

Abderrahmane Ouagga

# Analyse

Fonctions d'une à plusieurs  
variables réelles



# Table des matières

<b>1</b>	<b>Limites de fonctions</b>	<b>1</b>
1.1	Limites . . . . .	1
1.2	Opérations algébriques sur les limites . . . . .	6
1.3	Formes indéterminées . . . . .	8
1.4	Exercices . . . . .	11
<b>2</b>	<b>Suites numériques</b>	<b>13</b>
2.1	Généralités . . . . .	13
2.2	Limite d'une suite . . . . .	14
2.3	Opérations algébriques sur les limites . . . . .	16
2.4	Théorèmes sur l'ordre . . . . .	18
2.5	Etude de quelques suites . . . . .	19
2.6	Suites de Cauchy . . . . .	21
2.7	Suites adjacentes et segments emboîtés . . . . .	22
2.8	Suites extraites . . . . .	25
2.9	Exercices . . . . .	26
<b>3</b>	<b>Continuité</b>	<b>29</b>
3.1	Fonctions continues . . . . .	29
3.2	Opérations algébriques sur la continuité . . . . .	29
3.3	Prolongement par continuité . . . . .	30
3.4	Continuité uniforme . . . . .	30
3.5	Suites et continuité . . . . .	32
3.5.1	Caractérisation de la continuité par les suites . . . . .	32
3.5.2	Théorème de Heine . . . . .	34
3.5.3	Théorème du maximum . . . . .	35
3.5.4	Théorème des valeurs intermédiaires . . . . .	36
3.5.5	Fonctions réciproques . . . . .	38
3.5.6	Suites récurrentes . . . . .	41
3.6	Exercices . . . . .	43

<b>4</b>	<b>Dérivation</b>	<b>45</b>
4.1	Notion de dérivation . . . . .	45
4.1.1	Définition et exemples . . . . .	45
4.1.2	Interprétation géométrique (tangente) . . . . .	47
4.1.3	Extension de la notion de dérivée . . . . .	47
4.1.4	Dérivation et continuité . . . . .	48
4.1.5	Règles de calcul . . . . .	49
4.2	Propriétés . . . . .	50
4.2.1	Extrema locaux . . . . .	50
4.2.2	Théorème de Rolle . . . . .	52
4.2.3	Formule des accroissements finis . . . . .	52
4.2.4	Variations d'une fonction . . . . .	53
4.2.5	Règle de l'Hospital . . . . .	54
4.3	Dérivées d'ordre supérieur . . . . .	55
4.3.1	Définition . . . . .	55
4.3.2	Règles de calcul . . . . .	55
4.3.3	Fonctions de classe $\mathcal{C}^k$ . . . . .	56
4.3.4	Formules de Taylor et développement limité . . . . .	56
4.3.5	Existence d'un extremum local et points d'inflexion . . . . .	61
4.3.6	Fonctions convexes . . . . .	61
4.4	Exercices . . . . .	63
<b>5</b>	<b>Fonctions usuelles</b>	<b>65</b>
5.1	Fonctions trigonométriques . . . . .	65
5.1.1	Fonction cosinus . . . . .	65
5.1.2	Fonction Arc cosinus . . . . .	66
5.1.3	Fonction sinus . . . . .	67
5.1.4	Fonction Arc sinus . . . . .	67
5.1.5	Fonction tangente . . . . .	69
5.1.6	Fonction Arc tangente . . . . .	69
5.2	Exponentielle et logarithme . . . . .	71
5.2.1	Fonction exponentielle . . . . .	71
5.2.2	Fonction logarithme . . . . .	73
5.2.3	Croissances comparées . . . . .	74
5.2.4	Fonctions puissances . . . . .	76
5.3	Fonctions hyperboliques . . . . .	77
5.3.1	Trigonométrie hyperbolique . . . . .	77
5.3.2	Etudes des fonctions hyperboliques . . . . .	79
5.3.3	Fonctions réciproques . . . . .	82
5.4	Exercices . . . . .	84

