

A. NIKIFOROV, V. OUVAROV

**FONCTIONS SPÉCIALES
DE LA PHYSIQUE
MATHÉMATIQUE**



OFFICE DES PUBLICATIONS UNIVERSITAIRES

1, Place Centrale de Ben Aknoun (Alger)

TABLE DES MATIÈRES

Avant-propos à l'édition française	8
Préface	10
Avant-propos à l'édition russe	13
 Chapitre premier. ÉLÉMENTS DE THÉORIE DES FONCTIONS SPÉCIALES	 17
§ 1. L'équation différentielle pour les fonctions spéciales	17
§ 2. Polynômes du type hypergéométrique	22
§ 3. Représentations intégrales des fonctions du type hypergéométrique	24
§ 4. Relations de récurrence et formules de dérivation	30
 Chapitre II. POLYNÔMES ORTHOGONAUX CLASSIQUES	 36
§ 5. Définition et propriétés principales	36
1. Polynômes de Jacobi, de Laguerre et d'Hermite (36). 2. Dérivées des polynômes du type hypergéométrique (39). 3. Orthogonalité des polynômes du type hypergéométrique (40). 4. Fonctions génératrices (41).	
§ 6. Quelques propriétés générales des polynômes orthogonaux	44
1. Développement d'un polynôme quelconque suivant des polynômes orthogonaux (44). 2. Unicité d'un système de polynômes orthogonaux par rapport à un poids donné (45). 3. Relations de récurrence (47). 4. Formule de Darboux-Christoffel (49). 5. Propriétés des zéros (50). 6. Propriétés de parité des polynômes consécutives à la parité de la fonction poids (50). 7. Relation entre deux systèmes de polynômes orthogonaux dont le rapport des poids est une fonction rationnelle (52).	
§ 7. Caractéristiques principales des polynômes orthogonaux classiques	55
1. Calcul du carré de la norme et des coefficients des termes de plus haut degré (55). 2. Valeurs particulières (57). 3. Allure générale et évaluation de certaines valeurs numériques des polynômes de Jacobi, de Laguerre et d'Hermite (57).	
§ 8. Développement des fonctions en séries suivant les polynômes orthogonaux classiques	66
1. Généralités (66). 2. Fermeture d'un système de polynômes orthogonaux (68). 3. Théorème de développement (70).	
§ 9. Problèmes de valeurs propres conduisant aux polynômes orthogonaux classiques	75
1. Position du problème (75). 2. Polynômes orthogonaux classiques comme fonctions propres dans certains problèmes de valeurs pro-	

pres (78). 3. Problèmes de mécanique quantique conduisant aux polynômes orthogonaux classiques (81).	
§ 10. Fonctions sphériques	85
1. Résolution de l'équation de Laplace en coordonnées sphériques (85). 2. Propriétés des fonctions sphériques (90). 3. Relation entre les polynômes harmoniques homogènes et les fonctions sphériques (92). 4. Fonctions sphériques généralisées (94). 5. Théorème d'addition (101).	
§ 11. Fonctions de deuxième espèce	104
1. Représentation intégrale (104). 2. Représentation asymptotique (106). 3. Relations de récurrence et formules de dérivation (106). 4. Quelques fonctions spéciales voisines des fonctions $Q_0(z)$ (108).	
§ 12. Polynômes orthogonaux classiques d'une variable discrète	113
1. Equation aux différences analogue à l'équation du type hypergéométrique (113). 2. Formule de Rodrigues (115). 3. Propriété d'orthogonalité (117). 4. Polynômes de Hahn, de Tchébychev, de Meixner, de Krawtchouk et de Charlier (118). 5. Caractéristiques principales (124). 6. Lien avec les polynômes de Jacobi, de Laguerre et d'Hermite (128). 7. Fonctions sphériques généralisées et polynômes de Krawtchouk (133). 8. Application des polynômes orthogonaux classiques d'une variable discrète à la compression de l'information (135).	
 Chapitre III FONCTIONS CYLINDRIQUES	 137
§ 13. Equation différentielle de Bessel et sa solution	137
1. Résolution de l'équation d'Helmholtz en coordonnées cylindriques (137). 2. Définition des fonctions de Bessel de première espèce et des fonctions de Hankel (138).	
§ 14. Propriétés principales des fonctions cylindriques	143
1. Relations de récurrence et formules de dérivation (143). 2. Prolongement analytique et représentations asymptotiques (144). 3. Relations fonctionnelles. (146). 4. Développements en séries de puissances (147).	
§ 15. Représentation intégrale de Sommerfeld	150
1. Représentation intégrale de Sommerfeld des fonctions cylindriques (150). 2. Représentations intégrales de Sommerfeld pour les fonctions de Hankel et les fonctions de Bessel de première espèce. (151).	
§ 16. Classes spéciales de fonctions cylindriques	154
1. Fonctions de Bessel de deuxième espèce (154). 2. Fonctions de Bessel d'ordre demi-entier. Polynômes de Bessel (156). 3. Fonctions de Bessel d'argument imaginaire (158). 4. Application des fonctions de Bessel modifiées aux problèmes de sondage laser (162).	
§ 17. Théorèmes d'addition	165
1. Théorème d'addition de Graf (166). 2. Théorème d'addition de Gegenbauer (167). 3. Développement des ondes sphérique et plane suivant les polynômes de Legendre (172).	
§ 18. Approximation semi-classique	173
1. Approximation semi-classique des solutions d'équations du second ordre (173). 2. Représentations asymptotiques des polynômes orthogonaux classiques pour n grand (179). 3. Approximation semi-classique pour des équations admettant une singularité. Cas d'un champ central (181). 4. Comportement asymptotique des fonctions cylindriques d'ordre élevé. Formules de Langer (183). 5. Recherche des valeurs propres de l'énergie dans l'équation de Schrödinger par approximation semi-classique. Formule de Bohr-Sommerfeld (185).	

