République Algérienne Démocratique et Populaire
Ministère de l'enseignement supérieur et de la recherche scientifique

Université Saad Dahleb Blida
Département d'Aéronautique

Mémoire de Fin d'Etude pour l'Obtention Du Diplôme d'Ingénieur en Aéronautique

Option : Installations

# Thème

# Poursuite de cible par le filtrage de Kalman non linéaire (EKF)

Présenté par :
Mlle. Driss Yamina

Promoteur:
Mlle.Amrouche Naima

PROMOTION 2009/2010

## Résumé

Dans ce mémoire,nous décrivons un système de poursuite basé sur le filtrage de Kalman et l'algorithme du filtre de Kalman Etendu (EKF).

Nous començons par introduire les différentes techniques de poursuite ainsi que le filtrage de Kalman,puis nous décrivons les filtres de kalman non linéaire capable à linéariser le modèle et estimer les paramètres de modèles et la trajectoir.

Finalement nous présetons les résultats expérimentaux qui indiquuent une certaine efficacité de l'algorithme.

## الملخص

من خلال هده المذكرة نقوم بوصف نظام المتابعة القائم على ترشيح كالمان و خوارزمية الترشيح الممدد (الموسع).

نبدأ بعرض مختلف تقنيات المتابعة و كدالك تشريح كالمان ومن ثم نقوم بوصف مرشحات كالمان غير لخطية القادرة على تحويلها إلى نماذج خطية و تقدير معالمها و مساراتها.

أخيرا نعرض النتائج التجريبية التي توضح فعالية الخوارزمية.

## Summary

In this memory, we describe a tracking system based on the Kalman filter and Extended Kalman filter algorithm (EKF).

We started by introducing the diffrents tracking technics and the Kalman filter,then we describe the no linear Kalman filter wich are able to linearizedthe models and his runs.

Finally,we present exprimental results indicating the efficiency of our algrithm.

# Remerciements

*Après aimer et aider, remercier est assurément le troisième le plus beau verbe dans toutes les langues.*

*Ce travail est l'aboutissement d'un projet personnel, depuis longtemps attendu, né d'une volonté de voir mon rêve vif en réalité.*

*Tout d'abord, je remercie ELLEH de m'avoir attribué assez le courage, la volonté et la patience pour arriver à terme de ce travail.*

*MES PARENTS. Merci. Que puis-je dire d'autres? Merci, parce que vous êtes toujours là; pour tout. Parce que je sais que vous m'aimez et que vous vous foutez éperdument de ce mémoire. Et dans ce monde, c'est tout ce que nous pouvons demander à nos parents. Nous avons grandis avec des histoires de pirates et d'îles aux Trésors*

*Tout en commencent par ma promotrice Mlle.Amrouche Naima pour m'a suivi et pour l'aide et le temps qu'elle m'a bien voulu me consacrer et sans qui ce mémoire n'aurais jamais vu le jour.*

*Je remercie tout personnel d'Air Algérie pour m'avoir accompagner dans toutes mes péripéties au début de mon séjour.*

*J'exprime aussi ma gratitude envers Mr.Bennila pour ses précieux conseils.*

*Je tiens aussi à remercier chaleureusement mon président de jurés et mes examinateurs et également à mes enseignants de l'IAB.*

*Enfin, j'adresse mes plus sincères remerciements à tous mes proches et amis qui m'ont toujours soutenu et encouragé au cours de la réalisation de ce mémoire.*

# Dédicaces

Je dédie ce modeste travail :

A mon cher père

A ma chère mère

A mes adorables frères

Mohamed et Fateh

A mes très chères sœurs

Nabila et Nadia

A toutes les personnes que j'ai rencontré : Sevrine, Leila, Nawel, Amine, Naji, Redouan et tous le groupe de l'INSTALLATIONS sans exception avec les quelle j'ai partagé les meilleurs moments et toute les personnes que j'ai oubli de leur dédier ce modeste travail.

MINA

# Sommaire

# LISTE DES FIGURES

# Nomenclature:

# Symboles et notations utilisés

| Symbole | Définition |
|---|---|
| H | Matrice de mesure |
| I | Matrice unité |
| K | Gain du filtre de Kalman |
| P | Matrice de covariance de l'erreur d'estimation |
| Q | Matrice de covariance du bruit du système |
| R | Matrice de covariance du bruit de mesure |
| $x(k)$ | Vecteur d'état du processus au temps t(k) |
| $v(k)$ | Vecteur de bruit de mesure au temps t(k) |
| $W(k)$ | Vecteur de bruit de processus au temps t(k) |
| $\hat{x}(k)$ | Vecteur d'estimation de x(k) au temps t(k) |
| $\hat{x}(k\|k-1)$ | Vecteur d'estimation à priori au temps t(k) |
| $Z(k)$ | Vecteur de mesure au temps t(k) |
| $F(k)$ | Matrice de transition reliant l'instant t(k) à l'instant t(k+1) |
| $\Delta t$ | Intervalle de temps entre l'instant t(k) à l'instant t(k+1) |
| $\tilde{Z}$ | Résidu du filtre de Kalman |
| $P(k)$ | Matrice de covariance de l'estimation |
| $P(k/k-1)$ | Matrice de covariance de l'estimation prédite |
| $P(\cdot)$ | Probabilité |
| $f\{\cdot\}$ | La densité de probabilité |
| $M_J(k)$ | Modèle j à l'instant k |
| $E[\cdot]$ | Espérance mathématique |
| $e_k^-$ | Estimation d'erreurs à priori |
| $e_k$ | Estimation d'erreurs à posteriori |
| $\hat{x}_k^-$ | Estimation d'état à priori |
| $\hat{x}_k$ | Estimation d'état à priori |

# Abréviations usuelles

| | |
|---|---|
| IMM | Modèle Multiple Interagissant |
| KF | Filtre de Kalman |
| EKF | Filtre de Kalman Etendu |
| CV | Modèle à vitesse constante |
| CA | Modèle à accélération constante |
| PDF | Fonction de Densité de Probabilité |
| UKF | Filtre de Kalman sans parfum |
| SUKF | Filtre de Kalman sans parfum normalisé |

# INTRODUCTION GENERALE

Dans le cadre du projet de fin d'étude du cycle Ingénieur, option Installation, nous avons choisi de réaliser ce projet permettant d'effectuer une opération de poursuite d'une cible à modèle non linéaire en se basant sur l'utilisation d'un algorithme spécifié parmi plusieurs techniques couramment utilisées pour la  poursuite des cibles à modèle non lineaire.

Le filtre de Kalman est limité aux systèmes linéaires. Cependant, la plupart des systèmes physiques sont non linéaires. Le filtre n'est donc optimal que sur une petite plage linéaire osculatrice des phénomènes réels. La non-linéarité peut être associée au modèle du processus, au modèle d'observation ou bien aux deux.

La linéarisation des modèles non linéaire est faite grâce au filtre de Kalman Etendu (EKF) qui est un filtre de Kalman adapté.

Pour mener à bien notre travail, on a divisé notre mémoire en quatre chapitres :

Le premier chapitre comprend des généralités sur la poursuite des cibles.

Le deuxième chapitre élabore les différents filtres utilisés pour  poursuite des cibles ainsi qu’une étude très détaillée sur ses différents paramètres qui seront utilisés dans la poursuite.

Le troisième chapitre comprend une étude sur les différents algorithmes utilisés en cas d’un système à modèle non lineaire et précisément une étude détaillée de l'algorithme EKF, qui est utilisé dans notre projet.

Enfin dans le dernier chapitre, nous présentons les résultats de toutes les simulations que nous avons  effectuées avec l’algorithme  EKF et les différents commentaires concernant les performances de cet algorithme.

# I. GENERALITES SUR LA POUSUITE DES CIBLES

## I.1 Introduction

La poursuite de cible (Target tracking) est un domaine très large dont l'objectif est de suivre le mouvement d'un mobile dans l'espace défini par la zone de perception d'un ou plusieurs capteurs.

La poursuite intervient donc après une phase de détection de mouvement. Elle fait appel à plusieurs domaines de traitement du signal et d'automatique :

- Le traitement d'image et/ou le traitement de signal acoustique, selon le mode de perception utilisé (vision, acoustique, radar) ;
- Le filtrage pour éliminer le bruit sur les mesures des positions de la cible effectuées et prédire la trajectoire ;
- La fusion de capteurs, car suivre un mobile avec un seul capteur est difficilement réalisable, il faut envisager des capteurs de résolutions et de natures différentes collaborant entre eux ;
- L'automatique pour asservir les capteurs mobiles à suivre la trajectoire d'une cible.

Depuis plusieurs années, ce domaine de recherche a attiré l'attention de nombreuses personnes et plusieurs algorithmes d'estimation de trajectoire d'une cible sont apparus.

L'intérêt tient à la diversité des applications, essentiellement militaires :

- Détection et poursuite de missiles balistiques (les données utilisées sont alors des images infrarouges fournies par des satellites de surveillance) ;
- Poursuite de missiles conventionnels (anti-missiles) ou d'aéronefs ;
- Perception des obstacles ou des objectifs environnant un véhicule automatise en mouvement ;
- Surveillance de zone (parking,…) ;
- Dans des applications météorologiques (calcul de la vitesse et l'orientation des vents).

## I.2 Le suivi des obstacles

Le rôle du pistage de cible est avant tout d'assurer la cohérence temporelle des observations afin d'éviter les fausses alarmes et de filtrer l'état. La structure haute niveau d'un tel système est donnée par la figure (I.1). Les capteurs délivrent des signaux qui sont collectés par un module de traitement du signal délivrant des mesures au traitement des données. Les pistes sont des éléments du sous-système de traitement des données dont le rôle est de former et de maintenir les pistes.

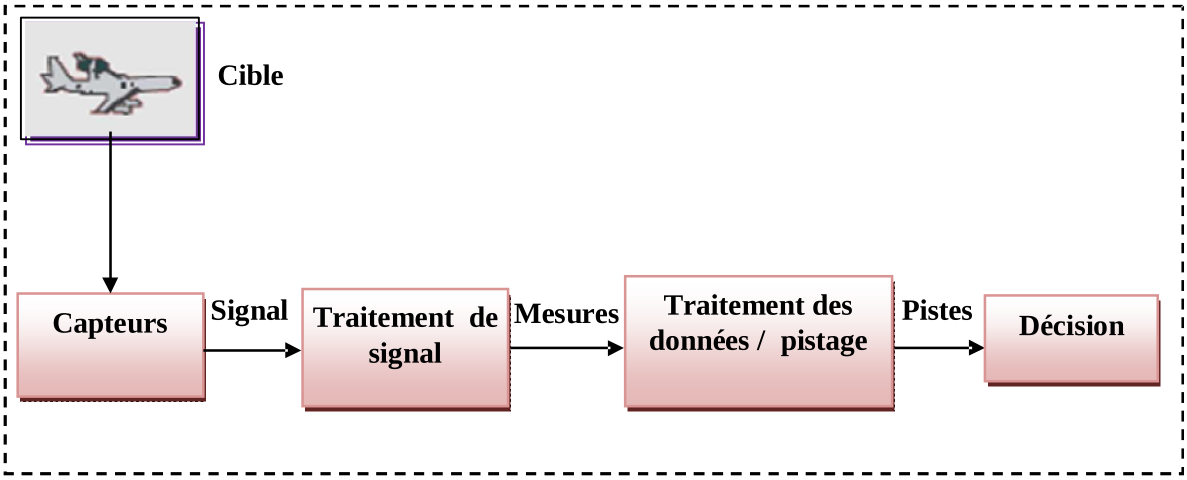


***Fig I-1 : Structure haut niveau d'un système de surveillance***

Le suivi d'obstacles est un élément indispensable pour un système de détection d'obstacles. Son rôle est de déterminer le nombre, la position, et le mouvement des différentes pistes. Un système de pistage repose sur plusieurs modules dont la principale est celle qui permet une estimation récursive de l'état de la piste (position, vitesse, voir accélération). Ce module s'appuie sur une méthode de filtrage telle que le filtrage de Kalman ou le filtrage particulaire. D'autres modules comme l'initialisation, la destruction, l'association des pistes sont indispensables au bon fonctionnement (voir figure I.2).

En effet toutes les mesures délivrées par les capteurs ne sont pas forcement des mesures, d'obstacles mais peuvent provenir d'interférences aléatoires (conditions atmosphériques, fausses alarmes,...). Il est donc nécessaire de valider les mesures qui correspondent le mieux à l'estimation : c'est l'association.

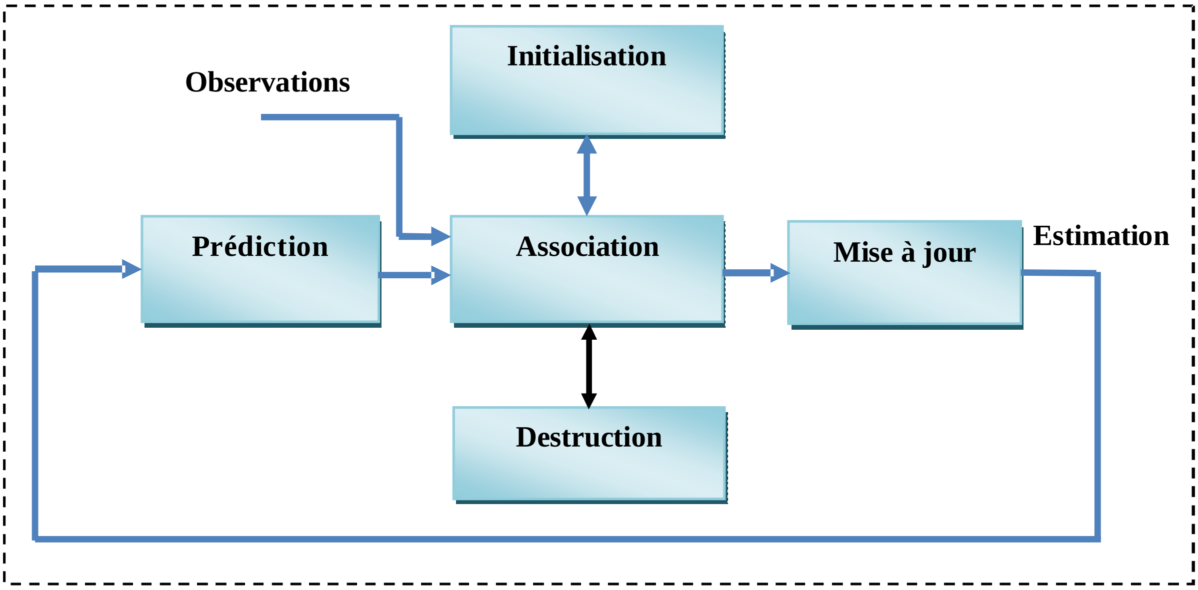


***Fig I-2 : Le module de pistage***

Une piste tentée est typiquement issue d'une mesure non associée avec les pistes existantes. La confirmation d'une piste est basée sur le nombre de mises à jour effectuées pendant un temps fixe : c'est l'initialisation.

Une piste est dite supprimée si elle n'est pas mise à jour par une mesure pendant un laps de temps fixe : c'est la destruction.

## I.3 Les capteurs

La détection d'obstacles est un des problèmes clefs de la poursuite des cibles manœuvrantes. Chaque cible devant évoluer dans un environnement inconnu doit être capable de détecter les obstacles.

Selon J. Hancock, la détection d'obstacles ne sera jamais un problème résolu. En effet, les cibles manœuvrantes deviennent de plus en plus capables et évoluent à des vitesses qui ne cessent d'augmenter; ces cibles auront donc besoin d'observer plus loin, d'examiner de plus larges zones et nécessiteront des laps de temps de plus en plus court.

De plus, la population apparaissant de plus en plus dépendante de ces systèmes, il paraît nécessaire de faire accroitre leur fiabilité.

Du côté des aéronefs, plus les systèmes sont devenus capables, plus l'attention s'est focalisée sur le problème de la détection d'obstacles. Ces systèmes résultant pour la plupart de collaborations nombreuses et de qualité.

Précédemment, on a dit que les aéronefs utilisaient de nombreux capteurs. En effet, un espace aérien  est une scène complexe à analyser, dépendante de nombreuses circonstances (météo, vitesse,…). Les différents capteurs présentés dans la suite apportent leurs solutions à ces problèmes de perception. Chaque capteur peut résoudre une tache spécifique. Les télémètres Laser et Radar sont particulièrement adaptés pour la détection d'obstacles. De l'autre coté, les cameras permettent d'effectuer toutes les tâches de perception (reconstruction et reconnaissance de la piste, de la signalisation, la localisation de la cible, détection d'obstacles). Cependant, leurs performances sont souvent limitées ou restreintes par les conditions expérimentales (météo, lumière, ...).

On s'attache donc ici à présenter les capteurs utiles pour la détection d'obstacles. On s'intéressera particulièrement aux capteurs utilisés pour valider les méthodes développées.

### I.3.1 La télémétrie laser

#### I.3.1.1 La place du laser dans les la poursuite de cibles

Depuis de nombreuses années, la télémétrie laser est utilisée pour la détection d'obstacles, spécialement pour la navigation en terrain inconnu. La télémétrie laser opère par balayage d'un faisceau dans une région d'intérêt et mesure, pour chaque pixel, le temps mis par le faisceau laser pour partir et revenir au capteur. De plus, connaissant la position angulaire du tir, on peut en déduire la position exacte de l'objet dans un plan. Enfin, aujourd'hui, la plupart des télémètres lasers renvoient l'intensité du signal pour chaque pixel en mesurant l'´energie du signal laser retourné. Donc, un balayage complet en deux dimensions peut donner une image de profondeur et une image d'intensité. Les obstacles peuvent donc être détectés en observant les discontinuités apparaissant dans l'image de profondeur et dans l'image d'intensité.

#### I.3.1.2 Le télémètre Laser 3D

Le télémètre Laser (voir figure I.3) est un système capable de délivrer des images 3D. Ces images sont basées sur la mesure de distance précise délivrée par un système optoélectronique et sur un mécanisme à double balayage. Elles sont formées en exécutant une série de mesure de distance dans des positions différentes, avec des directions angulaires bien définies. Ces données de distance associées aux angles forment la base des images 3D.

Ces images 3D ou de profondeur se présentent sous la forme de matrice par analogie avec les images de luminance.

Chaque élément de la matrice représenté un pixel. Chaque pixel donne une information sur la scène observée par le capteur 3D. Cette information représenté une indication de position dans la scène. En résumé, l'information contenue par chaque pixel de l'image de profondeur représenté les coordonnées géométriques de celui-ci dans le repère du capteur.

### I.3.1.3 Le module de mesure de distance

Le système de mesure de distance est basé sur le principe du calcul de temps de vol des impulsions laser de longueur d'onde dans le proche infrarouge.

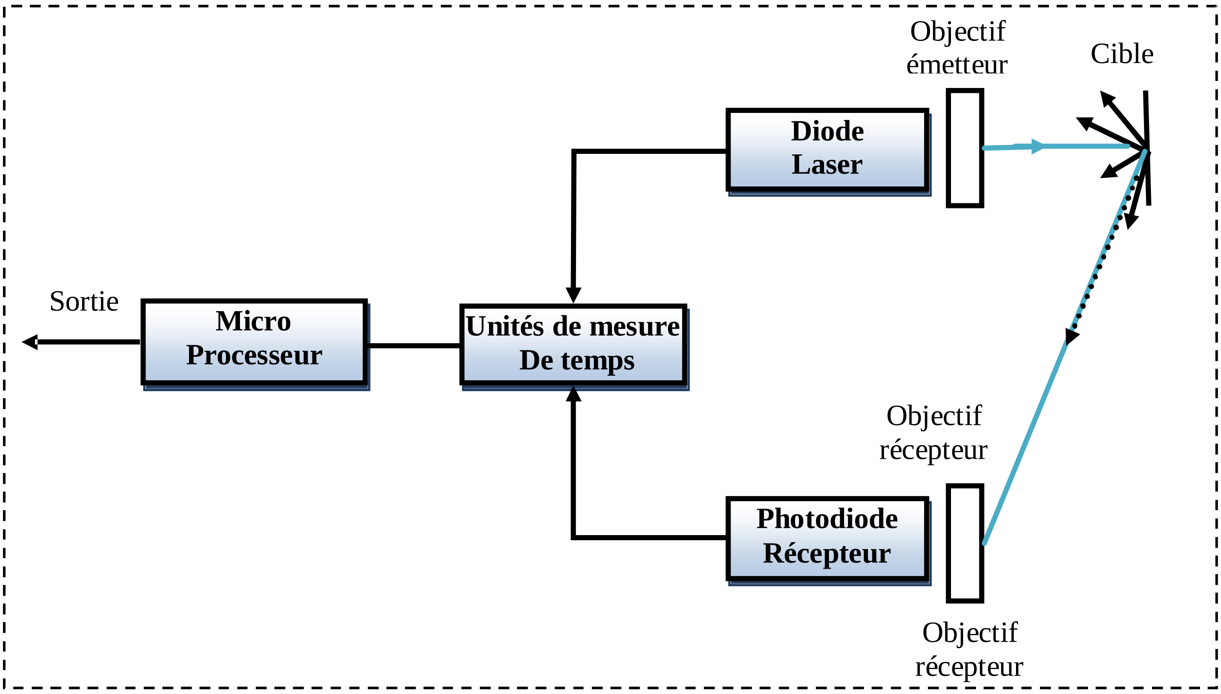


***Fig I-3 : Principe de mesure de distance***

Un générateur d'impulsions électriques commande une diode laser semi-conductrice qui envoie des impulsions de lumière infrarouge vers un objectif émetteur. A travers l'objectif récepteur, une partie du signal réfléchi par une cible frappe une photo diode, ce qui génère un signal électrique. L'intervalle de temps entre l'´emission et la réception est mesuré au moyen d'une fréquence d'horloge stabilisée par un quartz. La mesure de distance calculée est transmise `à un microprocesseur interne qui prépare les données à transmettre au PC (voir figure I-3).

