

**COURS
D'ANALYSE MATHÉMATIQUE**

Georges VALIRON

**ÉQUATIONS
FONCTIONNELLES
APPLICATIONS**

DEUXIÈME ÉDITION



**ÉDITIONS
JACQUES GABAY**

TABLE DES MATIÈRES

PRÉFACE	1
<i>Chapitre premier. — FONCTIONS ALGÈBRIQUES D'UNE VARIABLE</i>	1
<i>I. — Définitions. Systèmes circulaires.</i>	
1. — Théorème de monodromie.	2
2. — Fonctions algébriques et surfaces de Riemann correspondantes.	3
3. — Détermination des points de ramification. Méthode de Puiseux.	9
4. — Exemples.	13
5. — Théorème et surfaces de Lüroth.	14
6. — Transformation topologique de la surface de Lüroth.	17
<i>II. — Connexion des surfaces de Riemann. Genre.</i>	
7. — Théorèmes sur la connexion.	19
8. — Ordre de connexion d'une surface.	21
9. — Genre. Formule de Riemann	23
10. — Tracé des coupures. Exemples.	23
<i>III. — Transformations birationnelles. Applications.</i>	
11. — Cycles. Transformations birationnelles de plan à plan, ou de Cremona. . .	25
12. — Théorème de Nöther. Application.	29
13. — Transformations birationnelles de courbes à courbes. Théorème de Bertini. .	32
14. — Intersection de deux cycles. Théorème de Bezout.	35
15. — Classe. Genre et points multiples	41
16. — Application du théorème de Bertini aux courbes de genre zéro et un.	43
<i>Chapitre II. — NOTIONS SUR LES INTÉGRALES ABÉLIENNES, LES PROBLÈMES D'INVERSION ET D'UNIFORMISATION</i>	45
<i>I. — Fonctions analytiques sur la surface de Riemann.</i>	
17. — Fonctions uniformes sur la surface de Riemann.	45
18. — Intégrale de Cauchy.	47
19. — Fractions rationnelles.	50
<i>II. — Intégrales abéliennes.</i>	
20. — Périodes des intégrales abéliennes.	51
21. — Propriétés générales. Classification en trois espèces	55
22. — Intégrales de première espèce.	55
23. — Intégrales de première espèce linéairement distinctes. Formule de Riemann. .	58
24. — Intégrales de deuxième espèce et intégrales de troisième espèce.	61
<i>III. — Théorème d'Abel. Applications.</i>	
25. — Forme différentielle	62
26. — Forme intégrale du théorème.	64

27. — Applications géométriques. Propriétés angulaires	67
28. — Propriétés relatives aux distances et aux aires.	68
29. — Arcs des courbes de direction.	69

IV. — *Les problèmes d'inversion et l'uniformisation.*

30. — Indications sur le problème d'inversion de Jacobi et les fonctions abéliennes.	70
31. — Indications sur le problème d'inversion de Riemann et l'uniformisation.	71
32. — Théorème de Bloch	72
33. — Théorème de Picard sur l'uniformisation.	74

Chapitre III. — FONCTIONS ANALYTIQUES DE PLUSIEURS VARIABLES. MÉTHODE
DES FONCTIONS MAJORANTES 78

I. — *Séries entières à plusieurs variables.*

34. — Série à coefficients et variables positifs.	78
35. — Séries à termes quelconques. Cercles de convergence associés.	81
36. — Propriétés de la somme. Fonctions analytiques.	83
37. — Cas de deux variables réelles. Exemple des fonctions harmoniques.	86
38. — Fonctions majorantes.	88

II. — *Fonctions implicites analytiques. Courbes et surfaces analytiques.*

39. — Fonction d'une variable	89
40. — Cas de p équations à p inconnues.	91
41. — Courbes analytiques	93
42. — Surfaces analytiques.	95
43. — Formule de Lagrange. Méthodes de Laplace et d'Hermite.	96
44. — Remarque sur les solutions des fonctions implicites.	99

