

LES GRANDS CLASSIQUES GAUTHIER-VILLARS

Jean LADRIÈRE

LES LIMITATIONS INTERNES DES FORMALISMES

Étude sur la signification du théorème de Gödel
et des théorèmes apparentés dans la théorie
des fondements des mathématiques



ÉDITIONS
JACQUES GABAY

TABLE DES MATIÈRES

<i>Avant-Propos</i>	LVII
<i>Préface</i>	1
<i>CHAPITRE I.- Introduction. Les systèmes formels</i>	13
<i>SECTION 1.- LES RECHERCHES SUR LES FONDEMENTS</i>	13
1. La théorie des ensembles et les paradoxes	13
2. La méthode axiomatique	15
3. La logistique	17
4. Exemple d'une théorie logique axiomatisée	18
5. Utilité de la méthode axiomatique	20
6. Exemple d'un système formel	21
<i>SECTION 2.- LES GRANDES DIRECTIONS DE RECHERCHE</i>	25
7. Directions des recherches sur les fondements	25
8. L'axiomatique des ensembles	25
9. Le logicisme	26
10. L'intuitionnisme	26
11. La théorie de la démonstration	28
12. Le formalisme	31
13. Formalisme, intuitionnisme et théorie de la démonstration	32
14. Mathématique et système formel	33
15. Les résultats de Gödel	33

SECTION 3.- LA FORMALISATION	35
16. De l'axiomatique intuitive au système formel pur	35
17. Définition et structure d'un système formel	38
18. Présentation plus abstraite	40
19. Système formel et théorie intuitive	40
20. Présentation d'un système	41
21. Représentation d'un système	42
22. Interprétation d'un système	43
23. La notion de <i>calcul</i>	43
SECTION 4.- INTERPRÉTATION ET MODÈLE	44
24. La notion de <i>modèle</i>	44
25. Exemple d'un modèle	46
26. Présentation plus abstraite	46
27. Modèles isomorphes	48
28. Champ d'interprétation	48
29. Définitions relatives à l'interprétation	49
CHAPITRE II.- <i>Système formel et métathéorie</i>	51
SECTION 1.- LES PROPRIÉTÉS DU SYSTÈME FORMEL	51
30. Langue-objet et métalangue	51
31. Les métathéorèmes	53
32. Les démonstrations métathéoriques	54
33. Syntaxe et sémantique	55
34. Les propriétés des systèmes	56
35. La cohérence	57
36. L' ω -cohérence	57
37. La saturation	59
38. La résolubilité	61
39. La catégoricité	62
40. L'utilisation d'un système	62
41. Remarque terminologique	63
SECTION 2.- LES PRINCIPAUX SYSTÈMES FORMELS ET LA FORMALISATION DES MATHÉMATIQUES	65
42. Les systèmes de base et les systèmes apparentés	65

43. Les logiques à schémas	66
44. Les logiques combinatoires	67
45. Puissance relative des systèmes	68
46. Variables et constantes	69
47. Systèmes logiques purs	69
48. Les principaux résultats métathéoriques positifs	71
49. Les principaux résultats métathéoriques négatifs	72
SECTION 3.- LES PARADOXES	73
50. Les théorèmes de limitation et les paradoxes	73
51. Les deux catégories de paradoxes	73
52. Le paradoxe du menteur	74
53. Le paradoxe de RICHARD	76
SECTION 4.- L'ARITHMÉTISATION ET LES FONCTIONS RÉCURSIVES	79
54. Le principe d'arithmétisation et la notion de <i>fonction récursive</i>	79
55. Le schéma de récursion primitive	80
56. Autres schémas de récursion	81
57. Les fonctions récursives primitives	83
58. L'arithmétique récursive	83
59. Les fonctions récursives générales	84
60. La notion de <i>prédicat récursif</i>	86
61. La notion de <i>classe récursive</i>	86
62. L'énumérabilité récursive	87
63. L'opérateur <i>Mim</i> et son utilisation	89
64. Les fonctions partiellement récursives	90
65. L'utilisation métathéorique des fonctions récursives	91
CHAPITRE III.- <i>Le théorème de Gödel</i>	93
SECTION 1.- PREMIÈRE IDÉE DU THÉORÈME	93
66. Portée générale du théorème de GÖDEL	93
67. La démonstration de FEYSER	94
68. L'arithmétisation	95
69. Arithmétisation et métathéorie	97
70. Notations utilisées pour l'arithmétique récursive	99

