

COLLECTION FORMATION DES ENSEIGNANTS ET FORMATION CONTINUE

Algèbre des matrices

JEAN FRESNEL

ACTUALITÉS SCIENTIFIQUES ET INDUSTRIELLES

HERMANN



ÉDITEURS DES SCIENCES ET DES ARTS

Table des matières

Introduction

Préliminaires

1. Déterminant, rang, système linéaire	9
1.0. Espace vectoriel, dimension, application linéaire, matrice, dualité	9
1.0.0. Espaces vectoriels, sous-espaces vectoriels, application linéaire	10
1.0.1. Famille, partie libre, génératrice, base	14
1.0.2. Base, dimension	15
1.0.3. Dimension d'un sous-espace vectoriel	18
1.0.4. Rang d'une application linéaire	19
1.0.5. Dualité dans les espaces vectoriels	24
1.1. Déterminant	29
1.1.1. Déterminants de n vecteurs d'un espace vectoriel de dimension n relativement à une base	30
1.1.2. Déterminant d'un endomorphisme	32
1.1.3. Déterminant d'une matrice carrée	33
1.1.4. Calcul d'un déterminant	37
1.2. Opérations élémentaires sur les lignes et les colonnes, rang, matrices équivalentes	40
1.2.1. Le rang d'une matrice	41
1.2.2. Opérations élémentaires sur les lignes et les colonnes	43
1.2.3. Matrices équivalentes	45
1.2.4. Les invariants de similitude d'une matrice à coefficients dans $\mathbb{Z}$ ou $K[X]$	51
1.2.5. Les sous-groupes de $\mathbb{Z}^n$, les groupes abéliens finis, les groupes abéliens de type fini	55
1.2.6. Le groupe $GL_n(A), SL_n(A)$ où $A = \mathbb{Z}$ ou $K[X]$	59
1.3. Résolution de systèmes linéaires à coefficients dans un corps	62
1.3.1. L'aspect théorique, le théorème de Rouché Fontené	62
1.3.2. L'aspect pratique (le pivot de Gauss)	65
1.4. Exercices	67

II Table des matières

2. L'algèbre des endomorphismes, le groupe linéaire	87
2.1. L'algèbre des endomorphismes	87
2.1.1. L'algèbre des endomorphismes, dimension, centre	87
2.1.2. Idéaux bilatères, à gauche, à droite	88
2.1.3. Le dual de $\text{End } E$	90
2.1.4. Quelques exemples de sous-algèbres	91
2.1.5. Propriétés topologiques, $K = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$	91
2.2. Le groupe linéaire	92
2.2.1. Le groupe des inversibles de $\text{End } E$	92
2.2.2. Des générateurs de $GL_n(K)$	93
2.2.3. Transvections	94
2.2.4. Sous-groupes distingués de $GL_n(K)$	98
2.2.5. La topologie du groupe linéaire	100
2.3. Exercices	102
3. Polynôme minimal, caractéristique	115
3.1. Le polynôme minimal d'un endomorphisme	115
3.2. Le polynôme caractéristique	121
3.3. Le théorème de Cayley-Hamilton	125
3.4. Calcul pratique du polynôme minimal, caractéristique, d'un sous-espace monogène	127
3.4.1. Le calcul du polynôme minimal d'une matrice	127
3.4.2. Le calcul du polynôme caractéristique	128
3.4.3. Calcul d'un sous-espace monogène maximal (i.e. le lemme 3.1.8)	129
3.5. Exercices	131
4. Réduction d'un endomorphisme, invariants de similitude	139
4.1. Le théorème principal	139
4.2. Le point de vue matriciel	141
4.3. Les invariants de similitude de $XI_n - A$	142
4.4. Le calcul des invariants de similitude d'une matrice A	144
4.4.1. Le calcul des invariants de similitude de la matrice A	144
4.4.2. Construction d'une base dans laquelle l'endomorphisme $\hat{A}$ est un tableau diagonal de matrices compagnons	144
4.5. Quelques conséquences du théorème principal	144
4.6. La réduction de Jordan	146
4.7. Exercices	149
5. Vecteurs propres, diagonalisation et réductions	163
5.1. Vecteurs propres, valeurs propres d'un endomorphisme	164
5.2. Diagonalisation des endomorphismes, des matrices	166
5.3. Réduction à la forme triangulaire d'une matrice, d'un endomorphisme	168
5.4. Réduction à la forme diagonalisable plus nilpotent	169

5.5.	Calcul de vecteurs propres, valeurs propres	172
5.6.	Les endomorphismes semi-simples	174
5.7.	Exercices	179

Bibliographie	225
---------------	-----

Index des notations	227
---------------------	-----

Index des noms	228
----------------	-----

Jean Fresnel

Université de Bordeaux I

Algèbre des matrices

Cet ouvrage s'adresse aussi bien aux étudiants de premier cycle qu'à ceux de licence ou de maîtrise de mathématiques. C'est un outil de base pour le candidat aux concours du CAPES ou de l'agrégation.

Espace vectoriel, rang, système linéaire sont présentés sous forme théorique aussi bien qu'algorithmique, les opérations élémentaires sur lignes et colonnes d'une matrice y jouent un rôle important.

Le chapitre *Algèbre des endomorphismes, groupe linéaire* étudie de façon approfondie l'aspect groupe et générateurs avec les transvections, le groupe dérivé et les sous-groupes distingués. Sous le titre *Polynôme minimal et polynôme caractéristique*, on énonce un théorème de Cayley-Hamilton version forte qui prépare les outils théoriques et algorithmiques du chapitre suivant.

La réduction d'un endomorphisme est présentée de façon élémentaire, sans utiliser la théorie des modules ; elle conduit à la notion d'invariants de similitude d'un endomorphisme, avec comme conséquence la réduction de Jordan lorsque le corps de base est algébriquement clos.

La partie de l'algèbre linéaire la mieux connue est celle des vecteurs propres et de la diagonalisation des endomorphismes ; on y montre la décomposition canonique en diagonalisable plus nilpotent, on approfondit la recherche numérique de vecteurs propres et enfin on aborde la belle théorie des endomorphismes semi-simples.

Les nombreux exercices qui terminent chaque chapitre permettent d'aboutir avec des moyens élémentaires à des résultats réputés délicats, comme les célèbres théorèmes de Burnside, Schur, Jordan sur les sous-groupes de $G_n^F(\mathbb{C})$ qui sont de torsion ; ils abordent des sujets qui intéresseront le lecteur curieux et qui aiguïseront sa sagacité.

Jean Fresnel est professeur de mathématiques à l'Université de Bordeaux I. Ses recherches portent principalement sur la théorie des nombres et la géométrie algébrique.

ISBN 2 7056 1439 7



140 F

HERMANN



ÉDITEURS DES SCIENCES ET DES ARTS