### I.3.2 Le radar

Fondamentalement, un radar doit permettre de détecter l'obstacle mobile ou non et de calculer la distance le séparant de la cible. Dans cette optique, les radars a ondes hyperfréquences peuvent être divisés en deux grandes catégories : les radars impulsionnels d'une part, les radars à émission continue et à modulation de fréquence d'autre part.

Pour les radars impulsionnels, on s'attache à déterminer le temps écoulé entre, l'´echo provenant de l'obstacle détecté et le signal émis. On peut à nouveau distinguer deux familles, selon que la détection du signal réfléchi par l'obstacle est cohérente ou non. Les modèles à détection non cohérente sont les plus simples a réaliser, mais ne permettent pas d'´evaluer la vitesse de la cible (pas de mesure de phase), et ne permettent donc pas de développer tous les types d'applications désirés. Le second type (à détection cohérente) résout ce problème en permettant d'avoir une relation entre la phase du signal émis et celle du signal réfléchi par la cible. Pour les radars à émission continue et à modulation de fréquence, il s'agit de déterminer le décalage en fréquence entre l'´echo provenant de l'obstacle détecté et le signal émis. Le radar est alors structuré autour d'un oscillateur contrôlé en tension, qui sert tant en émission qu'en réception. Il permet en effet à la fois de transmettre le signal à l'antenne en assurant un bon contrôle de la fréquence, et de passer en fréquence intermédiaire le signal reçu. La spécificité du récepteur est donc que son fonctionnement n'est basé que sur un multiplieur. Le signal en fréquence intermédiaire étant ensuite simplement amplifié, et transféré à une unité de traitement.

Cette simplification de la partie hyperfréquence entraine donc un accroissement de la partie de traitement du signal en réception, mais ceci va de pair avec l'´evolution des performances des dispositifs de traitement. De fréquence, il s'agit de déterminer le décalage en fréquence entre l'´echo provenant de l'obstacle détecté et le signal émis. Le radar est alors structuré autour d'un oscillateur contrôlé en tension, qui sert tant en émission qu'en réception. Il permet en effet à la fois de transmettre le signal `a l'antenne en assurant un bon contrôle de la fréquence, et de passer en fréquence intermédiaire le signal reçu. La spécificité du récepteur est donc que son fonctionnement n'est bas´e que sur un multiplieur.

Le signal en fréquence intermédiaire étant ensuite simplement amplifié, et transféré à une unité de traitement.

Cette simplification de la partie hyperfréquence entraîne donc un accroissement de la partie de traitement du signal en réception, mais ceci va de pair avec l'´evolution des performances des dispositifs de traitement.

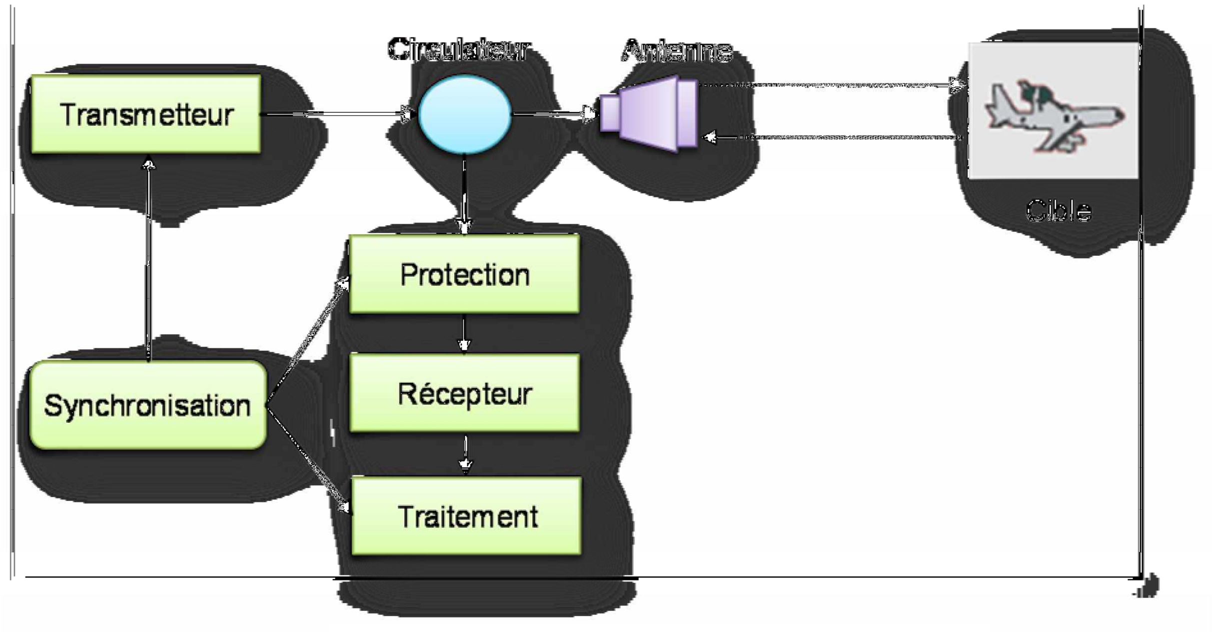


***Fig I-4 : Structure d'un radar à antenne***

## I.4 Types de cibles

Selon la manœuvrabilité des cibles en peut distinguer deux types de cibles :

- Cibles non manœuvrantes (Fig I-5 (a))
- Cibles manœuvrantes (Fig I-5 (b))

### I.4.1 Cas de cibles non manœuvrantes

Dans le cas de cibles non manœuvrantes, par exemple des avions de l'aviation civile volant suivant des trajectoires rectilignes, le système peut être décrit par exemple par l'équation :

$$dx_t = Fx_t dt + Gdv_t \qquad \textbf{I.1}$$

Où $\{x_t\}$ désigne le processus état du mobile (typiquement position, vitesse,…) de son centre de gravité) et $\{v_t\}$ un bruit d'état. Les mesures $z_t$ (capteurs radar, infrarouge, . . .) servent à estimer x par l'espérance conditionnelle $\hat{x}_t = x_t \left| z_t \right.$ qui minimise l'erreur quadratique moyenne $E\left\{ \tilde{x}_t^T \tilde{x}_t \left| Z_t \right. \right\}$ avec $\tilde{x}_t = x_t - \hat{x}_t$

Un filtre de Kalman classique est en général suffisant pour effectuer la poursuite de telles cibles.

### I.4.2 Cas de cibles manœuvrantes

Dans le cas de cibles manœuvrantes, l'accélération du mobile comporte alors, en plus de fluctuations autour d'une moyenne nulle, une partie quasi discontinue et non linéaire correspondant aux manœuvres commandées par le pilote. L'apparition soudaine de ce terme commandé appelle une augmentation de la bande passante du pisteur afin de ne pas laisser croître l'erreur, induire un traînage et risquer de décrocher. Le modèle doit alors être complété par un terme discret

$$dx_t = Fx_t dt + Gdv_t + b_\phi(x_t)d\phi_t \qquad \textbf{I.2}$$

Où $\phi$ est un processus ponctuel ($d\phi_t = 0$ sauf aux instants de manœuvres) et $b_\phi x(t)$ relie les sauts de $\phi$ aux manœuvres considérées.

Dans ces conditions, un filtre de Kalman classique est insuffisant, on doit faire alors appel à des dispositifs de détection de manœuvres incorporés dans le système de poursuite pour pouvoir suivre avec précision les trajectoires des cibles. La description de ces dispositifs fait l'objet des paragraphes suivants.

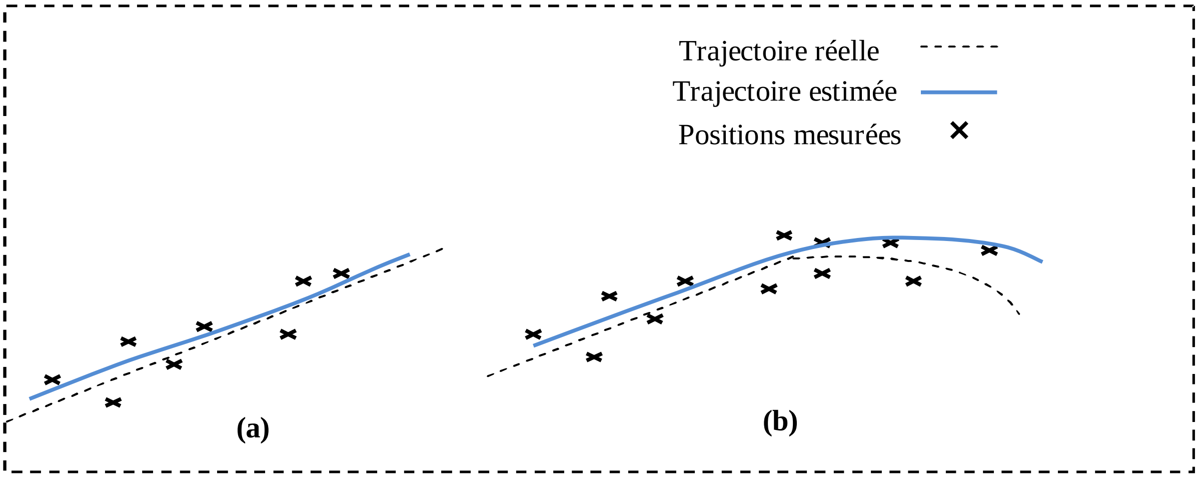


***Fig I-5:Cibles (a) non manœuvrante (b) manœuvrante***

## I.5 Détecteur de manœuvre

La poursuite des cibles manœuvrantes est un thème revenant fréquemment dans le domaine militaire.

En effet, la majorité des systèmes tactiques nécessitent la poursuite de cibles manœuvrantes tels que les avions, les bateaux, les missiles ou les sous-marins. De même dans le domaine civil, les systèmes de contrôle et de surveillance aériens nécessitent la mise au point de « traqueurs » performants.

La manœuvre se traduit par une accélération de la cible qui engendre une augmentation des erreurs de prédiction et de filtrage. Si ces erreurs sont trop grandes, le processus de corrélation devient incertain et la probabilité de perdre la cible devient importante. L'utilisation d'un détecteur de manœuvre est indispensable pour minimiser les erreurs d'estimation des paramètres d'état des pistes et par conséquent assurer une bonne qualité de poursuite des cibles en phase de manœuvre.

Un détecteur de manœuvre est en général suivi d'une fonction d'adaptation des paramètres du filtre de poursuite à la manœuvre détectée. Parfois, ces deux fonctions peuvent êtres confondus en un seul bloc, comme c'est montré dans la figure (I-6).

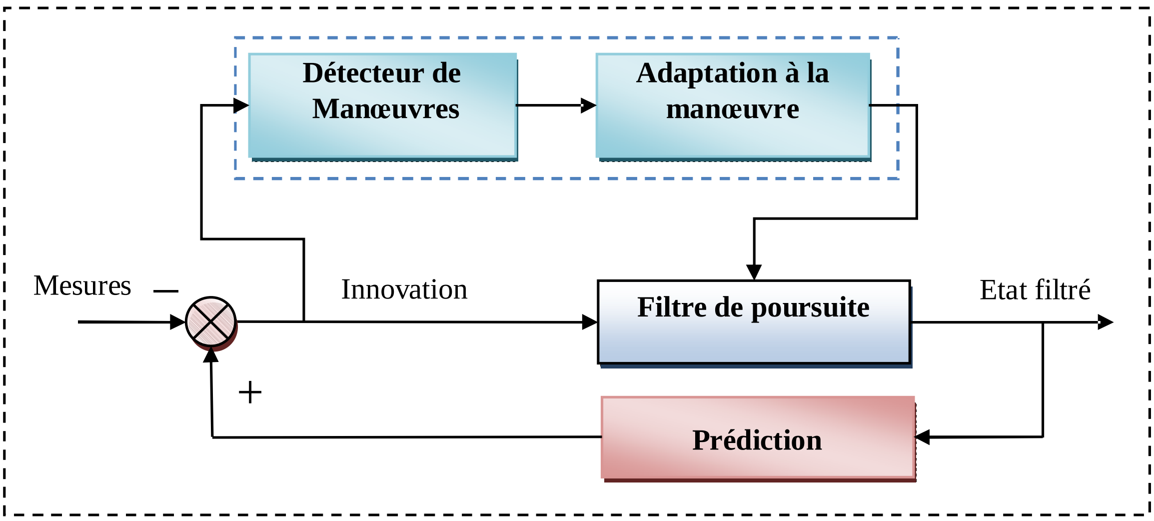


***Fig I-6 : Processus de filtrage en présence d'un détecteur de manœuvre***

### I.5.1 Techniques de détection de manœuvres

La plupart des techniques de détection de la manœuvre sont basées sur le traitement de l'innovation $\tilde{z}(k)$, donnée par l'équation :

$$\tilde{z}(k+1) = z(k+1) - H\hat{x}(k+1|k) \qquad \textbf{I.3}$$

C'est une variable aléatoire gaussienne, de moyenne nulle et de matrice de covariance) $P(k)$, donnée par :

$$P(k) = HP(k|k-1)H^{T} + R \qquad \textbf{I.4}$$

En présence d'une manœuvre, un biais s'ajoute à la moyenne de l'innovation qui perd ainsi ses caractéristiques statistiques. Pour déterminer automatiquement le début et la fin d'une manœuvre, plusieurs techniques ont été développées, on peut citer

- La technique de la fenêtre glissante qui exploite les changements des caractéristiques statistiques de l'innovation en présence de la manœuvre (ajout d'un biais à sa moyenne), pour décider s'il y a manœuvre ou non. La sommation de l'innovation $\tilde{z}(k)$ sur toute la longueur L de la fenêtre est définie par :

$$D_{L}(k) = \sum_{i=k-L+1}^{k} \tilde{z}(i) \left| \begin{array}{c} \text{oui} \\ ¤ \\ ® \\ \text{non} \end{array} \right. \eta \qquad \textbf{I.5}$$

La statistique $D_{L}(k)$ est une variable aléatoire gaussienne.

- La technique basée sur le test du signe de l'innovation, où on exploite le signe de l'innovation pendant quelques périodes de balayage du radar, pour affirmer la présence d'une manœuvre. La sommation du signe est définie par :

$$B_{m,k}(k) = \sum_{i=0}^{m-1} I(k-i) \left| \begin{array}{c} \text{oui} \\ ¤ \\ ® \\ \text{non} \end{array} \right. \eta \qquad \textbf{I.6}$$

Avec m la longueur de la fenêtre utilisée et la statistique est une variable aléatoire de distribution binomiale.

- La technique basée sur le test de l'erreur quadratique normalisée, elle est donnée par :

$$\rho(k) = \tilde{z}^{t}(k)\,P^{-1}(k)\,\tilde{z}(k) \left| \begin{array}{l} \text{oui} \\ \geq \\ \quad \eta \sum_{i=0}^{m-1} I(k-i) \\ < \\ \text{non} \end{array} \right. \qquad \textbf{I.7}$$

Avec $\rho(k)$ est une variable aléatoire, de loi de probabilité Chi. Deux avec $n_z$ (dimension du vecteur mesure) degré de liberté.

Cette technique peut être aussi utilisée pour évaluer le degré de la manœuvre qui est utile lors de l'utilisation d'un banc de filtres αβ.

Dès que la valeur de la statistique évaluée dépasse le seuil, on décide de la présence d'une manœuvre. Le seuil est déterminé en fonction de la probabilité de fausse alarme admise, il peut être tiré à partir des références standards des distributions de la statistique correspondante.

Ces techniques de détection de manœuvre sont très limitées, elles engendrent des retards de détection qui peuvent causer la perte de la cible. Elles sont faciles à implémenter, mais elles nécessitent souvent une fonction d'adaptation des paramètres du filtre pour former un détecteur efficace.

### I.5.2 Techniques basées sur l'estimation de l'accélération

Lors de l'utilisation d'un filtre de poursuite linéaire, la séquence de l'innovation contient en plus de la composante habituelle du bruit due aux erreurs de filtrage, la composante déterministe de l'accélération qui est l'erreur du système. Dans le but de réduire cette dernière, l'estimation de l'accélération s'avère nécessaire.

Certains algorithmes utilisent un test d'hypothèses pour évaluer l'accélération u. Si on considère le retard de détection, l'évaluation de $\gamma$ et de $t_0$ est obtenue par la résolution d'un problème combiné de l'estimation et de la détection. Cette méthode nécessite l'utilisation d'un banc de filtres (excités par l'innovation) dont chacun est paramétré par un couple $(t_0, \gamma)$ pour le rendre adapté à un type de manœuvre.

Le filtre qui présente la sortie la plus importante nous permet de tirer les caractéristiques correspondantes de la manœuvre $(t_0, \gamma)$ qui sont utilisées pour la correction du vecteur d'état. L'inconvénient majeur de cette méthode, est qu'elle nécessite l'évaluation des sorties de tous les filtres du banc utilisé, ce qui implique un temps de calcul énorme.

Il existe aussi une méthode de l'estimation de l'accélération basée sur le critère de minimisation quadratique de l'innovation, l'estimation s'effectue sans tenir compte des valeurs précédentes de l'accélération ce qui nécessite un large temps de calcul, en plus de la nécessité de ressources mémoires pour le stockage de quelques paramètres.

Une nouvelle méthode d'estimation basée sur la minimisation de la covariance de l'estimation a vu le jour.

C'est une méthode récursive qui permet l'estimation de l'accélération à chaque instant, qui est ensuite utilisée pour corriger l'état prédit et filtré. Cette méthode assure de bonnes performances lors de la poursuite des cibles manœuvrantes, et présente l'avantage de la facilité d'implémentation vu son caractère récursif.

Ces méthodes de détection de manœuvre basées sur l'estimation de l'accélération sont très intéressantes lors de l'utilisation des filtres $\alpha\beta$, elles permettent en plus de la détection, une adaptation du filtre pour diminuer les erreurs du système causé par la manœuvre. Par ailleurs, lors du choix d'une méthode, on doit tenir compte surtout de son temps de calcul et de sa complexité d'implémentation.

### I.5.3 Adaptation à la manœuvre

Une fois qu'une manœuvre est signalée par le détecteur, une adaptation se porte généralement sur les paramètres du filtre. Cette adaptation s'effectue selon le modèle adopté du mouvement de la cible.

L'accélération peut être modélisée par une variable aléatoire ou déterministe, pour cela, quatre grandes approches sont proposées pour adapter les paramètres du filtre de poursuite à la nouvelle situation (présence de manœuvre), cette adaptation est faite pour réduire les erreurs de prédiction et d'estimation de l'état de la cible (position et vitesse).

