

Méthodes de calcul numérique

volume 1

Systemes d'équations

Jean-Pierre Nougier

 hermes

Table des matières

Sommaire du tome 2	11
Avant-propos	13
Chapitre 1. Introduction	19
1.1. Utilité et limitation des méthodes numériques	19
1.2. Développement en série de Taylor	20
1.3. Algorithmes et notations, programmation	22
1.4. Notions de vitesse, erreurs, conditionnement, stabilité	28
1.5. Algèbre complexe	31
Chapitre 2. Racines d'équations	33
2.1. Introduction	33
2.2. Méthodes itératives	34
2.3. Bissection	41
2.4. Méthode de Newton	43
2.4.1. Principe de la méthode	43
2.4.2. Cas des racines réelles multiples	45
2.4.3. Racines complexes	46
2.5. Méthode de la sécante	48
2.5.1. Racines réelles	48
2.5.2. Racines complexes	50
2.6. Racines complexes : séparation des parties réelle et imaginaire	50
2.7. Méthode de Laguerre	52
2.7.1. Racines de polynômes	52
2.7.2. Fonctions analytiques d'une variable complexe	55
2.8. Méthode de Muller	56
2.9. Racines d'un polynôme, méthode de Bairstow	58

2.9.1. Méthode de Bairstow	58
2.9.2. Affiner les racines	62
2.10. Interpolation inverse	62
2.11. Extremum d'une fonction	63
2.11.1. Bissection	64
2.11.2. Interpolation parabolique	66

Chapitre 3. Systèmes linéaires, méthodes du pivot 69

3.1. Introduction	69
3.2. Matrices : rappels de notions fondamentales	71
3.3. Résolution d'un système triangulaire	77
3.3.1. Système triangulaire inférieur (ou gauche)	77
3.3.2. Système triangulaire supérieur (ou droit)	78
3.4. Méthodes du pivot	79
3.4.1. Méthode de Gauss-Jordan (diagonalisation)	79
3.4.2. Méthode de Gauss-Jordan : algorithme	81
3.4.3. Optimisation des pivots	83
3.4.4. Méthode de Gauss : triangularisation	88
3.4.5. Déterminant d'une matrice	91
3.4.6. Rang d'une matrice	92
3.4.7. Inversion d'une matrice	93
3.5. Cas des matrices bandes	96
3.5.1. Résolution par triangularisation (Gauss)	96
3.5.2. Matrices tridiagonales : double balayage	103
3.5.3. Déterminant d'une matrice tridiagonale	106
3.6. Amélioration itérative de la précision	107
3.7. Conditionnement d'un système linéaire	109
3.7.1. Mise en évidence et première définition	109
3.7.2. Normes vectorielles, normes matricielles	112
3.7.3. Conditionnement d'une matrice	115
3.7.4. Effet d'un mauvais conditionnement	118
3.7.5. Traitement d'un système mal conditionné	121
3.8. Systèmes d'équations à valeurs complexes	121

Chapitre 4. Systèmes linéaires, méthodes de décomposition 125

4.1. Introduction	125
4.2. Décomposition LR (ou LU)	125
4.2.1. Décomposition simple (Crout)	125
4.2.2. Optimisation des pivots	129
4.2.3. Matrices symétriques : décomposition de Cholesky	135
4.2.4. Amélioration itérative de la précision	137

4.3. Décomposition QR de Householder	138
4.3.1. Matrice de Householder	139
4.3.2. Produit d'une matrice de Householder par une matrice quelconque . . .	145
4.3.3. Résumé des propriétés de $\mathbf{H}$	147
4.3.4. Décomposition QR	148
4.4. Modification de la matrice, calcul de l'inverse	153
4.4.1. Résolution d'un système à matrice modifiée	153
4.4.2. Inversion d'une matrice modifiée, cas général	156
4.4.3. Formule de Sherman-Morison	157
4.5. Systèmes surdéterminés	160
4.5.1. Equations normales	161
4.5.2. Décomposition QR de Householder	164
4.5.3. Rang d'une matrice	167
4.5.4. Conditionnement d'une matrice	168
4.6. Notions sur la décomposition en valeurs singulières	171
4.7. Systèmes homogènes	177
4.7.1. Introduction	177
4.7.2. Méthode des systèmes surdéterminés	179
4.7.3. Méthode de la puissance inverse	180
4.8. Système quelconque, algorithme de Gréville	185
4.8.1. Pseudo-inverse, algorithme de Gréville	185
4.8.2. Résolution d'un système quelconque	188
Chapitre 5. Systèmes linéaires, méthodes itératives	191
5.1. Introduction	191
5.2. Généralités sur les méthodes itératives	192
5.2.1. Construction de la matrice d'itération	192
5.2.2. Convergence	193
5.2.3. Facteur de relaxation	195
5.2.4. Arrêt des itérations	196
5.3. Méthode de Jacobi	196
5.3.1. Exposé de la méthode	196
5.3.2. Convergence	197
5.4. Méthode de Gauss-Seidel	199
5.4.1. Exposé de la méthode	199
5.4.2. Sur-relaxation successive (SOR)	201
5.5. Méthodes de descente : principes de base	204
5.5.1. Principe	204
5.5.2. Formulation générale des méthodes de descente	205
5.5.3. Exemple : méthode de la plus grande pente	208
5.5.4. Utilité du préconditionnement	210

