



2^e édition

Walter
APPEL

de la licence à 77 ans

Mathématiques pour la physique *et les physiciens !*



Table des matières

<i>Motivation du cours</i>	xix
----------------------------	-----

<i>Index des notations</i>	xxii
----------------------------	------

1	Rappels élémentaires sur la notion de convergence	1
1.1	Suites dans un e.v.n.	1
1.1.a	Définitions	1
1.1.b	Suites de Cauchy	2
1.1.c	Convergence double	3
1.2	Fonctions à valeurs dans un e.v.n.	4
1.2.a	Convergence en un point d'une fonction	4
1.2.b	Convergence uniforme	5
1.2.c	Fonction de deux variables	8
1.3	Convergence d'une série	9
1.3.a	Définitions	9
1.3.b	Séries semi-convergentes, séries absolument convergentes	10
1.3.c	Séries de fonctions	12
1.3.d	Série doublement infinie	12
1.3.e	Convergence d'une série double	13
1.4	Séries entières, fonctions analytiques	14
1.4.a	Définitions	14
1.4.b	Analyticité sur un intervalle	15
1.4.c	Formules de Taylor et convergence	16
1.5	Séries asymptotiques et séries divergentes	17
1.5.a	Séries asymptotiques	17
1.5.b	Intérêt des séries divergentes	19
1.6	Permuter des limites en physique	22
1.6.a	Deux paradoxes sur le théorème de l'énergie cinétique	23
1.6.b	Roméo, Juliette et les fluides visqueux	26
1.6.c	Barrière de potentiel en mécanique quantique	28
	<i>Exercices</i>	32
	<i>Solutions</i>	34
2	Théorie de la mesure et intégrale de Lebesgue	37
2.1	But du chapitre	37
2.2	Tribus; boréliens	39
2.3	Mesure de Lebesgue	40
2.3.a	Mesure sur $\mathbb{R}$	41
2.3.b	Mesure sur $\mathbb{R}^n$	44
2.4	Construction de l'intégrale de Lebesgue	44
2.5	Propriétés supplémentaires	47
2.5.a	Théorème d'Égorov	47
2.5.b	Ensembles de mesure nulle	48
2.5.c	Comparaison entre intégrales de Lebesgue et de Riemann	49
2.5.d	Et aujourd'hui?	49

<i>Exercices</i>	50
<i>Solutions</i>	52
3 Calcul intégral	53
3.1 Résumé sur la mesure et l'intégrale de Lebesgue	53
3.2 La convergence en pratique	54
3.3 Intégrale dépendant d'un paramètre	55
3.4 Intéversion de l'ordre d'intégration	57
3.5 Changement de variables	57
<i>Exercices</i>	60
<i>Solutions</i>	60
4 Analyse complexe I	61
4.1 Fonctions holomorphes	61
4.1.a Définitions	62
4.1.b Exemples	64
4.1.c Les opérateurs $\partial/\partial z$ et $\partial/\partial \bar{z}$	65
4.1.d Premier résultat sur les fonctions analytiques	66
4.2 Le théorème de Cauchy	67
4.2.a Intégration sur des chemins	67
4.2.b Intégrales sur un cercle	70
4.2.c Indice d'un chemin	70
4.2.d Divers théorèmes de Cauchy	71
4.2.e Application	73
4.3 Propriétés des fonctions holomorphes	73
4.3.a Formule de Cauchy et applications	73
4.3.b Théorème du maximum	77
4.3.c Autres théorèmes	78
4.3.d Classification des zéros d'une fonction holomorphe	79
4.4 Singularités d'une fonction	81
4.4.a Classification des singularités	81
4.4.b Fonctions méromorphes	83
4.5 Séries de Laurent	84
4.5.a Introduction et définition	84
4.5.b Exemples de séries de Laurent	86
4.5.c Théorème des résidus	86
4.5.d Calculs pratiques des résidus	88
4.6 Application aux calculs d'intégrales...	89
4.6.a Lemmes de Jordan	89
4.6.b Intégrales sur $\mathbb{R}$ d'une fraction rationnelle	90
4.6.c Intégrales de type Fourier	92
4.6.d Intégrales sur le cercle unité d'une fraction rationnelle	93
4.6.e Calcul de sommes infinies	94
<i>Exercices</i>	97
<i>Solutions</i>	101
5 Analyse complexe II	107
5.1 Logarithme complexe; fonctions multivaluées	107
5.1.a Les logarithmes complexes	107
5.1.b La fonction racine carrée	109
5.1.c Fonctions multivaluées; surfaces de Riemann	109
5.2 Fonctions harmoniques	111
5.2.a Définitions	111

