

Léonard Todjihounde

Calcul différentiel

cours et exercices corrigés

CÉPADUÈS-ÉDITIONS

Table des matières

Préface	7
1 RAPPELS SUR LES ESPACES DE BANACH	9
Espaces vectoriels normés	9
Espaces de Banach	12
Produit fini d'espaces vectoriels normés	14
Exemples d'espaces de Banach	15
Applications linéaires continues	16
Convergence dans $\mathcal{L}(E, F)$	18
Composition d'applications linéaires continues	19
Isomorphismes d'espaces vectoriels normés	20
Normes équivalentes	23
Espaces vectoriels normés de dimension finie	23
Série d'exercices sur chapitre 1	26
2 APPLICATIONS DIFFERENTIABLES	35
Définition d'applications différentiables	35
Différentielles de quelques applications particulières	36
Etude dans quelques cas particuliers d'espaces	39
Dérivées directionnelles	40
Différentielles partielles	42
Cas des applications définies sur $\mathbb{R}^n$	43
Changement de variables	46
Série d'exercices sur le chapitre 2	48
3 THEOREME DES ACCROISSEMENTS FINIS	59
Théorème des accroissements finis	59
Critère partiel de différentiabilité	64

Différentielles et applications lipschitziennes	66
Différentielles et point fixe	68
Critère de convergence uniforme	69
4 INVERSIONS LOCALES ET FONCTIONS IMPLICITES	73
Difféomorphismes de classe C^1	73
Théorème d'inversion locale	77
Théorème d'inversion locale en dimension finie.	78
Application au changement de variables	79
Théorème des fonctions implicites	81
Différentielle de l'application implicite	82
Cas des applications de $\mathbb{R}^{n+p}$ dans $\mathbb{R}^p$	83
Série d'exercices sur les chapitres 3 et 4	85
5 THEOREMES DU RANG	105
Rang d'une application	105
Théorèmes du rang maximal	107
Théorème du rang constant	109
Série d'exercices sur le chapitre 5	113
6 DIFFERENTIELLES D'ORDRE SUPERIEUR	121
Preliminaires	121
Différentielles secondes	123
Différentielles partielles secondes	125
Cas d'une application définie sur $E = \mathbb{R}^n$	126
Différentielles d'ordre n (avec $n > 2$)	127
Symétrie des différentielles d'ordre supérieur	128
Quelques exemples	130
Propriétés des différentielles d'ordre supérieur	130
Difféomorphismes de classe C^p	133
Série d'exercices sur le chapitre 6	135
7 FONCTIONS CONVEXES DIFFERENTIABLES	139
Définition et propriétés	139
Fonctions convexes différentiables	141

8	INTEGRATION DES FONCTIONS REGLEES	145
	Fonctions en escalier	145
	Fonctions réglées	146
	Intégrales des fonctions réglées	146
	Primitive d'une fonction réglée	147
	Différentiation sous le signe d'intégration	148
	Série d'exercices sur le chapitre 8	149
9	FORMULES DE TAYLOR	155
	Théorèmes de Taylor	155
	Définitions complémentaires	159
	Série d'exercices sur le chapitre 9	162
10	EXTREMA RELATIFS D'UNE FONCTION	177
	Notions sur les formes quadratiques	177
	Minima et Maxima relatifs	179
	Extréma liés	184
	Série d'exercices sur le chapitre 10	190
11	EQUATIONS DIFFERENTIELLES	199
	Rappels : Applications lipschitziennes	199
	Equations différentielles	200
	Intégrales premières	208
	Equations différentielles linéaires	210
	Résolvante	212
	Série d'exercices sur chapitre 11	217
12	FORMES DIFFERENTIELLES	233
	Applications multilinéaires alternées	233
	Produit extérieur des applications alternées	233
	Formes différentielles	235
	Produit extérieur des formes différentielles	237
	Différentiation extérieure des formes différentielles	239
	Transposition des formes différentielles	244
	Intégration des formes différentielles	245
	Série d'exercices sur le chapitre 12	247

Le calcul différentiel est un outil dont tout mathématicien, quelle que soit sa spécialité, doit en posséder les rudiments. Même les spécialistes de mathématiques discrètes ne peuvent s'en passer, car l'on ne peut bien explorer, bien appréhender le discret que si l'on connaît un peu mieux le continu, avec les nombreux et ingénieux outils mathématiques qui y ont été développés au cours du temps, que si l'on a une idée des limites et restrictions de ces outils et des possibilités éventuelles de leur adaptation ou de s'en inspirer face à des situations discrètes.

Destiné à l'usage aussi bien des étudiants en licence de mathématiques que des enseignants, cet ouvrage débute par un rappel des pré-requis topologiques nécessaires pour aborder les notions exposées dans la suite. L'auteur a voulu ce rappel sur les espaces vectoriels normés le plus détaillé et le plus complet possible pour permettre à l'utilisateur de faire le point de ces notions sans trop d'effort et sans perdre du temps à les rechercher dans les livres de topologie.

L'approche pédagogique utilisée permet au lecteur de cerner assez rapidement et dans tous leurs contours les concepts exposés et de comprendre dès le début l'architecture des démonstrations des théorèmes et propositions.

Outre les chapitres classiques généralement traités dans les livres de calcul différentiel, un chapitre sur les fonctions convexes différentiables attirera l'attention du lecteur sur les propriétés intéressantes qui découlent du couplage de ces deux notions ; quant au chapitre sur les théorèmes du rang, il fait ressortir l'importance et les conditions de linéarisation d'une application au voisinage d'un point.

Chez le même éditeur

• *Mesure et intégration, intégrale de Lebesgue*

M. BOUYSSSEL

• *Modélisation probabiliste et statistique*

B. GAREL

• *Algèbre linéaire*

J. GRIFONE

• *Exercices d'algèbre linéaire et bilinéaire Bac+2*

J.-B. HIRIART-URRUTY, Y. PLUSQUELLEC

• *Mathématiques générales pour 1^{er} cycle universitaire et formation continue*

P. ROVIRA

www.cepadues.com

Réf. : 652

I.S.B.N. : 2.85428.652.9



9 782854 286526