<b>6</b>	<b>Intégration</b>	<b>87</b>
6.1	Primitives ou intégrales indéfinies . . . . .	87
6.1.1	Définition . . . . .	87
6.1.2	Tableau des primitives usuelles . . . . .	88
6.1.3	Linéarité de l'intégration . . . . .	89
6.1.4	Intégration par parties . . . . .	89
6.1.5	Intégration par changement de variable . . . . .	89
6.1.6	Intégration d'une fonction rationnelle . . . . .	91
6.1.7	Intégration d'une fonction rationnelle trigonométrique . . . . .	95
6.1.8	Intégrales abéliennes . . . . .	96
6.1.9	Exercices . . . . .	99
6.2	Intégrales définies . . . . .	100
6.2.1	Définition . . . . .	100
6.2.2	Interprétation géométrique . . . . .	101
6.2.3	Intégration par parties . . . . .	101
6.2.4	Propriétés de l'intégrale . . . . .	101
6.2.5	Quelques inégalités classiques . . . . .	103
6.2.6	Intégration par changement de variable . . . . .	103
6.2.7	Fonctions définies par des intégrales . . . . .	104
6.2.8	Exercices . . . . .	106
<b>7</b>	<b>Equations différentielles</b>	<b>109</b>
7.1	Généralités sur les équations différentielles . . . . .	109
7.2	Equations différentielles d'ordre 1 . . . . .	109
7.2.1	Equation à variables séparées . . . . .	110
7.2.2	Equation homogène . . . . .	111
7.2.3	Equation différentielle linéaire . . . . .	113
7.2.4	Equation de Bernoulli . . . . .	115
7.2.5	Equation de Riccati . . . . .	116
7.2.6	Equation de Clairaut . . . . .	118
7.2.7	Equation de Clairaut-Lagrange . . . . .	120
7.2.8	Exercices . . . . .	121
7.3	Equations différentielles d'ordre 2 . . . . .	123
7.3.1	Equations incomplètes . . . . .	123
7.3.2	Equations homogènes en $y$ , $y'$ et $y''$ . . . . .	124
7.3.3	Equations différentielles linéaires . . . . .	125
7.3.3.1	Généralités . . . . .	125
7.3.3.2	Equation à coefficients constants . . . . .	128
7.3.3.3	Equations linéaires à coefficients non constants . . . . .	137
7.3.4	Exercices . . . . .	141

<b>8</b>	<b>Courbes paramétrées</b>	<b>143</b>
8.1	Les différentes représentations . . . . .	143
8.1.1	Représentation cartésienne implicite . . . . .	143
8.1.2	Représentation cartésienne explicite . . . . .	143
8.1.3	Représentation paramétrique . . . . .	144
8.1.4	Exercices . . . . .	145
8.2	Etude locale d'une paramétrisation . . . . .	145
8.2.1	Rappels sur les fonctions vectorielles . . . . .	145
8.2.2	Points simples et points multiples . . . . .	146
8.2.3	Points réguliers et points singuliers . . . . .	147
8.2.4	Changement de paramètre . . . . .	147
8.2.5	Tangente en un point . . . . .	148
8.2.6	Plan osculateur . . . . .	152
8.2.7	Exercices . . . . .	154
8.3	Propriétés métriques des courbes . . . . .	156
8.3.1	Longueur d'un arc . . . . .	156
8.3.2	Paramétrage normal et abscisse curviligne . . . . .	159
8.3.3	Courbure . . . . .	161
8.3.4	Repère de Frenet . . . . .	164
8.3.5	Torsion . . . . .	164
8.3.6	Système de Serret-Frenet . . . . .	165
8.3.7	Calcul direct de la courbure et de la torsion . . . . .	166
8.3.8	Développée et développantes . . . . .	168
8.3.9	Exercices . . . . .	171
8.4	Tracé des courbes planes . . . . .	173
8.4.1	Tracé des courbes paramétrées . . . . .	174
8.4.1.1	Méthode de construction . . . . .	174
8.4.1.2	Symétries . . . . .	175
8.4.1.3	Asymptotes . . . . .	177
8.4.1.4	Tangente en un point . . . . .	178
8.4.1.5	Concavité et points d'inflexion . . . . .	178
8.4.1.6	Tableau de variations . . . . .	179
8.4.1.7	Exercices . . . . .	181
8.4.2	Tracé des courbes en polaires . . . . .	182
8.4.2.1	Equation polaire . . . . .	183
8.4.2.2	Éléments de symétrie . . . . .	183
8.4.2.3	Asymptotes et branches spirales . . . . .	184
8.4.2.4	Tangente en un point . . . . .	185
8.4.2.5	Concavité et point d'inflexion . . . . .	185
8.4.2.6	Tableau de variations . . . . .	186
8.4.2.7	Exercices . . . . .	187