5.2.b	Propriétés	112
5.2.c	Une astuce pour trouver f en connaissant u	114
5.3	Prolongements analytiques	115
5.4	Singularités à l'infini	116
5.5	Méthode du col	119
5.5.a	Méthode générale du col	119
5.5.b	La méthode du col réel	122
<i>Exercices</i>		123
<i>Solutions</i>		124
6	Transformations conformes	125
6.1	Transformations conformes	125
6.1.a	Généralités	125
6.1.b	Théorème de Riemann	127
6.1.c	Exemples de transformations conformes	128
6.1.d	La transformation de Schwarz-Christoffel	130
6.2	Application à la théorie du potentiel	133
6.2.a	Application à l'électrostatique	134
6.2.b	Application à l'hydrodynamique	136
6.2.c	Théorie du potentiel, paratonnerres, percolation	138
6.3	Problème de Dirichlet et noyau de Poisson	139
<i>Exercices</i>		143
<i>Solutions</i>		145
7	Distributions I	147
7.1	Approche physique	147
7.1.a	Problème des distributions de charges	147
7.1.b	Problème de l'impulsion et des forces lors d'un choc élastique	149
7.2	Définitions et exemples de distributions	150
7.2.a	Distributions régulières	152
7.2.b	Distributions singulières	153
7.2.c	Support d'une distribution	154
7.2.d	Autres exemples	155
7.3	Propriétés élémentaires, Opérations	155
7.3.a	Opérations sur les distributions	155
7.3.b	Dérivée d'une distribution	158
7.4	Dirac et ses dérivés	160
7.4.a	Distribution de Heaviside	160
7.4.b	Distributions de Dirac à plusieurs dimensions	161
7.4.c	La distribution δ'	162
7.4.d	Composition de δ avec une fonction	164
7.4.e	Densités de charge et de courant	165
7.5	Dérivation d'une fonction discontinue	167
7.5.a	Dérivation d'une fonction discontinue en un point	167
7.5.b	Dérivation d'une fonction discontinue sur une surface $\mathcal{S}$	169
7.5.c	Laplacien d'une fonction discontinue sur une surface $\mathcal{S}$	172
7.5.d	Application : laplacien de $1/r$ en trois dimensions	172
7.6	La convolution	174
7.6.a	Produit tensoriel de deux fonctions	174
7.6.b	Produit tensoriel de deux distributions	175
7.6.c	Convolution de deux fonctions	176
7.6.d	Notion de mesure floue	178
7.6.e	Convolution de deux distributions	178