#### I.5.3.1 Approche basée sur le changement des paramètres de poursuite

Dans cette approche, l'accélération est considérée comme un bruit gaussien de moyenne nulle et de matrice de covariance Q, et qui vient perturber le mouvement des cibles considéré uniforme (vitesse constante). Le principe de cette approche est l'utilisation de plusieurs fenêtres de corrélation, dont la dimension correspond à un degré de manœuvrabilité figure (I-7). Les paramètres du filtre de poursuite sont ajustés en fonction des paramètres statistiques de l'accélération (moyenne et covariance Q) correspondant à la fenêtre dans laquelle le plot radar associé est situé.

Si l'on considère que l'accélération est un bruit blanc, en l'absence de manœuvre, le bruit est supposé au niveau $Q_1$.Une fois que la manœuvre est détectée on augmente le niveau du bruit, passant ainsi à $Q_2$. Le processus similaire peut être utilisé pour diminuer le niveau du bruit à la fin de la manœuvre.

Cette méthode peut être généralisée pour plusieurs niveaux de bruit. Ce type d'adaptation rend le filtre capable de suivre la cible dans la phase de manoeuvre, la moyenne de l'innovation diminue et tend vers zéro mais sa variance est augmentée.

### I.5.3.2 Approche basée sur le changement de la dimension du modèle

Dans le cas général ou la trajectoire des objectifs sont considérée rectiligne et le modèle d'état considère que la vitesse est constante. Si une manœuvre est détectée, un deuxième modèle d'état est utilisé et qui prend en considération l'accélération en plus de la position et de la vitesse. Pour remédier au problème de retard de détection, un historique des états est utilisé pour initialiser le deuxième modèle :

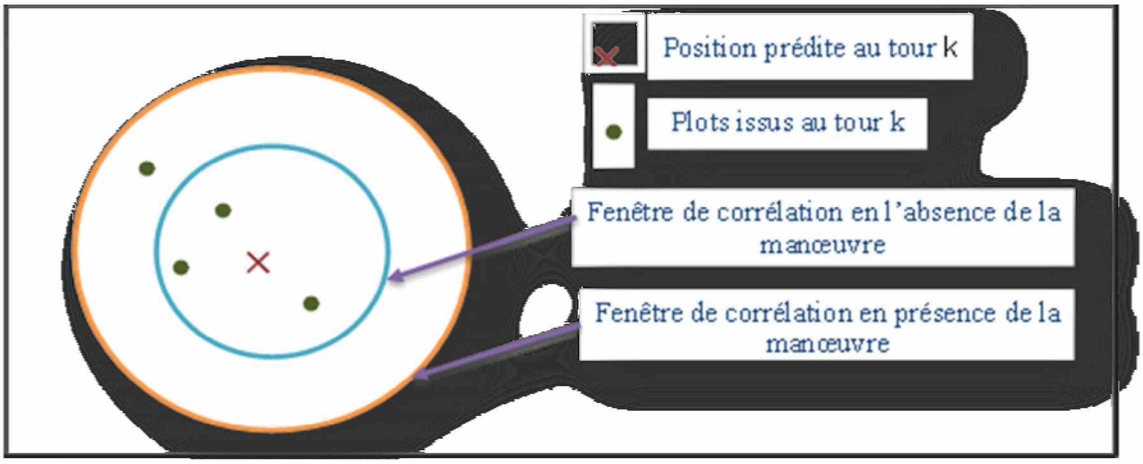


***Fig I-7 : Adaptation des dimensions de la fenêtre de corrélation***

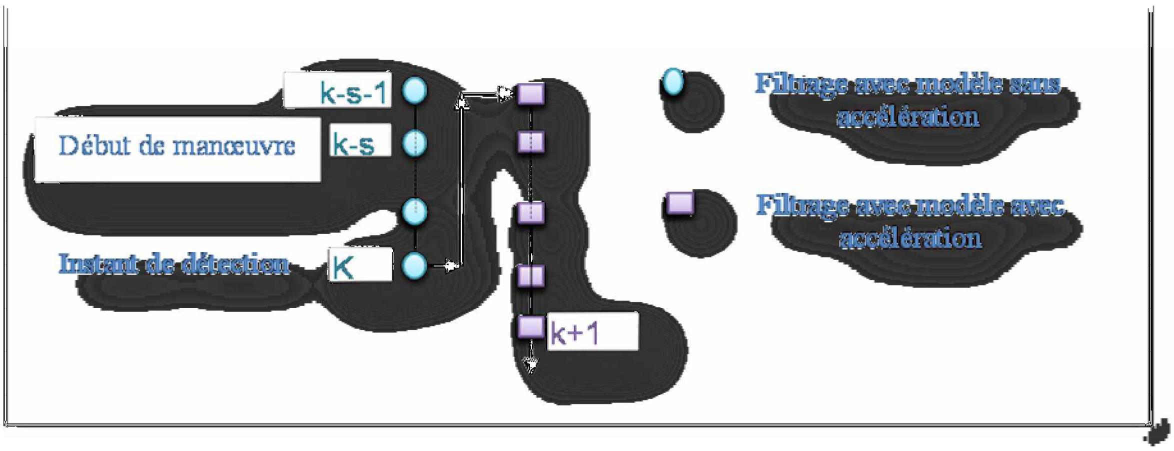


***Fig I-8 : Filtrage avec changement de la dimension du filtre***

Une fois que le vecteur d’état est modifié, le processus de filtrage recommence à partir de l’instant k-s, comme c’est montré dans la figure (I-7).

L’approche basée sur le changement de l’ordre du modèle d’état, permet une bonne poursuite des cibles en phase de manœuvres, et elle n’est pas très sensible au retard de détection. Son inconvénient majeur est la nécessité de mémorisation d’un nombre de paramètres important, et la nécessité d’un large temps de calcul surtout à l’instant de la détection de la manœuvre.

### I.5.3.3 Approche basée sur l’estimation de l’accélération

Dans cette approche, l’accélération est considérée comme un terme additif déterministe. Son estimation se fait en utilisant la séquence de l’innovation $\left\{\tilde{z}(1), \tilde{z}(2), ....., \tilde{z}(k)\right\}$ .

Une fois l’accélération estimée, elle est utilisée pour corriger les estimations d’état, elle peut être aussi utilisée pour la détection de la manœuvre en évaluant le module de l’accélération estimée.

Cette méthode d’adaptation donne de bons résultats, mais elle nécessite un grand espace mémoire ainsi qu’un énorme temps de calcul. Ceci est dû au fait qu’elle estime l’accélération d’une façon non récursive.

### I.5.3.4 Approche à Modèles Multiples

L’approche à Modèles Multiples (MM), quand nous développerons dans le troisième chapitre, consiste à considérer que le système ne peut obéir qu’à un nombre fini de modèles distincts. De tels systèmes sont dits hybrides puisqu’ils ont à la fois des incertitudes sur l’état et des incertitudes sur le modèle. Deux grandes approches sont à considérer :

- **Approche à modèle fixe**

Une fois que les filtres sont initialisés avec la première mesure, ils fonctionnent récursivement sur leurs propres estimés, l’état estimé global est une combinaison linéaire de ces derniers, comme c’est montré dans la figure (I-9).

Cette approche est valide si le modèle du système ne change pas durant la période en question. Elle ne l’est plus si à un moment donné la cible manœuvre ou si le modèle de la cible ne se trouve pas parmi les candidats.

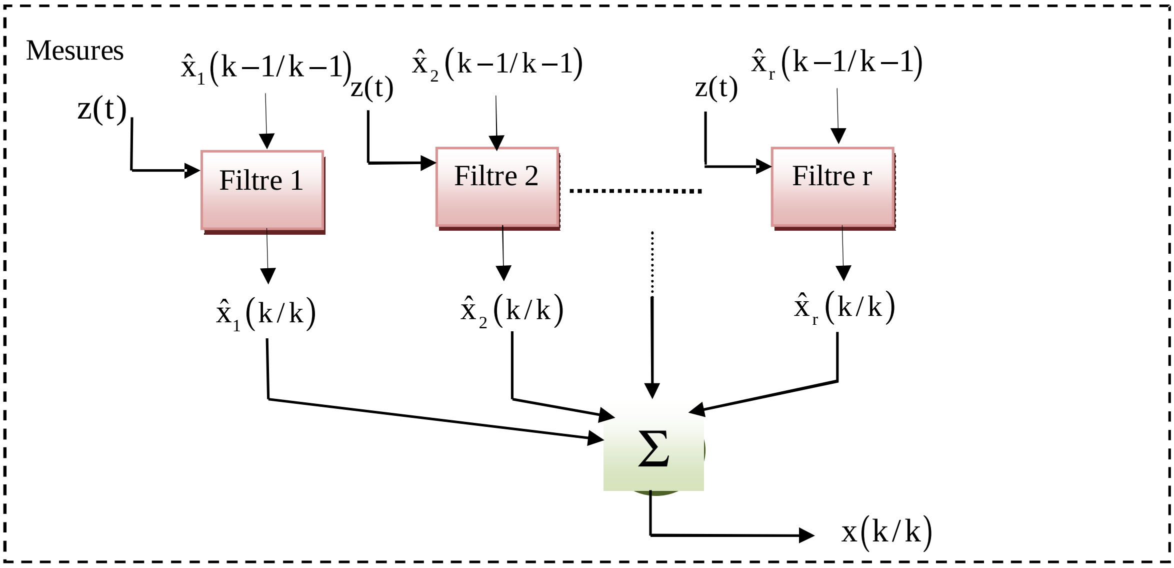


***Fig I-9 : Schéma bloc d'un système MM***

- **Approche à changement de modèle**

Pour s'affranchir de la première hypothèse, on peut estimer l'état de la cible pour toutes les suites possibles de modèles. Supposons que l'on ait $m$ modèles durant $k$ échantillons, il faut calculer un estimé de l'état pour les historiques de modèles possibles. Le problème de cette approche est qu'elle induit une croissance exponentielle du nombre d'historiques à considérer. On ne peut passer en outre à cette augmentation que par l'utilisation de techniques sous optimales (Pseudo-Bayesiennes Généralisées, Modèles Multiples Interactifs illustrée dans la figure (I-10)).

Ces algorithmes sous optimaux ne nécessitent pas l'étape de détection de la manœuvre, mais pour couvrir toutes les manœuvres imaginables, il leurs faut un grand nombre de filtres différents, induisant ainsi une charge de calcul énorme.

Ces approches demandent une connaissance à priori sur les manœuvres de la cible, elles fonctionnent relativement bien tant que les manœuvres obéissent aux hypothèses énoncées, mais leurs performances sont gravement diminuées dès que la cible effectue une manœuvre dont les caractéristiques n'ont pas été prévues.

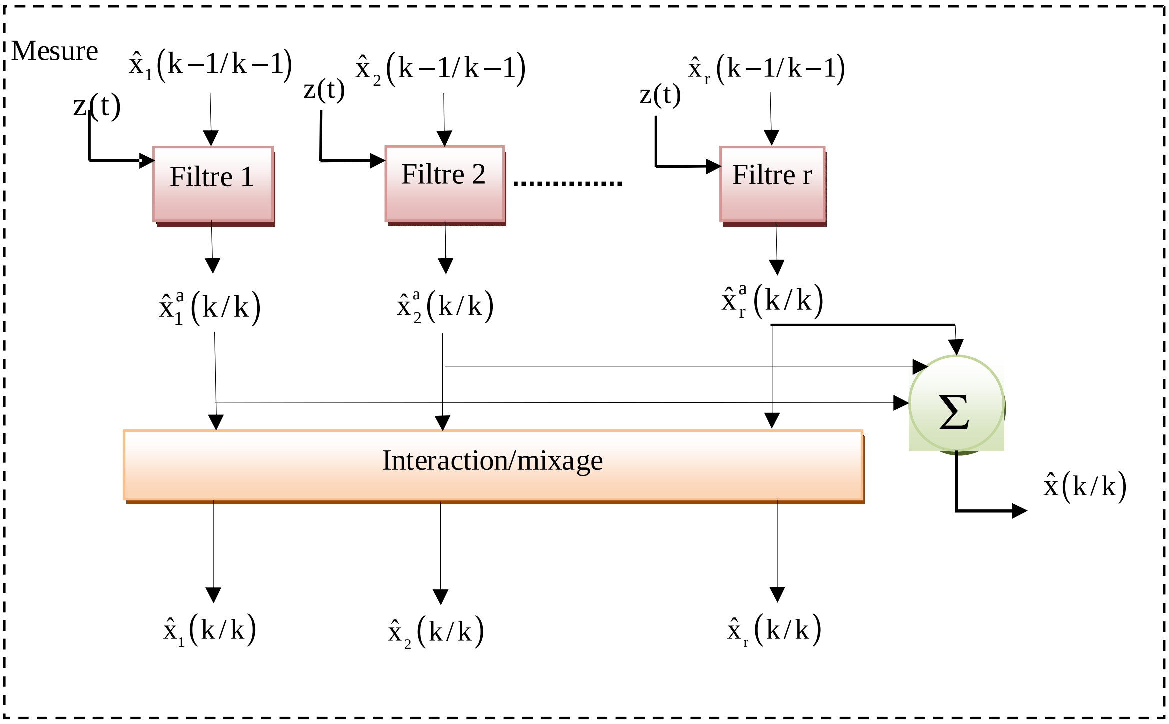


***Fig I-10 : Schéma bloc du système à Modèles Multiples***

## I.6 Conclusion

Dans ce chapitre, nous avons d'abord commencé par donner une définition de la poursuite, et les capteurs utilisés dans cette dernière. Ensuite, nous avons illustré les types de cibles. Le dernier point était consacré à la description du détecteur de manœuvre où nous avons donné un ensemble d'approches d'adaptation des paramètres du filtre de poursuite.

# II. LES FILTRES DE POURSUITE

## II.1 Introduction

Le filtrage consiste à estimer de façon récursive un état caché au vu d'observations. Le domaine d'application principal est la localisation, la navigation et la poursuite de mobiles, dans le domaine militaire, mais aussi en robotique mobile, en vision par ordinateur, en communications sans-fil (GSM en extérieur, WiFi), où il s'agit de combiner : un modèle à priori de déplacement du mobile, des mesures issues de capteurs.

Le filtre de poursuite remplit les deux fonctions qui sont l'estimation de l'état de la cible, et la prédiction de son état futur sur la base de la dynamique de son mouvement. Plusieurs filtres ont été développés, on cite comme exemple le filtre de Kalman, et le filtre $\alpha\beta$ , qui sont les plus utilisées dans la poursuite radar. Afin d'obtenir des erreurs de filtrage acceptables lors des accélérations importantes, un détecteur de manœuvre est souvent intégré dans l'algorithme de poursuite. Il sert à détecter le début et la fin de manœuvres, pour adapter les paramètres du filtre, afin d'assurer une poursuite permanente.

Les paragraphes suivants décrivent les outils fondamentaux de la poursuite de cibles, commençant par le filtre $\alpha\beta$, ensuite le filtre de Kalman standard utilisé pour les modèles linéaires.

## II.2 Modèle d'estimation d'état

De nombreuses applications dans le domaine scientifique, dont la poursuite de cibles, nécessitent une estimation de l'état dynamique des systèmes. L'objectif de la poursuite est d'estimer les états passés et actuels du système dynamique, ainsi que la prédiction de l'état futur de ce système Pour cela, le système de poursuite utilise des séquences de mesures bruitées faites sur le système. Le système de poursuite de cibles rassemble les données provenant de capteurs qui observent ces cibles. Ces données sont subdivisées en sous-ensembles, puis associées aux différentes trajectoires.

La figure II-1 présente un diagramme qui illustre l'estimation d'état. Sur cette figure les deux premiers blocs sont des boites noires : on n'a pas accès aux variables leur appartenant. Les seules variables auxquelles l'estimateur a accès sont les mesures affectées par les erreurs des sources (bruit de mesure).

L'estimateur utilise la connaissance de :

– L'évolution des variables (dynamique du système)

– le modèle de mesure

– la caractérisation probabiliste des facteurs aléatoires

– l'information à priori.

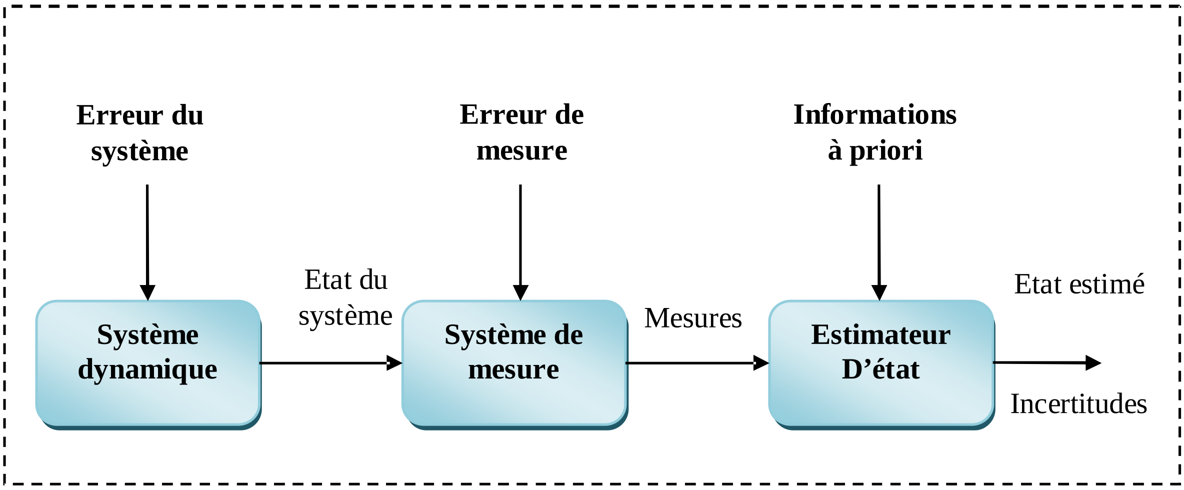


***Fig II-1 : Modèle d'estimation d'état***

Dans le domaine de la poursuite de cibles, on doit tenir compte non seulement des erreurs de mesures qu'on modèle comme un bruit additif, mais aussi des incertitudes sur l'origine de ces mesures et de leur association aux différentes cibles. Ces incertitudes ont différentes causes :

–le clutter du aux réflecteurs parasites proches de la cible d'intérêt,

–les interférences de cibles,

–les contre-mesures,

–des fausses alarmes dans le procédé de détection.

## II.3 Filtre αβ

Le filtre αβ est un algorithme à base des équations du filtre de Kalman. Des simplifications ont été apportées à ce dernier pour faciliter d'avantage son implémentation sur machine et réduire le temps de calcul. Dans ce type de filtre, les gains de position et de vitesse qui sont respectivement α et β/T sont constants, ce qui réduit énormément les calculs. Ces deux paramètres doivent être fixés pour avoir une grande efficacité en terme de filtrage de bruit, d'assurer une réponse rapide pendant les déplacements brusques de la cible, et d'assurer la stabilité du filtre.

Le filtre de poursuite fondé sur l'hypothèse de vitesse constante désigné sous le nom du traqueur α/β, fonctionne comme suit :

$$\hat{x}(k/k) = \hat{x}(k/k-1) + \alpha[z(k) - \hat{x}(k/k-1)]$$

$$\hat{v}(k/k) = \hat{v}(k/k-1) + \frac{\beta}{t_k - t_{k-1}}[z(k) - \hat{x}(k/k-1)]$$

Où z(k) est la mesure à l'instant k de la position de la cible. Le traqueur α/β, reçoit son nom des coefficients α et β qui sont utilisés comme des facteurs pondération pour faire les mises à jour. Si α et β sont nulles, alors le système se fonde purement sur les prédictions fournies par le modèle dynamique inclus dans le système. Réciproquement, si α et β sont égaux à 1, alors le système ignore le modèle dynamique du système, et compte purement sur la dernière mesure. Ainsi, en ajustant α et β, on peut réduire l'erreur entre la trajectoire réelle et la trajectoire estimée par le filtre. La poursuite des cibles à l'aide du filtre α/β suppose des trajectoires rectilignes et uniformes (sans accélération).

La figure II-2 montre un schéma d'implémentation du filtre à une dimension.