III. — *Application de la méthode des fonctions majorantes aux équations différentielles.*

45. — Cas d'une seule équation	99
46. — Unicité de la solution. Dépendance des conditions initiales. Facteur inté- grant	101
47. — Système d'équations du premier ordre.	105
48. — Équation d'ordre n	107
49. — Cas des systèmes linéaires	109

IV. — *Notions sur la théorie des fonctions holomorphes de deux variables d'après Poincaré.*

50. — Fonctions monogènes de deux variables	111
51. — Extension de la formule de Cauchy. Application. Théorème de Weierstrass.	112

Chapitre IV. — THÉORIE DU CONTACT. ENVELOPPES 115

I. — *Théorie du contact.*

52. — Définition de l'ordre du contact.	115
53. — Contact de deux courbes.	116
54. — Contact de deux surfaces.	120
55. — Contact d'une courbe et d'une surface.	122
56. — Notations vectorielles.	123
57. — Osculation.	124

II. — *Théorie des enveloppes.*

58. — Enveloppes des courbes planes	127
59. — Enveloppes de surfaces dépendant d'un paramètre	130
60. — Enveloppes de surfaces dépendant de deux paramètres	133

61. — Enveloppes de courbes de l'espace dépendant d'un paramètre.	136
62. — Arête de rebroussement.	138

Chapitre V. — THÉORIE ÉLÉMENTAIRE DES ÉQUATIONS DIFFÉRENTIELLES 141

I. — Équations du premier ordre.

63. — Équations à variables séparées. Exemples	141
64. — Équation d'Euler	144
65. — Équations homogènes.	145
66. — Équations linéaires. Équations de Bernoulli et de Jacobi	148
67. — Équation de Riccati.	151
68. — Intégration des différentielles totales. Facteur intégrant.	152
69. — Équations non résolues. Équations de Lagrange et de Clairaut	154
70. — Intégrale singulière. Interprétation géométrique de Lie	157

II. — Équations d'ordre supérieur à un.

71. — Équation $y^{(n)} = f(x)$	159
72. — Cas simples où l'ordre s'abaisse.	160
73. — Simplification par dérivation	163
74. — Exemple d'intégration par les fonctions elliptiques	165
75. — Équation différentielle d'une famille de courbes.	166

III. — Équations différentielles linéaires.

76. — Définitions. Propriétés générales. Wronskien	167
77. — Système fondamental de solutions. Intégrale générale.	170
78. — Équations avec second membre. Méthode de la variation des constantes.	172
79. — Application aux équations à coefficients constants.	173
80. — Équations à coefficients constants avec second membre.	177

IV. — Systèmes d'équations linéaires.

81. — Système canonique.	178
82. — Systèmes fondamentaux de solutions.	179
83. — Abaissement de l'ordre.	181
84. — Équations avec seconds membres.	182
85. — Application aux équations à coefficients constants. Systèmes homogènes.	183
86. — Systèmes linéaires à coefficients constants avec seconds membres.	187
87. — Équation de Jacobi	189

Chapitre VI. — ÉQUATIONS DIFFÉRENTIELLES LINÉAIRES DANS LE DOMAINE COMPLEXE 191

I. — Application des théorèmes d'existence.

88. — Solutions dans le cas général.	191
89. — Systèmes fondamentaux de solutions.	192
90. — Extension des résultats obtenus dans le cas réel.	193
91. — Méthode de d'Alembert.	194
92. — Équations d'Euler.	195

II. — Équations homogènes à coefficients uniformes.

93. — Permutation des solutions autour des singularités isolées.	196
94. — Cas où l'équation en s a des racines multiples.	199
95. — Théorème de Fuchs	203
96. — Équation déterminante.	206
97. — Condition nécessaire et suffisante pour que l'équation soit du premier type de Fuchs. Application	208

III. — *Applications.*

98. — Équations à deux singularités.	209
99. — Équations d'Halphen.	210
100. — Équations de Picard.	214
101. — Équation de Lamé.	217

IV. — *Méthode d'intégration de Laplace.*

102. — Équations de Laplace	219
103. — Intégration de l'équation de Laplace dans le cas général	222
104. — Développements asymptotiques	225
105. — Équations dont les coefficients sont des polynômes.	227

