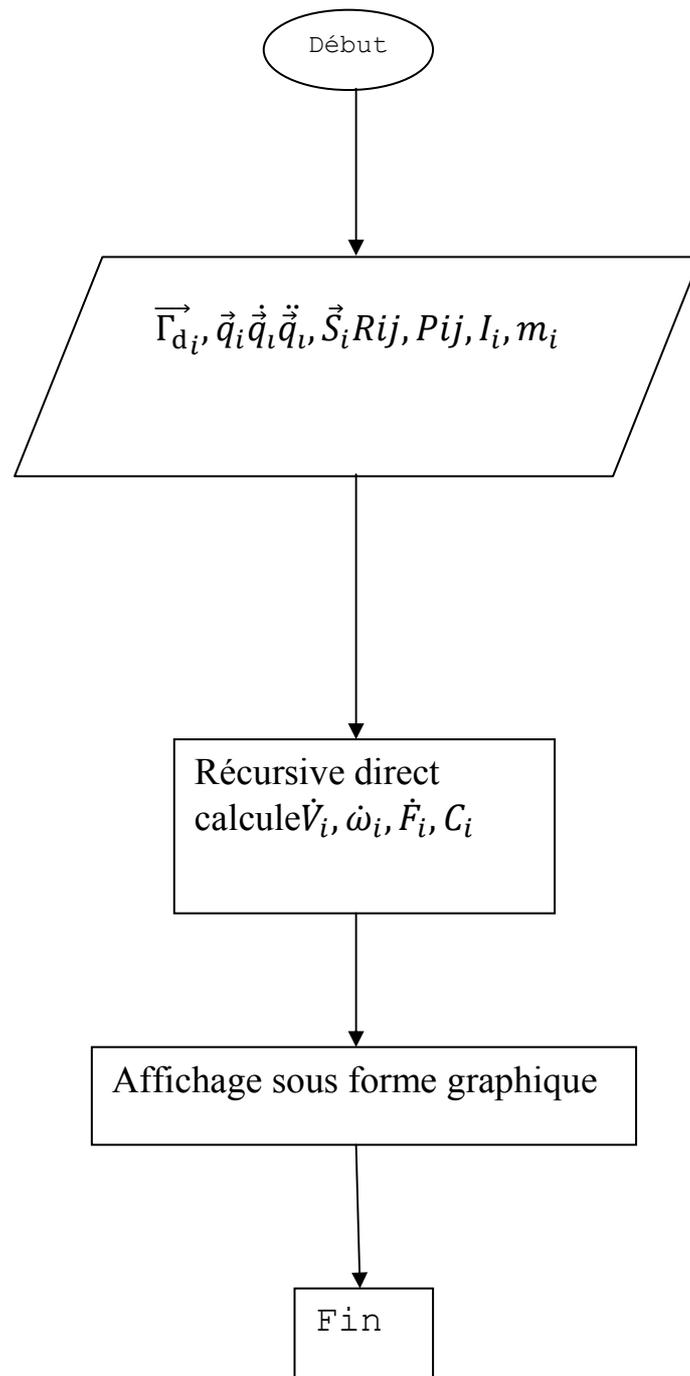


Figure 3.6 : Organigramme de calcul de MDI

### 3.3 Validation du programme

Pour tester la fiabilité de notre programme, nous avons choisi un modèle à 2 degrés de liberté qui a été traité par la référence [23 mémoire]. Donc, considérons un bras plan à 2 degrés de liberté Figure 3.7. Les données de l'application sont :  $a_1=a_2=1\text{m}$ ,  $l_1=l_2=0,5\text{m}$ ,  $m_{c1}=m_{c2}=50\text{kg}$ ,  $I_{c1}=I_{c2}=10\text{kgm}^2$  figure 3.7

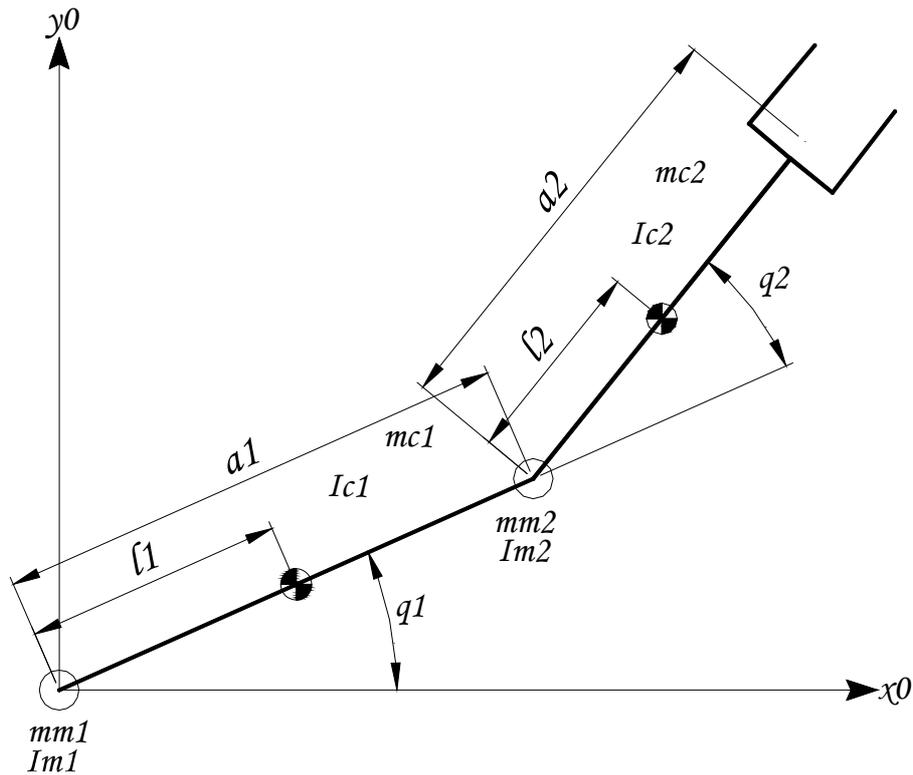


Figure 3.7 Manipulateur plan à deux corps

La position M de l'extrémité libre du corps 2 à l'état initial est  $(x=0.2, y=0)$ . Dans le sens positif, le corps 1 et le corps 2 tourne d'un angle de  $90^\circ$  pour que la position M à l'état final soit  $(x=0.89, y=-0.89)$ , mouvement effectué pendant un temps égal à 0.5 seconde. (Figure 3.7). On admet une posture coude vers le bas.

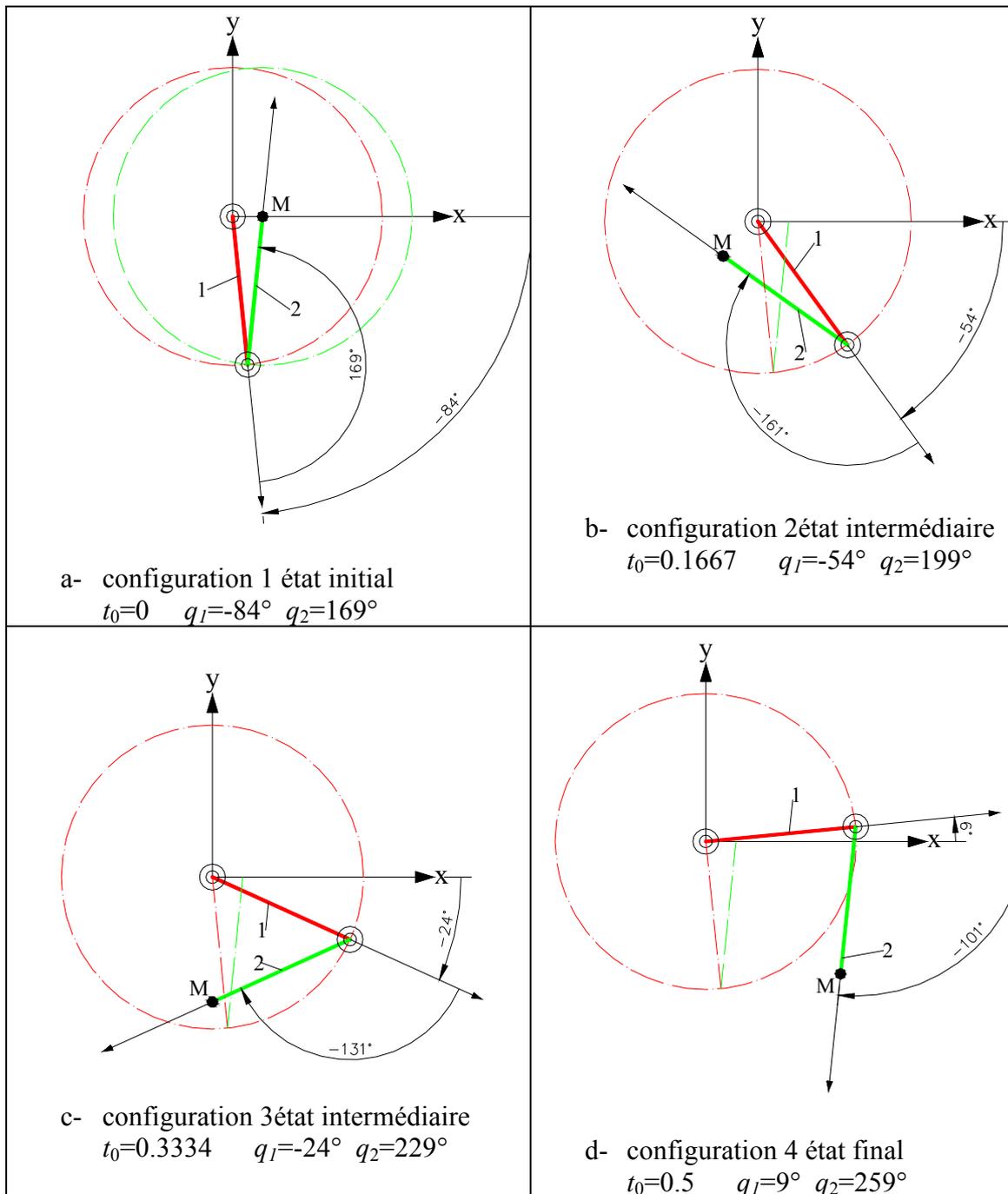


Figure 3.8 Etats initiaux et finaux d'un bras plan avec une rotation de  $90^\circ$   $t=0,5$  seconde