<b>9</b>	<b>Topologie</b>	<b>189</b>
9.1	Espaces métriques . . . . .	189
9.1.1	Distances . . . . .	189
9.1.2	Equivalence métrique (au sens de Lipschitz) . . . . .	191
9.2	Espaces vectoriels normés . . . . .	191
9.2.1	Normes . . . . .	191
9.2.2	Distance définie par une norme . . . . .	192
9.2.3	Sous-ensembles particuliers des espaces métriques . . . . .	193
9.2.4	Equivalence topologique . . . . .	193
9.2.5	Exercices . . . . .	194
9.3	De la distance à la topologie . . . . .	197
9.3.1	Ouverts et fermés d'un espace métrique . . . . .	197
9.3.2	Espaces topologiques . . . . .	199
9.3.3	Espaces séparés . . . . .	200
9.3.4	Intérieur et adhérence . . . . .	201
9.3.5	Points d'accumulations et points isolés . . . . .	203
9.3.6	Exercices . . . . .	204
9.4	Espaces métriques complets . . . . .	205
9.4.1	Limite d'une suite . . . . .	205
9.4.2	Valeurs d'adhérence d'une suite . . . . .	206
9.4.3	Suites de Cauchy . . . . .	206
9.4.4	Exercices . . . . .	207
9.5	Continuité . . . . .	208
9.5.1	Limite d'une application . . . . .	208
9.5.2	Continuité . . . . .	209
9.5.3	Usage des suites . . . . .	211
9.5.4	Continuité uniforme . . . . .	212
9.5.5	Continuité des fonctions de plusieurs variables réelles . . . . .	213
9.5.6	Homéomorphisme . . . . .	214
9.5.7	Exercices . . . . .	214
9.6	Compacité . . . . .	217
9.6.1	Cadre général . . . . .	217
9.6.2	Cadre métrique . . . . .	220
9.6.3	Cadre vectoriel . . . . .	222
9.6.4	Applications continues et compacité . . . . .	222
9.6.5	Exercices . . . . .	224
9.7	Connexité et connexité par arcs . . . . .	226
9.7.1	Espaces connexes . . . . .	226
9.7.2	Applications continues et connexité . . . . .	229
9.7.3	Connexité par arcs . . . . .	230
9.7.4	Exercices . . . . .	232

<b>10 Calcul différentiel</b>	<b>235</b>
10.1 Préliminaires	235
10.1.1 Continuité des applications linéaires	235
10.1.2 Normes d'applications linéaires continues	237
10.2 Différentiabilité	238
10.2.1 Dérivée d'une fonction à une variable réelle. (Rappels)	238
10.2.2 Vers les fonctions à plusieurs variables réelles	238
10.2.3 Exemples d'applications différentiables	242
10.2.4 Opérations algébriques	243
10.2.5 Exercices	248
10.3 Théorème des accroissements finis	249
10.3.1 Motivation	249
10.3.2 Théorème pour les fonctions numériques	249
10.3.3 Théorème dans le cadre général	250
10.3.4 Théorème sur les convexes	253
10.3.5 Application du TAF	253
10.4 Dérivées partielles	253
10.4.1 Dérivées directionnelles	253
10.4.2 Dérivées partielles	255
10.4.3 Composantes	257
10.4.4 Jacobienne et Jacobien	258
10.4.5 Fonctions de classe $\mathcal{C}^1$	260
10.4.6 Composition	263
10.4.7 Exercices	265
10.5 Difféomorphismes	268
10.5.1 Définition et exemples	268
10.5.2 Théorèmes d'inversion	269
10.5.3 Exercices	273
10.6 Dérivées supérieures	277
10.6.1 Définitions	277
10.6.2 Fonctions de classe $\mathcal{C}^p$	278
10.6.3 Utilisation des dérivées partielles	279
10.6.4 Théorème de Schwarz	280
10.6.5 Exercices	282
10.7 Formules de Taylor	285
10.7.1 Puissances symboliques	285
10.7.2 Formule de Taylor avec reste intégral	286
10.7.3 Formule de Taylor-Lagrange	287
10.7.4 Formule de Taylor-Young	288
10.7.5 Développements limités	290
10.7.6 Exercices	291