7.6.f	Applications	180
7.6.g	Équation de Poisson	181
7.7	Interprétation physique des opérateurs de convolution	182
7.8	Convolution discrète	183
8	Distributions II	187
8.1	Valeur principale de Cauchy	187
8.1.a	Définition	187
8.1.b	Application au calcul de certaines intégrales	188
8.1.c	Notations de Feynman	189
8.1.d	Relations de Kramers-Kronig	191
8.2	Notions de topologie dans $\mathcal{D}'$	192
8.2.a	Convergence faible dans $\mathcal{D}'$	193
8.2.b	Suites de fonctions convergeant vers δ	193
8.2.c	Convergence dans $\mathcal{D}'$ et convergence au sens des fonctions	196
8.2.d	Régularisation d'une distribution	196
8.2.e	Continuité de la convolution	197
8.3	Algèbres de convolution	198
8.4	Résolution d'une équation différentielle avec conditions initiales	200
8.4.a	Cas d'une équation du premier ordre	200
8.4.b	Cas de l'oscillateur harmonique	201
8.4.c	Autres équations provenant de la physique	202
	<i>Exercices</i>	203
	<i>Solutions</i>	206
9	Espaces de Hilbert; séries de Fourier	211
9.1	Insuffisance des espaces vectoriels	211
9.2	Espaces de Hilbert	213
9.2.a	Espaces préhilbertiens	213
9.2.b	Espaces de Hilbert	215
9.2.c	Systèmes orthonormés, bases hilbertiennes	216
9.2.d	L'espace ℓ^2	220
9.2.e	L'espace $L^2[0, a]$	220
9.2.f	L'espace $L^2(\mathbb{R})$	221
9.3	Développement en série de Fourier	222
9.3.a	Coefficients de Fourier d'une fonction	222
9.3.b	Convergence quadratique	223
9.3.c	Série de Fourier d'une fonction $f \in L^1[0, a]$	225
9.3.d	Convergence ponctuelle de la série de Fourier	225
9.3.e	Convergence uniforme de la série de Fourier	227
9.3.f	Phénomène de Gibbs	228
	<i>Exercices</i>	228
	<i>Solutions</i>	230
10	Transformée de Fourier des fonctions	235
10.1	Transformée de Fourier d'une fonction de L^1	235
10.1.a	Définition	236
10.1.b	Exemples	237
10.1.c	Espace L^1	237
10.1.d	Propriétés élémentaires	238
10.1.e	Inversion	240
10.1.f	Extension de la formule d'inversion	242
10.2	Propriétés de la transformation de Fourier	243

10.2.a	Transposition et translation	243
10.2.b	Changement d'échelle	243
10.2.c	Dérivation	244
10.2.d	Fonctions à décroissance rapide	245
10.3	Transformée de Fourier d'une fonction de L^2	246
10.3.a	Espace $\mathcal{S}$	246
10.3.b	Transformée de Fourier dans L^2	247
10.4	Transformées de Fourier et convolution	249
10.4.a	Formule de convolution	249
10.4.b	Limitations de la formule de convolution	250
10.5	Conventions différentes	250
<i>Exercices</i>		250
<i>Solutions</i>		252
11	Transformée de Fourier des distributions	255
11.1	Définition et propriétés	255
11.1.a	Distributions tempérées	256
11.1.b	Transformées de Fourier des distributions tempérées	257
11.1.c	Exemples	258
11.1.d	Transformation de Fourier à plusieurs dimensions	260
11.2	Peigne de Dirac	261
11.2.a	Définition et propriétés	261
11.2.b	Transformée de Fourier d'une fonction périodique	263
11.2.c	Formule sommatoire de Poisson	264
11.2.d	Application aux calculs de séries	264
11.3	Phénomène de Gibbs	266
11.4	Application à l'optique physique	268
11.4.a	Lien entre diaphragme et figure de diffraction	268
11.4.b	Diaphragme composé d'une infinité de fentes infiniment fines	270
11.4.c	Nombre fini de fentes infiniment fines	270
11.4.d	Nombre fini de fentes de dimension finie	273
11.4.e	Pupille circulaire	274
11.5	Limitations de l'analyse de Fourier et ondelettes	275
<i>Exercices</i>		278
<i>Solutions</i>		280
12	Transformation de Laplace	285
12.1	Définition et sommabilité	285
12.1.a	Définition	286
12.1.b	Sommabilité	287
12.1.c	Propriétés de la transformée	290
12.2	Inversion	290
12.3	Propriétés élémentaires et exemples de transformées de Laplace	292
12.3.a	Propriétés	292
12.3.b	Dérivation et intégration	293
12.3.c	Exemples	294
12.4	Transformation de Laplace des distributions	295
12.4.a	Définition	295
12.4.b	Propriétés	295
12.4.c	Exemples	297
12.4.d	Transformée en z	297
12.4.e	Lien entre transformées de Laplace et de Fourier	298

