

Félix R. GANTMACHER

THÉORIE
DES
MATRICES



ÉDITIONS
JACQUES GABAY

TABLE DES MATIÈRES

CHAPITRE 1. — <i>Matrices et opérations sur les matrices</i>	1
§ 1. Matrices. Notations de base	1
§ 2. Addition et multiplication des matrices rectangulaires	3
§ 3. Matrices carrées.	12
§ 4. Matrices associées. Mineurs de la matrice inverse	19
CHAPITRE 2. — <i>Algorithme de Gauss et quelques-unes de ses applications</i>	24
§ 1. Méthode d'élimination de Gauss	24
§ 2. Interprétation mécanique de l'algorithme de Gauss	29
§ 3. Identité de Sylvester pour les déterminants	32
§ 4. Décomposition d'une matrice carrée en facteurs triangulaires	34
§ 5. Partition d'une matrice en blocs. Technique d'opération avec les matrices partitionnées. Algorithme généralisé de Gauss	42
CHAPITRE 3. — <i>Opérateurs linéaires dans un espace vectoriel de dimension n</i>	51
§ 1. Espaces vectoriels	51
§ 2. Opérateur linéaire appliquant un espace de dimension n dans un espace de dimension m	56
§ 3. Addition et multiplication des opérateurs linéaires	58
§ 4. Transformation des coordonnées	60
§ 5. Matrices équivalentes. Rang d'un opérateur. Inégalité de Sylvester	62
§ 6. Opérateurs linéaires appliquant un espace de dimension n dans lui-même	67
§ 7. Valeurs caractéristiques et vecteurs caractéristiques d'un opérateur linéaire	70
§ 8. Opérateurs linéaires de structure simple	73
CHAPITRE 4. — <i>Polynôme caractéristique et polynôme minimal d'une matrice</i>	77
§ 1. Addition et multiplication des polynômes matriciels	77
§ 2. Division à droite et à gauche des polynômes matriciels	78
§ 3. Théorème de Bezout généralisé	81
§ 4. Polynôme caractéristique d'une matrice. Matrice adjointe.	83
§ 5. Méthode de Faddeev pour le calcul simultané des coefficients du polynôme caractéristique et de la matrice adjointe	87
§ 6. Polynôme minimal d'une matrice	90

CHAPITRE 5. — <i>Fonctions de matrices</i>	96
§ 1. Définition d'une fonction d'une matrice	96
§ 2. Polynôme d'interpolation de Lagrange-Sylvester	101
§ 3. Autres formes de définition de $f(A)$. Composantes de la matrice A	104
§ 4. Représentation des fonctions de matrices au moyen de séries	111
§ 5. Application des fonctions de matrices à l'intégration d'un système d'équations différentielles linéaires à coefficients constants	117
§ 6. Stabilité du mouvement dans le cas d'un système linéaire	126
CHAPITRE 6. — <i>Transformations équivalentes des matrices polynômiales.</i> <i>Théorie analytique des diviseurs élémentaires</i>	132
§ 1. Transformations élémentaires d'une matrice polynômiale	132
§ 2. Forme canonique d'une λ -matrice	136
§ 3. Polynômes invariants et diviseurs élémentaires d'une matrice poly- nômiale	136
§ 4. Équivalence des binômes linéaires	147
§ 5. Critère de similitude des matrices	149
§ 6. Formes normales d'une matrice	150
§ 7. Diviseurs élémentaires de la matrice $f(A)$	154
§ 8. Méthode générale de construction d'une matrice de transformation	160
§ 9. Autre méthode de construction d'une matrice de transformation.	165
CHAPITRE 7 — <i>Structure d'un opérateur linéaire dans un espace de dimension n</i>	178
§ 1. Polynôme minimal d'un vecteur et d'une espace (par rapport à un opérateur linéaire donné)	178
§ 2. Décomposition en sous-espaces invariants avec polynômes minimaux premiers entre eux.	180
§ 3. Equivalence. Espace-quotient	185
§ 4. Décomposition d'un espace en sous-espaces invariants cycliques	188
§ 5. Formes normales d'une matrice	193
§ 6. Polynômes invariants. Diviseurs élémentaires	196
§ 7. Forme normale de Jordan d'une matrice	203
§ 8. Méthode de Krylov de transformation de l'équation caractéristique	205
CHAPITRE 8. — <i>Equations matricielles</i>	218
§ 1. L'équation $AX = XB$	218
§ 2. Cas spécial $A = B$. Matrices commutables	223
§ 3. L'équation $AX - XB = C$	228
§ 4. L'équation scalaire $f(X) = 0$	228
§ 5. Equations de polynôme matriciel	230
§ 6. Extraction des racines m -ièmes d'une matrice régulière	234

§ 7. Extraction des racines m -ièmes d'une matrice singulière	237
§ 8. Logarithme d'une matrice	242
CHAPITRE 9. — <i>Opérateurs linéaires dans un espace unitaire</i>	245
§ 1. Considérations générales	245
§ 2. Métrisation d'un espace	246
§ 3. Critère de Gram de dépendance linéaire de vecteurs	249
§ 4. Projection orthogonale	251
§ 5. Signification géométrique du déterminant de Gram et quelques inégalités	254
§ 6. Orthogonalisation d'une suite de vecteurs	259
§ 7. Bases orthonormées	265
§ 8. Opérateur adjoint	268
§ 9. Opérateurs normaux dans un espace unitaire	271
§ 10. Spectre des opérateurs normaux, hermitiques et unitaires	273
§ 11. Opérateurs hermitiques définis non négatifs et définis positifs	277
§ 12. Décomposition polaire d'un opérateur linéaire dans un espace unitaire. Formules de Cayley	279
§ 13. Opérateurs linéaires dans un espace euclidien	283
§ 14. Décomposition polaire et formules de Cayley dans un espace euclidien	289
§ 15. Opérateurs normaux commutables	293
CHAPITRE 10. — <i>Formes quadratiques et hermitiques</i>	296
§ 1. Transformation des variables dans une forme quadratique	296
§ 2. Réduction d'une forme quadratique à une somme de carrés. Loi d'inertie	298
§ 3. Méthodes de Lagrange et de Jacobi de réduction d'une forme quadratique à une somme de carrés	300
§ 4. Formes quadratiques positives	306
§ 5. Réduction d'une forme quadratique aux axes principaux	310
§ 6. Faisceaux de formes quadratiques	311
§ 7. Propriétés extrémales des valeurs caractéristiques d'un faisceau régulier de formes	319
§ 8. Petites oscillations d'un système à n degrés de liberté	328
§ 9. Formes hermitiques	334
§ 10. Formes de Hankel	341
BIBLIOGRAPHIE	351
INDEX	365