10.8	Extrema locaux (ou relatifs) . . . . .	291
10.8.1	Définitions : . . . . .	291
10.8.2	Condition nécessaire du premier ordre . . . . .	292
10.8.3	Condition nécessaire du second ordre . . . . .	293
10.8.4	Cas particulier : fonctions à deux variables . . . . .	293
10.8.5	Exercices . . . . .	294
10.9	Fonctions implicites . . . . .	296
10.9.1	Problème et définition . . . . .	296
10.9.2	Exemples . . . . .	296
10.9.3	Théorème des fonctions implicites . . . . .	297
10.9.4	Dérivées d'une fonction implicite . . . . .	299
10.9.5	Exercices . . . . .	300
<b>11</b>	<b>Surfaces</b>	<b>303</b>
11.1	Surfaces définies par une paramétrisation . . . . .	303
11.1.1	Nappe paramétrée . . . . .	303
11.1.2	Surfaces de révolution . . . . .	303
11.1.3	Plan tangent . . . . .	304
11.1.3.1	Surfaces régulières . . . . .	304
11.1.3.2	Plan tangent en un point . . . . .	305
11.1.3.3	Equations paramétriques du plan tangent . . . . .	305
11.1.3.4	Equation cartésienne du plan tangent . . . . .	306
11.2	Surfaces définies implicitement . . . . .	306
11.2.1	Surfaces régulières . . . . .	306
11.2.2	Equation du plan tangent . . . . .	307
11.3	Position relative par rapport au plan tangent . . . . .	308
11.4	Première forme fondamentale . . . . .	310
11.4.1	Élément de longueur . . . . .	310
11.4.2	Première forme fondamentale . . . . .	311
11.4.3	Élément d'aire . . . . .	313
11.4.3.1	Normale à la surface et orientation . . . . .	313
11.4.3.2	Aire d'un parallélogramme . . . . .	313
11.4.3.3	Construction de l'élément d'aire . . . . .	314
11.5	Seconde forme fondamentale . . . . .	315
11.5.1	Différentes notions de courbures . . . . .	315
11.5.2	Seconde forme fondamentale . . . . .	316
11.5.3	Calcul effectif des courbures . . . . .	319
11.5.4	Interprétation géométrique de la courbure de Gauss . . . . .	320
11.6	Exercices . . . . .	320

<b>12</b>	<b>Intégrales multiples</b>	<b>323</b>
12.1	Intégrales doubles . . . . .	323
12.1.1	Intégrales sur un rectangle . . . . .	323
12.1.2	Intégrale sur un ensemble quarrable . . . . .	325
12.1.3	Propriétés des intégrales doubles . . . . .	326
12.1.4	Interprétation géométrique de l'intégrale double . . . . .	327
12.1.5	Calcul des intégrales doubles (Fubini) . . . . .	327
12.1.6	Changement de variables . . . . .	328
12.1.7	Exercices . . . . .	329
12.2	Intégrales triples . . . . .	332
12.2.1	Intégrale sur un pavé . . . . .	332
12.2.2	Intégrale sur un ensemble cubable . . . . .	332
12.2.3	Propriétés des intégrales triples . . . . .	333
12.2.4	Calcul des intégrales triples (Fubini) . . . . .	334
12.2.5	Changement de variables . . . . .	335
12.2.6	Exercices . . . . .	336
12.3	Formes différentielles . . . . .	338
12.3.1	Applications $p$ -linéaires alternées . . . . .	338
12.3.2	$p$ -formes différentielles . . . . .	338
12.3.3	Algèbre extérieure des formes différentielles . . . . .	340
12.3.4	Formes différentielles sur un ouvert de $\mathbb{R}^n$ . . . . .	341
12.3.5	Différentiation extérieure . . . . .	342
12.3.6	Lemme de Poincaré . . . . .	346
12.3.7	Image réciproque (ou transposée) d'une $p$ -forme . . . . .	348
12.3.8	Une autre démonstration du Lemme de Poincaré . . . . .	350
12.3.9	Exercices . . . . .	353
12.4	Intégrales curvilignes, surfaciques et formule de Stokes . . . . .	355
12.4.1	Intégrales curvilignes . . . . .	355
12.4.1.1	Définition . . . . .	355
12.4.1.2	Intégrale d'une forme exacte . . . . .	355
12.4.1.3	Elément de longueur . . . . .	356
12.4.1.4	Formule de Green-Riemann . . . . .	357
12.4.1.5	Application au calcul d'aires . . . . .	359
12.4.2	Intégrales surfaciques . . . . .	359
12.4.2.1	Définition et exemple . . . . .	359
12.4.2.2	Elément d'aire . . . . .	361
12.4.2.3	Formule d'Ostrogradski . . . . .	361
12.4.2.4	Formule de Stokes . . . . .	362
12.4.3	Exercices . . . . .	363