71. Un critère de vérité pour les énoncés arithmétiques	100
72. Mécanisme général de la démonstration de GÖDEL	102
73. Conditions de la démonstration	104
SECTION 2.- LE FORMALISME LFG	105
74. Les constantes du système	105
75. Les variables du système	107
76. Morphologie de LFG. Première partie: composantes primitives	108
77. Morphologie de LFG. Deuxième partie: règles de formation	109
78. Composantes introduites par voie de définition	111
79. Axiomes de LFG	112
80. Règles de dérivation de LFG	116
81. La notion de <i>dérivabilité</i> dans LFG	117
82. Symboles abrégatifs	118
83. Hypothèses faites sur LFG	119
SECTION 3.- ARITHMÉTISATION DE LFG ET LEMME DE GÖDEL	120
84. Arithmétisation du système LFG	120
85. Représentation de propriétés métathéoriques dans LFG	122
86. Théorèmes préparatoires	123
87. Exemple de représentation récursive	125
88. Opérations récursivement représentables	126
89. Propriétés récursivement représentables	127
90. Lemme de GÖDEL	128
SECTION 4.- LE THÉORÈME DE GÖDEL ET SA DÉMONSTRATION	130
91. Énoncé du théorème	130
92. La fonction abrégée de substitution	131
93. Construction de la proposition $\mathfrak{D}^*$	133
94. Sens de la proposition $\mathfrak{D}^*$	135
95. Remarque auxiliaire	137
96. Démonstration du caractère indécidable de $\mathfrak{D}^*$	138
SECTION 5.- LES CRITIQUES OPPOSÉES À LA DÉMONSTRATION DE GÖDEL	140
97. La critique de PERELMAN	140

98. Discussion de cette critique	142
99. La critique de HELMER à l'égard de PERELMAN	144
100. La critique de BARTIN. Principe de cette critique	145
101. La critique de BARTIN. Détail de l'argumentation	147
102. Conclusions de BARTIN et remarques de FITCH	151
103. Discussion de la critique de BARTIN	153
104. La critique de KUCZYŃSKI	155
105. Remarque de CHURCH	156
CHAPITRE IV.- Les généralisations directes du théorème de Gödel	159
106. Introduction	159
SECTION 1.- GÉNÉRALITÉ DES HYPOTHÈSES	159
107. Hypothèses fondamentales du théorème de GÖDEL	159
108. Analyse de la troisième hypothèse	160
109. Caractère général du théorème de GÖDEL	163
110. Aspects sémantiques de la démonstration de GÖDEL	163
111. Extensions et généralisations du théorème de GÖDEL	164
SECTION 2.- LE THÉORÈME DE KLEENE	165
112. La fonction et le prédicat de KLEENE	165
113. Le lemme de KLEENE	167
114. Hypothèses du théorème de KLEENE	169
115. Énoncé et démonstration du théorème de KLEENE	170
SECTION 3.- LES THÉORÈMES DE ROSSER	172
116. Le premier théorème de ROSSER	172
117. Énoncé du second théorème de ROSSER. Les prédicats $Fdr-R$ et $Dem-R$	174
118. Propriétés des prédicats $Fdr-R$ et $Dem-R$	175
119. Construction de la proposition $\mathfrak{D}_R^*$	177
120. Démonstration du second théorème de ROSSER	179
121. Caractérisation de certaines classes de propositions	182

SECTION 4.- EXTENSION DU THÉORÈME DE GÖDEL À DES LOGIQUES NON-CONSTRUCTIVES	183
122. Les logiques non-constructives de ROSSER	183
123. Existence de propositions indécidables dans ces logiques	185
SECTION 5.- PROPOSITIONS INDÉCIDABLES DE FORME SIMPLE	187
124. Propositions indécidables correspondant à des problèmes élémentaires	187
125. Le procédé de KALMÁR. Hypothèses de KALMÁR	189
126. Le théorème de KALMÁR	190
CHAPITRE V.- <i>Le corollaire de Gödel et la théorie de la démonstration</i>	193
SECTION 1.- LE COROLLAIRE DE GÖDEL	193
127. Énoncé et démonstration du corollaire de GÖDEL	193
128. Extensions du corollaire de GÖDEL	196
SECTION 2.- CONSÉQUENCES POUR LA THÉORIE DE LA DÉMONSTRATION	197
129. Application du corollaire de GÖDEL au formalisme de la théorie classique des nombres	197
130. Procédés finitistes et procédés constructifs	199
131. Le sens nouveau de la théorie de la démonstration	201
132. La démonstration par modèle direct et le procédé de la réduction	202
133. Interprétation du système LFN dans l'arithmétique intuitive	204
134. Interprétation du système LFN dans l'arithmétique intuitionniste	205
SECTION 3.- LA DÉMONSTRATION DE GENTZEN	208
135. Le système de GENTZEN	208
136. Programme de la démonstration	210
137. Première partie de la démonstration	211