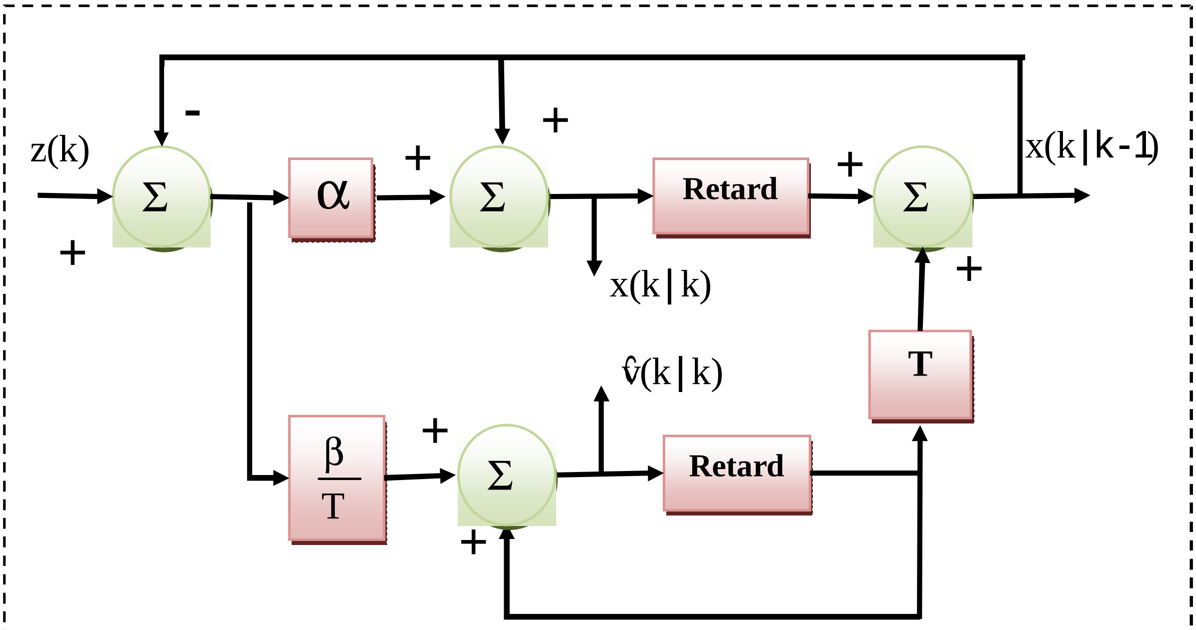


***Fig II-2 : Schéma d'implémentation du filtre αβ à une dimension***

## II.4 Le filtre de Kalman discret

En 1960, R.E. Kalman a publié un article intitulé "A new Approach to Linear Filtering and Prediction Problems". Ses recherches le mènent à y décrire un processus qui sera connu comme le filtre de Kalman.

Le filtre de Kalman est un ensemble d'équations mathématiques qui permet une meilleure estimation de l'état futur d'un système malgré l'imprécision des mesures et de la modélisation.

### II.4.1 Le processus d'estimation

Le filtre de Kalman pose le problème général de l'essai d'estimation de l'état $x \in \Re^n$ d'un processus commandé par temps discret qui est régi par l'équation de différence stochastique linéaire :

$$x_k = Fx_{k-1} + Gu_{k-1} + w_{k-1} \qquad \textbf{II.1}$$

Avec la mesure $z \in \Re^m$ qui est :

$$z_k = H\,x_k + v_k \qquad \textbf{II.2}$$

Les variables aléatoires $w_k$ et $v_k$ représentent le bruit d'état et de mesure (respectivement). On admet qu'ils sont indépendants l'un de l'autre, blanc, et avec des probabilités de distributions normales :

$$p(w) \approx N(0,Q) \qquad \textbf{II.3}$$

$$p(v) \approx N(0,R) \qquad \textbf{II.4}$$

Dans la pratique, la covariance de bruit $Q$ et les matrices de processus de covariance de bruit de mesure $R$ pourraient changer avec l'état ou la mesure, toutefois ici nous les admettons constantes.

La matrice $F(k)$ de dimensions n x n dans l'équation de différence (II.1) relie l'état à l'étape précédente de temps k-1 à l'état à l'étape courante k, en l'absence d'une fonction de commande ou du bruit d'état. Noter que dans la pratique $F(k)$ pourrait changer avec chaque période de temps, mais ici nous supposons qu'elle est constante.

La matrice $G(k)$ relie l'entrée de commande facultative $u \in \Re^1$ à l'état x. La matrice $H(k)$ de dimension m x n dans l'équation de mesure (II.2) relie l'état à la mesure $z(k)$.

Dans la pratique H pourrait changer chaque fois avec l'état ou la mesure, mais ici nous supposent qu'elle est constante.

**II.4.2 Les origines de calcul du filtre**

Nous définissons $\hat{x}^{-}(k) \in \Re^{n}$ pour être notre estimation d'état à priori à l'étape k connaissant le processus avant l'étape k, et $\hat{x}(k) \in \Re^{n}$ pour être notre estimation d'état, à posteriori à l'étape k donnant la mesure $z(k)$. Nous pouvons alors définir à priori et à posteriori les estimations d'erreurs comme :

$e_k^{-} = x_k - \hat{x}_k^{-}$

Et

$e_k = x_k - \hat{x}_k$

La covariance à priori d'erreur d'estimation est alors :

$$\bar{P}(k) = E\left[e^{-}(k)e^{-}(k)^{T}\right] \tag{II.5}$$

Et la covariance à posteriori d'erreur d'estimation est :

$$P(k) = E\left[e(k)e(k)^{T}\right] \tag{II.6}$$

En dérivant les équations pour le filtre de Kalman, nous commençons par trouver une équation qui calcule à posteriori une estimation d'état $\hat{x}_k$ comme combinaison linéaire d'une estimation à priori $\hat{x}_k^{-}$ et une différence pondérée entre une mesure réelle $z(k)$ et la prédiction de la mesure $H\hat{x}_k^{-}$ comme montré ci-dessous dans l'équation (II.7).

$$\hat{x}(k) = \hat{x}^{-1}(k) + K\left(z(k) - H\hat{x}^{-1}(k)\right) \tag{II.7}$$

La différence $z_k - H\hat{x}_k^{-1}$ dans (II.7) s'appelle l'innovation de mesure, ou le résidu. Le résidu reflète la différence entre la mesure prévue $H\hat{x}_k^{-}$ et la mesure réelle $z_k$. Un résidu nul signifie que les deux sont en accord total.

La matrice K de dimensions n x m dans (II.7) est calculée de sorte à être le gain ou le facteur de mixage qui minimise la covariance d'erreur à posteriori (II.6).

Cette minimisation peut être accomplie en remplaçant d'abord (II.7) dans la définition de $e_k$ ci-dessus, substituant celle-ci dans (II.6), développant les espérances indiquées, calculant et annulant la dérivée de la trace du résultat en fonction de K et puis le résolvant pour K. La forme résultante de K qui minimise (II.6) est donnée par :

$$\begin{aligned} K_k &= P_k^- H^T \left( H P_k^- H^T + R \right)^{-1} \\ &= \frac{P_k^- H^T}{H P_k^- H^T + R} \end{aligned} \qquad \textbf{II.8}$$

Les équations de filtre de Kalman peuvent être présentées sous différentes formes. L'équation (II.8) représente le gain de Kalman sous une forme connue.

En observant (II.8), nous voyons que lorsque la covariance d'erreur de mesure tend vers zéro, le gain K amplifie le résidu. Spécifiquement :

$$\lim_{R_k \to 0} K_k = H^{-1}$$

D' autre part, lorsque la covariance d'erreur d'estimation à priori tend vers zéro, le gain K amplifie moins le résidu. Spécifiquement :

$$\lim_{P_k \to 0} K_k = 0$$

Une autre manière de voir l'effet de la pondération K est que, comme la covariance d'erreur de mesure R tend vers zéro, la mesure réelle $z_k$ est favorisée de plus en plus, alors que la mesure prévue $H\hat{x}_k^-$ est favorisé de moins en moins.

D' autre part, comme la covariance d'erreur d'estimation à priori $P_k^-$ tend vers zéro la mesure réelle $z_k$ est favorisée de moins en moins, alors que la mesure prévue $H\hat{x}_k^-$ est favorisée de plus en plus.

Tout ce qu'on vient de citer se résume dans le paragraphe suivant :

§ Lorsqu'il y une grande incertitude sur le vecteur d'état (le modèle) $\Rightarrow$ P grande $\Rightarrow$ gain K grand $\Rightarrow$ **innovation favorisée**

§ Lorsqu'il y une grande incertitude sur la mesure $\Rightarrow$ w grand $\Rightarrow$ gain K petit $\Rightarrow$ **prédiction favorisée.**

§ On a résumé dans la figure II.1, ces propriétés du filtre.

$$\hat{x}(k) = \underbrace{\hat{x}(k/k-1)} + K(k)\left[\underbrace{z(k) - H(k)\hat{x}(k/k-1)}\right]$$

Grande incertitude sur la mesure
$\Rightarrow$ **Prédiction**

Grande incertitude sur le modèle
$\Rightarrow$ **Innovation favorisée**

***Fig I-3 : Interprétation du filtre de Kalman***

### II.4.3 Les origines probabilistes du filtre

La justification de (II.7) dérive de la probabilité d'estimation à priori $\hat{x}_k^-$ conditionné sur toutes les mesures antérieures $z_k$ (règle de Bayes).

Pour le moment, il est suffisant de dire que le filtre de Kalman maintient les deux premiers moments de la distribution d'état :

$$E[x_k] = \hat{x}_k$$

$$E\left[(x_k - \hat{x}_k)(x_k - \hat{x}_k)^T\right] = P_k$$

L'estimée d'état à postériori (II.7) reflète la moyenne (le premier moment) de la distribution d'état- qui est normalement distribué si les conditions (II.3) et (II.4) sont réunis. L'estimé à posteriori de la covariance d'erreur (II.6) reflète la variance de distribution d'état (le deuxième moment). En d'autres termes :

$$p(x_k|z_k) \quad N\left(E[x], E\left[(x_k - \hat{x}_k)(x_k - \hat{x}_k)^T\right]\right)$$
$$= N(\hat{x}_k, P_k)$$

### II.4.4 L'algorithme du filtre de Kalman discret

Nous commencerons cette section en donnant un aperçu général sur le filtre de Kalman discret. Après présentation de cet aperçu, nous résumerons les équations spécifiques et leur utilisation dans ce type du filtre.

Le filtre de Kalman estime un processus en employant une forme de contre-réaction. Le filtre estime l'état du processus à un moment donné et puis obtient la réaction sous forme de mesures bruitées. Les équations du filtre de Kalman se divisent en deux groupes : les équations de mise à jour de temps et les équations de mise à jour de la mesure. Les équations de mise à jour de temps sont projetées en avant (dans le temps) les estimations de d'état actuel et des covariances d'erreur pour obtenir les estimations à priori pour la prochaine étape. Les équations de mise à jour de mesure constituent la contre-réaction c'est-à-dire qu'elles incorporent une nouvelle mesure dans l'estimation à priori pour obtenir une estimation à posteriori améliorée.

Les équations de mise à jour de temps peuvent également être considérées comme des équations de prédiction, alors que les équations de mise à jour de mesure peuvent être considérées comme des équations de correction.

En effet, l'algorithme final d'estimation ressemble à un algorithme de prédiction/correction pour la résolution de problèmes numériques comme représenté dans la figure (II-2).

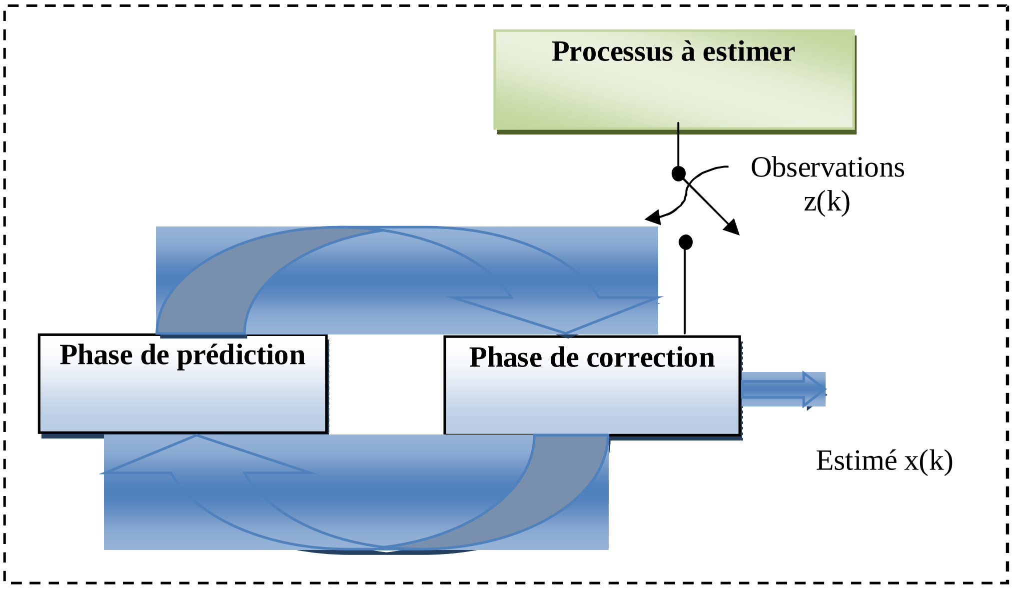


***Fig II-4 : Le cycle du filtre de Kalman discret***

Les équations spécifiques pour les mises à jour de temps et de mesure sont présentées ci-dessous :

$$\hat{x}_k = F\hat{x}_{k-1} + Gu_{k-1} \quad \textbf{II.9}$$

$$P_k^- = FP_{k-1}^- F^T + Q \quad \textbf{II.10}$$

Notons encore comment les équations de mise à jour de temps dans les équations ci-dessous projettent les estimations d'état et de covariance en avant de l'instant k-1 à l'instant k. F et G sont tirées de (II.1), Q de (II.3).

$$K_k = P_k^- H^T \left( H P_k^- H^T + R \right)^{-1} \quad \textbf{II.11}$$

$$\hat{x}(k) = \hat{x}_k^- + K_k \left( z_k - H \hat{x}_k^- \right) \quad \textbf{II.12}$$

$$P_k = \left( I - K_k H \right) P_k^- \quad \textbf{II.13}$$

La première tâche pendant la mise à jour de mesure est de calculer le gain de Kalman $K_k$. Notons que l'équation donnée dans (II.11) est identique à celle de (II.8). La prochaine étape est de calculer une estimation d'état à postériori en incorporant la mesure dans (II.12). L'étape finale est d'obtenir une estimation de la covariance d’erreur à posteriori par l'intermédiaire de (II.13).

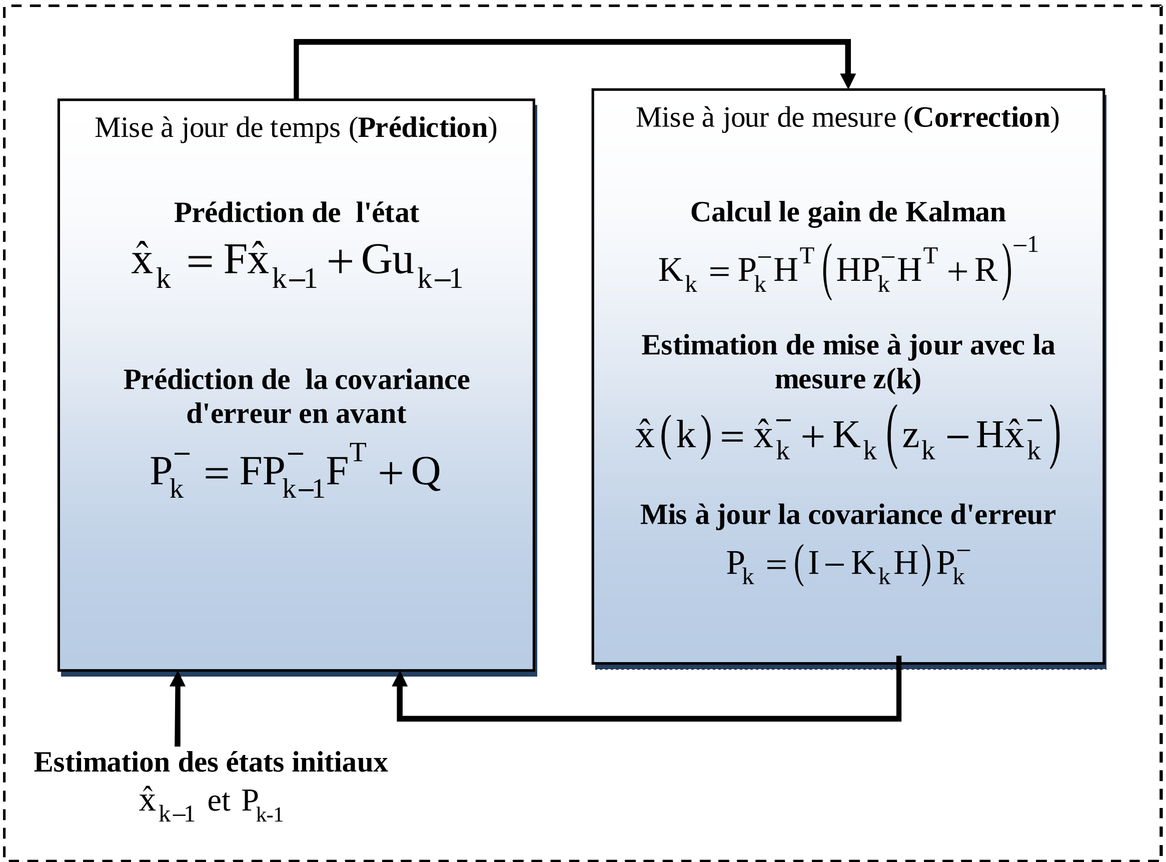


***Fig II-5 : Schéma de l'algorithme du filtre de Kalman***

Ensuite, à chaque instant, le processus se répète avec les estimations précédentes à postériori pour prédire les nouvelles estimations à priori. Cette caractéristique de récursivité est un des grands avantages du filtre de Kalman par rapport à d’autres types de filtre. La figure (II-3) offre une image complète du fonctionnement du filtre, combinant le diagramme à haut niveau de la figure (II-2) avec les équations du filtre.

### II.4.5 Les paramètres et le réglage du filtre

Dans l'utilisation du filtre, La covariance de bruit de mesure R est habituellement mesurée avant utilisation du filtre. La mesure de la covariance d'erreur de mesure R est généralement possible, parce que nous devons être capables de mesurer le processus n'importe comment (pendant le fonctionnement du filtre), ainsi nous devrions généralement pouvoir prendre hors-ligne un nombre d'échantillons de mesure afin de déterminer la variance du bruit de mesure.

La détermination de la covariance de processus de bruit Q est généralement plus difficile car, typiquement, nous n'avons pas la capacité d'observer directement le processus que nous estimons.

Parfois un modèle de processus relativement simple peut produire des résultats acceptables si on injecte assez d'incertitude dans le processus par l'intermédiaire du choix de Q.

Dans d'autres cas, des performances élevées peuvent être obtenues en réglant les paramètres de filtre R et Q.

Le réglage est habituellement réalisé hors-ligne, fréquemment avec l'aide d''un autre filtre de Kalman inséré dans le processus et généralement désigné sous le nom identification de système.

Enfin, notons que dans les conditions où Q et R sont des constantes, la matrice de covariance $P_k$ de l'erreur d'estimation et le gain de Kalman $K_k$ se stabilisent rapidement et tendent vers des constantes. Si c'est le cas, ces paramètres peuvent être calculés à l'avance en faisant fonctionner le filtre hors-ligne, ou par exemple en déterminant la valeur d'équilibre de $P_k$

Cependant dans beaucoup de cas, les valeurs de Q et de R ne sont pas des constantes. Dans ces conditions, ils doivent être ajustés en fonction des besoins.

## II.5 Les applications du filtre

Les applications du filtre de Kalman sont nombreuses dans les métiers de l'ingénieur. Le filtre de Kalman permet de donner un estimé de l'état de système à partir d'une information à priori sur l'évolution de cet état (modèle) et de mesures réelles, il sera utilisé pour :

- § Estimer les conditions initiales inconnues (balistique),
- § Prédire des trajectoires de mobiles (trajectographie),
- § Localiser un engin (navigation, radar,...)
- § Implanter des lois de commande fondées sur un estimateur de l'état et un retour d'état (Commande Linéaire Quadratique Gaussienne)…

## II.6 Initialisation du filtre

Nous avons vu que le filtre de Kalman n'est en fait qu'un algorithme récursif. Il faut lui fournir donc un estimé à priori initial ainsi que la matrice de covariance de son erreur. Dans cette section, nous verrons comment choisir adéquatement ces paramètres initiaux afin d'assurer le bon fonctionnement du pistage.