Les positions, les vitesses et les accélérations sont sur la figure 3.9

Les paramètres de Denavit-Hartenberg pour un bras plan à 2ddl sont dans le tableau 3.1

$i$	$\sigma$	$\alpha$	$d_i$	$r_i$	$q_i$
1	0	0	0	0	$q_1$
2	0	0	1	0	$q_2$
3	0	0	1	0	$q_3$

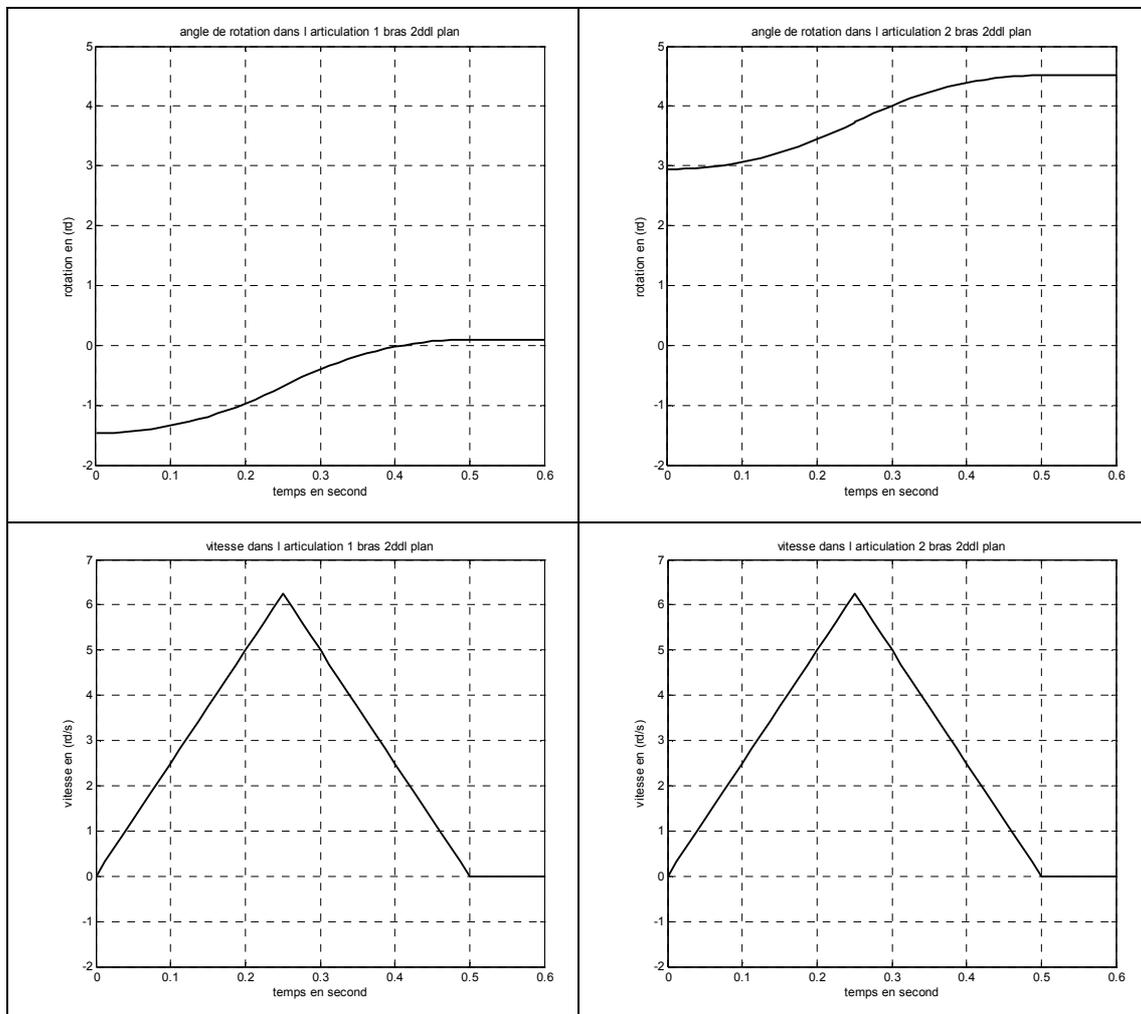
Tableau 3.2 les paramètres de D.H pour un bras à 2ddl

L'introduction des paramètres géométriques, d'inertie et les variables articulaires, dans le programme de calcul donne les résultats qui sont résumés dans la figure 3.10 ainsi que les résultats obtenus par la référence [23]

Si on ne tient pas compte des forces de frottement et pour que le système se mette en mouvement, les actionneurs doivent fournir les couples :[référence mémoire]

$$\Gamma_1 = (I_1 + m_1 l_1^2 + k_1^2 I_{m1} + I_2 + m_2 (a_1^2 + l_2^2 + 2a_1 l_2 \cos q_2) + I_{m2} + m_{m2} a_1^2) \ddot{q}_1 + (I_2 + m_2 (l_2^2 + a_1 l_2 \cos q_2) + k_2^2 I_2) \ddot{q}_2 - 2m_2 a_1 l_2 \sin(q_2) \dot{q}_1 \dot{q}_2 - m_2 a_1 l_2 \sin(q_2) \dot{q}_2^2 + (m_1 l_1 + m_{m2} a_1 + m_2 a_1) g \cos q_1 + m_2 l_2 g \cos(q_1 + q_2) \quad (3.1)$$

$$\Gamma_2 = (I_2 + m_2 (l_2^2 + a_1 l_2 \cos q_2) + k_2^2 I_2) \ddot{q}_1 + (I_2 + m_2 l_2^2 + k_2^2 I_2) \ddot{q}_2 + m_2 a_1 l_2 \sin(q_2) \dot{q}_2^2 + m_2 g l_2 \cos(q_1 + q_2) \quad (3.2)$$



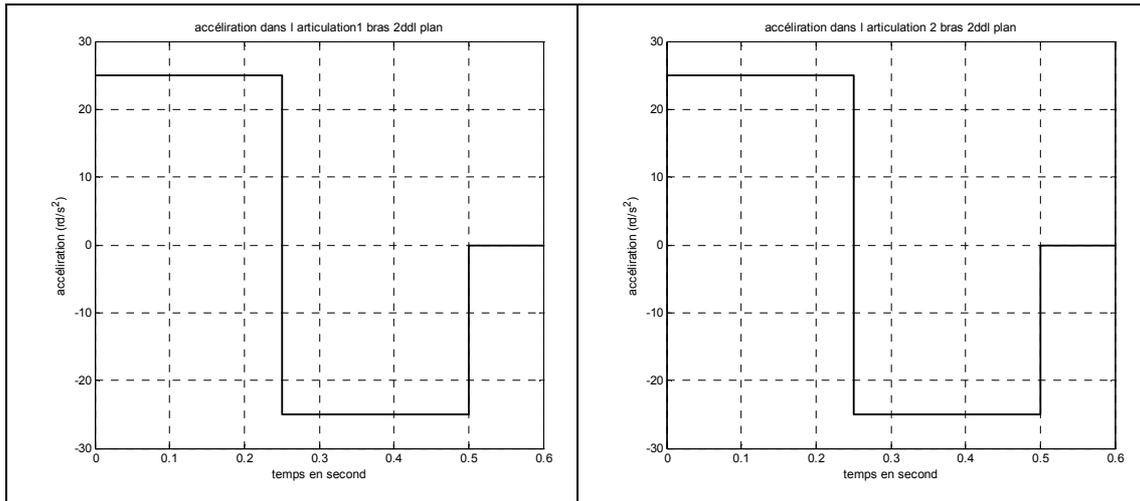


Figure 3.9 Positions, vitesses et accélérations de l'articulation 1 et 2 du bras à 2 ddl