138. Deuxième partie de la démonstration. La notion de <i>réduction</i>	212
139. Deuxième partie de la démonstration. L'induction transfinie	215
140. La démonstration de GENTZEN et le corollaire de GÖDEL	217
SECTION 4.- LA THÉORIE DE LA DÉMONSTRATION ET LA NOTION DE CONSTRUCTIVITÉ	218
141. Les deux conceptions de l'infini	218
142. Exemple d'une interprétation constructive	220
143. La méthode de GENTZEN et la théorie de la démonstration	222
144. Méthodes formelles et intuition	223
CHAPITRE VI.- <i>Le théorème de Church et les problèmes de décision</i>	227
145. Introduction	227
SECTION 1.- FONCTIONS λ -DÉFINISSABLES ET FONCTIONS M-DÉFINISSABLES	228
146. Le calcul $LF-\lambda$	228
147. Les fonctions λ -définissables	231
148. Les fonctions M-définissables	232
149. Théorèmes d'équivalence	233
150. La notion de <i>procédé effectif</i>	236
SECTION 2.- LE THÉORÈME DE CHURCH	238
151. Énoncé du théorème	238
152. Démonstration du théorème	240
153. Application du théorème de CHURCH au problème de la décision	242
154. Corollaires du théorème de CHURCH	244
SECTION 3.- LES RÉSULTATS DE KLEENE ET DE TURING	245
155. Les résultats de KLEENE	245
156. Le théorème de TURING	247

117. Démonstration du théorème de TURING	248
118. Corollaire du théorème de TURING	250
119. Les résultats de TURING et le problème de la décision	251
SECTION 4.- LES MÉTHODES DE POST	254
160. Systèmes canoniques et systèmes normaux	254
161. Le problème de la décision pour les systèmes canoniques et pour les systèmes normaux	256
162. Ensembles récursifs et ensembles récursivement énumérables	258
163. Le théorème de POST	261
164. Conséquences relatives aux propositions indécidables	264
SECTION 5.- PROBLÈMES INSOLUBLES	266
165. Problèmes de décision insolubles	266
166. Théories non-résolubles et théories essentiellement non-résolubles	267
167. Le problème insoluble de SAGLEW	268
168. Le problème de THUE et le problème des mots pour les semi-groupes	270
SECTION 6.- RÉSULTATS POSITIFS - DEGRÉS D'INSOLUBILITÉ	272
169. Résultats positifs au sujet du problème de la décision pour les systèmes formels	272
170. Degré d'insolubilité d'un problème insoluble. Théorèmes de TURING et de TARSKI	275
171. Degrés d'insolubilité des problèmes de décision insolubles relatifs à des ensembles récursivement énumérables	276
CHAPITRE VII.- <i>La théorie des prédicats de Kleene</i>	279
SECTION 1.- LE THÉORÈME DE STRATIFICATION	279
172. Introduction	279
173. Le lemme fondamental de la théorie des prédicats de KLEENE	280
174. Énoncé du théorème de stratification	283