De façon optimale, la matrice de covariance P(k) de l'erreur d'estimation doit représenter en tout temps et le plus fidèlement possible la précision de la piste calculée.

Ce principe vaut aussi pour l'instant d'initialisation du filtre. Il arrive quelquefois de rencontrer une technique d'initialisation qui consiste à choisir n'importe quelle valeur pour $x(0|-1)$ et à prendre $P(0|-1)$ très grande. Cette méthode a comme désavantage de conserver P(k) élevée pendant une grande période, délaissant ainsi l'information apportée par les mesures durant cette période.

Une méthode plus efficace permet de conserver l'optimalité de la piste calculée. Dans le cas d'une mesure de position (abscisse et ordonné), supposons qu'à l'instant $t = t\,(0)$ nous ayons en mémoire les deux vecteurs de mesures $z(-1)$ et $z(0)$ où $z(k) = [x_m(k) \;\; y_m(k)]^T$ et que $\Delta_t(-1)$ représente 1'intervalle de temps entre t(-1) et t(0). Nous pouvons alors former l'estimé à priori initial du vecteur d'état (position et vitesse) de la manière suivante:

$$\hat{x}(0|-1) = \begin{bmatrix} z(0,1) \\ \dfrac{z(0,1) - z(-1,1)}{\Delta t(-1)} \\ z(0,2) \\ \dfrac{z(0,2) - z(-1,2)}{\Delta t(-1)} \end{bmatrix} \qquad \textbf{II.32}$$

Où z (k, i) représente la i$^{ème}$ composante du vecteur de mesure à l'instant t(k). La matrice de covariance de l'erreur de l'estimé a priori initial est donnée par :

$$P(0|-1) = \begin{bmatrix} \sigma_x^2 & \frac{\sigma_x^2}{\Delta t(-1)} & \sigma_{xy}^2 & \frac{\sigma_{xy}^2}{\Delta t(-1)} \\ \frac{\sigma_x^2}{\Delta t(-1)} & \frac{2\sigma_x^2}{\Delta t(-1)^2} & \frac{\sigma_{xy}^2}{\Delta t(-1)} & \frac{2\sigma_{xy}^2}{\Delta t(-1)^2} \\ \sigma_{xy}^2 & \frac{\sigma_{xy}^2}{\Delta t(-1)} & \sigma_y^2 & \frac{\sigma_x^2}{\Delta t(-1)} \\ \frac{\sigma_{xy}^2}{\Delta t(-1)} & \frac{2\sigma_{xy}^2}{\Delta t(-1)^2} & \frac{\sigma_y^2}{\Delta t(-1)} & \frac{2\sigma_y^2}{\Delta t(-1)^2} \end{bmatrix} \qquad \textbf{II.33}$$

Les équations (II.32) et (II.33) permettent donc d'initialiser correctement le filtre de Kalman à partir des mesures.

## II.7 Modèle mathématique du mouvement de la cible

Le modèle mathématique de la cible doit exprimer la relation existante entre les variables d'état actuelles (à l'instant k) en fonction des variables précédentes (à l'instant k-1). L'état d'une cible est complètement défini par sa position, sa vitesse. Donc, les équations différentielles discrètes exprimant le mouvement de la cible sur l'axe des abscisses X sont :

$$x(k+1) = x(k) + T\dot{x}(k)$$

Où $\dot{x}(i)$ et $x(i)$ sont respectivement la vitesse et la position de la cible au i$^{ème}$ scan (balayage) de l'antenne, T est la période de balayage de l'antenne,

Comme le volume de calcul augmente avec l'augmentation du nombre de variables d'état, nous supposons que la trajectoire d'une cible est constituée de segments rectilignes. Les variables d'état du modèle du mouvement de la cible dans un plan sont donc la position (x,y) et la vitesse $(\dot{x}, \dot{y})$. Par conséquent le modèle du mouvement est donné par l'équation suivante :

$$x(k+1) = Fx(k).$$

Avec :

$$x(k)=\begin{bmatrix} x(k) \\ \dot{x}(k) \\ y(k) \\ \dot{y}(k) \end{bmatrix},\ F=\begin{bmatrix} 1 & T & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & T \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Où x(k) est le vecteur d'état de la cible à l'instant k, F est la matrice de transition :

Le modèle de la mesure z(k) est donné par l'équation suivante:

$$z(k)=Hx(k)+v(k)$$

Avec :

$$z(k)=\begin{bmatrix} x_m(k) \\ y_m(k) \end{bmatrix}, H=\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \text{ et } v(k)=\begin{bmatrix} v_x(k) \\ v_y(k) \end{bmatrix}$$

Où H est la matrice d'observation, z(k) est le vecteur des mesures fournies par le radar (après transformation polaire → cartésienne), dont la matrice de covariance est R, donnée par l'équation (II.5).

## II.8 Conclusion

Dans cette partie nous avons cité les différents filtres utilisés pour l'estimation d'état, commençant par le filtre de Kalman standard qui est conçu pour estimer les états des modèles linéaire.

# III. FILTRAGE DE KALMAN NON LINEAIRE

## III.1 Introduction

Le filtre de Kalman est donc un ensemble d'équations très efficace pour obtenir la solution optimale d'un problème dont on n'a qu'une connaissance partielle. Son efficacité vient de son adaptabilité suivant le nombre de capteurs traités, la qualité des informations recueillies ou la modélisation du système qui peut être linéaire ou non, grâce au filtre étendu.

En effet, comme le filtre de Kalman simple, le filtre étendu nous permet d'obtenir une estimation de variance minimale à partir d'observations qui ne sont pas exactes. Par contre, c'est une méthode approximative qui n'arrive pas toujours à converger car la précision du modèle dépend en grande partie des valeurs de l'état initial que l'on choisit de façon plus ou moins empirique.

## III.2 Le filtre de Kalman étendu (EKF)

Le filtre de Kalman tel que présenté à la section précédente permet d'estimer dans le temps l'état d'un procédé défini par une équation linéaire. Cependant, dans la réalité, l'hypothèse de linéarité d'un procédé ne peut pas toujours être utilisée.

Le filtre de Kalman ne peut donc pas être utilisé, mais ça ne veut pas dire que tout doit être jeté de ce qui a été proposé. En effet, une astuce permet d'ajuster le filtre pour un procédé avec une équation non linéaire pour linéariser les variables dont le filtre a besoin.

L'idée est de linéariser localement sur la moyenne et la variance de la sortie du procédé. Avec les séries de Taylor, une linéarisation de l'estimation peut être effectuée en utilisant les dérivées partielles des fonctions du procédé $f$ et de mesure $h$. Cette linéarisation utilise l'hypothèse que l'erreur sur la dérivée est petite, ainsi, la série de Taylor est tronquée dès le premier ordre.

Supposons que notre processus a un vecteur d'état régi par l'équation différentielle stochastique non linéaire suivante :

$$x_k = f\left(x_{k-1}, u_{k-1}, w_{k-1}\right) \qquad \textbf{III.1}$$

Avec une mesure $z \in \Re^m$ de la forme :

$$z_k = h\left(x_k, v_k\right) \qquad \textbf{III.2}$$

Où les variables aléatoires $w_k$ et $v_k$ représentent les bruits d'état et de mesure comme en III.3 et III.4.

La fonction f non linéaire dans l'équation différentielle III.1 relie l'état à l'étape $k-1$ à l'état à l'étape courante k. Elle inclut les paramètres de commande $u_{k-1}$ et le bruit de processus $w_k$ de moyenne nulle. La fonction non linéaire h dans l'équation de mesure III.2 relie l'état $x_k$ à la mesure $z_k$.

Dans la pratique, on ne connaît pas les valeurs du bruit $w_k$ et $v_k$ à chaque instant. Cependant, on peut approximer le vecteur d'état et de mesure sans elles en écrivant :

$$\hat{x}_k = f\left(\hat{x}_{k-1}, u_{k-1}, 0\right) \qquad \textbf{III.3}$$

$$\hat{z}_k = h\left(\hat{x}_k, 0\right) \qquad \textbf{III.4}$$

Où $\hat{x}_k$ est une certaine estimation à postériori de l'état.

Il est important de noter qu'une faille fondamentale de l'EKF est que les distributions (ou les densités dans le cas continu) des diverses variables aléatoires ne sont plus normales après avoir subi les transformations non-linéaires respectives. L'EKF est simplement un estimateur Ad-Hoc d'état qui approche seulement l'optimalité de la règle de Bayes par la linéarisation.

$$x_k = \tilde{x}_k + A\left(x_{k-1} - \hat{x}_{k-1}\right) + W w_{k-1} \qquad \textbf{III.5}$$

$$z_k = \tilde{z}_k + H\left(x_k - \tilde{x}_k\right) + V v_k \qquad \textbf{III.6}$$

Où :

- $x_k$ et $z_k$ sont les vecteurs réels d'état et de mesure,
- $\tilde{x}_k$ et $\tilde{z}_k$ sont les vecteurs approchés d'état et de mesure (III.3) et (III.4),
- $\tilde{x}_k$ est une estimée à postériori de l'état à l'instant k,
- $w_k$ et $v_k$ représentent les bruits d'état et de mesure,
- $A$ est la matrice Jacobienne des dérivées partielles de f en fonction de x, soit :

$$A_{[ï,j]} = \frac{\partial f_{[i]}}{\partial x_{[j]}}\left(\hat{x}_{k-1}, u_{k-1}, 0\right)$$

§ $W$ est la matrice Jacobienne des dérivées partielles de f en fonction de w :

$$W_{[ï,j]} = \frac{\partial f_{[i]}}{\partial w_{[j]}}\left(\hat{x}_{k-1}, u_{k-1}, 0\right)$$

§ H est la matrice Jacobienne des dérivées partielles de h en fonction de x :

$$H_{[ï,j]} = \frac{\partial h_{[i]}}{\partial x_{[j]}}\left(\tilde{x}_k, 0\right)$$

§ V est la matrice Jacobienne des dérivées partielles de h en fonction

$$V_{[ï,j]} = \frac{\partial h_{[i]}}{\partial v_{[j]}}\left(\tilde{x}_k, 0\right)$$

Maintenant, nous définissons une nouvelle notation pour l'erreur de prédiction :

$$\tilde{e}_{x_k} \equiv x_k - \hat{x}_k \qquad \textbf{III.7}$$

Et le résidu de mesure :

$$\tilde{e}_{z_k} \equiv z_k - \hat{z}_k\theta \qquad \textbf{III.8}$$

Il faut se rappeler que dans la pratique, on n'a pas accès à $x_k$ dans (III.7), c'est le vecteur réel d'état, c'est-à-dire la quantité qu'on essaye d'estimer. D'autre part, on a accès à $z_k$ dans (III.8), qui est la mesure réelle qu'on utilise pour estimer $x_k$. En utilisant (III.7) et (IV.8), nous pouvons écrire les équations d'erreur comme :

$$\tilde{e}_{x_k} \approx A\left(x_{k-1} - \hat{x}_{k-1}\right) + \varepsilon_k \qquad \textbf{III.9}$$

$$\tilde{e}_{z_k} \approx H\bar{e}_{x_k} - \eta_k \qquad \textbf{III.10}$$

Où $\varepsilon_k$ et $\eta_k$ représentons de nouvelles variables aléatoires indépendantes ayant des moyennes nulles et des matrices de covariance $WQW^T$ et $VRV^T$, avec Q et R données par (III.3) et (III.4) respectivement.

Notons que les équations (III.9) et (III.10) sont linéaires, et qu'elles ressemblent aux équations de différence et de mesure (III.1) et (III.2) du filtre de Kalman discret. Ceci nous motive pour utiliser le résidu de mesure $\tilde{e}_{z_k}$ dans(III.1) et un deuxième filtre (hypothétique) de Kalman pour estimer l'erreur de prédiction $\tilde{e}_{x_k}$ donnée par(III.9).

Cette estimation, notée $\hat{e}_k$ , peut alors être utilisée avec (III.7) pour obtenir une estimation à postériori d'état pour le processus non linéaire original comme :

$$\hat{x}_k = \tilde{x}_k + \hat{e}_{x_k} \qquad \textbf{III.11}$$

Les variables aléatoires de (III.9) et (III.10) ont approximativement les distributions de probabilité suivantes:

$$p\left(\tilde{e}_{x_k}\right) \sim N\left(0, E\left[\tilde{e}_{x_k} \tilde{e}_{x_k}^T\right]\right)$$

$$p\left(\varepsilon_k\right) \sim N\left(0, WQ_k W^T\right)$$

$$p\left(\eta_k\right) \sim N\left(0, VR_k V^T\right)$$

Etant donné ces approximations et en annulant $\hat{e}_k$, l'équation du filtre de Kalman utilisée pour estimer $\hat{e}_k$ est :

$$\tilde{e}_k = K_k \tilde{e}_{z_k} \qquad \textbf{III.12}$$

En substituant (III.12) de nouveau dans (III.11) et en se servant (III.8) nous voyons que nous n'avons pas besoin réellement du deuxième filtre (hypothétique) de Kalman:

$$\begin{aligned} \hat{x}_k &= \tilde{x}_k + K_k \tilde{e}_{z_k} \\ &= \tilde{x}_k + K_k \left(z_k - \tilde{z}_k\right) \end{aligned} \qquad \textbf{III.13}$$

L'équation(III.26) peut maintenant être employée pour la mise à jour de mesure dans le filtre de Kalman étendu, avec $\tilde{x}_k$ et $\tilde{z}_k$ tirés de(III.16) et (III.17) et le gain de Kalman $K_k$ venant de (III.11), avec la substitution appropriée pour la covariance d'erreur de mesure.

L'ensemble complet d'équations d'EKF est donné ci-dessous dans les équations (III.14) à (III.18).

$$\hat{x}_k^- = f\left(\hat{x}_{k-1}, u_{k-1}, 0\right) \qquad \textbf{III.14}$$

$$P_k^- = A_k P_{k-1} A_k^T + W_k Q_{k-1} W_k^T \qquad \textbf{III.15}$$

$$K_k = P_k^- H_k^T \left( H_k P_k^- H_k^T + V_k R_k V_k^T \right)^{-1} \qquad \textbf{III.16}$$

$$\hat{x}_k = \hat{x}_k^- + K_k \left( z_k - h\left( \hat{x}_k^-, 0 \right) \right) \qquad \textbf{III.17}$$

$$P_k = \left( I - K_k H_k \right) P_k^- \qquad \textbf{III.18}$$

La figure (III.1) montre une image complète du filtre EKF.

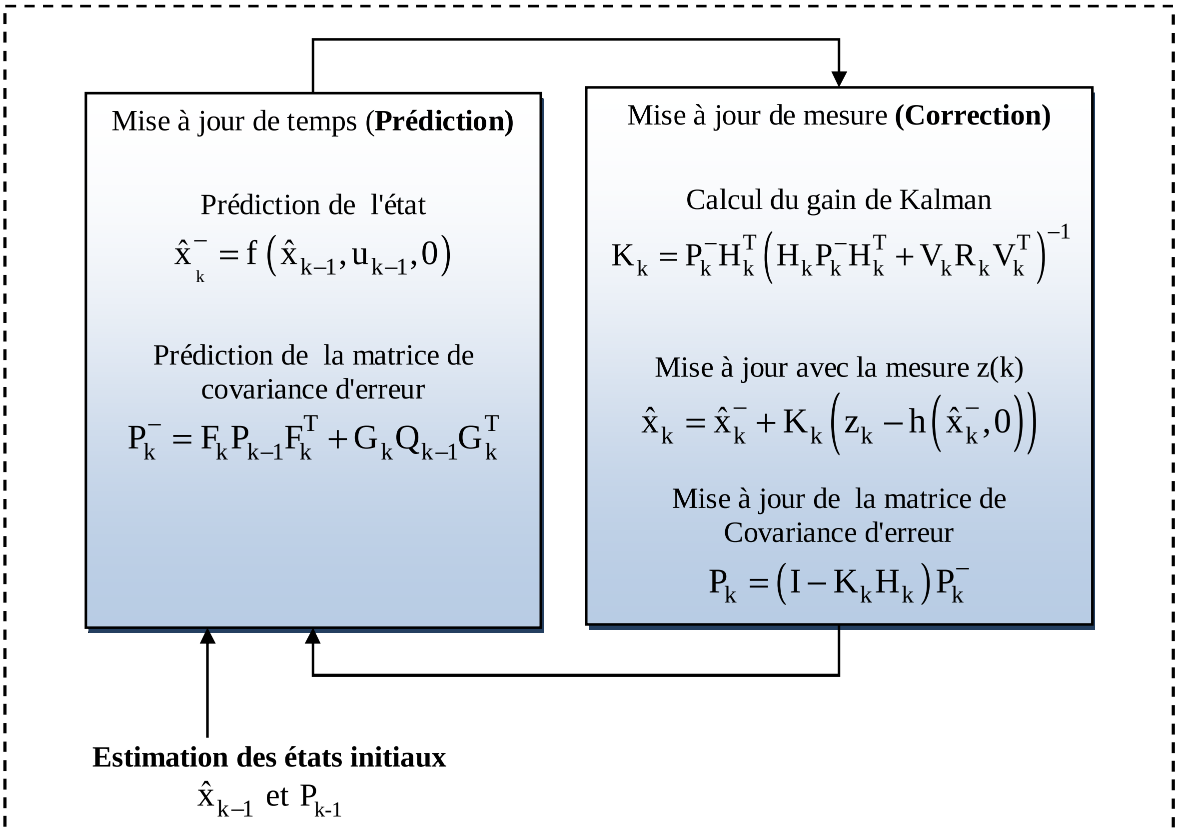


***Fig III-1 :Schéma de l'algorithme du filtre de Kalman étendu***

## III.3 Le filtre de Kalman sans parfum (Unscented Kalman Filter UKF)

### III.3.1 La transformée inodore « Unscented Transform »

Considérons une variable aléatoire *x* de dimensions *n*, qui est transformée par un procédé non linéaire g(.), tel que y = g(x) et x a une moyenne $\overline{X}$ et une variance $p_x$. Pour calculer les statistiques de y, une matrice $X$ de dimensions 2n + 1 vecteurs sigma i, chacun de poids $W_i$ est formée selon les équations suivantes:

$$X_0 = \overline{x}$$
$$X_0 = \overline{x} + \left(\sqrt{(n+\lambda)p_x}\right)_i \qquad \textbf{III.19}$$
$$X_{i+1} = \overline{x} - \left(\sqrt{(n+\lambda)p_x}\right)_i$$

$$W_0 = \frac{\lambda}{n+\lambda}$$
$$W_i = \frac{1}{2(n+\lambda)} \qquad \textbf{III.20}$$
$$W_{i+n} = \frac{1}{2(n+\lambda)}$$

Où $\lambda \in \Re$ est un facteur d'échelle permettant d'ajuster l'étendue du choix des points sigmas autour de $\overline{x}$ et $\left(\sqrt{(n+\lambda)p_x}\right)_i$ est la i ème rangée de la matrice des racines carrées $(n+\lambda)p_x$ Le poids W0 correspondant au point sigma $W_0$ (ou $\overline{x}$ ) a le poids le plus élevé et plus le point sigma s'éloigne de ce point central, plus le poids est faible.

Pour aider à visualiser, en fixant $\overline{x} = 0, p_x = 1, \lambda = 0, n = 2$ alors les points sigmas $X_i$ seront disposés de façon symétrique par rapport aux axes de coordonnées autour de $\overline{x} = 0$, et chaque point sigma à un poids $W_i = \frac{1}{2n} = \frac{1}{4}$ comme exprimé à la figure III.2.

