

EXERCICES DE MATHÉMATIQUES

POUR LE PREMIER CYCLE

VOLUME 2. ANALYSE

2^e édition

Pascal DUPONT



de boeck

Table des matières

Avant-propos	7
Première partie : Énoncés	17
7 Fonctions réelles et limites	19
7.1 Le champ des réels	20
7.2 Fonctions réelles d'une variable réelle	23
7.2.1 Opérations algébriques sur les fonctions	23
7.2.2 Parité et imparité	26
7.2.3 Périodicité	28
7.2.4 Croissance, décroissance, extrémums	30
7.3 Notion de limite	32
7.4 Calcul de limites	37
7.4.1 Formes algébriques	37
7.4.2 Formes trigonométriques	43
7.4.3 Formes exponentielles et logarithmiques	46
7.4.4 Exercices mélangés	50
7.5 Asymptotes	51
7.6 Continuité	56
8 Calcul différentiel à une variable	63
8.1 Définition de la dérivée	64
8.2 Calcul des dérivées	67
8.2.1 Formules de base	69
8.2.2 Dérivation des exponentielles-puissances	74
8.2.3 Dérivation des fonctions réciproques	75
8.2.4 Dérivation logarithmique	76
8.2.5 Dérivation des fonctions définies paramétrique- ment	78

8.3	Applications de la notion de dérivée	81
8.3.1	Applications géométriques	81
8.3.2	Méthode de Newton	88
8.3.3	Applications diverses	92
8.4	Dérivées d'ordre supérieur — Formule de Leibniz	95
8.5	Théorèmes sur les fonctions dérivables	99
8.5.1	“Règles de L'Hospital”	99
8.5.2	Théorème des accroissements finis et consorts	102
8.6	Polynômes de Taylor et de Maclaurin	106
8.6.1	Calcul des polynômes de Taylor et de Maclaurin	108
8.6.2	Applications numériques	112
8.6.3	Application au calcul de limites	114
8.7	Recherche d'extrémums	118
8.7.1	Croissance, décroissance et extrémums	118
8.7.2	Applications	120
8.8	Concavité, convexité et inflexions	125
8.9	Études de fonctions	129
9	Calcul différentiel à plusieurs variables	141
9.1	Fonctions de plusieurs variables réelles	142
9.2	Limites	143
9.3	Dérivées partielles	146
9.3.1	Définition et calcul	146
9.3.2	Fonctions homogènes	152
9.4	Formes différentielles	156
9.4.1	Différentielle d'une fonction de n variables	156
9.4.2	Formes différentielles fermées — Facteurs inté- grants	158
9.5	Extrémums des fonctions de plusieurs variables	160
9.6	Dérivation des fonctions composées	170
9.7	Théorème des fonctions implicites	178
9.8	Extrémums sous contraintes	185
10	Intégration des fonctions d'une variable	191
10.1	Primitivation	192
10.1.1	Notion de primitive — Primitives immédiates	192
10.1.2	Substitution	195
10.1.3	Changement de variable	198
10.1.4	Primitivation par parties	200
10.1.5	Primitivation des fonctions rationnelles	204
10.1.6	Primitivation de fonctions trigonométriques	209
10.1.7	Primitivation de fonctions irrationnelles	213
10.1.8	Exercices mélangés	218
10.2	Intégrales définies	219
10.2.1	Variation d'une fonction sur un intervalle	219

8.3	Applications de la notion de dérivée	81
8.3.1	Applications géométriques	81
8.3.2	Méthode de Newton	88
8.3.3	Applications diverses	92
8.4	Dérivées d'ordre supérieur — Formule de Leibniz	95
8.5	Théorèmes sur les fonctions dérivables	99
8.5.1	“Règles de L'Hospital”	99
8.5.2	Théorème des accroissements finis et consorts	102
8.6	Polynômes de Taylor et de Maclaurin	106
8.6.1	Calcul des polynômes de Taylor et de Maclaurin	108
8.6.2	Applications numériques	112
8.6.3	Application au calcul de limites	114
8.7	Recherche d'extrémums	118
8.7.1	Croissance, décroissance et extrémums	118
8.7.2	Applications	120
8.8	Concavité, convexité et inflexions	125
8.9	Études de fonctions	129
9	Calcul différentiel à plusieurs variables	141
9.1	Fonctions de plusieurs variables réelles	142
9.2	Limites	143
9.3	Dérivées partielles	146
9.3.1	Définition et calcul	146
9.3.2	Fonctions homogènes	152
9.4	Formes différentielles	156
9.4.1	Différentielle d'une fonction de n variables	156
9.4.2	Formes différentielles fermées — Facteurs inté- grants	158
9.5	Extrémums des fonctions de plusieurs variables	160
9.6	Dérivation des fonctions composées	170
9.7	Théorème des fonctions implicites	178
9.8	Extrémums sous contraintes	185
10	Intégration des fonctions d'une variable	191
10.1	Primitivation	192
10.1.1	Notion de primitive — Primitives immédiates	192
10.1.2	Substitution	195
10.1.3	Changement de variable	198
10.1.4	Primitivation par parties	200
10.1.5	Primitivation des fonctions rationnelles	204
10.1.6	Primitivation de fonctions trigonométriques	209
10.1.7	Primitivation de fonctions irrationnelles	213
10.1.8	Exercices mélangés	218
10.2	Intégrales définies	219
10.2.1	Variation d'une fonction sur un intervalle	219

13	Séries	369
13.1	Séries numériques	370
13.1.1	Définition — Calcul des sommes partielles	370
13.1.2	Séries à termes positifs	375
13.1.3	Séries à termes quelconques	381
13.1.4	Produit de Cauchy	383
13.1.5	Exercices mélangés	386
13.2	Séries de fonctions	388
13.2.1	Séries de fonctions quelconques	388
13.2.2	Séries potentielles	391
13.2.3	Séries de Taylor et de Maclaurin	400
14	Équations différentielles et équations aux différences	405
14.1	Notion d'équation différentielle — Classification	406
14.2	Formation d'équations différentielles	409
14.3	Équations du premier ordre	410
14.3.1	Équations à variables séparables	410
14.3.2	Équations homogènes	413
14.3.3	Équations de la forme $y' = F(ax + by + c)$	414
14.3.4	Équations de la forme $y' = F\left(\frac{ax + by + c}{Ax + By + C}\right)$	415
14.3.5	Différentielles exactes — Facteurs intégrants	416
14.3.6	Équations linéaires	419
14.3.7	Équations de Bernoulli	422
14.4	Équations du second ordre	424
14.4.1	Équations de la forme $F(x, y', y'') = 0$	424
14.4.2	Équations de la forme $F(y, y', y'') = 0$	425
14.4.3	Équations linéaires à coefficients constants	426
14.5	Exercices mélangés	431
14.6	Systèmes d'équations différentielles	437
14.7	Applications géométriques	439
14.8	Applications diverses	441
14.9	Équations aux différences	443
Seconde partie : Solutions		449
7	Fonctions réelles et limites	451
8	Calcul différentiel à une variable	463
9	Calcul différentiel à plusieurs variables	493
10	Intégration des fonctions d'une variable	507
11	Intégrales multiples	527

Table des matières

12 Analyse vectorielle	535
13 Séries	549
14 Équations différentielles et équations aux différences	559
Bibliographie	571
Tableau de conversion	573
Table des matières	579