175. Démonstration du théorème de stratification	284
SECTION 2.- LA THÉORIE DES PRÉDICATS DE KLEENE ET LES THÉORÈMES DE LIMITATION	288
176. Théorie relative à un prédicat	288
177. La forme de KLEENE du théorème de CHURCH	290
178. La forme de KLEENE du théorème de GÖDEL	291
179. Construction de propositions indécidables par la méthode de KLEENE	293
180. Élimination de l'hypothèse d'incohérence	296
181. Cas où la forme de KLEENE du théorème de GÖDEL se ramène à la forme de KLEENE du théorème de CHURCH	297
SECTION 3.- EXTENSION DE LA FORME DE KLEENE DU THÉORÈME DE GÖDEL À DES LOGIQUES NON-CONSTRUCTIVES	298
182. Les logiques ordinales	298
183. Extension de la forme de KLEENE du théorème de GÖDEL aux logiques ordinales	300
184. Extension de la forme de KLEENE du théorème de GÖDEL à d'autres catégories de logiques non-constructives et limite de cette extension	303
185. Les ensembles d'entiers définissables de MOSTOWSKI	303
186. Généralisation par MOSTOWSKI du théorème de stratification de KLEENE	306
CHAPITRE VIII.- <i>La méthode sémantique. Les théorèmes de Tarski et de Mostowski</i>	309
SECTION 1.- LA MÉTHODE SÉMANTIQUE	309
187. La notion de vérité relative à un système formel	309
188. Définition du prédicat Vri pour le système LFN-V	311
SECTION 2.- LES THÉORÈMES DE TARSKI	313
189. Les résultats de TARSKI. Le formalisme LFT	313
190. Le lemme de TARSKI	315
191. Existence de classes incomplètes dans LFT	317

192. La généralisation sémantique du théorème de GÖDEL	318
193. Extension de cette généralisation à des logiques non-constructives	323
194. Elargissements successifs du système <i>LFT</i>	324
195. Le théorème sur la vérité	326
SECTION 3.- LE THÉORÈME DE MOSTOWSKI. COMPARAISON ENTRE LES DIFFÉRENTES FORMES DU THÉORÈME DE GÖDEL	
196. Formulation du théorème de GÖDEL en termes de classes de propositions	328
197. La forme de MOSTOWSKI du théorème de GÖDEL	331
198. Les lemmes de MOSTOWSKI	331
199. Démonstration de la forme de MOSTOWSKI du théorème de GÖDEL	333
200. Les différentes formes du théorème de GÖDEL. Comparaison de ces formes entre elles	335
SECTION 4.- DÉMONSTRATION DIRECTE DU THÉORÈME SUR LA VÉRITÉ. NOUVELLE FORME DU THÉORÈME DE GÖDEL	
201. Démonstration du théorème sur la vérité à partir du lemme de TARSKI	338
202. Démonstration autonome du théorème sur la vérité	339
203. Nouvelle forme du théorème de GÖDEL démontrable par la méthode sémantique	341
204. Démonstration de cette nouvelle forme du théorème de GÖDEL	342
CHAPITRE IX.- Autres faits de limitation	
205. Introduction	349
SECTION 1.- LE RÉSULTAT DE TARSKI RELATIF À LA NOTION DE DÉFINISSABLE	
206. La notion de <i>définissable</i>	350
207. Le théorème de TARSKI relatif à cette notion	351

SECTION 2.- LE THÉORÈME DE LÖWENHEIM-SKOLEM	
208. Le théorème de LÖWENHEIM et sa généralisation par SKOLEM	353
209. Démonstration du théorème de SKOLEM	353
210. Nouvelle forme du théorème de LÖWENHEIM-SKOLEM	354
211. Le paradoxe de SKOLEM et la relativité des concepts mathématiques	357
212. Les modèles internes de SHEPHERDSON	359
213. Concepts absolus relativement à certains modèles	363
SECTION 3.- LES THÉORÈMES DE HENKIN ET LES MODÈLES NON-RÉGULIERS	
214. Le non-saturation de la logique des prédicats du 2 ^{ème} ordre n'est pas une propriété absolue	364
215. La notion de <i>champ d'interprétation régulier</i>	366
216. La notion de <i>champ d'interprétation général</i>	367
217. Les théorèmes de HENKIN	369
218. Les modèles non-réguliers et le problème de la catégoricité	371
219. Les modèles non-réguliers et l' ω -cohérence	373
220. Les résultats de ROSSER et de WANG au sujet des modèles non-réguliers	374
221. Les modèles non-réguliers et la cohérence	376
222. Les résultats de CARNAP au sujet de la logique des propositions	378
SECTION 4.- LIMITATIONS PROPRES AUX LOGIQUES COMBINATOIRES	
223. La saturation combinatoire et la saturation déductive	379
224. Le théorème de KLEENE-ROSSER-CURRY	382
SECTION 5.- SYSTÈMES NON-GÖDELIENS.	
SYSTÈMES À STRATIFICATION INTERNE	
225. Le système LFM de MYHILL	385
226. Les systèmes à stratification interne	386
227. La hiérarchie d'implications de CHURCH	387
228. Rôle du paradoxe de RICHARD	388
229. La hiérarchie de niveaux de canonicité de CURRY	391

