

Imen Ben Tahar
José Trashorras
Gabriel Turinici

Éléments de calcul stochastique

pour l'évaluation et la couverture
des actifs dérivés



Avec exercices corrigés,
travaux pratiques
et études de cas



Table des matières

1	Absence d'opportunités d'arbitrage, probabilité risque neutre et évaluation en temps discret	1
1.1	Modèle de marché financier	1
1.1.1	Stratégie financière	3
1.1.2	Processus de gains	5
1.1.3	Stratégie autofinancée	5
1.1.4	Portefeuilles admissibles	6
1.1.5	Contraintes de portefeuille	6
1.2	Opportunités d'arbitrage et leurs absences	7
1.2.1	Opportunités d'arbitrage	7
1.2.2	Conséquences de l'A.O.A.	8
1.3	Caractérisation de la condition A.O.A.	10
1.4	Réplication d'actifs et évaluation sous la condition A.O.A. . . .	12
1.5	Arbre binomial	13
1.5.1	Modélisation probabiliste	14
1.5.2	évaluation de produits dérivés dans le modèle binomial	15
1.6	Exercices	20
2	Mouvement brownien et calcul d'Itô	25
2.1	Processus stochastiques en temps continu	26
2.1.1	Filtrations et mesurabilité	27
2.1.2	Processus gaussiens	28
2.2	Martingales en temps continu	31
2.3	Mouvement brownien	35

2.3.1	Définition et premières propriétés	35
2.3.2	Mouvement brownien multi-dimensionnel	39
2.3.3	Variation d'ordre p	39
2.4	Intégrale d'Itô	44
2.4.1	Fonction à variation bornée et intégrale de Stieltjes . . .	45
2.4.2	Intégration des processus élémentaires	46
2.4.3	Intégration des processus de $\mathcal{L}^2([0, T])$	52
2.4.4	Intégration des processus de $\mathcal{L}([0, T])$	54
2.5	Calcul d'Itô	56
2.5.1	Processus d'Itô	56
2.5.2	Formule d'Itô	58
2.5.3	Formule de Itô multi-dimensionnelle	63
2.5.4	Équations différentielles stochastiques	64
2.6	Représentation de martingales, changement de probabilité . . .	65
2.7	Exercices	68
3	Modèle de Black-Merton-Scholes	79
3.1	Présentation du modèle	79
3.1.1	Stratégie financière	80
3.2	Condition d'absence d'opportunités d'arbitrage et changement de mesure	82
3.3	Évaluation d'options européennes et équation de Black-Merton- Scholes	83
3.3.1	Évaluation par réplication	84
3.3.2	Approche Monte-Carlo pour l'évaluation d'options : cal- cul pratique du prix en utilisant la formule (3.9)	85
3.3.3	Équation de Black-Merton-Scholes	87
3.3.4	Approche E.D.P. pour l'évaluation d'options, mise en pratique du delta-hedging	89
3.3.5	Les Grecques	90
3.4	Évaluation d'options américaines	91
3.5	Exercices	92

4	Solution des exercices	97
4.1	Exercices du chapitre 1	97
4.2	Exercices du chapitre 2	109
4.3	Exercices du chapitre 3	137
5	Travaux pratiques en Octave et Matlab	151
5.1	Programmes pour le chapitre 1	151
5.2	Programmes pour le chapitre 2	155
5.3	Programmes pour le chapitre 3	159
5.4	Versions R des programmes	162
6	Quelques études de cas	167
6.1	Couverture d'option (delta-hedging) et négociation (trading) de volatilité	167
6.1.1	Implémentation d'une couverture de type delta-hedging	167
6.1.2	Incertitude sur les paramètres : volatilité implicite, vo- latilité réelle, négociation de volatilité	170
6.2	Assurance de portefeuille : stop-loss et C.P.P.I.	173
6.2.1	Une fausse bonne idée : prendre le meilleur actif	173
6.2.2	Stratégie stop-loss	176
6.2.3	C.P.P.I.	179
6.3	Versions R des programmes	183
A	Quelques prérequis de probabilités	187
A.1	Variable normale ou gaussienne	187
A.2	Fonction caractéristique	187
A.3	Espaces L^p	188
A.3.1	Espace $L^0(X, \mathcal{A}, \mathbb{P})$	188
A.3.2	Espaces $L^p(X, \mathcal{A}, \mathbb{P})$, $p \geq 1$	188
A.4	Convergence des suites de variables aléatoires	189
A.5	Espérance conditionnelle	191
A.6	Martingales en temps discret	193
A.7	Changement de probabilité	195
A.8	Résultat de type théorème de classe monotone	196

A.9 Construction du mouvement brownien	197
A.10 Ensemble de scénarios et mesure de Wiener	197
Bibliographie	199
Index	201