5.6. Méthode du gradient conjugué	212
5.6.1. Méthode de base	212
5.6.2. Gradient conjugué avec préconditionnement	214
5.6.3. Décomposition de Cholesky incomplète	217
5.7. Méthode du double gradient conjugué	220
Chapitre 6. Systèmes non linéaires	223
6.1. Introduction	223
6.2. Méthode de Gauss-Seidel	224
6.3. Méthodes de descente	226
6.3.1. Résolution d'un système et recherche d'un minimum	226
6.3.2. Méthode de la plus grande pente	228
6.3.3. Gradient conjugué : principe	230
6.3.4. Minimum le long d'une trajectoire de descente	233
6.3.5. Gradient conjugué : algorithme	235
6.4. Méthode de Newton-Raphson	237
6.4.1. Cas de deux équations à deux inconnues	237
6.4.2. Cas de n équations à n inconnues	238
6.4.3. Méthode de Newton-Raphson amortie	240
6.4.4. Singularité du Jacobien : Levenberg-Marquardt	242
6.4.5. Evaluation numérique du Jacobien	244
6.5. Systèmes non linéaires surdéterminés	246
6.6. Minimum d'une fonction de plusieurs variables	247
6.6.1. Méthode "quasi-Newton", Hessienne analytique	248
6.6.2. Méthode "quasi-Newton", Hessienne numérique	249
6.6.3. Gradient conjugué	252
6.7. Conclusion	253
Chapitre 7. Valeurs propres et vecteurs propres	255
7.1. Introduction	255
7.2. Rappels de notions fondamentales	256
7.3. Méthode de la puissance itérée : grandes valeurs propres	261
7.3.1. Principe : calcul de la plus grande valeur propre	261
7.3.2. Déflation de la matrice	264
7.4. Méthode de la puissance inverse : petites valeurs propres	265
7.4.1. Plus petite valeur propre et vecteur propre associé	266
7.4.2. Calcul des premières valeurs propres	267
7.4.3. Vecteur propre et valeur propre par décalage	269
7.4.4. Problème spectral généralisé	273
7.5. Valeurs propres racines du polynôme caractéristique	273
7.5.1. Normes et valeurs propres	273

7.5.2. Cercles de Gershgorin	274
7.5.3. Méthode de Souriau	276
7.5.4. Matrices symétriques tridiagonales : séquence de Sturm	277
7.6. Vecteur propre déterminé à partir d'une valeur propre approchée	281
7.7. Forme de Hessenberg d'une matrice	285
7.8. Matrices symétriques et matrices hermitiques	290
7.8.1. Matrice tridiagonale associée à une matrice symétrique	290
7.8.2. Valeurs propres et vecteurs propres d'une matrice symétrique	292
7.8.3. Valeurs propres et vecteurs propres d'une matrice hermitique	295
7.9. Méthode de Rutishauser : décomposition LR	296
7.10. Décomposition QR	299
7.10.1. Matrice réelle quelconque : principe	299
7.10.2. Algorithme	301
7.10.3. Cas des matrices symétriques	307
7.11. Problème spectral généralisé	312
Bibliographie	315
Liste des algorithmes	317
Index général	325

Méthodes de calcul numérique est avant tout un outil proposé aux étudiants, techniciens, ingénieurs, chercheurs de toutes disciplines confrontés à des problèmes de simulation, modélisation, conception assistée par ordinateur, ingénierie, etc. Ces problèmes conduisent souvent à des formulations mathématiques n'ayant pas de solution analytique, mais peuvent être résolus par voie numérique, à l'aide d'un ordinateur en utilisant un langage de programmation structuré, ou même simplement d'une calculatrice programmable, voire d'un tableur.

Le premier volume traite des racines d'équations, systèmes d'équations, valeurs propres et vecteurs propres.

Le second volume, qui s'appuie sur les acquis du premier, traite des méthodes de collocation, de moindres carrés, de dérivation, d'intégration, de résolution d'équations différentielles et d'équations aux dérivées partielles, ainsi que des méthodes de Monte Carlo.

L'ensemble comporte 165 algorithmes, 212 exercices corrigés et 167 figures.

L'auteur

Jean-Pierre Nougier est professeur d'électronique à l'Université Montpellier II. Il a enseigné l'ensemble des disciplines de l'EEA, et notamment les méthodes numériques, qu'il a par ailleurs utilisées depuis de longues années dans ses travaux de recherche, notamment en inventant et mettant au point de nouvelles méthodes de résolution de l'équation de Boltzmann.