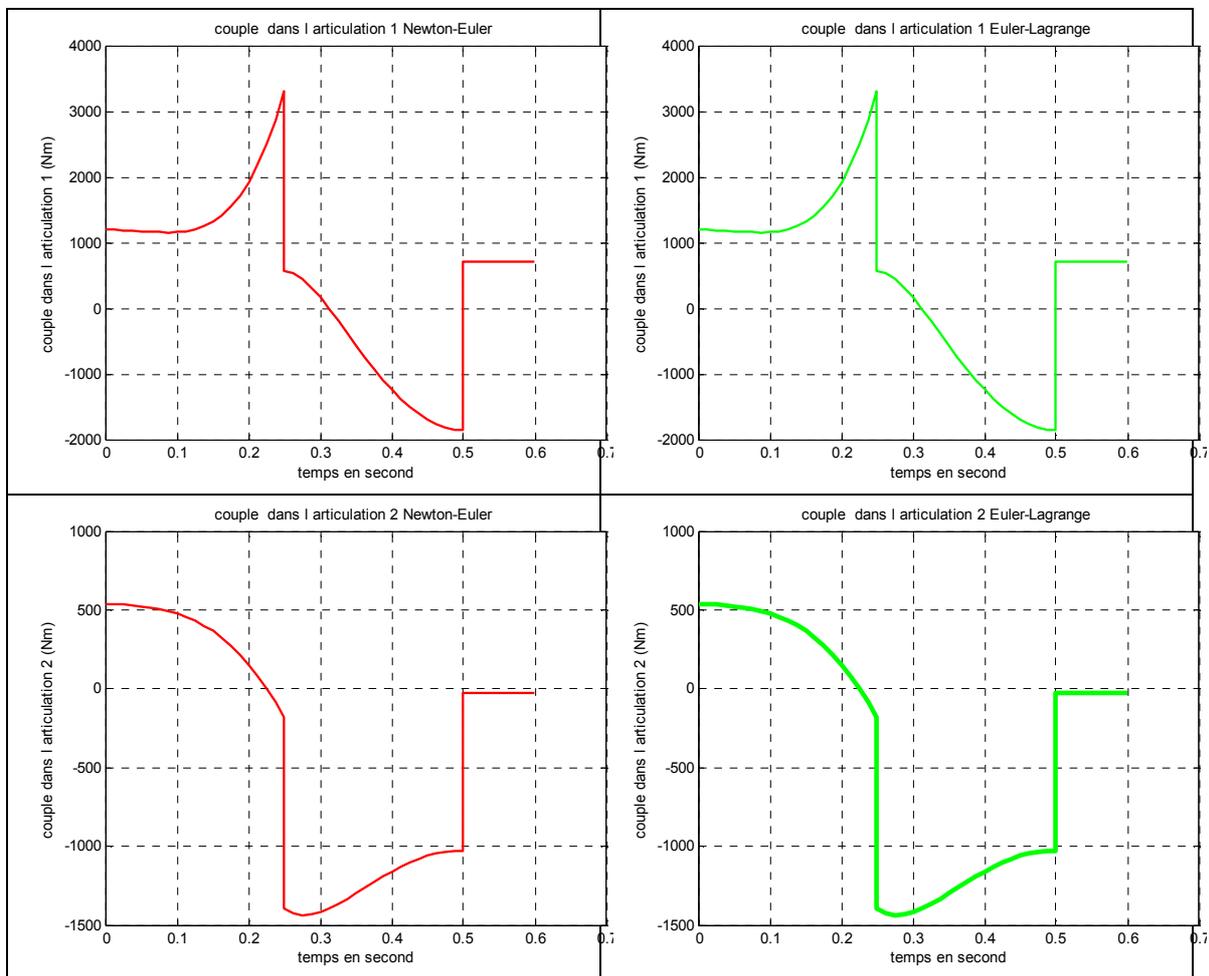


Figure 3.10. Couples des articulations d'un mécanisme à 2ddl

- Les courbes de gauche en rouge : obtenues par notre programme méthode de N-E
- Les courbes de droite en vert : résultat obtenus par la référence [23] méthode E-L

## Commentaire

Le résultat obtenu (figure 3.9) nous montre que notre programme est fiable et nous pouvons passer à l'étape suivante c'est-à-dire appliquer le programme pour le manipulateur à 6 DDL.

### 3.4 Modélisation de l'environnement

L'opération d'ébavurage réalisé par un robot nécessite la connaissance de la ::

- Trajectoire de l'organe terminal dans l'espace opérationnel
- Les efforts de coupe au niveau de l'organe terminal

L'organe terminal du robot suit une trajectoire, rectiligne dans notre cas, en gardant une orientation précise et il doit vaincre aussi les efforts de coupe de verre

Pour compléter notre modélisation nous devons déterminer les trajectoires et les efforts de coupe

#### 3.4.1 Trajectoire de l'opération d'ébavurage :

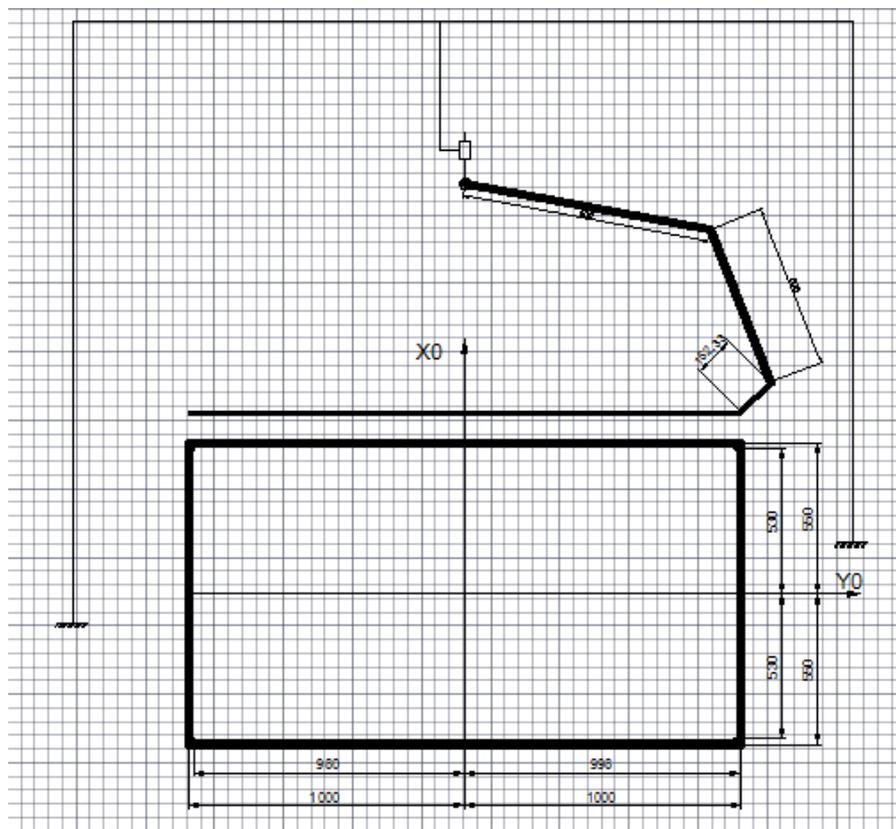


Figure 3.11 Ebavurage d'une plaque de verre épaisseur 6mm

L'équation de trajectoire pour une fonction d'interpolation de degré cinq est donner par [ 9]

$$T_E^0(t) = \begin{bmatrix} R(t) & P(t) \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (3.3)$$

$$\vec{P}(t) = \vec{P}^i + r(t)(\vec{P}^f - \vec{P}^i) \quad (2.4)$$

$$R(t) = R^i \text{rot}(\vec{u}, r(t)\gamma) \quad (2.5)$$

Pour notre cas, on choisit une fonction d'interpolation linéaire et de degré cinq, équations : (3.6) et (3.7)

$$r(t) = \frac{t}{t_f} \left[ 10 \left( \frac{t}{t_f} \right)^3 - 15 \left( \frac{t}{t_f} \right)^4 + 6 \left( \frac{t}{t_f} \right)^5 \right]$$

Avec :

$$\cos(\gamma) = \frac{1}{2} (\vec{s}^{iT} \vec{s}^f + \vec{n}^{iT} \vec{n}^f + \vec{a}^{iT} \vec{a}^f - 1) \quad (3.8)$$

$$\sin(\gamma) = \frac{1}{2} \sqrt{(\vec{a}^{iT} \vec{n}^f - \vec{n}^{iT} \vec{a}^f)^2 + (\vec{s}^{iT} \vec{a}^f - \vec{a}^{iT} \vec{s}^f)^2 + (\vec{n}^{iT} \vec{s}^f - \vec{s}^{iT} \vec{n}^f)^2} \quad (3.9)$$

$$\text{Et} \begin{cases} u_x = \text{sign}(\vec{a}^{iT} \vec{n}^f - \vec{n}^{iT} \vec{a}^f) \sqrt{\frac{\vec{s}^{iT} \vec{s}^f - c\gamma}{1-c\gamma}} \\ u_y = \text{sign}(\vec{s}^{iT} \vec{a}^f - \vec{a}^{iT} \vec{s}^f) \sqrt{\frac{\vec{n}^{iT} \vec{n}^f - c\gamma}{1-c\gamma}} \\ u_z = \text{sign}(\vec{n}^{iT} \vec{s}^f - \vec{s}^{iT} \vec{n}^f) \sqrt{\frac{\vec{a}^{iT} \vec{a}^f - c\gamma}{1-c\gamma}} \end{cases} \quad (3.10)$$

$$R_{Ei}^o = R_{Ef}^o = \begin{bmatrix} s_x^i & n_x^i & a_x^i \\ s_y^i & n_y^i & a_y^i \\ s_z^i & n_z^i & a_z^i \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} & 0 & -\frac{\sqrt{2}}{2} \\ 0 & 1 & 0 \\ \frac{\sqrt{2}}{2} & 0 & \frac{\sqrt{2}}{2} \end{bmatrix} \quad (3.11)$$

$$P_i = \begin{pmatrix} -0.55 \\ -1 \\ 0.832 \end{pmatrix}$$

$$P_f = \begin{pmatrix} -0.55 \\ 1 \\ 0.832 \end{pmatrix}$$

### 3.5 Modélisation des efforts de coupe

Nous avons essayé d'adopter le modèle de coupe de Merchant pour exterminer les efforts de coupe horizontale et verticale ' mais ce modèle ne prend pas en considération la nature de matériel utilisé pour la coupe :

Matériel fragile ou ductile, les caractéristiques mécaniques donc ça ne permet pas de traiter notre problème dont nous avons procédé à déterminer les efforts de coupe par expérience

#### 3.5.1 Description de l'expérience

Nous avons utilisé trois types de meule en feutre Figure 3.12 et des morceaux de verre plat d'épaisseur 6 mm



Figure3.12 Meules en feutre  
A , B:Meule mou, et C Meule dur

Meule en feutre	A	B	C
Type de meule	mou	mou	dur
Dimension	Ø 32x10x15mm	Ø 32x10x15mm	Ø 75x10x16 mm
Couleur	blanc	blanc	blanc
densité	480	550	720

Tableau 3.3 Types de Meule en feutre

### 3.5.2 Matériel utilisé pour calculer l'effort de coupe :

Le matériel utilisé est composé de :

- Moteur électrique Figure 3.13 de caractéristique : [10]

Nombre d'éléments recommandés	• 3S-4S LiPo (ou 10-12 NiMh)
Nombre de tours max par minutes	1132.24 (avec batterie de 14.8v)
Consommation maximum	8-19A
Dimensions	Ø35x37mm
Diamètre de l'axe	4mm
Poids(g)	106

