

Mathématiques

L3 - MASTER - CAPES - AGREG

INVITATION À L'ALGÈBRE

*Théorie des groupes, des anneaux,
des corps et des modules*

Alain Jeanneret
Daniel Lines

Cépaduès
- éditions -

Table des matières

1	Préliminaires	1
1.1	Rappels de théorie des ensembles	1
1.2	Lois internes et groupes	5
1.3	Anneaux	9
1.4	Corps	11
1.5	Quaternions	12
1.6	Exercices	15
I	Théorie des groupes	21
2	Généralités sur les groupes I	25
2.1	Définitions	25
2.2	Homomorphismes de groupes	33
2.3	Groupes quotients	37
2.4	Exercices	43
3	Exemples de détermination de groupes	47
3.1	Groupes d'ordres inférieurs à huit	47
3.2	Groupe des unités de $\mathbb{Z}/n$	51
3.3	Exercices	59
4	Généralités sur les groupes II	61
4.1	Théorèmes d'isomorphie	62
4.2	Centre d'un groupe	69
4.3	Commutateurs	70
4.4	Groupes résolubles	73
4.5	Produits directs	77

4.6	Produits semi-directs	79
4.7	Exercices	88
5	Groupes de permutations et groupes de symétries des polyèdres	95
5.1	Groupes symétriques	97
5.2	Groupes alternés	101
5.3	Groupes de symétries des polyèdres réguliers	106
5.4	Exercices	112
6	Actions de groupes	115
6.1	Définitions	116
6.2	Applications à la théorie des groupes	119
6.3	Dénombrements d'objets coloriés	122
6.4	Théorème de Sylow	126
6.5	Exercices	131
7	Groupes de matrices et groupes d'isométries de l'espace euclidien	137
7.1	Groupes linéaires	138
7.2	Groupes orthogonaux et unitaires	142
7.3	Groupes d'isométries de l'espace euclidien	151
7.4	Exercices	156
II	Théorie des anneaux	163
8	Généralités sur les anneaux	167
8.1	Définitions	167
8.2	Anneaux de polynômes à une variable	175
8.3	Anneaux de polynômes à plusieurs variables	184
8.4	Exercices	189
9	Arithmétique dans les anneaux	197
9.1	Anneaux euclidiens et principaux	198
9.2	Anneaux factoriels	201
9.3	Arithmétique de l'anneau des entiers de Gauss	207
9.4	Le Grand théorème de Fermat	211

9.5	Factorialité des anneaux de polynômes	213
9.6	Exercices	219

III Théorie des corps 223

10	Extensions de corps	229
10.1	Définitions	229
10.2	Éléments algébriques et transcendants	235
10.3	Polynômes cyclotomiques	243
10.4	Corps des racines d'un polynôme	246
10.5	Corps finis	250
10.6	Exercices	253
11	Constructions à la règle et au compas	257
11.1	Lien avec les extensions de corps	257
11.2	Applications	262
11.3	Exercices	265

IV Théorie de Galois 267

12	Groupe de Galois et extensions galoisiennes	275
12.1	Groupe de Galois	275
12.2	Extensions galoisiennes	279
12.3	Réalisation de groupes comme groupes de Galois	288
12.4	Groupes de Galois des extensions de corps finis	294
12.5	Démonstration de la formule du sous-corps fixe	296
12.6	Exercices	298
13	Résolution des équations par radicaux	301
13.1	L'Equation $X^n - \alpha = 0$	302
13.2	Equations résolubles par radicaux	305
13.3	Equations non résolubles par radicaux	309
13.4	Exercices	312

V	Théorie des modules	315
14	Généralités sur les modules	319
14.1	Définitions	319
14.2	Sous-modules d'un module libre	328
14.3	Démonstration du théorème de la forme normale	332
14.4	Exercices	338
15	Classification des modules sur un anneau principal	343
15.1	Décomposition d'un module selon ses facteurs invariants ...	343
15.2	Décomposition primaire d'un module	350
15.3	Démonstration de l'invariance des idéaux élémentaires	353
15.4	Exercices	356
16	Module associé à un endomorphisme d'espace vectoriel	359
16.1	Facteurs invariants du module associé à un endomorphisme	360
16.2	Décomposition primaire du module associé à un endomorphisme et blocs de Jordan	368
16.3	Exercices	378
	Glossaire	381
	Bibliographie	383
	Index	386

Ce livre s'adresse aux étudiants de mathématiques qui désirent approfondir leurs connaissances en algèbre. Nous supposons qu'ils ont déjà acquis les éléments de base de l'arithmétique des nombres entiers et de l'algèbre linéaire.

Dans les trois premières parties, nous exposons les concepts fondamentaux de la théorie des groupes, des anneaux et des corps commutatifs. Nous illustrons les notions introduites par de nombreux exemples et applications issus de la géométrie ou de l'algèbre : groupes de symétries des polyèdres et groupe des déplacements, factorisation en anneaux des polynômes, théorème de Gauss, construction des corps.

Les parties suivantes s'adressent à des étudiants plus avancés et développent la théorie de la résolution des équations polynomiales, la théorie des modules sur un anneau commutatif. Cette dernière s'applique en particulier à la classification des groupes abéliens et des endomorphismes d'espaces vectoriels.

Cet ouvrage sera utile aux étudiants préparant la licence ou la maîtrise de mathématiques, les concours du CAPES ou de l'Agrégation ainsi qu'aux enseignants qui pourront l'utiliser comme base pour un cours.

Alain Jeanneret est professeur de mathématiques à l'Université de Berne.

Daniel Lines a été professeur de mathématiques à l'Université de Bourgogne.

Chez le même éditeur

- Bien débiter en mathématiques : endomorphismes

M. Boucetta, J.-M. et R. Morvan

- Algèbre linéaire

J. Grifone

- Pratiques mathématiques – Algèbre : structures et morphismes vus par les problèmes

R. Groux, P. Soulat

www.cephadues.com



Réf. 740

ISBN : 978.2.85428.740.0