V. — *Résultats divers.*

106. — Solutions communes à deux équations linéaires.	229
107. — Groupe d'une équation linéaire	231
108. — Équation adjointe.	232
109. — Équations à coefficients algébriques.	233

Chapitre VII. — ÉTUDE DE QUELQUES ÉQUATIONS DIFFÉRENTIELLES LINÉAIRES
DU SECOND ORDRE. 234

I. — *Équation de Gauss et fonctions hypergéométriques.*

110. — Équation du second ordre à trois singularités régulières.	234
111. — Fonction hypergéométrique $F(\alpha, \beta, \gamma, x)$	236
112. — Prolongement des solutions.	238
113. — Polynômes de Jacobi.	241
114. — Représentation de $F(\alpha, \beta, \gamma, x)$ par une intégrale	243
115. — Intégrales hypergéométriques.	244
116. — Application à la représentation conforme	245
117. — Dégénérescences de l'équation de Gauss. Polynômes de Laguerre.	247
118. — Polynômes d'Hermite.	248

II. — *Équations et fonctions de Legendre.*

119. — Équation de Legendre. Formules de Schläfli et de Laplace	250
120. — Solution générale de l'équation de Legendre	250
121. — Formule de Heine.	252
122. — Théorème de Neumann.	254
123. — Fonctions de Legendre considérées comme fonctions sphériques.	256

III. — *Équations et fonctions de Bessel.*

124. — Équation différentielle et fonctions de Bessel.	258
125. — Formules de récurrence.	260
126. — Formule de Schläfli. Fonction génératrice de $J_n(x)$	260
127. — Théorème de Neumann.	262
128. — Application de la méthode de Laplace.	264

Chapitre VIII. — ÉQUATIONS DIFFÉRENTIELLES NON LINÉAIRES DANS LE
DOMAINE COMPLEXE. 268

I. — *Étude locale des singularités. Théorèmes de Briot et Bouquet.*

129. — Cas où le coefficient différentiel devient infini.	268
130. — Cas où le coefficient différentiel est indéterminé. Cas général.	269
131. — Cas où λ est un entier positif.	272
132. — Cas général.	273
133. — Cas des systèmes différentiels.	274

II. — *Singularités des équations du premier ordre.*

134. — Théorème de Painlevé	275
135. — Équations rationnelles dont les solutions n'ont pas de points critiques algébriques mobiles	276
136. — Remarques sur les constantes d'intégration	277
137. — Théorème de Boutroux sur la croissance des solutions de $y' = P(y)$	278
138. — Théorèmes de Malmquist	280
139. — Équations algébriques en y et y' à solutions uniformes. Théorèmes d'Hermitte et de Briot et Bouquet	282
140. — Application aux équations binômes	284
141. — Théorème de Poincaré	286

III. — *Équations d'ordre supérieur à un. Théorie de Painlevé. Équations et fonctions de Painlevé.*

142. — Équations du second ordre à points critiques fixes. Méthode de Painlevé	286
143. — Application à l'équation $y'' = R(x, y, y')$	289
144. — Réduction de l'équation correspondant à $A(x, y) = 0$	292
145. — Équation de Painlevé $y'' = 6y^2 + x$	295
146. — Autres équations de Painlevé. Irréductibilité	298

IV. — *Intégrales singulières.*

147. — Intégrales singulières des équations algébriques du premier ordre	299
148. — Exemples et compléments	303
149. — Intégrales singulières des systèmes différentiels	304
150. — Application et exemples	307

Chapitre IX. — ÉQUATIONS DIFFÉRENTIELLES DANS LE CHAMP RÉEL 308

I. — *Théorèmes d'existence. Méthode des approximations successives de Picard.*

151. — Existence des solutions moyennant la condition de Lipschitz	308
152. — Unicité de la solution. Dépendance des conditions initiales	311
153. — Intégrales premières. Équations aux variations	313
154. — Prolongement des solutions. Cas des systèmes linéaires	315
155. — Cas où les fonctions sont analytiques	317

