

exercices corrigés de
MATHÉMATIQUES

1A

ANALYSE 1A

TOPOLOGIE

M. ANDLER

J. D. BLOCH

B. MAILLIARD

EM

EDITION

MARKETING

SOMMAIRE

I - GENERALITES

1. Intérieur, adhérence, frontière
2. Valeur d'adhérence d'une suite dans un espace métrique
3. Topologie induite
4. Espace métrique produit
5. Diamètre d'une partie, distance de deux parties
6. Applications continues, ouvertes, fermées, uniformément continues. Distances équivalentes
7. Espaces topologiques à base dénombrable.

II - TOPOLOGIE DE $\mathbb{R}$, $\mathbb{R}^n$.

1. Représentation des réels en base b
2. Détermination pratique de points d'accumulation, de points isolés de parties de $\mathbb{R}$, $\mathbb{R}^2$.
3. Homéomorphismes, isométries de $\mathbb{R}$ dans lui-même.
4. Sous-groupes de $\mathbb{R}$, $\mathbb{C}$ etc ...
5. Adhérence et topologie induite : cas d'une partie de $\mathbb{R}$.
6. $\text{Arctg} x + \text{Arctg} y = \text{Arctg} \frac{x+y}{1-xy}$, etc ...
7. Ensemble triadique de Cantor
8. Classes d'homéomorphismes de parties de $\mathbb{R}$. Question : le théorème de Cantor-Bernstein topologique est-il vrai ?
9. Les convexes compacts de $\mathbb{R}^2$ sont des intervalles ou des boules.
10. $\frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\beta} = 1$ pour une partition de $\mathbb{N}$
11. Théorème de Lebesgue sur l'intégrale de Riemann

12. $[0,1]$ n'est pas réunion dénombrable de fermés disjoints non vides, ou l'énigme du dénombrable.
13. Application du théorème de Baire à l'étude des points de discontinuité de la dérivée d'une fonction.
14. Les propriétés topologiques de $\mathbb{R}$ tiennent à son ordre.

III - LE DEUXIEME CERCLE DE LA TOPOLOGIE

1. Connexe : définition, propriétés élémentaires, exemples d'utilisation.
2. Connexes par arcs : définition, exemples et contre-exemples.
3. Composantes connexes : définition et propriétés élémentaires.
4. Valeur d'adhérence d'une application d'un espace métrique dans un autre. Critère de Cauchy. Prolongement des applications uniformément continues.
5. Complété d'un espace métrique. Cas d'un corps valué.
6. Théorème de Tietze-Urysohn : prolongement d'une application continue définie sur un fermé d'un métrique.
7. Etude des propriétés d'un espace topologique séparé où toute suite admet une valeur d'adhérence.
8. Caractérisation des espaces compacts.
9. Espaces métriques bien enchainés, compacts et connexes.
10. Recouvrement d'un espace métrique par des boules de rayon ρ .
11. Etude d'espaces métriques dans lesquels :
 - . toute suite admet une valeur d'adhérence
 - . pour tout recouvrement $(U_i)_{i \in I}$ de E , il existe ρ tel que :
 $\forall x \in E, \exists i, B(x, \rho) \in U_i$.
12. Caractérisation des espaces métriques compacts par les suites (utilise ex. III-10 et III-11).
13. Applications contractantes et dilatantes dans un métrique compact.
14. Séparation de deux fermés disjoints par deux ouverts disjoints dans un espace compact.
15. Espaces métriques localement compacts, relativement compacts.
16. Topologie induite, connexité, topologie de l'ordre
17. Etude d'une suite décroissante de compacts
18. Etude des parties compacts de $C(E, \mathbb{R})$ (E métrique compact).

19. Un superbe exercice sur les suites de fermés dans un complet : il existe un point fixe commun aux isométries conservant une partie bornée.
20. La topologie d'un espace métrique compact est caractérisée par des propriétés algébriques de l'algèbre des fonctions numériques définies sur lui.
21. Théorème de Baire
22. Un théorème topologique des fonctions implicites.

V - ESPACES VECTORIELS NORMES

1. Convexes d'un $\mathbb{R}$ espace vectoriel
2. Projection sur un convexe dans un $\mathbb{R}$ espace vectoriel normé
3. Espaces de Hilbert
4. Sous-espaces fermés et espaces quotients d'un $\mathbb{R}$ espace vectoriel normé
5. Somme directe topologique
6. Une caractérisation des espaces normés complets
7. Théorème de Hahn-Banach, prolongement des formes linéaires continues
8. Dual et bidual topologiques
9. Forme géométrique du théorème de Hahn-Banach : séparation des ouverts convexes par un hyperplan fermé
10. Application du théorème de Baire (III-21)
11. Points extrémaux d'un convexe compact non vide d'un espace vectoriel normé réel et théorème de Krein-Milman
12. Caractérisation des espaces vectoriels normés de dimension finie : théorème de Riesz
13. Exemples et comparaisons de normes
14. Exemples et comparaison de normes

