

Mathématiques & Applications 19

François Robert

Les Systèmes Dynamiques Discrets



Springer

Table des Matières

Prologue	7
I Généralités	11
0 En Guise d'Introduction : Arthur, Béatrice et Clotilde	13
1 Itérations sur un Ensemble Fini	18
1.1 Généralités	18
1.2 Exemples	20
1.3 Puissances successives de F	25
1.4 F simple	28
1.5 Annexe : l'itération de Collatz	29
2 Réseaux d'automates : Dynamique de Base	31
2.1 Le modèle réseau d'automates	31
2.2 Itération parallèle	33
2.3 Réflexions sur le modèle "réseau d'automates"	37
2.4 Mode opératoire série et opérateur de Gauss-Seidel	37
2.5 Modes opératoires série-parallèle et opérateurs associés	44
2.6 Exemples	47
2.7 Remarques et Conclusions	49

II Boîte à Outils 51

3	Un Outil Métrique	53
3.1	La distance vectorielle booléenne d	54
3.2	Des inégalités de base	55
3.3	Premières Applications	57
3.4	Compléments : opérateurs série-parallèle	62
3.5	Autres outils métriques possibles	66
3.6	Conclusions	68
4	Théorèmes de Perron-Frobenius et Stein-Rosenberg Booléens	69
4.1	Éléments propres d'une matrice booléenne	69
4.2	Théorème de Perron-Frobenius booléen	77
4.3	Théorèmes de Stein-Rosenberg booléens	80
4.4	Conclusions	82

III Applications 83

5	Contraction Booléenne et Convergence Globale	85
5.1	Contraction booléenne	86
5.2	Théorème de point fixe	87
5.3	Exemples	91
5.4	Mode série : Itération de Gauss-Seidel pour un opérateur contractant	95
5.5	Exemples	96
5.6	Comparaison des modes opératoires pour un opérateur contractant	98
5.7	Exemples	99
5.8	Complément : Gauss-Seidelisations successives	106
5.9	Complément : diagramme contraction-simplicité	108

5.10	Conclusions	111
6	Comparaison de Modes Opératoires	112
6.1	Comparaison des modes opératoires série et parallèle	113
6.2	Exemples	122
6.3	Extension à la comparaison de deux modes opératoires série-parallèle	124
6.4	Exemples	125
6.5	Conclusions	127
7	Dérivée Discrète et Convergence Locale	128
7.1	Dérivée discrète	128
7.2	Dérivée discrète et distance vectorielle	132
7.3	Application : opérateur affine sur $(\mathbb{Z}/2)^n$	138
7.4	Application. Caractérisation de la convergence locale dans le voisinage premier d'un point fixe	140
7.5	Interprétation en termes de réseaux d'automates	144
7.6	Gauss-Seidel	145
7.7	Dérivation d'un produit de composition	147
7.8	Conclusions	147
8	Dérivée Discrète d'un Produit de Composition	149
8.1	Un problème de dérivation discrète	149
8.2	Formules de dérivation d'un produit de composition	150
8.3	Application à la notion de cycle attractif	153
8.4	Interprétation en termes de réseaux d'automates	160
8.5	Conclusions	161
9	Attraction Locale dans le Voisinage Premier ou Second d'un Point Fixe	162
9.1	Définitions, rappels	162

9.2	Attraction dans $V_1(\xi)$	164
9.3	Attraction dans $V_2(\xi)$	169
9.4	Forte attraction dans $V_2(\xi)$	174
9.5	Cas d'un opérateur affine sur $(\mathbb{Z}/2)^n$	178
9.6	Conclusions	181
10	Attraction dans un Voisinage Massif d'un Point Fixe	183
10.1	Voisinage massif d'un élément du n -cube $\{0, 1\}^n$	183
10.2	Caractérisation de la notion de voisinage massif	185
10.3	Application : convergence locale dans un voisinage massif	187
10.4	Conclusions	193
11	Attraction Locale pour l'Opérateur Série	194
11.1	Cadre continu : $\mathbb{R}^n$	195
11.2	Cadre discret : $\{0, 1\}^n$	199
11.3	Une majoration utile de $G'(\xi)$	202
11.4	Exemples	206
11.5	Retour au problème posé : un résultat technique	208
11.6	Exemples	210
11.7	Point fixe attractif en mode parallèle et série	211
11.8	Application à l'attractivité globale	214
11.9	Remarques finales	215
12	Réseaux d'Automates à Seuils et Applications	217
12.1	Automates à seuil	217
12.2	Interprétation géométrique dans $\mathbb{R}^n$	218
12.3	Cas particulier : Fonctions majorité	220
12.4	Réseaux d'automates à seuils	220