II. — *Intégrales premières. Multiplicateur. Invariants intégraux.*

156. — Intégrales premières	317
157. — Combinaisons intégrables. Exemples	319
158. — Multiplicateur de Jacobi	321
159. — Invariants intégraux de Poincaré	323

III. — *Méthode de Cauchy. Théorème d'Arzelà. Intégration approchée.*

160. — Théorème d'Arzelà sur les fonctions également continues	325
161. — Méthode de Cauchy. Théorème d'Arzelà	326
162. — Théorème de Cauchy-Lipschitz	328
163. — Méthodes pratiques d'approximation. Formule de Newton. Méthode d'Adams	329
164. — Cas des équations d'ordre supérieur	331

IV. — *Théorie de Lie.*

165. — Groupes continus ponctuels à un paramètre	332
166. — Transformations infinitésimales du groupe	335
167. — Groupe prolongé	335
168. — Application aux équations différentielles du premier ordre	336
169. — Équations d'ordre supérieur. Groupes à plusieurs paramètres	339

Chapitre X. — ÉQUATIONS DU PREMIER ORDRE ET DU SECOND ORDRE DANS LE CHAMP RÉEL 340

I. — *Étude des solutions des équations du premier ordre dans le voisinage des points singuliers de l'équation.*

170. — Examen d'un cas particulier simple. 340
 171. — Étude du cas général, lorsque les racines de l'équation en r sont réelles et de même signe. 342
 172. — Cas où les racines sont imaginaires. 345
 173. — Cas où les racines de l'équation en r sont réelles et de signes contraires. 348
 174. — Cas des équations rationnelles. Théorèmes de Poincaré. 350
 175. — Méthode de Bendixson. 352

II. — *Théorie générale de Poincaré.*

176. — Problème général. Projection sur la sphère. Caractéristiques. 353
 177. — Points singuliers du système des caractéristiques. Relation de Poincaré entre les nombres de nœuds, cols et foyers. 354
 178. — Forme des caractéristiques. Théorie des contacts. Cycles limites. 357
 179. — Extensions de la méthode et des résultats. 360

III. — *Équations de Sturm-Liouville.*

180. — Problème aux limites de Sturm-Liouville ; équation réduite. 361
 181. — Théorèmes de Sturm. 362
 182. — Application aux fonctions de Bessel. 364
 183. — Équation renfermant un paramètre. 364
 184. — Orthogonalité de la suite de solutions fondamentales. Suites fermées. 367
 185. — Applications et extension. 368

Chapitre XI. — CALCUL DES VARIATIONS 370

I. — *Cas des intégrales simples. Extrémales.*

186. — Position du problème. 370
 187. — Recherche de conditions nécessaires. 371
 188. — Premier lemme fondamental du calcul des variations. Équation d'Euler. Extrémales. 372
 189. — Cas particuliers. Changement de variable. Exemples. 373
 190. — Objection et lemme de Du Bois Reymond. 376

II. — *Étude du cas où f ne dépend pas de y .*

191. — Condition suffisante pour le minimum absolu. Figurative. Solutions discontinues. 378
 192. — Exemples. Problème de Newton. 380

III. — *Conditions de l'extremum dans le cas général.*

193. — Variation première en général. 382
 194. — Problèmes de variation avec des limites variables. Transversales. 383
 195. — Conditions nécessaires pour l'extremum. Conditions de Weierstrass et de Legendre. 387
 196. — Champ d'extrémales. Théorème d'Hilbert. Conditions suffisantes de Weierstrass et de Legendre. 389
 197. — Foyers conjugués. Condition de Jacobi. Extremum fort, extremum faible. Extremum absolu. 391
 198. — Exemples. Remarques diverses. 392

IV. — *Notions sur divers problèmes de variations. Conditions du premier ordre.*

199. — Cas de plusieurs fonctions inconnues. 395
 200. — Problèmes isopérimétriques. 398

201. — Cas des intégrales doubles. Surfaces minima	400
202. — Forme paramétrique. Géodésiques.	402
203. — Équations canoniques	404