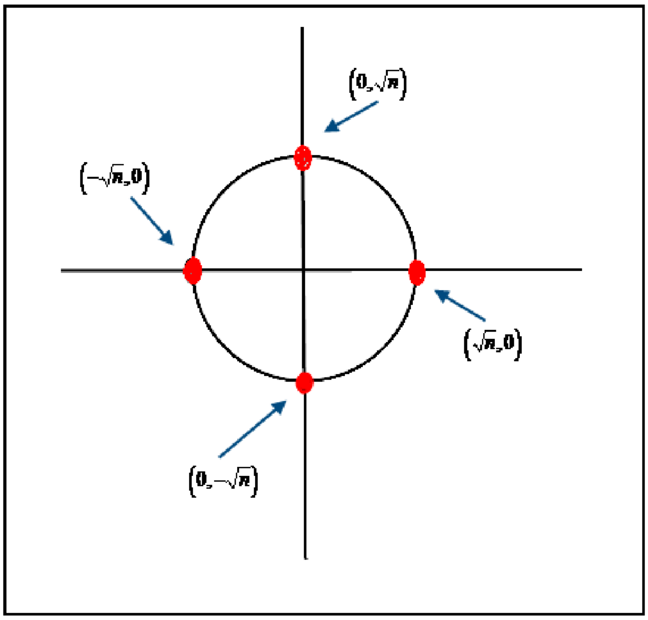


***Fig III-2 : Disposition des points sigmas*** $X_i$

La procédure de transformation comprend les étapes suivantes :

**1.** Transformer chaque point sigma $X_i$ en le faisant passer dans le procédé non linéaire imagé à la figure III.3, tel que

$$Y_i = g\left(X_i\right) \qquad \textbf{III.21}$$

**2.** Calculer la moyenne pondérée des points transformés

$$\overline{y} = \sum_{i=0}^{2n} W_i Y_i \qquad \textbf{III.22}$$

**3.** Calculer la covariance pondérée des points transformés

$$p_{xx} = \sum_{i=0}^{2n} W_i \left[Y_i - \overline{y}\right]\left[Y_i - \overline{y}\right]^T \qquad \textbf{III.23}$$

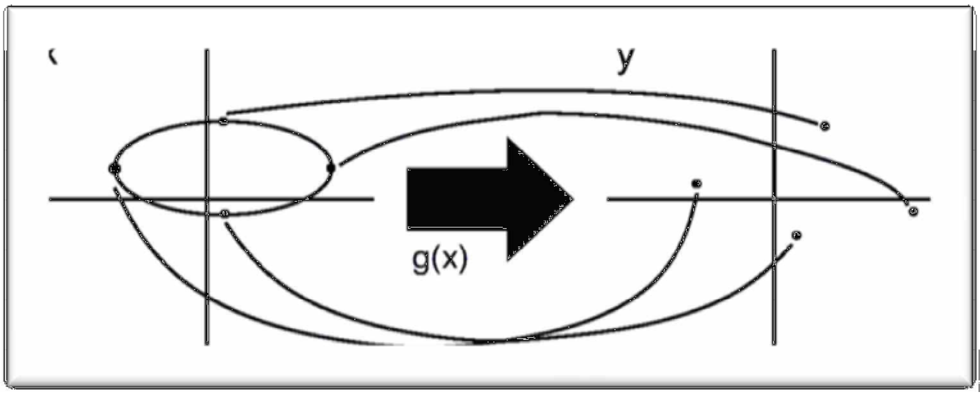


***Fig III-3 : Principe de la transformation sans parfum***

Certaines propriétés de cet algorithme sont énumérées ici :

- Puisque c'est la distribution de *x* qui est approximée plutôt que le procédé, la série de Taylor sous-jacente n'a pas à être tronquée à un ordre spécifique, ce qui peut aider à obtenir des résultats plus précis.
- Les points sigma ont la même moyenne et covariance quel que soit le choix de la matrice de racine carrée choisie.
- La moyenne et la covariance est calculée par des opérations matricielles usuelles.

Ceci implique que l'algorithme fonctionnera peu importe le choix du modèle du procédé (facilement dérivable ou non) et l'implémentation est rapide car elle n'implique pas l'évaluation des matrices Jacobéennes que l'EKF nécessite.

- Le paramètre $\lambda$ permet d'ajuster les moments d'ordres supérieurs et de réduire l'erreur de prédiction globale. Quand l'hypothèse d'une distribution gaussienne est émise, il est suggéré d'utiliser $n + \lambda = 3$.

### III.3.2 Le filtre de Kalman avec la transformée inodore

Quelques modifications aux équations du filtre de Kalman doivent être apportées. D'abord, le vecteur d'état *x* est augmenté avec les termes du bruit de procédé,

$$X^a(k) = \begin{bmatrix} x(k) \\ v(k) \end{bmatrix} \qquad \textbf{III.24}$$

Et la transformée inodore prend ses $2n^a + 1$ points sigmas à partir de

$$x^a(k \backslash k) = \begin{pmatrix} \hat{x}(k \backslash k) \\ 0_{q*1} \end{pmatrix} \qquad \textbf{III.25}$$

Et de

$$P^a = \begin{bmatrix} P(k/k) & P_{xv}(k/k) \\ P_{xv}(k/k) & Q(k/k) \end{bmatrix}$$

L'expression après le symbole | indique l'étape maximum à laquelle les informations de mesure peuvent être utilisées. Ainsi, l'expression $\hat{x}(i \backslash j)$ signifie que ce terme est l'estimation de $x(i)$ effectuée en utilisant les informations de mesure jusqu'à l'étape *j*, inclusivement, soit $z^j = [z(1),...,z(j)]$ La covariance de cet estimation est $p(i \backslash j)$ $p_{xv}(k \backslash k)$ est la covariance entre l'état et le bruit du procédé.

Le fait que le bruit du procédé soit aussi introduit dans le calcul de la covariance implique que l'impact du bruit dans ce calcul aura la même précision que l'incertitude de l'état. Par ailleurs, l'implémentation d'un modèle où le procédé a une source qui génère du bruit corrélé peut facilement être implémentée à l'aide de ce modèle.

Les équations de prédiction du filtre de Kalman inodore ainsi que les modifications à l'étape de correction sont décrits à la figure III.5

$$k = k+1$$

$$\hat{x}^{-}, \hat{z}_k^{-}, P_k^{-}, P_{xz}, P_{zz}$$

**(Prédiction)**

**1) Calcul des points sigma en appliquant les : eq 21,22 aux systèmes augmenté de eq : 26 et 27**

**2) Transformation des points sigma à trouver le modèle du procédé**

$$X_{i,k+1/k} = f\left[X_{i,k/k}, U(k), K\right]$$

**3) Projection vers l'avant de l'état du procédé**

$$\hat{x}^{-}_{i,k+1/k} = \sum_{i=0}^{2n^a} W_i x^{a}_{i,k+1/k}$$

**4) projection vers l'avant de la covariance de l'erreur**

$$P^{-}_{k+1/k} = \sum_{i=0}^{2n^a} W_i \left[X^{a}_{i,k+1/k} - \hat{x}_{k+1/k}\right]\left[X^{a}_{i,k+1/k} - \hat{x}_{k+1/k}\right]^T$$

**5) Transformation des points sigma à travers le modèle d'observation**

$$z_{i,k+1/k} = h\left[X^{a}_{i,k+1/k}, U(k), K\right]$$

**6) Prédiction de l'observation**

$$\hat{z}_{i,k+1/k} = \sum_{i=0}^{2n^a} W_i Z_{i,k+1/k}$$

**7) calcul de la covariance de l'innovation (résiduel)**

$$P_{zz,k+1/k} = R_{k+1/k} + \sum_{i=0}^{2n^a} W_i \left[z_{i,k+1/k} - \hat{z}_{k+1/k}\right]\left[z_{i,k+1/k} - \hat{z}_{k+1/k}\right]^T$$

**8) calcul de la matrice d'auto corrélation**

$$P_{xz,k+1/k} = R_{k+1/k} + \sum_{i=0}^{2n^a} W_i \left[X_{i,k+1/k} - \hat{x}_{k+1/k}\right]\left[z_{i,k+1/k} - \hat{z}_{k+1/k}\right]^T$$

**(Correction)**

1) Calcul du gain de Kalman

$$K_k = P_{xz} P_{zz}^T$$

2) Mise à jour avec la mesure z(k)

$$\hat{x}_k = \hat{x}_k^{-} + K_k\left(z_k - \hat{z}_k^{-}\right)$$

3) Mise à jour de Covariance d'erreur

$$P_k = P_k^{-} - K_k P_{zz} K_k^T$$

$$\hat{x}_k \ , P_k$$

**Estimation des états initiaux**

$$\hat{x}_0^{-}, z_0^{-1}, P_0^{-1}, P_{xz} \text{ et } P_{zz}$$

***Fig III -4 : Cycle de prédiction-correction du filtre de Kalman inodore (UKF)***

En plus de la partie ayant directement rapport au calcul des points sigmas, une différence frappante avec l'EKF est l'apparition de la prédiction sur la mesure $\hat{z}_k^-$ et le calcul un peu différent du résiduel, qui utilise la covariance pondérée de l'erreur sur la prédiction sur la mesure et qui affecte le calcul du gain de Kalman.

## III.4 Le filtre de Kalman sans parfum normalisé (Scaled Unscented Kalman Filter : SUKF)

Comme décrit précédemment, la transformation sans parfum approxime une variable aléatoire $x$ de dimension $n$ de moyenne $\hat{x}$ et de covariance $p$ par $2n+1$ échantillons. Comme la dimension de l'espace d'état augmente, le rayon de la sphère qui borne tout les points augmente également. Pour réguler ceci, nous opérons comme suit pour mesurer les points (échantillons), les nouveaux points et les poids utilisés pour trouver la moyenne sont :

$$X_i^{'} = X_0 + \alpha\left(X_i - X_0\right) \qquad \textbf{III.26}$$

$$W_i^{'} = \begin{cases} \dfrac{W_0}{\alpha^2} + 1 - \dfrac{1}{\alpha^2} & \text{i i } i = 0. \\ \dfrac{W_i}{\alpha^2} & \text{i i } i \neq 0 \end{cases} \qquad \textbf{III.27}$$

La covariance est calculée en utilisant l'ensemble modifié de poids :

$$W_i^{''} = \begin{cases} \dfrac{W_0}{\alpha^2} + 2 - \dfrac{1}{\alpha^2} - \alpha^2 + \beta & \text{i i } i = 0. \\ \dfrac{W_i}{\alpha^2} & \text{i i } i \neq 0 \end{cases} \qquad \textbf{III.28}$$

Ou $\alpha$ et $\beta$ sont des paramètres réglables.la moyenne et la covariance sont données par :

$$Y_i^{'} = f\left(X_i^{'}\right) \qquad \textbf{III.29}$$

$$\hat{Y}^{'} = \sum_{i=0}^{2n} W_i^{'} Y_i^{'} \qquad \textbf{III.30}$$

$$p_{yy}^{'} = \sum_{i=0}^{2n} W_i^{''} \left\{Y_i^{'} - \hat{Y}^{'}\right\}\left\{Y_i^{'} - \hat{Y}^{'}\right\}^T \qquad \textbf{III.31}$$

Il ne reste qu'à placer les paramètres réglables $k, \alpha, \text{et} \beta$ En général il est recommandé de prendre $\beta = 2$.

Pour capturer une partie du terme du quatrième ordre dans le développement en sérié de Taylor de la covariance, nous choisissons :

$$\alpha = \frac{1}{\sqrt{n}}$$

La matrice de covariance estimée $p'_{yy}$ est garantie d'être semi définie positive si tous les poids non transformés sont négatifs, ce qui établie la condition $k$ ¤ $0$.Nous voulons également que les poids transformés soient non négatifs pour la robustesse (si un point a un poids essentiellement négatif, alors une non linéarité peut mener à une moyenne estimée biaisée et covariance gonflée), ce qui établie la condition stricte :

$k$ ¤ $n^2 - n$ **III.32**

Nous choisissons réellement de rendre tous les poids transformés égaux ; de sorte que

$k$ ¤ $n^2 - \frac{n}{2}$ **III.33**

Le filtre de Kalman sans parfum (UKF) emploie l'UT pour les deux transformations (modèle de processus et fonction d'observation) exigées par le filtre de Kalman. Il fournit l'estimation minimum de l'erreur quadratique moyenne (MMSE) de l'état d'un système discret non linéaire. Soit le système défini comme suit :

$$x(k+1) = f\left(x(k), u(k), v(k), k\right) \quad \textbf{III.34}$$

$$z(k) = h\left(x(k), u(k), k\right) + w(k) \quad \textbf{III.35}$$

Ou $x(k)$ est l'état du système à l'instant $k$, $f(k)$ et $h(k)$ sont des fonctions non linéaires, respectivement du processus et de mesure $u(k)$est le vecteur d'entré, $v(k)$ est le bruit de processus, $z(k)$est l'observation, et $w(k)$ est un bruit additif de mesure $v$ et $w$ sont supposés de moyennes nulles et :

$$E\left[v(k)v^T(j)\right] = \delta_{kj} Q(k)$$

$$E\left[w(k)w^T(j)\right] = \delta_{kj} R(k)$$

$$\delta_{kj} = 1 \quad \text{Pour } k = j$$

$$E\left[v(k)w^T(j)\right]=0, \text{ i } \text{ i } \forall k, j \qquad \textbf{III.36}$$

Une matrice augmente de covariance est construite avec $P, Q$ et $R$ sur le diagonale.

L'état prédit $\hat{x}(k+1/k)$ et sa covariance $p(k+1/k)$ sont donnés par :

$$X_i^{'}(k+1/k)=f\left(X_i^{'}(k/k),u(k),k\right) \qquad \textbf{III.37}$$

$$\hat{x}(k+1/k)=\sum_{i=0}^{2n} W_i^{'} Y_i^{'}(k+1/k) \qquad \textbf{III.38}$$

$$p(k+1/k)=\sum_{i=0}^{2n} W_i^{''}\left\{X_i^{'}(k+1/k)-\hat{x}(k+1/k)\right\}\left\{X_i^{'}(k+1/k)-\hat{x}(k+1/k)\right\}^T \qquad \textbf{II.39}$$

L'observation prédite $\hat{z}$, et sa covariance $p_{zz}$ et la corrélation $p_{xz}$ sont estimées comme suit :

$$z_i(k+1/k)=h\left(X_i^{'}(k+1/k),u(k),k+1\right) \qquad \textbf{III.40}$$

$$\hat{z}_i(k+1/k)=\sum^{2n} W_i^{'} z_i(k+1/k) \qquad \textbf{III.41}$$

$$P_{zz}=\sum_{i=0}^{2n} W_i^{''}\left\{z_i\,(k+1/k)-\hat{z}(k+1/k)\right\}\left\{z_i\,(k+1/k)-\hat{z}(k+1/k)\right\}^T \qquad \textbf{III.42}$$

$$P_{xz}=\sum_{i=0}^{2n} W_i^{''}\left\{X_i^{'}(k+1/k)-\hat{x}(k+1/k)\right\}\left\{z_i\,(k+1/k)-\hat{z}(k+1/k)\right\}^T \qquad \textbf{III.43}$$

L'état estimé $\hat{x}(k/k)$ à l'instant $k$ et sa covariance $p(k/k)$, sont donnés par :

$$P_{yy}(k+1/k)=R(k+1)+P_{zz}(k+1/k) \qquad \textbf{III.44}$$

$$K(k+1)=P_{xz}(k+1/k)P_{yy}^{-1}\,(k+1/k) \qquad \textbf{III.45}$$

$$\hat{x}(k+1/k+1)=\hat{x}(k+1/k)+K(k+1)\left(z(k+1)-\hat{z}(k+1/k)\right) \qquad \textbf{III.46}$$

$$p(k+1/k+1)=p(k+1/k)-K(k+1)P_{yy}(k+1/k)K^T(k+1) \qquad \textbf{III.47}$$

Ou $K$ est le gain de Kalman.

Pour les fonctions linéaires, l'UKF est équivalent au filtre de Kalman standard .la complexité de l'UKF est identique à celle de l'EKF, mais elle est plus précise et n'exige pas la dérivation de n'importe quelles Jacobiennes.

## III.5 Conclusion

Dans cette partie nous avons cité les différents filtres utilisés pour l'estimation d'état pour les modèles non linéaires (EKF,UKF,..) et on a étudié l'extension du filtre de Kalman pour les modèles non linéaires, qui consiste à linéariser les modèle non linéaires autour des points de fonctionnements.

# IV. SIMULATION ET COMMENTAIRES

## IV.1 Introduction

Dans ce dernier chapitre, nous allons décrire les différents modèles de trajectoires qui vont servir à tester l'algorithme de filtre de Kalman étendu EKF. Nous ferons ensuite une analyse détaillée des résultats que nous avons obtenus lors des simulations que nous effectuées.

## IV.2 L'objet de la simulation

La simulation telle qu'elle est définie généralement est un outil de prédiction permettant d'étudier et d'analyser le comportement des systèmes complexes afin de prendre des décisions de façon plus objective et scientifique.

En simulation, le système est modélisé par un ensemble de structures de données interconnectées et un ensemble de procédures qui opèrent sur ces structures définissant ainsi la dynamique du système.

L'évolution des performances du système est prise d'après son quantitatif c'est-à-dire, lié à démontrer les propriétés du comportement du système, ainsi que sa compréhension à partir de son aspect fonctionnel.

## IV.3 Génération et Modélisation des trajectoires

Pour modéliser la trajectoire d'une cible, nous pouvons affirmer que quelque soit la complexité de cette dernière, Elle pourra toujours être représentée par une succession de trajectoires élémentaire canoniques tels que les segments de droite, des arcs de cercles, des arcs elliptiques,…a partir de la ,nous pouvons dire que pour déterminer la trajectoire suivie par une cible donnée durant un temps t ,il suffit de déterminer les paramètres des différentes trajectoires canoniques suivies par la cible durant ce temps.

Dans notre cas, nous allons restreindre les trajectoires canoniques choisies au segment de droite et à l'arc de cercle.

### IV.3.1 Modélisation de trajectoire rectiligne

Nous modéliserons une droite de la manière suivante :

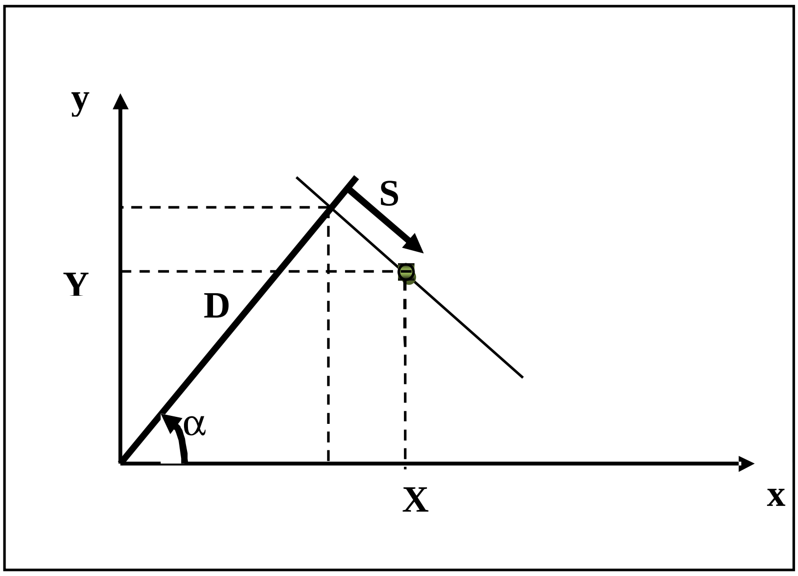


***Fig IV-1 : Génération de la trajectoire rectiligne***

Cette représentation permet de définir toute droite par ces coordonnées plucklériennes qui sont :

- La distance minimale **d** qui sépare la droite de l'origine des coordonnées.
- L'angle **α** que fait l'axe des abscisses avec la droite reliant l'origine à sa projection orthogonale sur la droite considérée.

D'autre part, nous représentons le mouvement sur une droite par les grandeurs suivantes :

- La distance parcourue S.
- La vitesse de déplacement $\dot{S}$.
- L'accélération $\ddot{S}$.

Cette représentation permet d'avoir un découplage entre le mouvement et la trajectoire.

### IV.3.1.1 Mouvement rectiligne à vitesse constante

Le modèle d'état associé à un mouvement rectiligne à vitesse constante sur une droite sera défini comme suit :

$$\begin{cases} s = \left(t_k - t_{k-1}\right) v + s_0 \\ v = \dfrac{ds}{dt} = \dot{s} \end{cases} \qquad \textbf{IV.1}$$

Ou :

$s$ **:** Distance parcourue, $v$ la vitesse et $\left(t_k \text{-} t_{k\text{-}1}\right)$ est la différence du temps.