Tableau 3.4 Caractéristiques du moteur électrique



Figure 3.13 : Moteur électrique

•La Batterie figure 3.14 de caractéristique :[10]

Capacité (mAh)	5000
Config (s)	4
Décharge (c)	30
Voltage(v)	14

Tableau 3.5 Caractéristiques de la batterie

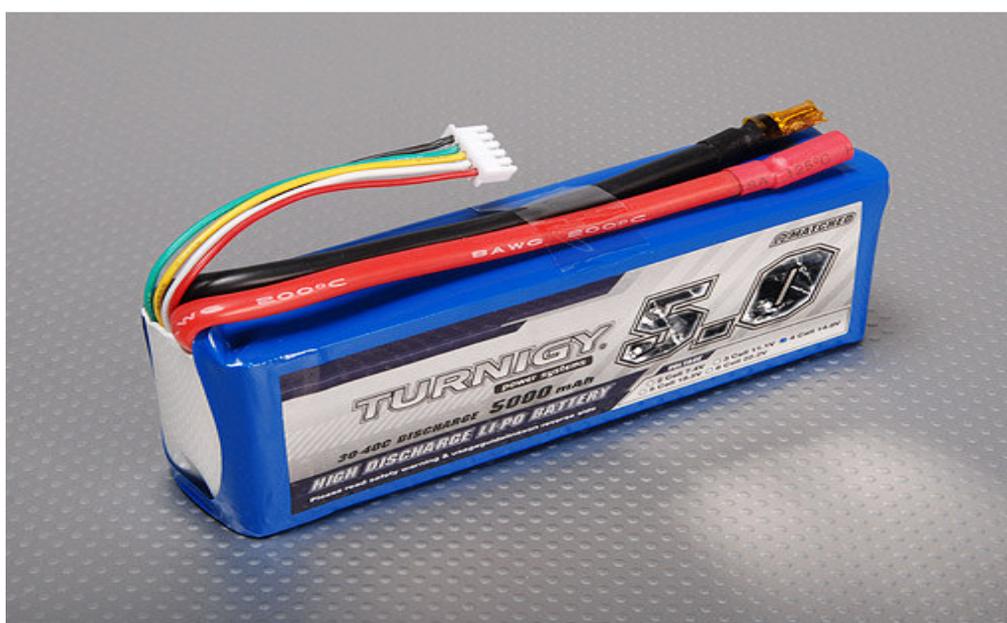


Figure 3.14 Batterie de capacité de 5000 mAh

•La Radio commande figure 3.15 de caractéristique:[10][11]

Filatures de base	3 Polyvalence Trims numériques Compatible :AFHSS 2.4GHz PPM/PCM
Caractéristiques standard de programmation	3 Types de model (ACRO/GLID/HELI Throttle Lock, Fail-safe Sub-Trim, Servo Reverse, Trainer Port
Programmation ACRO avancée	9 Wing Type, Type 5 Tails 8 Mixes programmables

Tableau 3.6 Caractéristiques du la radio commande



Figure 3.15 : Radio commande

- Le récepteur FrSKY figure 3.16 de caractéristique [10] [11]

Compatible with	FrSky two way telemetry modules
The Operating Voltage Range	3.5V-10.0V
The Operating the Curren	100mA
The Operating the Range	1.5km

Tableau 3.7 Caractéristiques de récepteur



Figure 3.16 Récepteur

-Moteur SyrpGenie figure 3.17 de caractéristique [12]

Vitesse min	Linear: 100 cm in 10 hours Panning: 360° in 7 hours
Vitesse max	Linear: 100 cm in 23 seconds Panning: 360° in 5.0 seconds
Durée de la batterie	12h
Temps de charge	3.0 Hrs.

Tableau 3.8 Caractéristiques de moteur de rotation et translation



Figure 3.17 Moteur de Rotation et translation

-Glissière figure 3.18



Figure 3.18 Glissière

Nous avons réalisé un mécanisme figure 3.18 qui permet le déplacement vertical de l'outil abrasif sur l'échantillon de verre et la mesure des efforts vertical à l'aide d'une balance.

Ce même mécanisme est moyennant une Glissière et un moteur peuvent être utilisés pour le calcul des efforts horizontaux

### 3.6 Expérience :

Nous avons procédé à l'opération d'ébavurage sur plusieurs plaques de verre et nous avons obtenu les résultats Tableau 3.8, figure 3.22, figure 3.23, figure 3.23

Outil	25%	50%	75%	100%
		283.06 tr/mn	566.12 tr/mn	849.18tr/mn
Meule en feutre (densité 480)	Pas bien	Pas bien	acceptable	Bien
Meule en feutre (densité 550)	acceptable	Bien	parfait	Bien
Meule en feutre (densité 720)	Pas bien	Acceptable	Très bien	Pas bien