Chapitre XII. — THÉORIE DES COURBES GAUCHES. 406

I. — *Formules de Frenet-Serret. Applications.*

204. — Rappel de résultats acquis.	406
205. — Trièdre de Frenet-Serret. Torsion. Formules de Frenet-Serret	408
206. — Calcul des rayons de courbure et de torsion.	410
207. — Équations intrinsèques d'une courbe gauche. Elles déterminent la courbe.	411
208. — Interprétation cinématique	412
209. — Signe de la torsion.	413
210. — Cas particuliers	414
211. — Hélices.	415

II. — *Méthode du trièdre mobile.*

212. — Enveloppes de plans liés à la courbe	417
213. — Développées.	419
214. — Développantes.	420

III. — *Courbes particulières remarquables.*

215. — Courbes de Bertrand.	421
216. — Courbes à courbure constante et courbes à torsion constante.	422
217. — Extrémales de $\int f(M) ds$	424

IV. — *Nombres remarquables relatifs aux courbes gauches algébriques.*

218. — Points stationnaires	425
219. — Formules de Cayley	426
220. — Géométrie finie et géométrie infinitésimale directe.	427

Chapitre XIII. — THÉORIE DES SURFACES. THÉORÈMES GÉNÉRAUX. 429

I. — *La courbure et les deux formes fondamentales.*

221. — Formes diverses des équations d'une surface.	429
222. — Élément d'arc ou élément linéaire. Questions d'angles.	431
223. — Formule fondamentale relative aux courbures. Deuxième forme quadratique fondamentale. Théorème de Meusnier.	435
224. — Étude des courbures des sections normales. Indicatrice de Dupin.	438
225. — Calcul des rayons de courbure principaux dans le cas général.	441
226. — Théorème de Gauss sur la courbure totale.	443
227. — Directions conjuguées. Lignes conjuguées. Lignes de courbure. Lignes asymptotiques.	444
228. — Définition géométrique des lignes conjuguées. Théorème de Kœnigs. Définition géométrique des lignes asymptotiques et des lignes de courbure	447
229. — Propriétés des lignes de courbure. Normalies. Théorème de Joachimstal. Omphalics. Systèmes triples orthogonaux	448
230. — Représentation sphérique.	451

II. — *Courbure et torsion géodésiques. Géodésiques. Surfaces applicables.*

231. — Trièdre de Darboux-Ribaucour. Courbure et torsion géodésiques.	453
232. — Calcul de la torsion géodésique. Formule de Bonnet. Formule d'Enneper.	455
233. — Courbure géodésique et centre de courbure géodésique. Théorème de Bonnet.	456
234. — Applications de la torsion géodésique	460
235. — Lignes géodésiques. Théorème de Gauss.	461

236. — Surfaces applicables	463
237. — Exemples. Théorème de Bour. Surfaces à courbure totale constante.	465
238. — Les surfaces applicables sur le plan sont les surfaces développables.	468

III. — *Représentation conforme. Cartes géographiques.*

239. — Représentation conforme d'une surface sur une autre, sur un plan.	469
240. — Exemples. Cartes géographiques.	471

Chapitre XIV. — THÉORIE DES SURFACES. APPLICATIONS. 474

I. — *Lignes asymptotiques et lignes de courbure de quelques surfaces.*

241. — Lignes asymptotiques de quelques surfaces.	474
242. — Lignes de courbure. Formules de Rodrigues. L'inversion conserve les lignes de courbure	476
243. — Surfaces à lignes de courbure circulaires. Enveloppes de sphères. Cyclides de Dupin	478
244. — Surfaces moulures.	480
245. — Problèmes divers relatifs aux courbes tracées sur une surface	481

II. — *Surfaces réglées non développables.*

246. — Diverses formes des équations. Indicatrice sphérique et courbes sphériques.	482
247. — Élément linéaire. Variation du plan tangent. Point central. Ligne de striction.	484
248. — Lignes asymptotiques.	486