En discret, ces équations deviennent :

$$\begin{cases} s(k) = \left(t_k - t_{k-1}\right) v(k-1) + s(k-1) \\ v(k) = v(k-1) \end{cases} \qquad \textbf{IV.2}$$

Posons $\begin{cases} x_1(k) = s(k) \\ x_1(k) = v(k) \end{cases}$

On obtient $x(k) = \begin{cases} x_1(k) = x_1(k-1) + Tx_2(k-1) \\ x_2(k) = x_2(k-1) \end{cases}$ **IV.3**

Avec $T = t_k - t_{k-1}$

L'équation du vecteur de paramètres de trajectoire est $\theta(k) = \begin{cases} \alpha \\ d \end{cases}$

Posons $\begin{cases} x_3(k) = \alpha \\ x_4(k) = d \end{cases}$

On obtient $\theta(k) = \begin{cases} x_3(k) = x_3(k-1) \\ x_4(k) = x_4(k-1) \end{cases}$ **IV.4**

Parce qu'ils sont invariants dans le temps, l'état augmenté sera :

$$X(k) = \begin{bmatrix} x(k) \\ \theta(k) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1(k) \\ x_2(k) \\ x_3(k) \\ x_4(k) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} s \\ \dot{s} \\ \alpha \\ d \end{bmatrix}$$

Alors le vecteur d'état sera :

$$X(k) = \begin{pmatrix} s \\ \dot{s} \\ \alpha \\ d \end{pmatrix}$$

$$X(k) = \begin{bmatrix} x_1(k) \\ x_2(k) \\ x_3(k) \\ x_4(k) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1(k-1) + Tx_2(k-1) \\ x_2(k-1) \\ x_3(k-1) \\ x_4(k-1) \end{bmatrix}$$

$$X(k) = \begin{bmatrix} 1 & T & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} X(k-1) \qquad \textbf{IV.5}$$

Sous la forme $X(k+1) = FX(k)$

Alors : $F = \begin{bmatrix} 1 & T & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

Le modèle de mesure sera :

$$z = \begin{bmatrix} X \\ Y \end{bmatrix} = h(x) + w = \begin{bmatrix} s*\sin(\alpha) + d*\cos(\alpha) \\ -s*\cos(\alpha) + d*\sin(\alpha) \end{bmatrix} + w \qquad \textbf{IV.6}$$

Avec X et Y sont les coordonnées cartésiennes de la cible.

$w$ : Bruit de mesure.

Nous remarquons que la matrice de mesure $h(x)$ est non linéaire par rapport au vecteur d'état $x$ .une linéarisation est donc indispensable pour pouvoir implémenter un filtre de Kalman. Ceci est réalisé en considérant une petite variation dans l'état :

$$H_x = \begin{bmatrix} \frac{\partial X}{\partial s} & \frac{\partial X}{\partial \dot{s}} & \frac{\partial X}{\partial \alpha} & \frac{\partial X}{\partial d} \\ \frac{\partial Y}{\partial s} & \frac{\partial Y}{\partial \dot{s}} & \frac{\partial Y}{\partial \alpha} & \frac{\partial Y}{\partial d} \end{bmatrix}$$

Dans ce cas :

$$H_x = \begin{bmatrix} \sin(\alpha) & 0 & -d*\sin(\alpha) + s*\cos(\alpha) & \cos(\alpha) \\ -\cos(\alpha) & 0 & d*\cos(\alpha) + s*\sin(\alpha) & \sin(\alpha) \end{bmatrix} \qquad \textbf{IV.7}$$

### IV.3.2 Modélisation de trajectoire circulaire

Comme pour le cas d'une droite, et pour réaliser un découplage entre le mouvement et la trajectoire, nous définirons un cercle comme suit :

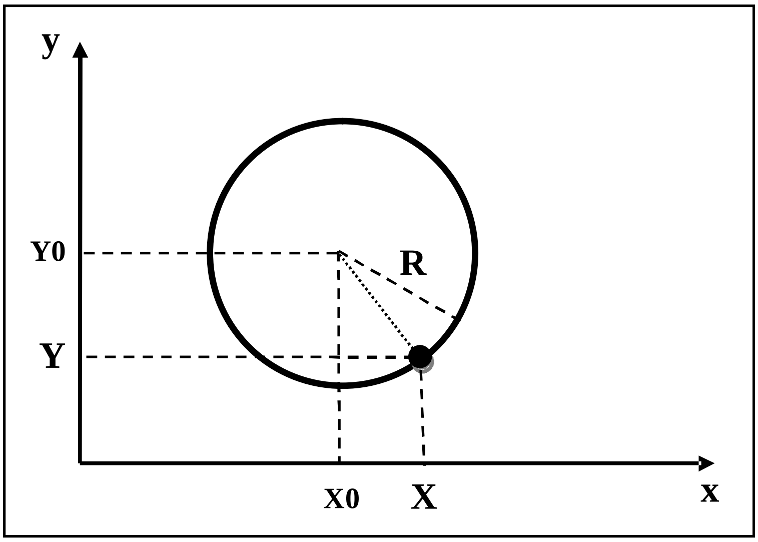


***Fig IV-2 :Génération de la trajectoire circulaire***

Avec :

- $R$ : rayon de cercle.
- $\{X_0, Y_0\}$ **:** centre de cercle.

### IV.3.2.1 Mouvement circulaire à vitesse constante

L'état de base d'un mouvement circulaire à vitesse constante est identique de celui du mouvement rectiligne à vitesse constante, c'est-à-dire :

$$x(k) = \begin{cases} x_1(k) = x_1(k-1) + Tx_2(k-1) \\ x_2(k) = x_2(k-1) \end{cases} \qquad \textbf{IV.8}$$

L'équation du vecteur des paramètres est

$$\theta(k) = \begin{bmatrix} R_0 \\ X_0 \\ Y_0 \end{bmatrix} \qquad \text{Posons : } \begin{bmatrix} x_3(k) = R_0 \\ x_4(k) = X_0 \\ x_5(k) = Y_0 \end{bmatrix}$$

Le vecteur d'état associé à cet un mouvement sur une trajectoire circulaire sera donc :

$$X(k) = \begin{bmatrix} s \\ \dot{s} \\ R_0 \\ X_0 \\ Y_0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1(k) \\ x_2(k) \\ x_3(k) \\ x_4(k) \\ x_5(k) \end{bmatrix}$$

L'équation d'état est :

$$X(k)=\begin{bmatrix} x_1(k) \\ x_2(k) \\ x_3(k) \\ x_4(k) \\ x_5(k) \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} x_1(k-1)+Tx_2(k-1) \\ x_2(k-1) \\ x_3(k-1) \\ x_4(k-1) \\ x_5(k-1) \end{bmatrix}$$

Par conséquent on aura : $F=\begin{bmatrix} 1 & T & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} X(k-1)$ **IV.9**

Sous la forme $X(k+1)=FX(k)$

Le modèle de mesure s’écrira :

$$z=\begin{bmatrix} X \\ Y \end{bmatrix}=h(x)+w=\begin{bmatrix} X_0+R*\cos(S/R)(\alpha) \\ Y_0+R*SIN(S/R)(\alpha) \end{bmatrix}+w \qquad \textbf{IV.10}$$

La matrice de mesure linéarisée de déduit par dérivation de $h_x$

$$H_x=\begin{bmatrix} \frac{\partial X}{\partial s} & \frac{\partial X}{\partial \S} & \frac{\partial X}{\partial R} & \frac{\partial X}{\partial X_0} & \frac{\partial X}{\partial Y_0} \\ \frac{\partial Y}{\partial s} & \frac{\partial Y}{\partial \S} & \frac{\partial Y}{\partial R} & \frac{\partial Y}{\partial X_0} & \frac{\partial Y}{\partial Y_0} \end{bmatrix}$$

Nous aurons alors : $H_x=\begin{bmatrix} -\sin\frac{S}{R} & 0 & \cos\frac{S}{R}+\frac{S}{R}\sin\frac{S}{R} & 1 & 0 \\ \cos\frac{S}{R} & 0 & \sin\frac{S}{R}-\frac{S}{R}\cos\frac{S}{R} & 0 & 1 \end{bmatrix}$ **IV.11**

## IV.4 Simulation et commentaires :

### IV.4.1 Scénario 1 :

Nous nous proposons de poursuivre un mobile se déplaçant le long d’une trajectoire rectiligne de paramètres inconnus à une vitesse constante inconnue. Le problème consiste à déterminer toutes inconnues pour assurer la poursuite du mobile.

Nous considérons qu’au départ rien n’est connu. Par défaut nous initialisons le vecteur d’état par la valeur neutre, autrement dit : $x_0^T=(0\ 0\ 0\ 0)$

La matrice de covariance initiale est de la forme :

$$P_0 = \begin{bmatrix} \sigma^2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \sigma^2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \sigma^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \sigma^2 \end{bmatrix}$$

On note que le terme $P_0(i, j)$ pour $i \neq j$ représente l'inter-corrélation entre la variable d'état d'ordre i et la variable d'ordre j. Nous supposerons que toutes les variables d'état sont implémentés les unes des autres, ce qui nous permet d'écrire $\forall i \neq j$ , $P_0(i, j) = 0$ il est à noter aussi que est $\sigma^2$ prise grande, façon de dire que les valeurs initiales sont loin des conditions réelles de la cible.

Nous prendrons (par exemple) :

$$P_0 = \begin{bmatrix} 5.10^3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 5.10^3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 5.10^3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 5.10^3 \end{bmatrix}$$

L'exemple suivant consiste à estimer le mouvement d'une cible sur une droite dont les paramètres sont : $d = 20$, $\alpha = 45°$ et la vitesse du mouvement est $v = \dot{s} = 2\ m/s$ les résultats obtenus, après application du filtre de Kalman Etendu (EKF) sont illustrés par les figures suivantes.

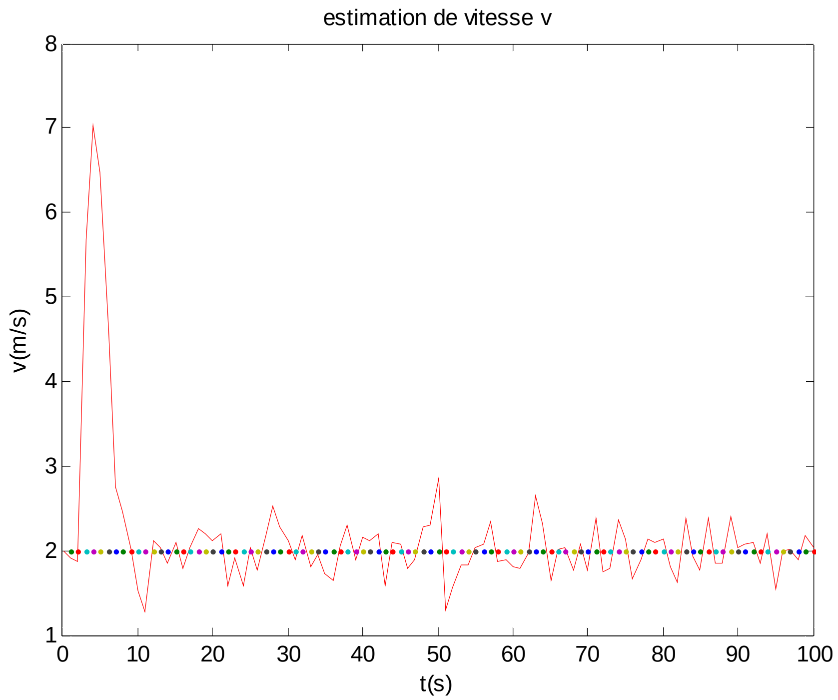


***Fig IV-3:Estimation de la vitesse v***

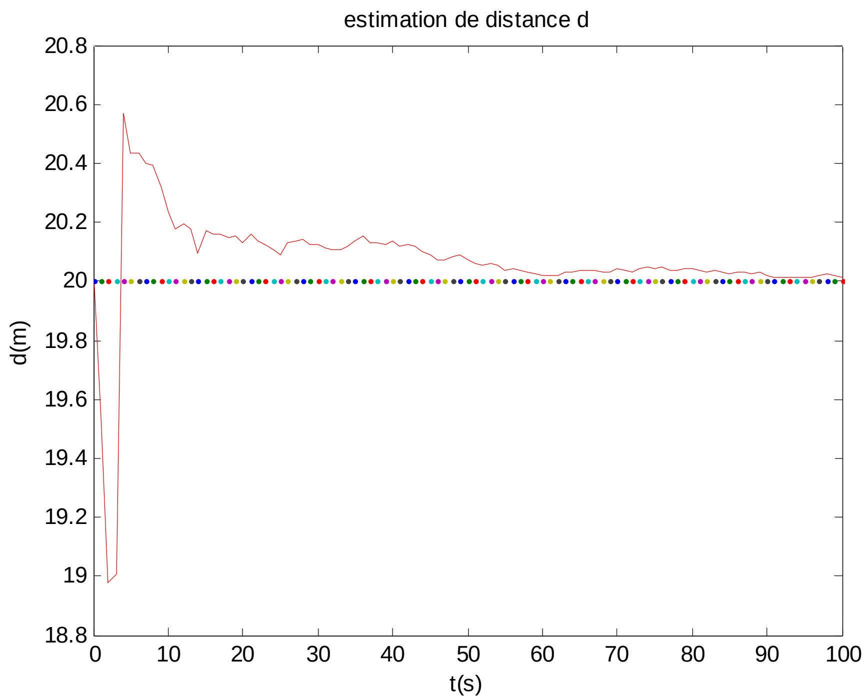


***Fig IV-4:Estimation de la distance d***

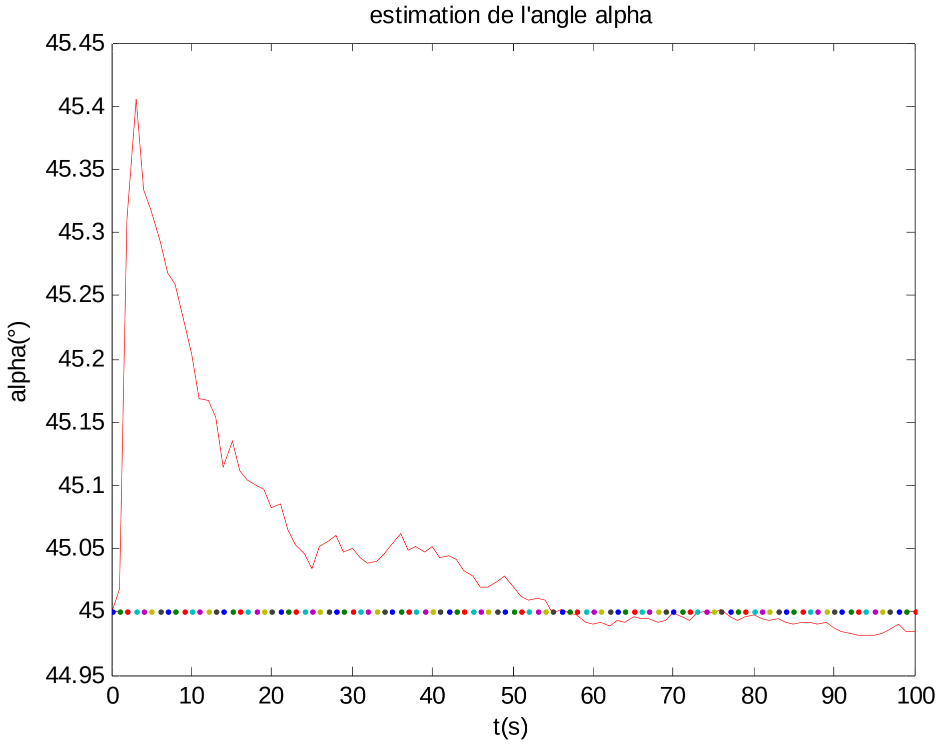


***Fig IV-5:Estimation de l'angle*** α

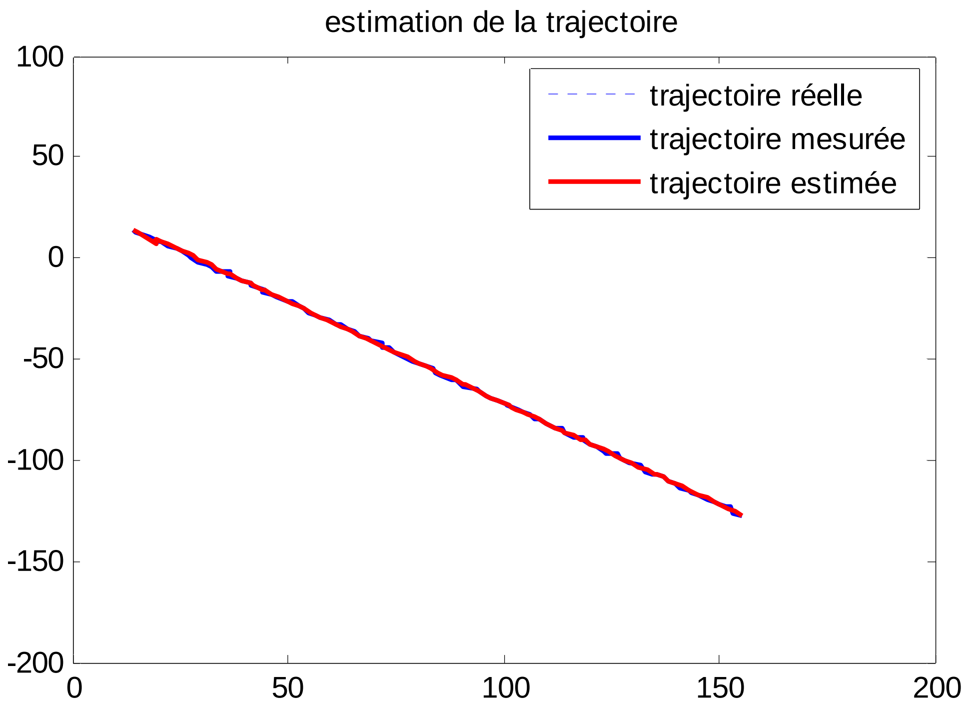


***Fig IV-6:Estimation de la trajectoire rectiligne***

**IV.4.2 Scénario 2 :**

Le problème posé est d'estimer le mouvement sur une trajectoire circulaire. Nous devons estimer les paramètres de la trajectoire qui sont les coordonnées du centre et le rayon, en plus des paramètres du mouvement représentés dans ce cas par la distance parcourue et la vitesse de déplacement. Nous supposons toujours que l'état initial est inconnu. Le vecteur d'état sera choisi comme suit : $x_0^T = (0\ 0\ 1\ 0\ 0)$

*Remarque :* La troisième composante est prise non nulle pour éviter une division par zéro.