Tableau 3.9 Résultats obtenus par l'opération d'ébavurage

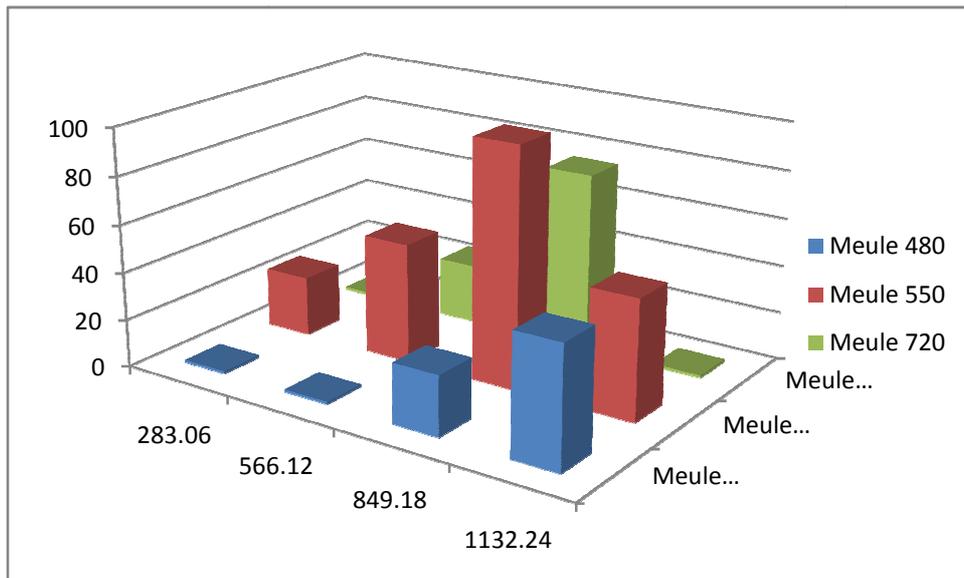


Figure 3.19 Qualité de coup en fonction de la Vitesse de coupe

### 3.6.1 Calcul de la force du coup vertical :



Figure 3.20 Calcul de la charge utilisée dans l'expérience

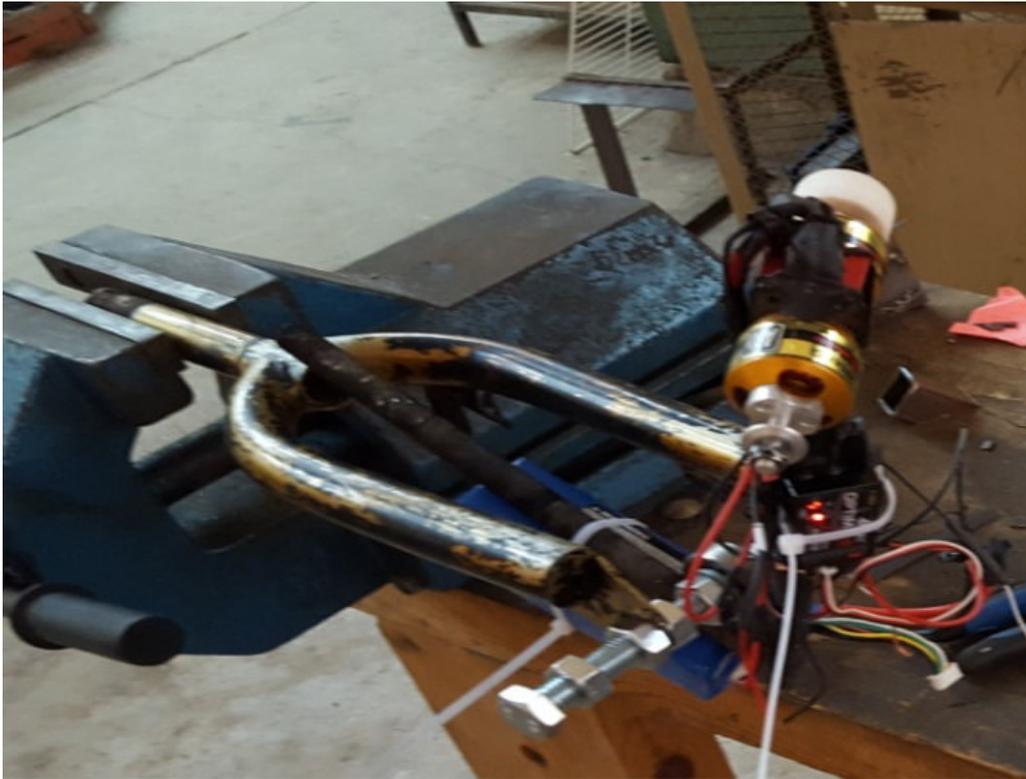


Figure 3.21 Mécanisme pour les déplacements vertical

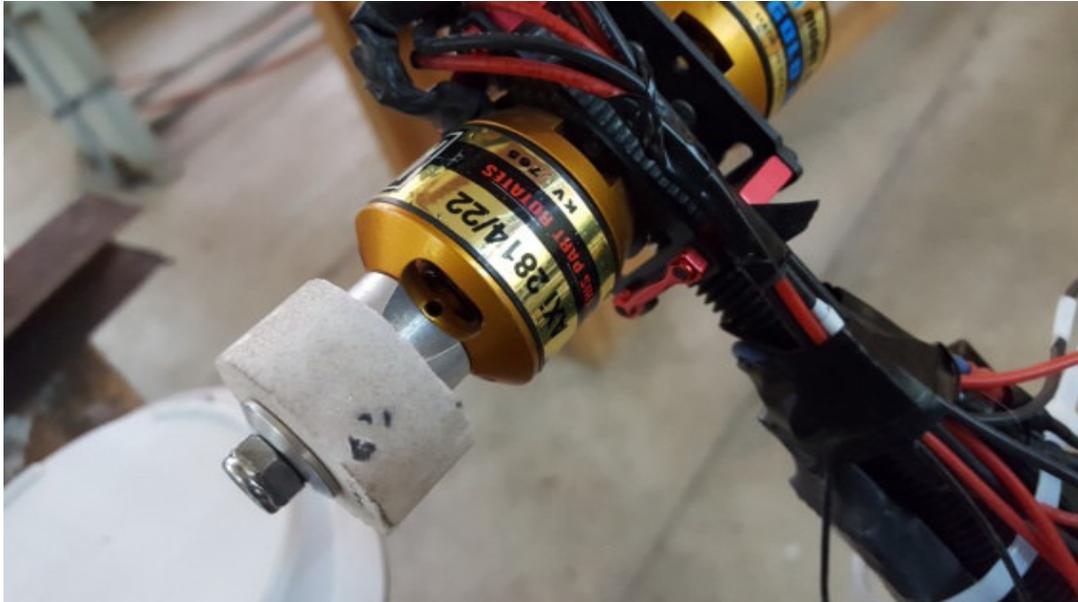


Figure 3.22 Moteur avec outil abrasif



Figure 3.23 expérience sur l'atelier

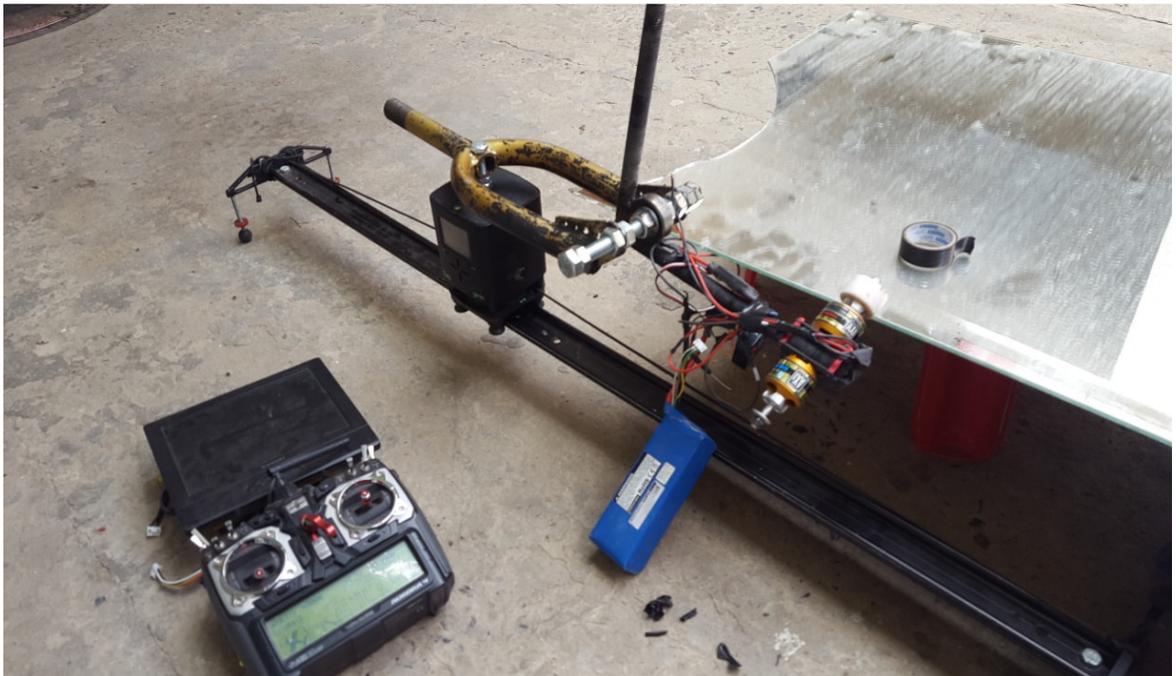


Figure3.24 Opération d'ébavurage

### 3.6.2 Expérience sur le verre :

.Expérience sur le verre en utilisant :