230. La hiérarchie d'implications de MYHILL	392
231. Le système de WANG	393
232. Remarques générales sur la portée des résultats précédents	395
 CHAPITRE X.- <i>Suggestions philosophiques</i>	397
233. Aperçu général sur les faits de limitation	397
234. L'interprétation des faits de limitation. Remarque préalable	400
235. Intuition et formalisation	405
236. Signification des faits de limitation. La dualité irréductible de l'intuitif et du formel	410
237. Raison d'être des faits de limitation	415
238. Signification et limites du formalisme. Esquisse d'une problématique d'interprétation	434
 NOTE I.- <i>Résumé du mémoire de Gödel sur les propositions indécidables</i>	445
239. Introduction	445
240. Théorème principal	446
1. Description du système P	446
2. Arithmétisation du système P et théorèmes préparatoires	448
3. Théorème principal et remarques à son sujet	449
241. Autres théorèmes sur les propositions indécidables	451
1. Théorème sur les relations arithmétiques	451
2. Théorème sur les propositions arithmétiques indécidables	452
3. Théorèmes sur le calcul restreint des fonctions	452
242. Théorème relatif à la démonstration de non-contradiction de P	453
1. Énoncé et démonstration du théorème	453
2. Remarques à propos de ce théorème	453

 NOTE II.- <i>Les exposés non-techniques du théorème de Gödel</i>	455
243. Exposé de GÖDEL	455
244. Exposé de ROSSER	456
1. Préliminaires	456
2. Lemme fondamental	457
3. Démonstration de la forme originale du théorème de GÖDEL	458
4. Démonstration de la forme de ROSSER du théorème de GÖDEL	459
5. Démonstration de la forme de KLEENE du théorème de GÖDEL	460
245. Exposé de BERNAYS	461
246. Exposé de WANG	463
247. Exposé de BETH	465
248. Exposé de FINDLAY	466
1. Construction d'un énoncé indécidable non arithmétique	466
2. Construction d'un énoncé indécidable de forme arithmétique	468
3. Remarques	470
249. Autres exposés et allusions diverses	470
 NOTE III.- <i>Indications complémentaires sur les propositions indécidables</i>	473
250. Théorèmes de CHWISTEK	473
251. Démonstration de MOSTOWSKI	474
252. Généralisation de CRAUVIN	474
253. Généralisation de KALMAR	475
254. Résultat de MOSTOWSKI pour la théorie des ensembles	476
255. Les théorèmes d'UPTONSKIY	477
256. La proposition indécidable de KREISEL	479
1. Le lemme et le théorème de KREISEL	479
2. Le lemme de WANG	481
3. La forme de WANG du théorème de KREISEL	483

257. Les propositions indécidables de WANG	485
1. Existence de propositions indécidables faisant intervenir la notion de <i>vérité</i>	485
2. Théorème de WANG relatif à la notion de <i>désignation</i>	487
3. Existence d'une proposition indécidable faisant intervenir la notion de <i>désignation</i>	489
258. Remarques de HELMER et de FINSLER	490
259. Propositions indécidables et modèles non-réguliers	491

NOTE IV.- L'induction transfinie	497
--	-----

260. Rappel de quelques notions relatives aux nombres ordinaux	497
261. Le principe d'induction transfinie	499

Bibliographie	501
-------------------------	-----

Tableau des notations	547
---------------------------------	-----

1. INDICATIONS GÉNÉRALES SUR LES CATÉGORIES D'EXPRESSIONS UTILISÉES	547
1.1. Langue de base et langue formalisée	547
1.2. Variables et constantes	548
1.3. Éléments appartenant à la langue de base	549
1.4. Éléments appartenant aux langues formalisées	552
2. TABLEAU COMPLET DES NOTATIONS UTILISÉES	554
2.1. Langues utilisées	555
2.2. Symboles de LB	556
2.3. Langues formalisées de type classique	571
2.4. Formalisme de la conversion- λ	577
2.5. Systèmes canoniques	579
2.6. Logiques combinatoires	579
3. TABLEAU DES NOTATIONS - RÉSUMÉ	581

Table des noms cités	589
Table des expressions utilisées	595
Table des symboles	649
Axiomes et règles du système LFG	675
Liste des théorèmes, lemmes et corollaires	677
Addenda et corrigenda	685
Table des matières	701