12.5 Deux formulations équivalentes pour des réseaux à seuils	223
12.6 Dynamiques parallèle et série d'un réseau à seuils symétrique	224
12.7 Exemples	227
12.8 Modèle de Hopfield (réalisation d'une mémoire associative)	232
12.9 Exemple	234
12.10 Conclusions	239
13 Itérations Chaotiques Discrètes et Réseaux d'Automates	240
13.1 Itérations discrètes asynchrones	241
13.2 Itérations discrètes chaotiques	241
13.3 Remarques importantes	242
13.4 Analyse de l'évolution d'une itération chaotique discrète	244
13.5 Comportement local d'une itération chaotique à partir de la dérivée	246
13.6 Résultats spécifiques sur les matrices booléennes	250
13.7 Convergence locale d'une itération chaotique discrète	255
13.8 Convergence globale d'une itération chaotique discrète	260
13.9 Additif	264
13.10 Conclusions	270
14 En Guise de Conclusion : Arthur, Béatrice et Clotilde revisités	271
IV Sujets de Problèmes	277
Bibliographie	293
Index	295

Les Chapitres 2 à 7 et 10 constituent une version française, revue et complétée, des Chapitres correspondants de "Discrete Iterations", Springer-Verlag, 1986, référence [26].

La Société de Mathématiques Appliquées et Industrielles (SMAI), fondée en 1983, s'est fixé comme objectif la promotion des mathématiques appliquées. Dans cet esprit, la SMAI a créé une collection d'ouvrages Mathématiques & Applications, dont voici un nouveau numéro.

Le but de cette collection est d'éditer des textes de niveau 3^{ème} cycle universitaire ou de dernière année d'école d'ingénieurs. Les lecteurs concernés sont donc des étudiants, mais également des chercheurs et ingénieurs qui veulent s'initier aux méthodes et aux résultats des mathématiques appliquées. Certains ouvrages auront ainsi une vocation purement pédagogique alors que d'autres pourront constituer des textes de référence.

La principale source des manuscrits réside dans les très nombreux cours qui sont enseignés en France, compte tenu de la variété des Diplômes d'Etudes Approfondies (D.E.A.); des Diplômes d'Etudes Supérieures Spécialisées (D.E.S.S.) ou des options de mathématiques appliquées dans les écoles d'ingénieurs. Mais ce n'est pas l'unique source: certains textes pourront avoir une autre origine.

Parmi les sujets que la collection souhaite aborder, figurent les sujets suivants:
Analyse numérique – Analyse stochastique – Probabilités appliquées – Equations aux dérivées partielles – Automatique – Optimisation – Recherche opérationnelle – Statistique et analyse des données – Modélisation (en mécanique, en économie...) – Infographie et Traitement d'images – Codage et cryptographie – Calcul formel – Calcul parallèle...

François Robert

Les Systèmes Dynamiques Discrets

Un *système dynamique discret* (réseau d'automates, automate cellulaire...) est un ensemble *fini* d'éléments, prenant chacun un nombre *fini* d'états, et évoluant, dans un *temps discret*, par *interactions mutuelles*.

Ce livre est consacré à l'analyse de la *dynamique temporelle* de tels systèmes. Grâce à des *outils de métrique discrète*, on établit des résultats de *convergence globale* (contraction booléenne), *convergence locale* vers un *point fixe* ou vers un *cycle*, et ceci pour différents *modes opératoires* (parallèle, série, série-parallèle, chaotique).

Le contenu de ce livre, où chaque résultat est illustré par un ou plusieurs exemples incluant de nombreux diagrammes, a été enseigné aux Universités de Grenoble et de Kaiserslautern. Il veut intéresser aussi bien des étudiants, ingénieurs, chercheurs en Mathématiques Appliquées que des Informaticiens connexionnistes, des Automaticiens et des Physiciens.

ISBN 3-540-60086-8



9 783540 600862