1/ Meule en feutre de densité 480

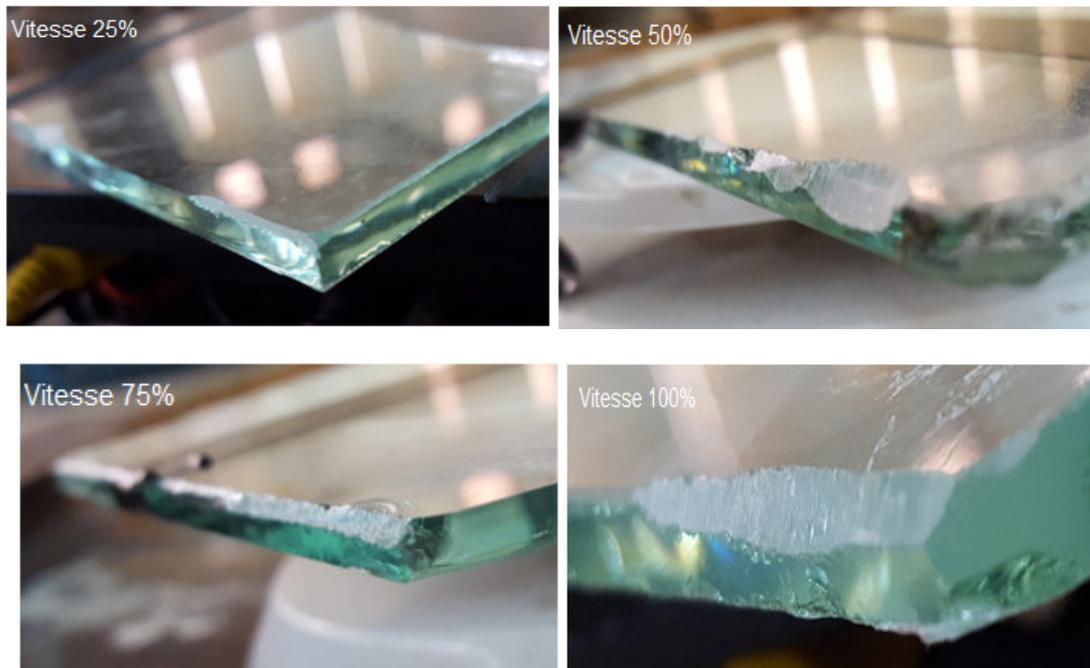


Figure 3.25 expérience sur le verre en utilisant une meule de densité 480

2/Meule en feutre de densité 550

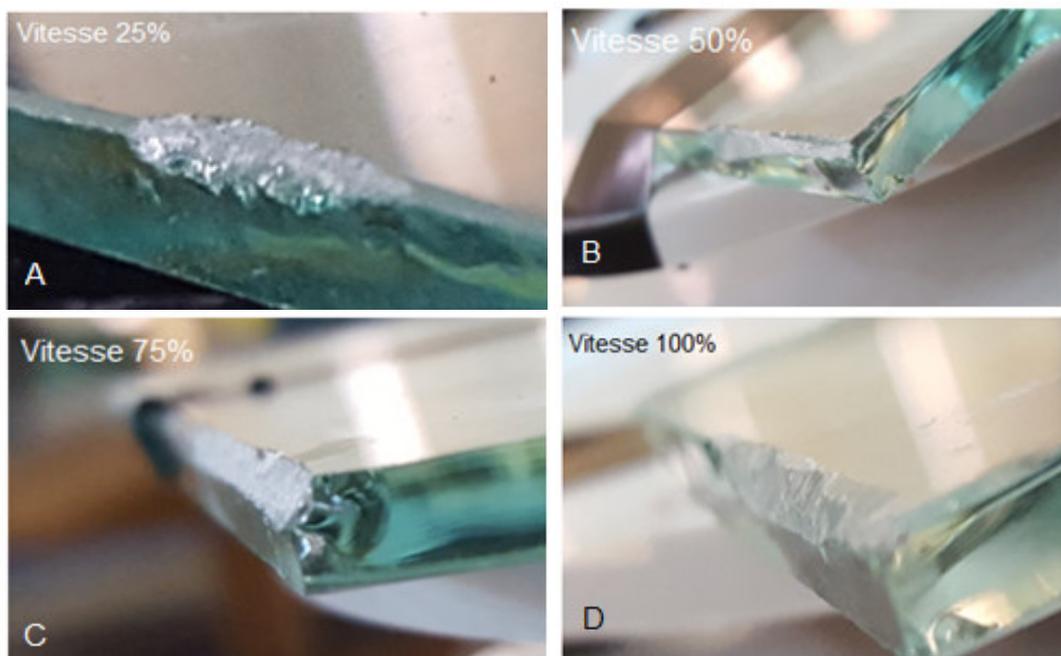


Figure 3.26 expérience sur le verre en utilisant une meule de densité 550

### 3/Meule en feutre de densité 720

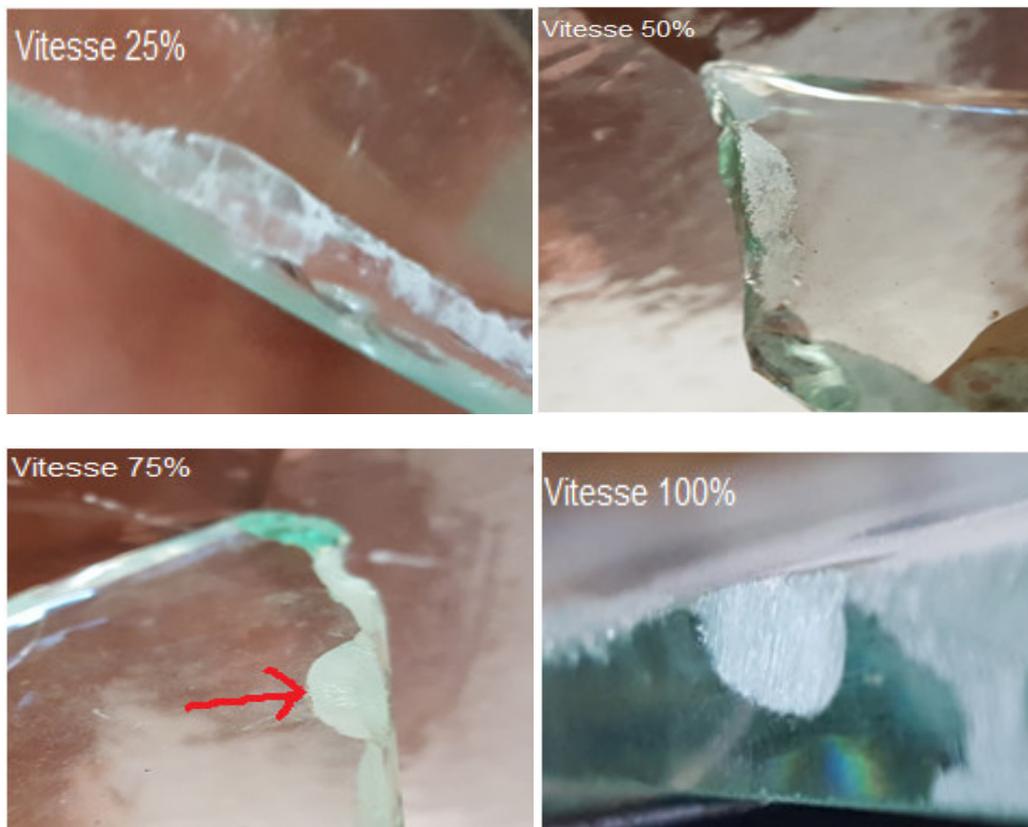


Figure 3.27 expérience sur le verre en utilisant une meule de densité 550

#### **Commentaire :**

Selon l'expérience réalisée, on constate que la vitesse de coup 849.18tr/mn donne de bons résultats voir figure 3.26-C, Ces conditions de coupe seront choisi pour l'évaluation des efforts de coupe.

#### **3.7 Résultats obtenues de l'expérience :**

- Force de coup horizontal : 33N (3.3kg)
- force de coup vertical : 24N (2.4kg)

Nous avons introduit les résultats obtenus, de l'expérience, dans nos programme pour calculer les efforts articulaires nécessaires afin de réaliser le coupe

### 3.8 Résultats obtenues à partir des programmes de calcul :

#### 3.8.1 Calcul des variables articulaires du bras articulé

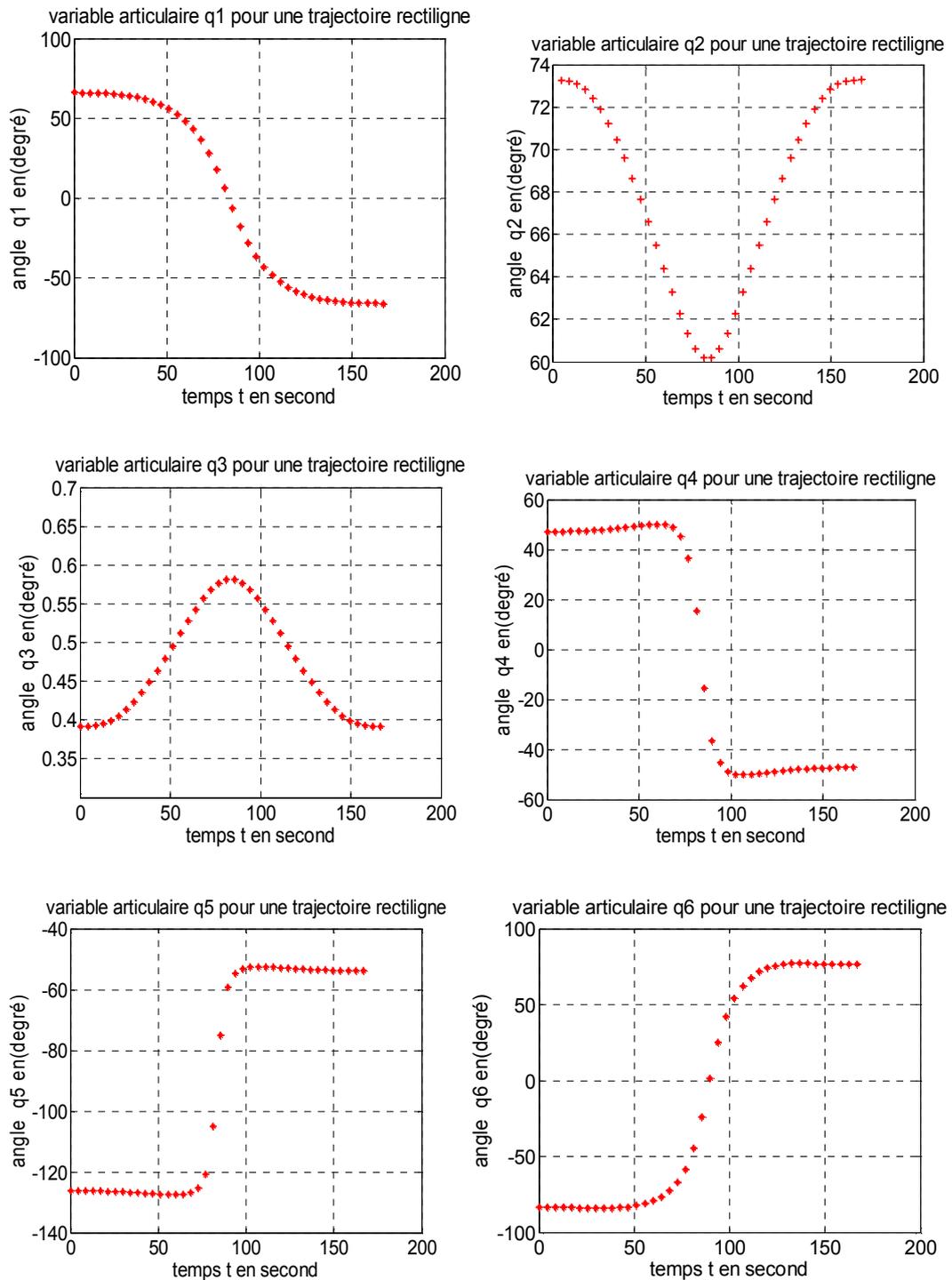


Figure3.28 : les six variables articulaires du bras articulé

### Commentaire :

En général les graphes de la figure 3.27 de variable articulaire  $q_1$  à  $q_6$  présentent un lissage acceptable sauf le passage du bras de droite vers la gauche présente un saut remarquable ce phénomène demande au actionneur de fournir une énergie supplémentaire pour réaliser la tâche.

### 3.8.2 Calcul des vitesses et accélérations articulaires :

Afin d'éviter le problème de discontinuité de mouvements nous avons choisi des profils de vitesse et accélération désirées aussi lisses que possible d'où une fonction d'ordre trois pour les vitesses désirées et d'ordre 2 pour les accélérations désirées

