

SCIENCES SUP

Cours et exercices corrigés

Licence 3 • Master • École d'ingénieurs

MATHÉMATIQUES

**appliquées aux Sciences de la Vie
et de la Planète**



**Michael Ghil
Jean Roux**

DUNOD

Table des matières

PRÉFACE	vii
CHAPITRE 1 • RÉOLUTION DES ÉQUATIONS NON LINÉAIRES	1
1.1 Mathématiques numériques	1
1.2 Méthodes numériques de résolution d'équations scalaires	2
1.3 Méthodes multidimensionnelles	15
EXERCICES	23
CHAPITRE 2 • ALGÈBRE LINÉAIRE	25
2.1 Notions et propriétés de base	25
2.2 Localisation des valeurs propres d'une matrice, matrice irréductible. Matrice à diagonale dominante	60
2.3 Valeurs singulières d'une matrice	67
2.4 Une illustration de l'analyse numérique matricielle : fonctionnement de Google	69
EXERCICES	76
CHAPITRE 3 • RÉOLUTION DES SYSTÈMES LINÉAIRES $Ax = b$	85
3.1 Méthodes numériques directes	86
3.2 Méthodes itératives	111
EXERCICES	133

CHAPITRE 4 • CALCUL DES VALEURS ET VECTEURS PROPRES	143
4.1 Méthode de la puissance.....	144
4.2 Méthode de la puissance inverse	154
4.3 Méthode de bisection.....	156
EXERCICES	166
CHAPITRE 5 • INTERPOLATION ET APPROXIMATION	173
5.1 Polynôme d'interpolation de Lagrange.....	174
5.2 Interpolation de Hermite.....	179
CHAPITRE 6 • MÉTHODES NUMÉRIQUES D'INTÉGRATION	185
6.1 Introduction.....	185
6.2 Sommes de Riemann	186
6.3 Méthodes élémentaires de quadrature numérique.....	188
6.4 Intégration numérique de Lagrange et de Newton-Cotes	190
6.5 Méthodes de quadrature de Hermite et de Gauss	203
CHAPITRE 7 • ÉQUATIONS DIFFÉRENTIELLES, INTRODUCTION	215
7.1 Exemples d'équations différentielles ordinaires	216
7.2 Comportements des solutions.....	218
7.3 Notion de différentielle — Champ de vecteurs et courbe intégrale	223
7.4 Formulation générale d'un système d'équations différentielles .	224
7.5 Retour sur la notion de lipschitzité.....	226
7.6 Le principe du point fixe	229
7.7 Existence et unicité locales des trajectoires	231
7.8 Trajectoire maximale	238
7.9 Flot d'un champ de vecteurs, complétude et critères suffisants .	240
7.10 Calcul des dérivées successives d'une solution.....	246

CHAPITRE 8 • RÉSOLUTION EXPLICITE DES EDO	247
8.1 Équations différentielles scalaires non linéaires	248
8.2 Équations linéaires et scalaires du premier ordre	254
EXERCICES	260
CHAPITRE 9 • SYSTÈMES D'ÉQUATIONS DIFFÉRENTIELLES LINÉAIRES AUTONOMES $\dot{x} = Ax$	261
9.1 Préliminaires, rappels et idées de base	261
9.2 Cas des systèmes d'équations d'ordre n	266
EXERCICES	282
CHAPITRE 10 • RÉSOLUTION NUMÉRIQUE DES EDO	285
10.1 Méthodes à un pas, idées de base	286
10.2 Méthodes à un pas, formulation générale	291
10.3 Conditions de consistance et de stabilité	294
10.4 Les méthodes de Runge-Kutta	298
10.5 Formulation générale des méthodes de Runge-Kutta	303
10.6 Ordre des méthodes de Runge-Kutta	304
10.7 Stabilité des méthodes de Runge-Kutta	308
CHAPITRE 11 • SYSTÈMES NON LINÉAIRES AUTONOMES	311
11.1 Équations d'évolution non linéaires	311
11.2 Points critiques de type nœud	315
11.3 Méthode générale d'étude des systèmes dynamiques	319
11.4 Points critiques de type foyer	321
11.5 Bifurcations de solutions stationnaires	324
11.6 Solutions périodiques et leur stabilité	332
11.7 Bifurcations de Hopf	336
11.8 Un problème d'écologie : système de Lotka-Volterra	343

EXERCICES	353
CHAPITRE 12 • LE MODÈLE DE LORENZ	363
12.1 Le modèle classique de Lorenz	364
12.2 Étude qualitative du modèle de Lorenz	365
EXERCICES	381
BIBLIOGRAPHIE	383
INDEX	388

SCIENCES SUP

Michael Ghil
Jean Roux

MATHÉMATIQUES

appliquées aux Sciences de la Vie et de la Planète

Ce manuel est destiné aux étudiants en Licence 3 ou Master de Sciences de la Vie ou de la Terre, pour lesquels il expose les outils théoriques et les méthodes numériques indispensables.

Après une présentation des principes théoriques de base, il s'attache à développer des applications qui demandent un apport important de méthodes numériques. Parmi ces applications, un rôle clef est réservé aux processus évolutifs, modélisés notamment par des systèmes dynamiques. Cette modélisation touche à l'écologie ainsi qu'à la prévision météorologique et climatologique.

Des exercices corrigés en fin de chapitre permettent de vérifier que le cours a bien été assimilé. Des bonus sont disponibles en ligne sur le site Internet des éditions Dunod (www.dunod.com).



MICHAEL GHIL
et JEAN ROUX
Professeurs à l'École
normale supérieure (Ulm)

MATHÉMATIQUES
PHYSIQUE
CHIMIE
SCIENCES DE L'INGÉNIEUR
INFORMATIQUE
SCIENCES DE LA VIE
SCIENCES DE LA TERRE



9 782100 512102
6674923
ISBN 978-2-10-051210-2

LICENCE MASTER DOCTORAT
1 2 3 4 5 6 7 8


DUNOD
www.dunod.com