12.5	Applications physiques, problème de Cauchy	299
12.5.a	Importance du problème de Cauchy	299
12.5.b	Un exemple simple	299
12.5.c	Évolution libre du champ électromagnétique	300
<i>Exercices</i>		303
<i>Solutions</i>		304
13	Applications physiques de la transformée de Fourier	305
13.1	Justification de l'analyse en régime sinusoïdal	305
13.2	Champs longitudinaux et transverses	307
13.3	Relations d'incertitude de Heisenberg	308
13.4	Signaux analytiques	314
13.5	Autocorrélation d'une fonction d'énergie finie	316
13.5.a	Définition	316
13.5.b	Propriétés	317
13.5.c	Intercorrélation	318
13.6	Fonctions de puissance finie	318
13.6.a	Définitions	318
13.6.b	Autocorrélation	319
13.7	Application à l'optique : théorème de Wiener-Khintchine	319
<i>Exercices</i>		323
<i>Solutions</i>		324
14	Fonctions de Green	325
14.1	Généralités sur les fonctions de Green	325
14.2	Électromagnétisme et opérateur de d'Alembert	327
14.2.a	Calcul des fonctions de Green avancée et retardée	327
14.2.b	Potentiels retardés	330
14.2.c	Écriture covariante des fonctions de Green avancée et retardée	333
14.2.d	Rayonnement	334
14.3	Équation de la chaleur	335
14.3.a	Cas unidimensionnel	335
14.3.b	Cas tridimensionnel	338
14.4	Mécanique quantique	339
14.5	Équation de Klein-Gordon	341
<i>Exercice</i>		344
15	Tenseurs	345
15.1	Tenseurs dans un espace affine	345
15.1.a	Vecteurs	346
15.1.b	Convention d'Einstein	347
15.1.c	Formes linéaires	348
15.1.d	Applications linéaires	350
15.1.e	Transformations de Lorentz	350
15.2	Produit tensoriel d'espaces. Tenseurs	351
15.2.a	Existence du produit tensoriel de deux espaces	351
15.2.b	Produit tensoriel de deux formes linéaires : tenseurs d'ordre $\binom{0}{2}$	352
15.2.c	Produit tensoriel de deux vecteurs : tenseurs d'ordre $\binom{2}{0}$	354
15.2.d	Applications linéaires ou tenseurs $\binom{1}{1}$	355
15.2.e	Tenseurs d'ordre $\binom{p}{q}$	357