Chapitre IV. FONCTIONS HYPERGÉOMÉTRIQUES	190
§ 19. Equation du type hypergéométrique et sa résolution	190
1. Réduction à la forme canonique (190). 2. Recherche des solutions particulières (191). 3. Prolongement analytique (199).	
§ 20. Propriétés principales des fonctions du type hypergéométrique	
1. Relations de récurrence (201). 2. Développements en séries de puissances (204). 3. Relations fonctionnelles et représentations asymptotiques (205). 4. Cas spéciaux (213).	
§ 21. Représentation de quelques fonctions spéciales à l'aide des fonctions du type hypergéométrique.	218
1. Quelques fonctions élémentaires (218). 2. Polynômes de Jacobi, de Laguerre et d'Hermite. Polynômes orthogonaux classiques d'une variable discrète (218). 3. Fonctions de deuxième espèce (221). 4. Fonctions cylindriques (223). 5. Intégrales elliptiques (224). 6. Fonctions de Whittaker (225).	
§ 22. Intégrales définies des fonctions du type hypergéométrique . . .	226
Chapitre V. QUELQUES PROBLÈMES RÉSOLUS DE MÉCANIQUE QUANTIQUE ET DE PHYSIQUE MATHÉMATIQUE	230
§ 23. Réduction des équations aux dérivées partielles à des équations différentielles ordinaires par séparation des variables	230
1. Schéma général de la méthode de séparation des variables (230). 2. Passage aux coordonnées curvilignes (232).	
§ 24. Problèmes aux limites de physique mathématique.	234
1. Résolution des problèmes aux limites par séparation des variables (234). 2. Problème de Sturm-Liouville. Propriétés fondamentales des fonctions propres et des valeurs propres (237). 3. Propriétés oscillatoires des solutions du problème de Sturm-Liouville (239). 4. Développement des fonctions suivant les fonctions propres du problème de Sturm-Liouville (246). 5. Problèmes aux limites pour l'équation de Bessel (247). 6. Développements de Dini et de Fourier-Bessel. Intégrale de Fourier-Bessel (250).	
§ 25. Résolution de quelques problèmes fondamentaux de mécanique quantique	252
1. Résolution de l'équation de Schrödinger pour le champ central (252). 2. Résolution de l'équation de Schrödinger pour le champ coulombien (254). 3. Résolution des équations de Klein-Gordon et de Dirac pour le champ coulombien (261). 4. Coefficients de Clebsch-Gordan et leur relation avec les polynômes de Hahn (274).	
APPENDICE	283
A. Fonction gamma	283
B. Propriétés analytiques et représentations asymptotiques de l'intégrale de Laplace	294
C. Formules de quadrature du type de Gauss.	301
RAPPEL DES FORMULES PRINCIPALES	311
Littérature	334
Index des notations	337
Index des matières	338