

ALGÈBRE LINEAIRE

POUR HEC ET INGÉNIEURS COMMERCIAUX

Camille DEBIÈVE
Yves FÉLIX



De Boeck



Université

Table des matières

1	Matrices	1
1.1	Définitions de base	2
1.1.1	Somme de deux matrices et produit d'une matrice par un scalaire	2
1.1.2	Produit de deux matrices	3
1.1.3	Transposée d'une matrice	5
1.1.4	Inverse d'une matrice	6
1.2	Systèmes d'équations et matrices	7
1.2.1	Exemple introductif	7
1.2.2	Forme matricielle d'un système d'équations	8
1.2.3	Echelonnement d'une matrice	9
1.2.4	Résolution d'un système par élimination de Gauss	14
1.2.5	Inversibilité et rang	15
1.2.6	Calcul de l'inverse par la matrice compagnon	16
1.3	Applications	18
1.3.1	Modèle entrée-sortie de Leontieff	18
1.3.2	Problèmes en théorie des graphes	19
1.3.3	Evolution de populations	20
	Exercices	21
2	Espaces Vectoriels	25
2.1	Introduction	26
2.2	Définition et exemples	27
2.3	Familles génératrices, familles libres et bases	29
2.3.1	Familles génératrices et familles libres	29
2.3.2	Base et dimension	31
2.3.3	Coordonnées d'un vecteur dans une base ordonnée	34

2.4	Sous-espaces vectoriels	35
2.4.1	Somme et intersection de sous-espaces vectoriels	36
2.4.2	Sous-espace vectoriel engendré par une famille d'éléments	38
	Exercices	39
3	Applications Linéaires	43
3.1	Introduction	44
3.2	Définition et exemples	44
3.3	Matrice associée à une application linéaire	46
3.3.1	Matrice associée à une somme d'applications linéaires	47
3.3.2	Matrice d'un composé d'applications linéaires .	47
3.3.3	Matrice de changement de bases	48
3.3.4	Représentations d'une application linéaire dans des bases différentes	49
3.3.5	Cas particuliers des espaces $\mathbb{R}^2, \mathbb{R}^3, \dots, \mathbb{R}^n$, avec bases canoniques	49
3.3.6	Exemples géométriques	51
3.4	Noyau et Image d'une application linéaire	53
3.5	Le rang d'une matrice A de genre (m, n)	56
3.6	Inversibilité d'une matrice	59
3.7	Retour aux systèmes d'équations	60
	Exercices	62
4	Produits Scalaires	71
4.1	Introduction	72
4.2	Définitions et exemples	72
4.3	Orthogonalité	73
4.3.1	Norme d'un vecteur	74
4.3.2	Projection orthogonale d'un vecteur sur un autre vecteur	75
4.3.3	Angle entre deux vecteurs	75
4.3.4	Familles orthonormées	76
4.4	Orthogonalisation de Gram-Schmidt	77
4.5	Applications	80
4.5.1	Angles formés par une droite passant par l'origine et les axes	80
4.5.2	Projection orthogonale sur un sous-espace vec- toriel	80
4.5.3	Droite de régression linéaire, ou des moindres carrés	82
4.6	Matrices orthogonales	84
4.7	Synthèse	86
	Exercices	87

5 Déterminant	89
5.1 Présentation géométrique	90
5.2 Définition du déterminant	91
5.3 Propriétés du déterminant	93
5.4 Produit vectoriel dans $\mathbb{R}^3$	99
5.5 Applications	101
Exercices	103
6 Valeurs propres et vecteurs propres	105
6.1 Définition et exemples	106
6.2 Propriétés générales	108
6.3 Le polynôme caractéristique	111
6.4 Triangularisation	113
6.5 Diagonalisation	117
6.6 Sous-espaces invariants – Multiplicité algébrique et géométrique	119
6.6.1 Sous-espaces invariants	119
6.6.2 Multiplicité algébrique et géométrique	120
6.7 Matrices symétriques	121
6.8 Théorèmes de Cayley-Hamilton-Jacobi et de Gershgorin	124
6.8.1 Théorème de Cayley-Hamilton-Jacobi	124
6.8.2 Le théorème de Gershgorin	128
6.9 Perturbation de systèmes d'équations	129
Exercices	132
7 Formes Quadratiques	139
7.1 Définition et matrice associée	140
7.2 Changement de base	141
7.3 Genre des formes quadratiques	143
7.4 Méthode pratique de détermination du genre d'une forme quadratique	151
Exercices	154
8 Quadriques	157
8.1 Définition et exemples	158
8.2 Cas particulier de $\mathbb{R}^2$	159
8.3 Cas particulier de $\mathbb{R}^3$	160
Annexe A Les nombres complexes	163
1 Définitions et propriétés de base	164
2 Le théorème fondamental de l'algèbre	166
3 Puissances et racines	166
4 Exponentielle complexe	168
Annexe B Courte introduction au logiciel MATLAB	171

Solutions des exercices	175
1 Matrices	176
2 Espaces Vectoriels	179
3 Applications Linéaires	182
4 Produits Scalaires	187
5 Déterminant	189
6 Valeurs propres et vecteurs propres	191
7 Formes Quadratiques	198
 Index	 201

ALGÈBRE LINÉAIRE

POUR HEC ET INGÉNIEURS COMMERCIAUX

Outil de base pour la **modélisation mathématique des phénomènes économiques**, l'algèbre linéaire est présentée, dans cet ouvrage, avec rigueur, précision et intuition géométrique. Sont exposés les résultats les plus fondamentaux de la théorie :

- le **calcul matriciel** comme outil de modélisation : systèmes d'équations, applications linéaires, formes quadratiques;
- la détermination et l'utilisation des **invariants** associés à une matrice : rang, déterminant, valeurs propres et vecteurs propres;
- la détermination du genre d'une **forme quadratique**;
- la **géométrie** des applications linéaires.

Cet ouvrage est le second d'une série de quatre couvrant un programme complet de mathématiques destiné aux étudiants des HEC et du premier cycle en sciences économiques et gestion.

Camille DEBIÈVE

Professeur au Département de mathématiques de l'Université catholique de Louvain, il enseigne les mathématiques dans les Facultés des sciences, des sciences appliquées et des sciences économiques. Ses recherches sont orientées vers l'analyse fonctionnelle et la théorie de la mesure.

Yves FÉLIX

Auteur de nombreuses publications en topologie algébrique, il est professeur à l'Institut mathématique de l'Université catholique de Louvain et enseigne l'analyse infinitésimale aux ingénieurs commerciaux.



ISBN 2-8041-3441-5
DEBALG M359
ISSN 0779-9241