Figure 3.29a Figure 3.29b

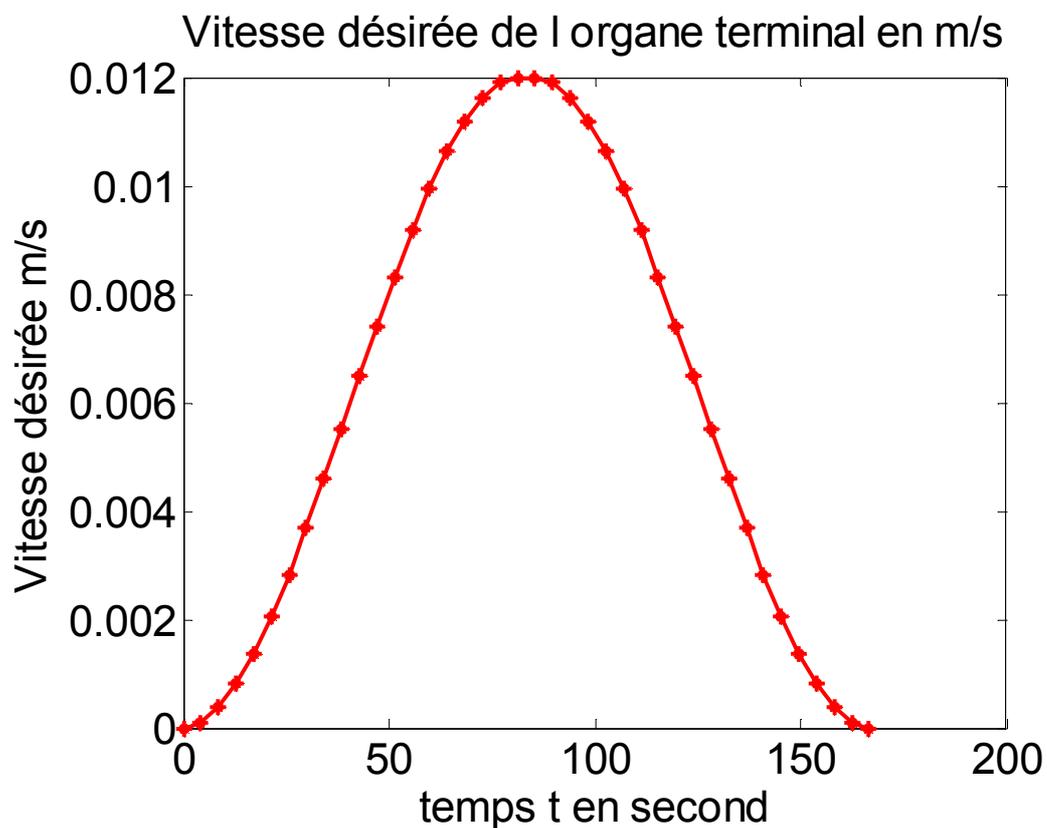


Figure 3.29a la vitesse désirée de l'organe terminal en fonction du temps

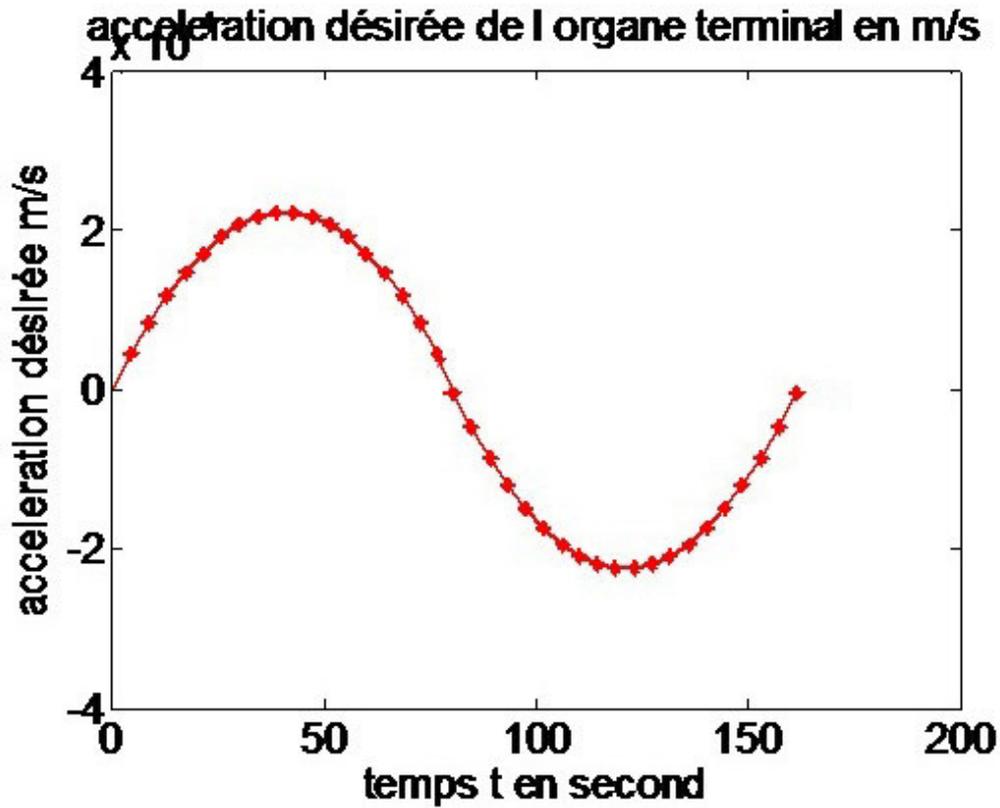
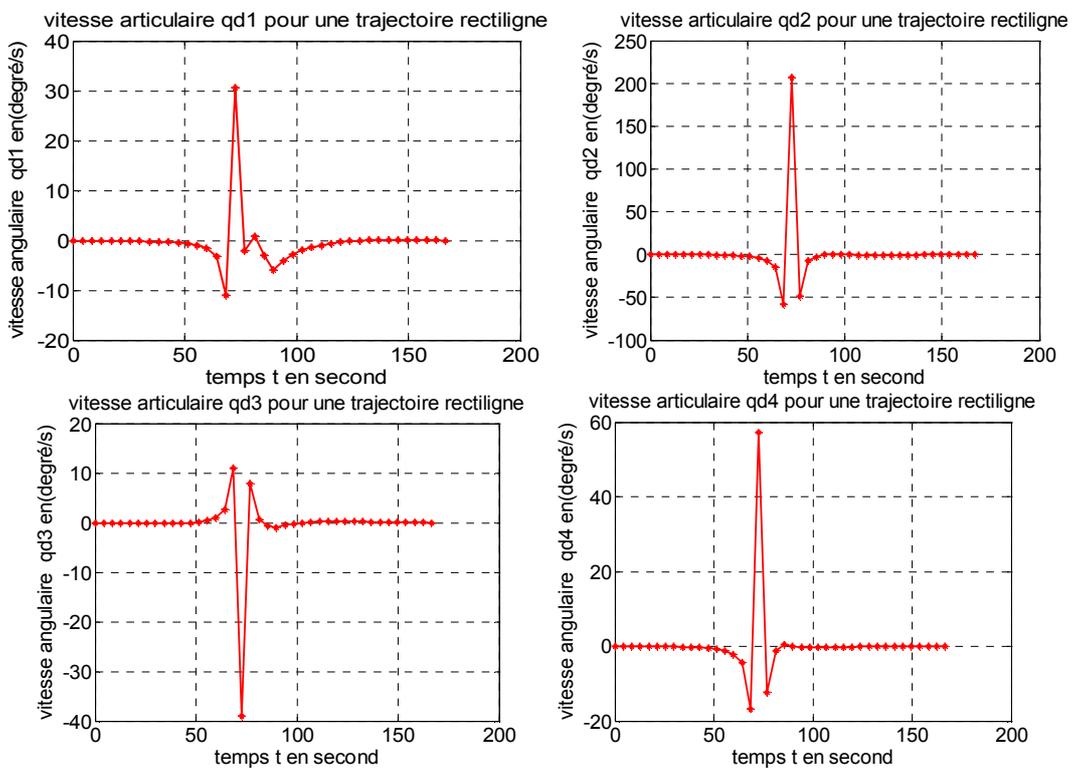


Figure 3.29b L'accélération désirée de l'organe terminal en fonction de temps

### 3.8.3 Vitesse articulaire obtenue :



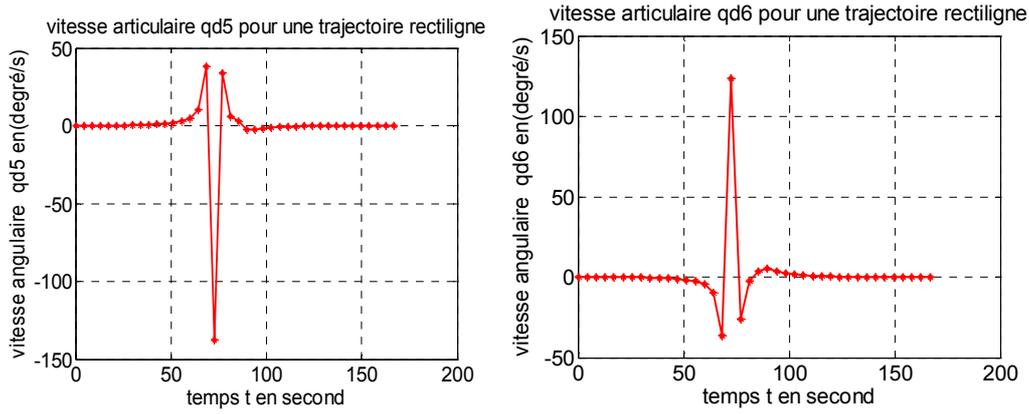
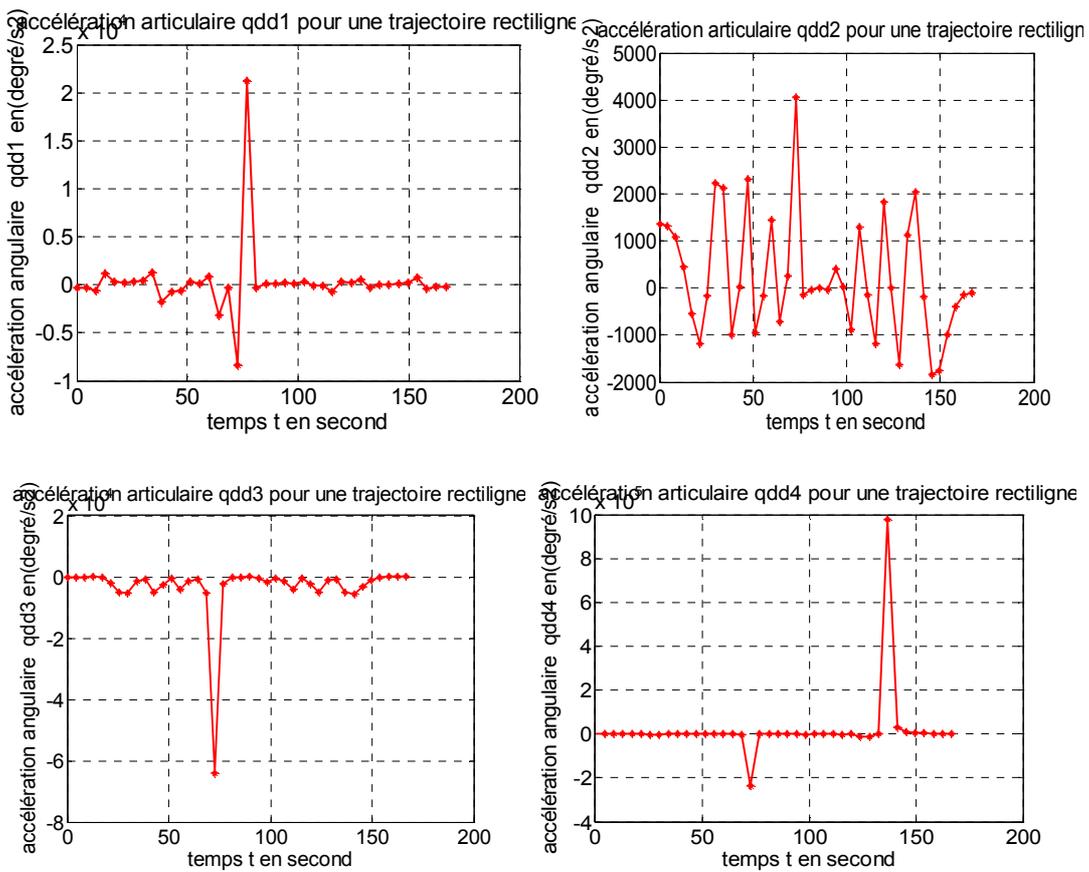