15.3	Métrie	358
15.3.a	Métrie et pseudo-métrie	358
15.3.b	Dualité naturelle par la métrie	359
15.3.c	Gymnastique : élever et abaisser des indices	361
15.4	Opérations sur les tenseurs	363
15.5	Changements de coordonnées	365
15.5.a	Coordonnées curvilignes	365
15.5.b	Vecteurs de base	366
15.5.c	Transformation des vecteurs physiques	368
15.5.d	Transformation des formes linéaires	369
15.5.e	Transformation d'un champ de tenseurs quelconque	369
15.5.f	Brève conclusion	370
16	Formes différentielles	373
16.1	Algèbre extérieure	373
16.1.a	1-formes	373
16.1.b	2-formes extérieures	374
16.1.c	k -formes extérieures	375
16.1.d	Produit extérieur	377
16.2	Formes différentielles sur un espace vectoriel	378
16.2.a	Définition	378
16.2.b	Dérivée extérieure	379
16.3	Intégration des formes différentielles	380
16.4	Théorème de Poincaré	382
16.5	Lien avec le calcul vectoriel : gradient, divergence, rotationnel	384
16.5.a	Formes différentielles en dimension 3	384
16.5.b	Existence du potentiel scalaire électrostatique	386
16.5.c	Existence du potentiel vecteur	387
16.5.d	Monopôles magnétiques	388
16.6	L'électromagnétisme dans le langage des formes différentielles	388
16.6.a	Tenseur de Faraday	388
16.6.b	Remarque sur l'électromagnétisme en 2D	391
17	Groupes et représentations de groupes	397
17.1	Groupes	397
17.2	Représentations linéaires des groupes	398
17.3	Le groupe $SO(3)$ et les vecteurs	399
17.4	Le groupe $SU(2)$ et les spineurs	403
17.5	Sphère de Riemann et spin	408
	Exercice	409
18	Introduction aux probabilités	411
18.1	Introduction	412
18.2	Définitions élémentaires	413
18.3	Formule de Poincaré	417
18.4	Probabilités conditionnelles	418
18.5	Événements indépendants	420
19	Variables aléatoires	421
19.1	Variables aléatoires et lois	421
19.2	Fonction de répartition et densité de probabilité	424
19.2.a	Variable aléatoire discrète	425
19.2.b	Variable aléatoire (absolument) continue	426

19.3	Espérance et variance	426
19.3.a	Cas des v.a. discrètes	426
19.3.b	Cas des v.a. continues	427
19.4	Un exemple : la loi de Poisson	429
19.4.a	Particules d'un gaz confiné	429
19.4.b	Désintégration radioactive	430
19.5	Moments d'une variable aléatoire	430
19.6	Vecteurs aléatoires	432
19.6.a	Couple de variables aléatoires	432
19.6.b	Variables aléatoires indépendantes	436
19.6.c	Vecteurs aléatoires	437
19.7	Mesures images	438
19.7.a	Cas d'une seule variable aléatoire	438
19.7.b	Cas d'un vecteur aléatoire	439
19.8	Espérance et fonction caractéristique	439
19.8.a	Espérance d'une fonction	439
19.8.b	Moments, variance	440
19.8.c	Fonction caractéristique	440
19.8.d	Fonction génératrice	441
19.9	Somme et produit de variables aléatoires	442
19.9.a	Somme de v.a.	442
19.9.b	Produit de v.a.	444
19.9.c	Exemple : loi de Poisson	445
19.10	Inégalité de Bienaymé-Tchebychev	445
19.10.a	Énoncé	445
19.10.b	Application : l'aiguille de Buffon	447
19.11	Indépendance, corrélation, causalité...	448
20	Théorème central limite	449
20.1	Divers types de convergence	449
20.2	Loi des grands nombres	451
20.3	Théorème central limite	452
20.4	Application	454
	Exercices	455
	Solutions	460

Annexes

A	Rappels sur la topologie et les e.v.n.	467
1.1	Topologie, espace topologique	467
1.2	Espaces vectoriels normés	470
A.2.a	Normes, semi-normes	470
A.2.b	Boules et topologie	471
A.2.c	Comparaison de suites	473
A.2.d	Théorèmes de Bolzano-Weierstrass	473
A.2.e	Comparaison des normes	473
A.2.f	Norme linéaire	475
	<i>Exercice</i>	475
	<i>Solution</i>	476
B	Rappels élémentaires sur le calcul différentiel	477
2.1	Différentielle d'une application à valeurs réelles	477
B.1.a	Fonction réelle de la variable réelle	477
B.1.b	Différentielle d'une fonction $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$	478
B.1.c	Notations tensorielles	479
2.2	Différentielle d'une application à valeurs dans $\mathbb{R}^p$	479
2.3	Méthode des multiplicateurs de Lagrange	480
C	Quelques démonstrations	483
Tables		
	Table des transformées de Fourier, de Laplace	493
	Table des lois usuelles	498
	Bibliographie	499
	Références bibliographiques	503
	Table des portraits	509
	Table des encadrés	511
	Index	512