V - TOPOLOGIE SUR LES ESPACES CLASSIQUES

1. Espace projectif et sphère
2. Topologie sur l'ensemble des droites du plan affine euclidien
3. Topologie sur l'ensemble des cercles du plan euclidien
4. Espaces $\mathbb{Z}^p$, dualité.
5. Espaces $\mathbb{R}^n/\mathbb{Z}^n$ et $(\mathbb{R}/\mathbb{Z})^n$
6. Espaces et corps ultramétriques
7. Initiation à la topologie algébrique, homotopie
8. Groupe de Poincaré du cercle, théorèmes de relèvement, théorème du point fixe de Brouwer.
9. Applications linéaires continues
10. Normes sur les espaces de matrices
11. Décompositions topologiques de $GL_{\mathbb{R}}(n)$ et $SL_{\mathbb{R}}(n)$
12. Description de la topologie des espaces de matrices
13. Métrique sur le groupe des isométries du plan affine euclidien
14. Opérateurs compacts

VI - FONCTIONS CONTINUES

1. Etude d'une fonction continue aux seuls points rationnels.
Question : f et g intégrables $\implies f \circ g$ intégrable ?
2. Exemple d'une fonction de $\mathbb{Q}^{+*}$ dans $\mathbb{R}$ injective continue et non bicontinue
3. Pour toute partie dénombrable X , dense dans $]0,1[$, il existe une application bijective continue strictement croissante de X dans $\mathbb{Q} \cap]0,1[$; cf VI-2.
4. Pour f et g continues de $[-1,1]$ dans $\mathbb{R}$, étude de $M(u) = \sup_{x \in [-1,1]} (f(x) + ug(x))$
5. En général, $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(\varepsilon x)}{f(x)} = \varepsilon p$
6. Oscillation d'une fonction en un point
7. Fonctions réglées et discontinuités de première espèce

8. Critères faibles de monotonie
9. Fonction continue admettant un maximum (resp. extrêmun) local en tout point.
10. Fonctions continues à image discrète
11. Périodes des fonctions continues
12. Si une fonction continue n'est pas injective, pour tout $a \in \mathbb{R}$, il existe deux points du graphe, distants de a et sur une même horizontale.
13. Fonctions à variable bornée.

II - DERIVEE, FORMULE DE TAYLOR, ETUDES DE FONCTIONS

1. Si la dérivée d'une fonction est réglée, elle est continue.
2. Théorème des accroissements finis généralisé. Quelques applications.
3. Une autre définition de la dérivée.
4. Pseudo-dérivée
5. Fonction dérivée et propriété des valeurs intermédiaires.
6. Zéros des fonctions telles que $|f'| \leq K |f|$
7. Exemple d'une fonction continue jamais dérivable
8. Règles de l'Hopital
9. Relations entre les $\sup$ de f , f' et f'' .
10. Etude du comportement du θ de la formule de Taylor-Lagrange
11. Si f s'annule en 0 est de classe C^n et si $f^{n+1}(0)$ existe, $\frac{f(x)}{x}$ se prolonge en une fonction de classe C^n .
12. Un genre de formule de Taylor
13. Fonction $x \rightarrow \exp(-1/x^2)$ - Application
14. Une dérivée nième à calculer
15. Comportement asymptotique des fonctions convexes croissantes, hypothèses fortes.
16. Une autre manière d'aborder le théorème des accroissements finis généralisé. Applications.
17. Caractérisation de l'espace des solutions d'une équation différentielle linéaire à coefficients constants.
18. Développement asymptotique des zéros de l'équation $x \sin x - 1 = 0$.

19. Valeur approchée de $\sqrt{5}$
20. Comparaison de fonctions classiques au voisinage de ~~zéro~~
21. Calculs de développements limités
22. Calculs de limites
23. Calculs de limites
24. Calculs de limites
25. Etude d'une fonction
26. Etude d'une fonction
27. Etude d'une fonction
28. Existence et unicité de solutions à des équations

VIII - FONCTIONS CONVEXES

1. Définition et premières propriétés des fonctions convexes.
Critères de convexité
2. Critère de convexité pour les fonctions continues
3. Critère affaibli de convexité
4. Critère affaibli de convexité
5. Convexité et intégrale
6. Inégalités
7. Pour les fonctions convexes, la convergence simple implique l'uniforme
8. Inégalité de Jansen : $\phi(\int f) \leq \int \phi \circ f$
9. Point d'inflexion et intersection du graphe avec les droites passant par ce point
10. Asymptote des fonctions convexes
11. Convexité et graphe. Enveloppe de fonctions convexes