Figure 3.30 Les vitesses articulaires en fonction de temps

**Commentaire :**

Les vitesses articulaires présentent un saut remarquable qu'est due au passage par un point singulier

**3.8.4 Accélération articulaire obtenue**



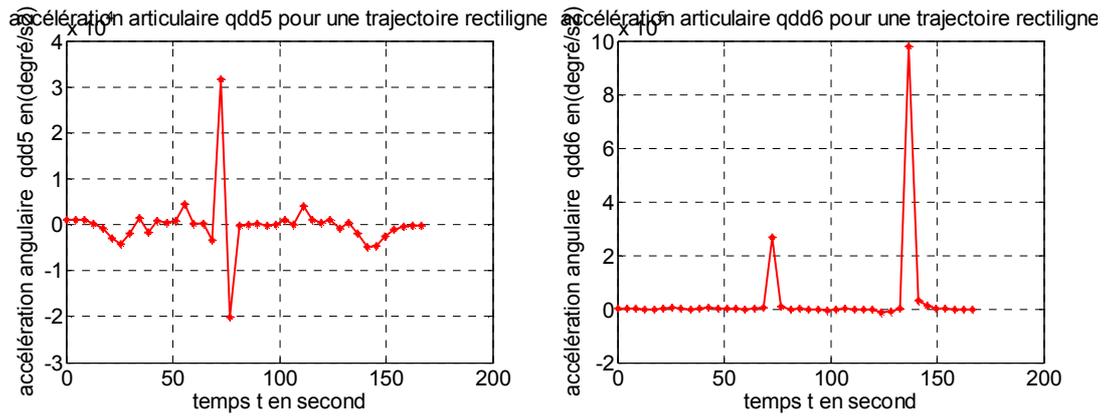
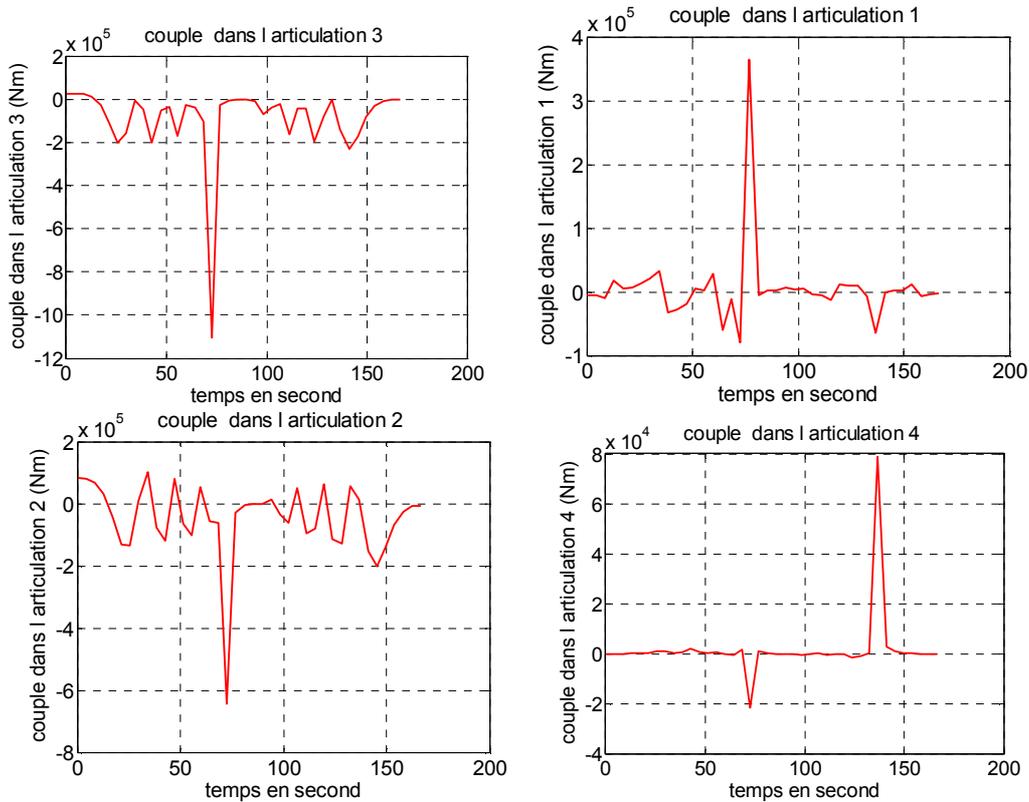


Figure 3.31 Les accélérations articulaires en fonction du temps

**Commentaire :**

Les accélérations articulaires présentent un saut remarquable qu'est due au passage par un point singulier

**3.8.5 Calcul des couples articulaires :**



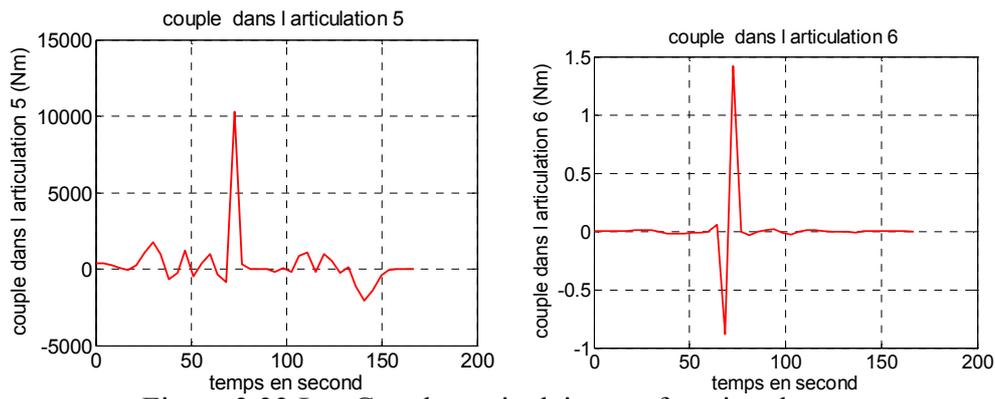


Figure 3.32 Les Couples articulaires en fonction de temps

### Commentaire

Les couples articulaires présentent plusieurs sauts, dont un, est important

Remarque : malheureusement nous n'avons pas assez d'informations sur les actionneurs pour décider si les actionneurs disponibles sur le marché peuvent reproduire les couples calculés

## **Conclusion**

Dans ce mémoire nous avons exposé les outils nécessaires pour le calcul des efforts et pour réaliser l'opération d'ébavurage de verre. à savoir le MGD basé sur le paramétrage de DH, le MGI basé sur la méthode de Paul, MCI première ordre basé sur l'inverse de la matrice jacobéen, le MCI deuxième ordre basé sur une méthode récursive

MDI utilise l'algorithme de double récurrence de Newton Euler basé sur la méthode de Luh: [5] cet algorithme exprime le torseur dynamique des efforts extérieurs appliqués au centre de l'articulation et à l'avantage de calculer le modèle dans un temps très réduit et il est très efficace s'il est utilisé sous forme numérique

Nous avons utilisé pour cette opération un bras manipulateur à six axes suspendu de sa base pour optimiser l'espace de travail et pour faciliter la tâche.

Le verre est un matériel très fragile ce qui rend cette l'opération d'ébavurage très délicate, Nous avons procédé l'expérimentation pour déterminer les efforts horizontaux et verticaux nécessaires pour ébavurer les plaques de verre, utilisons trois types de Meule et nous avons constaté que la meule de dimension  $\emptyset$  32x10x15mm et de densité 550 utilisé à un vitesse 849.18tr/mn donne de très bons résultats Figure 3.25 C

Généralement les résultats obtenues en terme de Couple, vitesse, accélération articulaires sont réalisable sauf pour le problème de singularité.

Ce travail reste perfectible et nous souhaitons qu'il sera suivi par d'autres travaux dans d'autres domaines d'interaction robot-environnement, Nous souhaitons aussi réécrire l'ensemble de ces programmes dans un langage évolutif comme C++,JAVA, etc..

## BIBLIOGRAPHIE

- [1] Glas Trosch Holding AG, Conseil Butzberg  
*Le verre et ses applications.*  
4<sup>ème</sup> édition, éditeur: Glas Troch Holding AG, Conseil Bützberg, année 2013
- [2] Olivier GAUME *Découpe du verre plat* Techniques de l'ingénieur, 2<sup>ème</sup> édition, année 2003
- [3] Site officiel de Cevital : <http://www.cevital.com>
- [4] Site officiel de Wikipedia : Le verre
- [5] Wisama Khalil et EtienneDombre. *Modélisation, identification et commande des robots.* 2<sup>ème</sup> édition, revue et augmentés, année 1999
- [6] Mémoire de **CHEMAMI SABAH.** *Etude des différentes lois de commande pour un robot manipulateur à 6ddl comportant une liaison prismatique.*
- [7] Mémoire d'EL Hadi OUSMANI. *Dynamique de systèmes multi-corps appliquée aux bras manipulateur,* année 2011
- [8] André PREUMONT : *Théorie Générale des Systèmes Articulés. Introduction à la Robotique.* 2<sup>ème</sup> édition, 2001, Université Libre De Bruxelles.
- [9] Jean-Pierre Cordebois et coll, «Fabrication par usinage», *Dunod, Paris, année 2003*
- [10] Site officiel de Hobbyking: [www.hobbyking.com](http://www.hobbyking.com)
- [11] Site spécialiste sur le matériel d'aéromodélisme [www.RCfrance.com](http://www.RCfrance.com)
- [12] site officiel de Syrp: [Syrp.com](http://Syrp.com)