La matrice de covariance $P_0$ sera :

$$P_0 = \begin{bmatrix} 5.10^3 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 5.10^3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 5.10^3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 5.10^3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 5.10^3 \end{bmatrix}$$

Les figures suivantes illustrent les résultats obtenus, pour la poursuite d'une cible ayant une vitesse de déplacement linéaire $v = 4\ m/s$ sur une trajectoire circulaire de rayon $R = 75\ m$ est de centre $(x_0, y_0) = (2m, 6m)$

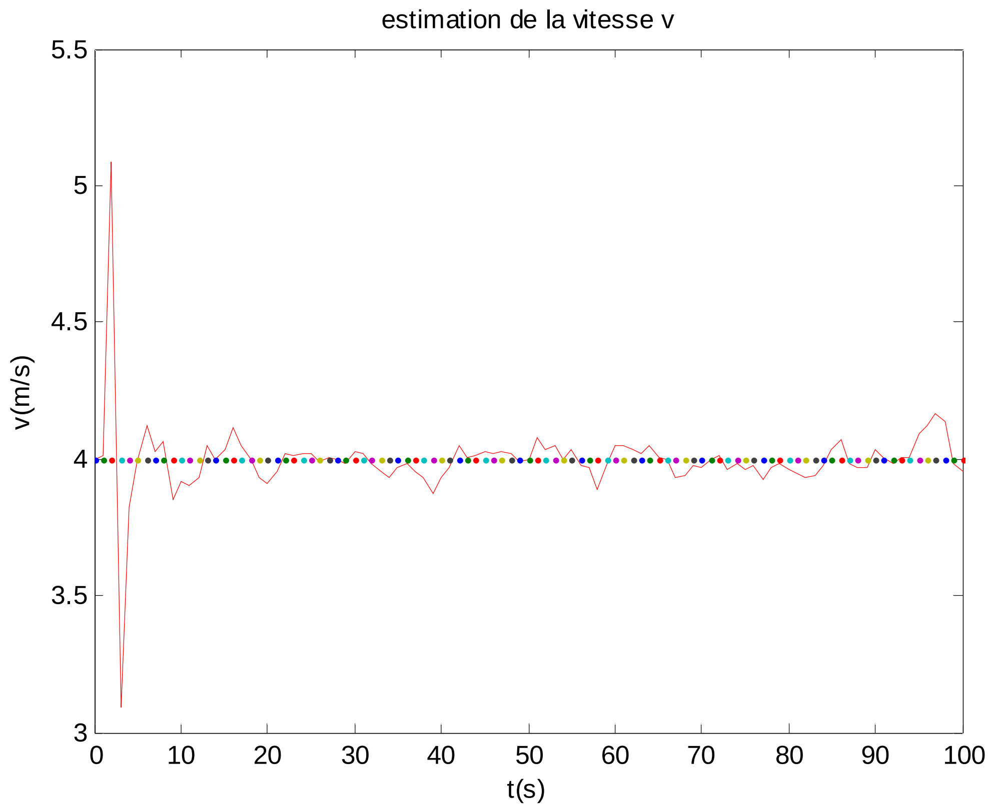


***Fig IV-7:Estimation de la vitesse v***

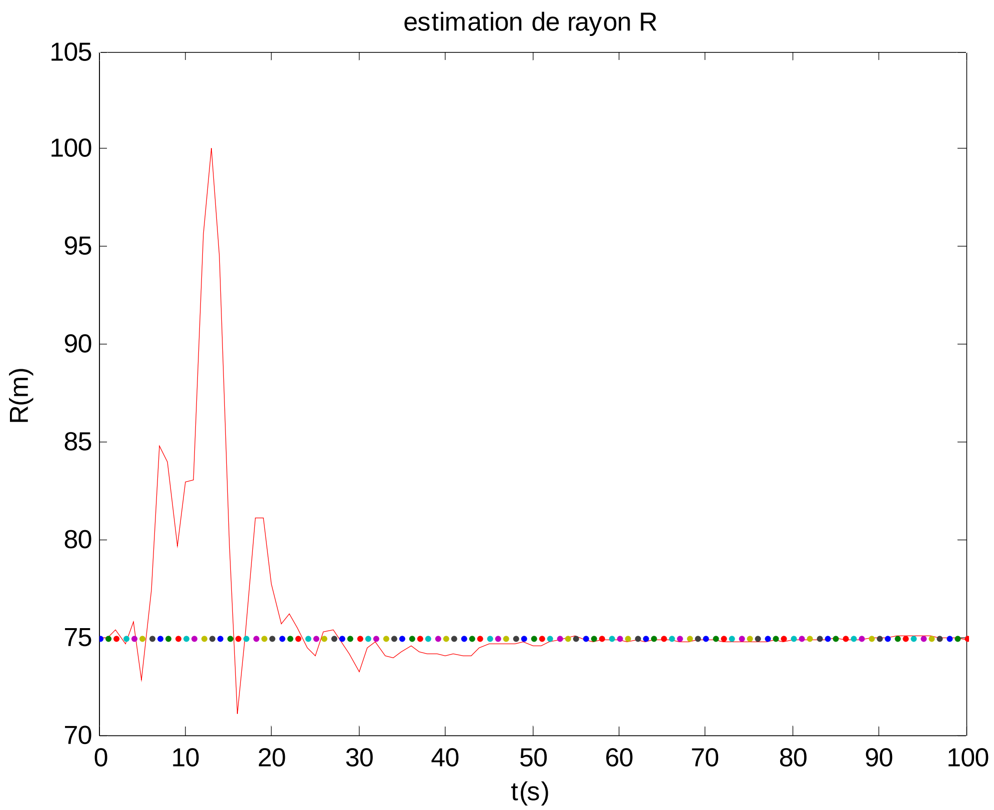


***Fig IV-8:Estimation de rayon R***

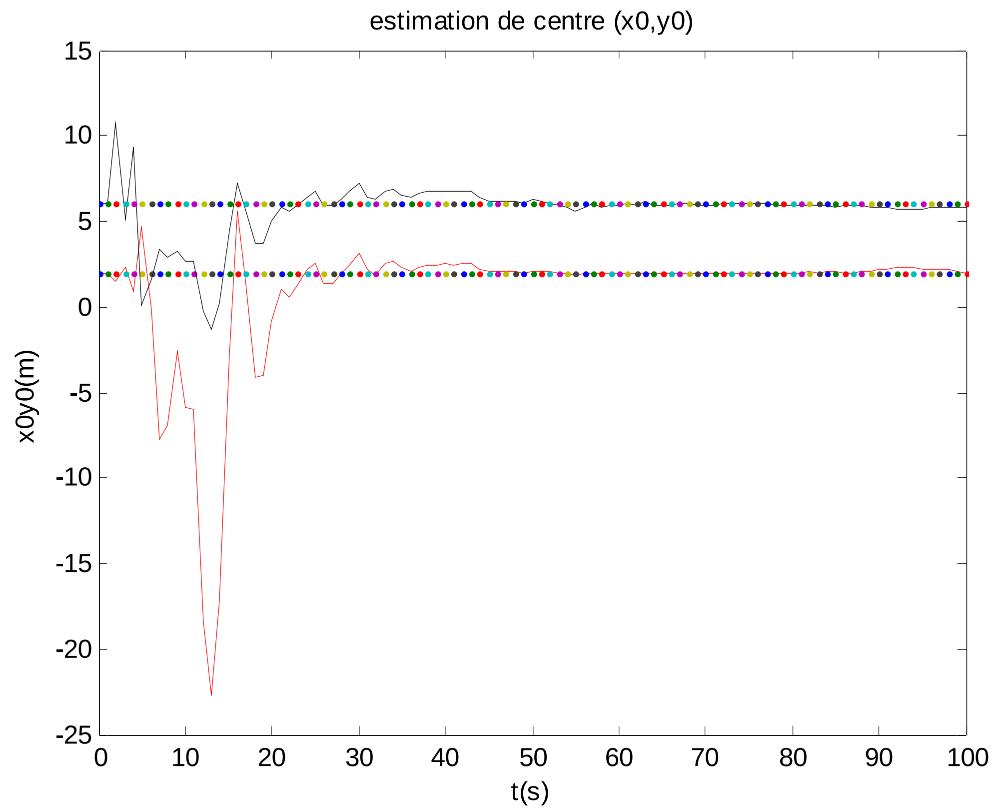


***Fig IV-9:Estimation de centre (x0, y0)***

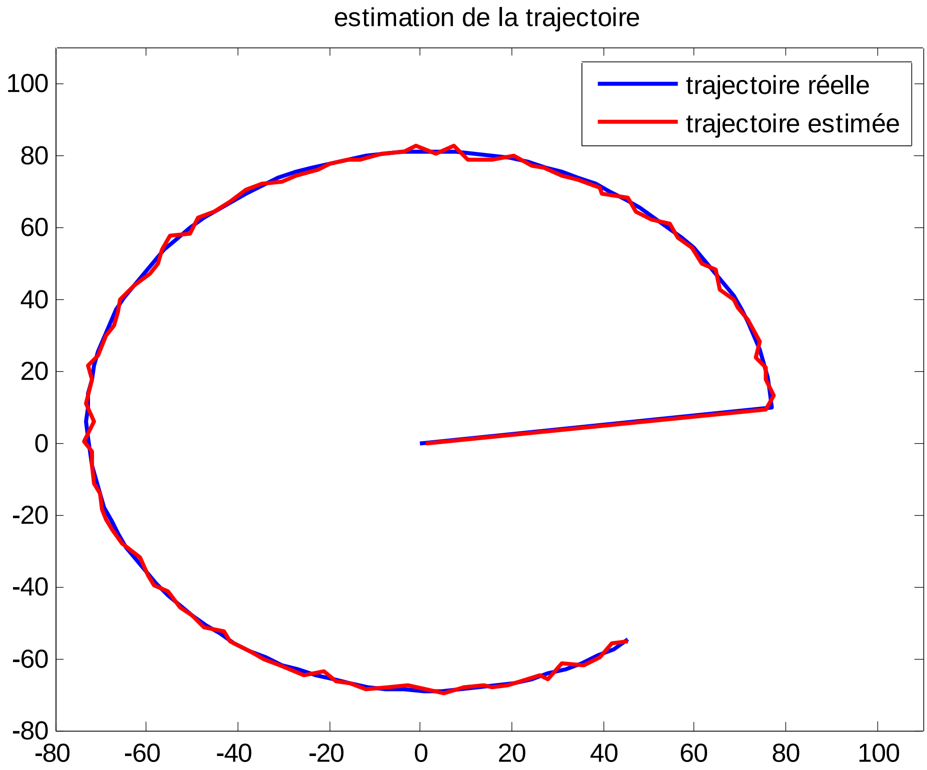


***Fig IV-10:Estimation de la trajectoire circulaire***

### IV.4.3 Interprétation des résultats :

Dans les deux scénarios, nous remarquons que l'estimation des paramètres de vecteur d'état la vitesse, la distance et l'angle $\alpha$ pour le premier scénario plus le rayon et le centre pour le deuxième scénario est bonne.

D'après les figures ci-dessus (pour les deux scénarios) nous avons une bonne estimation des paramètres de mouvement et de trajectoire.

En effet, comme la montre la figure ci dessus la trajectoire estimée est confondue avec la trajectoire réelle.

## IV.5 Conclusion :

Dans ce chapitre, nous avons simulé l'algorithme EKF qui est souvent utilisée en cas de mouvement non linéaire.

On a pu vérifier à l'aide d'un grand nombre de simulations, que l'algorithme EKF a une bonne convergence des paramètres de mouvement ainsi que ceux de la trajectoire.

# CONCLUSION GENERALE

Dans le cadre du projet de fin d'étude, nous avons présenté notre travail qui consiste à la simulation de filtre de Kalman étendu et de visualiser des estimations de différentes paramètres d'un vecteur d'état de la trajectoire d'une cible modélisée sous deux scénarios, Dans le premier scénario, La cible se déplace le long d'une trajectoire rectiligne à une vitesse constante dans une direction donnée. L'autre scénario, ou la cible se déplace le long d'une trajectoire circulaire à une vitesse constante dans une direction donnée.

D'après les résultats de simulation obtenus on peut dire que le filtre de Kalman étendu est un bon estimateur des paramètres d'état.

Ce travail nous a permis de nous familiariser avec le logiciel MATLAB qui est un système interactif et convivial de calculs numériques et de visualisations graphiques qui se réalisent.

De même nous avons approfondi nos connaissances dans le domaine de poursuite des cibles et surtout résoudre le problème de non linéarité dans différents domaines (robotique, aéronautique,…).

Cependant, avant même d'envisager cette solution, nous avons en des appréhensions quant à l'efficacité de cette approche. En effet, de sérieuses réserves peuvent être émises quant aux limitations de l'EKF, dont nous pouvons citer :

-La linéarisation peut mener à une instabilité des filtres si l'hypothèse de linéarité locale n'est pas satisfaite.

-La linéarisation des matrices Jacobéennes est souvent difficile et amène une complexité d'implémentation.

-La linéarisation n'est possible que si les matrices Jacobéennes existent. En effet, ce n'est souvent pas le cas, lorsque les paramètres du modèle changent brusquement ou lorsque carrément c'est le modèle qui change, situation souvent rencontrée lorsque nous avons affaire à une cible manœuvrante.

D'après les différentes limitations énumérées ci-dessus, nous nous rendons compte que le véritable problème du filtre de Kalman étendu, réside dans la linéarisation des modèles non linéaires. Pour remédier à ce problème, nous nous proposons un autre filtre capable à estimer tout modèle non linéaire, même en présence de fortes non linéarités, ce filtre est dit « filtre de kalman sans parfum »,et est plus connus sous son nom anglo-saxo « unscented Kalman filter UKF ».

Malgré ces limitations, l'algorithme EKF reste un bon estimateur au cas de modèles non linéaire.

# ANNEXES

## Rappels et définitions sur le système stochastique

### ∨ Caractérisation d'une variable aléatoire scalaire

Soit X une variable aléatoire scalaire. La fonction de répartition F(x) associe à tout réel x la probabilité de l'évènement $X<x$.

On note: $F(x)=P[X<x]$

**Propriétés**

$x1 < x2;\ P[x1X < x2] = F(x2) - F(x1)$

$\lim\left(F(x)\right)_{x\to\infty} = 1\ ;\ \lim\left(F(x)\right)_{x\to-\infty} = 0$

F(x) est monotone, non décroissante, et peut être continue ou discontinue selon que X prenne des valeurs continues ou discrètes.

Si F(x) est dérivable, alors sa dérivée est appelée densité de probabilité et notée p(x) :

$p(x) = dF(x)/\,dx$

Soit : $p(x)dx = P[x \le X < x + dx]$

Pour caractériser et manipuler mathématiquement une variable aléatoire X, on utilise également les moments de cette variable. Le moment d'ordre 1 est plus connu sous le nom de moyenne ou espérance mathématique. Le moment centré d'ordre 2 est appelé variance que l'on note $\mathrm{var}\ x = \sigma_x^{\ 2}$.

$\sigma_x$ Désigne l'écart type.

Soit :

§ L'espérance mathématique ou moyenne :

$$E[X] = \int_{-\infty}^{+\infty} x\ p(x)\ dx = \int_{-\infty}^{+\infty} x\ dF(x)$$

§ Le moment d'ordre k :

$$E[X^k] = \int_{-\infty}^{+\infty} x^k p(x)\ dx$$

§ Le moment centré d'ordre k

$$E[X-E(X)^k] = \int_{-\infty}^{+\infty} (X-E(X)^k)p(x)dx$$

Les moments d'ordre supérieur ou égal à 3 sont très peu utilisés car ils se prêtent mal au calcul théorique. L'intérêt (mathématique) des variables aléatoires gaussiennes est qu'elles sont entièrement caractérisées par leurs moments d'ordre 1 et 2.

Soit X une variable aléatoire gaussienne de moyenne m et d'écart type,

alors:

$$p(x)=1/\sqrt{2\pi\sigma}e^{-(x-m)^2/2\sigma^2} \quad , \; E(x)=m \quad ,E[(x\text{-}m)^2]=\sigma^2$$

- **Caractérisation d'une variable aléatoire à plusieurs dimensions**

Soit $X=[X_1, \ldots ,X_q]^T$ une variable aléatoire à q dimensions prenant ses valeurs dans Rq.

- Fonction de répartition

$$F(x1;...;xq) = P(X1 < x1 \text{ et } X2 < x2 \text{ et } ...Xq < xq)$$

- Densité de probabilité

$$p(x_1,\ldots,x_q)=\frac{\partial^q F\left(x_1,\ldots,x_q\right)}{\partial x^1 \ldots \partial x^q}$$

- Moments

On note : $x=[x_1, \ldots ,x_q]^T$ et on ne s'intéressera qu'au vecteur des moments d'ordre 1 (c'est-à-dire le vecteur moyen) et à la matrice des moments d'ordre 2 centrés (c'est-à-dire la matrice de covariance).

Moyenne : $E[X]=\left[E[X_1];...;E[X_q]\right]^T$

Covariance : $\operatorname{cov} x = E[(X-E[X])(X-E[X])^T]$

L'élément cov x (i,j) de la ligne i et la colonne j de cette matrice de covariance vérifie :

$$\operatorname{cov}x(i,j)=\int_{R^2}(xi-E[x_i])(x_j-E[x_j])dF(x_i,x_j)$$

La matrice de covariance est définie, positive et symétrique.

- **Signal aléatoire (processus stochastique)**

Etant donné une variable aléatoire X, le signal aléatoire ou processus stochastique x(t) est un signal fonction du temps t tel que pour tout t fixé, x(t) corresponde à une valeur de la variable aléatoire X.

∨ **Moment d'un signal aléatoire**

Le moment d'ordre 2 d'un signal aléatoire est appelé la fonction d'autocorrélation.

Soit w(t) un signal aléatoire, alors :

§ moment d'ordre 1 : $m(t)=E[w(t)]$

§ moment d'ordre 2 : $\phi_{ww}(t,\tau)=E[w(t)w(t+\tau)^T]$

**Remarque**

Si w(t) est un signal vectoriel à q composantes alors $\phi_{ww}(t;\tau)$ est une matrice de taille $q\times q$ définie positive pour chaque valeur de t et de $\tau$. Les termes de la diagonale sont les fonctions scalaires d'autocorrélation de chaque composante et les termes hors diagonaux sont les fonctions scalaires d'intercorrélation entre composantes.

Un signal aléatoire gaussien centré, c'est à dire à moyenne nulle, est donc entièrement défini par sa fonction d'autocorrélation.

∨ **Stationnarité**

Un signal aléatoire est dit stationnaire à l'ordre 2 si sa moyenne est constante (m(t)=m) et si sa fonction d'autocorrélation ne dépend que de $\tau$( $\phi_{ww}(t;\tau)=\phi_{ww}(\tau)$).

La moyenne quadratique ou variance d'un signal aléatoire centré stationnaire est la valeur de la fonction d'autocorrélation à l'origine :

$$\sigma_w^2=\phi_{ww}(\tau)/\tau=0$$

∨ **Bruit blanc**

Enfin, un bruit blanc est un signal aléatoire stationnaire de variance infinie dont la fonction d'autocorrélation est proportionnelle à un Dirac (c'est-à-dire un spectre complexe constant sur toute la plage des fréquences). Cela traduit que les valeurs du signal pris à deux instants, même très proches, ne sont pas du tout corrélées.

Les bruits blancs gaussiens centrés w(t) et v(t) que nous allons utilisés dans le cadre du filtre de Kalman sont donc entièrement définis par leur densités spectrales respectives W(t) et V (t) :

$$E[w(t)w(t+\tau)^T]=W(t)\delta(\tau);\ E[v(t)v(t+\tau)^T]=V(t)\delta(\tau)$$

Les matrices W(t) et V(t) deviennent constantes dans le cas de bruits blancs stationnaires. Le bruit blanc gaussien normalisé est tel que $W(t)=I_{q\times q}$ (q : nombre de composants dans le bruit.

# BIBLIOGRAPHIE


[1] Y. Bar-Shalom, X.R. Li, and T. Kirubarajan. Estimation with applications to tracking and navigation. In New York: John Wiley and Sons. 2001.

[2] Morsly Yacine «Contribution à la mise en œuvre de techniques d'association de données pour la poursuite de cibles manœuvrantes » .Thèse magister .Ecole Militaire polytechnique. Département d'automatique, Alger 2006.

[3]Mohand Saïd DJOUDI «Poursuite de cibles manœuvrantes par vision active». Thèse doctorat. Ecole nationale polytechnique. Département d'électronique. Alger, Décembre 2005.

[4] Azzedine BOUARABA et Mokrane HAMITOUCHE « Implémentation sur DSP d'une technique de détection de manœuvre basée sur l'estimation de l'accélération».Thèse d'ingénieur. Département génie électrique.2005.

[5] Jason L. Williams, Flight Lieutenant, RAAF AFIT/GE/ENG/03-19.«Gaussian mixture reduction for tracking multiple maneuvering targets clutter».Air Force Institute of Technologies. Department of the Air Force Air University.

[6] Christophe BLANC « Combinaison d'estimation : Application à la détection d'obstacles à bord des véhicules routiers intelligents ».Thèse de doctorat. Université 'Blaise Pascal' Ecole doctorale sciences pour l'ingénieur de Clermond Ferrand. France, 12 Juillet 2005.

[7] Rickard Karlsson « Simulation Based Methods for Target Tracking»,suède 2002.

[8]Sebbagh Abdenour «Utilisation des informations visuelles pour la poursuite de cibles manœuvrantes à l'aide de l'approche IMM».Thèse magister. Ecole Militaire polytechnique. Novembre 2004.

[9] Shawn Michael Herman «A particle filtering approach to joint passive radar tracking and target classification ». University of Illinois at Urbana-Champaign, 2002.

[10]Abidi Nacima et Baaziz Zahra « Simulation d'un détecteur de manœuvre basé sur le maximum de vraisemblance générale GLR» .Thèse d'ingénieur. Université de Blida. Département d'aéronautique. Juillet 2007.

## Chapitre I :

# GENERALITES SUR LA POURSUITE DES CIBLES

## Chapitre II :

# LES FILTRES DE POURSUITE

## Chapitre III :

# FILTRAGE DE KALMAN NON LINEAIRE

## Chapitre IV :

# SIMULATION ET COMMENTAIRES