III. — *Courbes et surfaces attachées aux congruences de courbes et de droites.*

249. — Congruences de courbes. Surface focale	488
250. — Cas de dégénérescence. Cas des équations paramétriques.	491
251. — Comparaison avec la théorie des intégrales singulières des systèmes différentiels	493
252. — Congruences de droites.	493
253. — Condition pour qu'une congruence de droites soit une congruence de normales.	495
254. — Applications. Théorème de Malus.	497
255. — Courbes dont les tangentes appartiennent à un complexe linéaire.	498

IV. — *Surfaces minima analytiques.*

256. — Surfaces minima réglées et surfaces minima de révolution.	500
257. — Surfaces minima analytiques. Représentation au moyen des lignes de longueur nulle.	501
258. — Lignes asymptotiques et lignes de courbure. Représentations conformes.	503
259. — Surfaces minima dont les lignes de courbure sont planes. Surfaces d'Enneper.	505
260. — Surface minima passant par un contour donné.	507

V. — *Problèmes fondamentaux de la théorie des surfaces.*

261. — Formules de Codazzi.	507
262. — Problèmes fondamentaux de la théorie des surfaces.	508

Chapitre XV. — ÉQUATIONS AUX DÉRIVÉES PARTIELLES DU PREMIER ORDRE. 509

I. — *Équations linéaires.*

263. — Intégrale générale	509
264. — Méthode de Cauchy. Caractéristiques.	511
265. — Problème de Cauchy. Singularités.	513
266. — Exemples.	515

II. — *Équations aux différentielles totales.*

267. — Équation complètement intégrable. Existence et calcul des solutions.	516
268. — Interprétation géométrique. Méthode de Mayer. Cas analytique.	520
269. — Équation sous forme symétrique. Méthode de Bertrand.	521
270. — Exemples.	524
271. — Cas des équations non résolues.	525

III. — *Équation générale du premier ordre à deux variables.*

272. — Interprétation géométrique. Méthode de Cauchy. Caractéristiques et développables caractéristiques.	526
273. — Existence des surfaces intégrales. Problème de Cauchy. Méthode de Darboux. Cas analytique.	529
274. — Courbes intégrales. Équation de Monge.	532
275. — Méthode de Lagrange et Charpit. Intégrales complètes.	533
276. — Comparaison des deux méthodes.	536
277. — Cas particuliers. Exemples.	538
278. — Solutions généralisées de Lie.	541
279. — Exemple.	543

IV. — *Extensions des résultats aux cas généraux.*

280. — Extension de la méthode de Cauchy.	544
281. — Extension de la méthode de Lagrange.	546
282. — Recherche d'une intégrale complète. Identité de Poisson. Méthode de Jacobi.	547
283. — Application à la mécanique.	550

Chapitre XVI. — NOTIONS SUR LES ÉQUATIONS AUX DÉRIVÉES PARTIELLES DU SECOND ORDRE A DEUX VARIABLES. 551

I. — *Théorèmes d'existence. Caractéristiques.*

284. — Théorème de Cauchy-Kowaleska.	551
285. — Théorème général d'existence. Caractéristiques. Cas des équations linéaires. Classification.	553

II. — *Équations de Monge-Ampère.*

286. — Caractéristiques des équations de Monge-Ampère. Surfaces intégrales.	557
287. — Intégrales premières et intégrales intermédiaires.	559
288. — Exemples et applications.	560

III. — *Équations linéaires du type hyperbolique.*

289. — Équations complètement linéaires. Méthode de Laplace.	562
290. — Équation adjointe et méthode de Riemann.	565
291. — Applications.	568
292. — Méthode des approximations successives.	570

IV. — *Équations linéaires du type elliptique.*

293. — Équation de Laplace. Fonctions harmoniques. Formule de Green.	573
294. — Problème de Dirichlet. Fonction de Green. Formule de Poisson. Théorème de Harnack.	576
295. — Procédé alterné de Schwarz. Cas particuliers et exemple.	580
296. — Équation linéaire à coefficients constants.	586

V. — *Équations du type parabolique.*

297. — Équation de la chaleur.	587
298. — Solution de Fourier.	589
299. — Questions d'unicité. Propriétés générales des solutions.	591