

SCIENCES SUP

$$bx + c$$

$$(\lim_{x \rightarrow a} u^a)(\lim_{x \rightarrow a} v^a)(\lim_{x \rightarrow a} w^a)$$

$$= \int_{\partial \Omega} (S$$

$$= \int_{\partial \Omega} S$$

$$= \int_{\partial \Omega} S$$

Exercices et problèmes corrigés

2^e cycle

CALCUL DIFFÉRENTIEL ET ÉQUATIONS DIFFÉRENTIELLES

*Dominique Azé
Guillaume Constans
Jean-Baptiste Hiriart-Urruty*

DUNOD

Table des matières

AVANT-PROPOS	IX
--------------	----

ABRÉVIATIONS ET NOTATIONS	XIII
---------------------------	------

ÉNONCÉS

Sujet 1 : Calcul différentiel sur des espaces de matrices. Transformation de Legendre-Fenchel	2
Sujet 2 : Caractérisation d'un opérateur gradient (lemme de Poincaré)	4
Sujet 3 : Convexité et différentiabilité	6
Sujet 4 : Un théorème de Rolle approché. Différentiation d'applications radiales. Un système différentiel linéaire	8
Sujet 5 : Différentielle d'une fonctionnelle intégrale. Calcul différentiel sur des fonctions à valeurs matricielles	11
Sujet 6 : Opérateurs de Nemycki	13
Sujet 7 : Différentiabilité (et caractère $\mathcal{C}^1$) via les différentielles partielles. Calcul différentiel (basique, théorème des accroissements finis)	15
Sujet 8 : Dérivée de $t \mapsto \exp((1-t)A) \exp(tB)$. Formules de Taylor sur la fonction déterminant. Conditions d'extrémalité du deuxième ordre sur un espace de Hilbert	17
Sujet 9 : Conditions nécessaires d'optimalité du premier ordre en l'absence de différentiabilité	20
Sujet 10 : Méthode de descente le long du gradient	23
Sujet 11 : Conditions nécessaires d'optimalité en présence de contraintes d'inégalité	25
Sujet 12 : Différentielle de Gâteaux. Multiplicateurs de Lagrange	28
Sujet 13 : Minimisation d'une fonction convexe sous une contrainte d'inégalité convexe	30
Sujet 14 : Minimisation d'une fonction convexe sur un polyèdre convexe de $\mathbb{R}^n$	32
Sujet 15 : Détermination et nature des points critiques d'une fonction. Différentiation de l'application exponentielle	35
Sujet 16 : Calcul différentiel d'ordre supérieur. Différentielle d'ordre 2 d'une application composée	37
Sujet 17 : Résolution d'équations par la méthode de Newton I	39

Sujet 18 : Résolution de l'équation $f(x) = 0$ par la méthode de Newton II. Minimisation d'une fonction convexe par la méthode du gradient	41
Sujet 19 : Un théorème de Rolle pour les fonctions à valeurs vectorielles. Un problème de maximisation. Sensibilité des racines simples d'un polynôme	43
Sujet 20 : Conditions d'optimalité exprimées à l'aide du cône tangent à l'ensemble des contraintes. Applications à un problème variationnel	46
Sujet 21 : Problème variationnel de minimisation d'une fonctionnelle du calcul des variations	49
Sujet 22 : Calcul différentiel d'ordre 2 sur un espace de matrices. Surjectivité de la normale unitaire à une hypersurface compacte de $\mathbb{R}^n$. Ensemble des solutions possibles d'une équation différentielle scalaire linéaire d'ordre n	51
Sujet 23 : Descente continue le long du gradient. Projection sur une surface de $\mathbb{R}^3$	53
Sujet 24 : Une surface conique de $\mathbb{R}^3$. Monotonie des solutions d'équations différentielles scalaires autonomes. Une équation différentielle vectorielle linéaire	55
Sujet 25 : Un problème aux limites par le théorème des fonctions implicites. Équations différentielles linéaires à coefficients périodiques	57
Sujet 26 : Du théorème des fonctions implicites au théorème de Cauchy-Lipschitz	59
Sujet 27 : Intégrales premières. Utilisation du théorème des fonctions implicites. Une équation aux dérivées partielles	61
Sujet 28 : Différentiabilité de la fonction distance à un ensemble. Une équation différentielle scalaire non linéaire du deuxième ordre. Système différentiel linéaire où les valeurs propres de $A(t)$ ne dépendent pas de t	63
Sujet 29 : Équations différentielles scalaires. Équation différentielle vectorielle linéaire à coefficients périodiques	66
Sujet 30 : Distance de l'origine à une courbe de $\mathbb{R}^3$. Comportement asymptotique des solutions d'une équation différentielle scalaire	68
Sujet 31 : Équation différentielle $y' = xy^2$. Comportement asymptotique des solutions d'une équation différentielle linéaire vectorielle	71
Sujet 32 : Formule de thermodynamique sur les dérivées partielles. Équation différentielle $x' = t \sin x$. Équation différentielle linéaire à coefficients périodiques	74
Sujet 33 : Équations différentielles non linéaires. Comportement asymptotique des solutions d'une équation différentielle linéaire sous la condition de Liapounov	77
Sujet 34 : Une équation différentielle scalaire autonome. Calcul de la hauteur d'une courbe. Différentiation de la fonction déterminant	79
Sujet 35 : Équations différentielles avec retard	81
Sujet 36 : Méthodes d'approximation de solutions d'équations différentielles	83

SOLUTIONS

Sujet 1 : Calcul différentiel sur des espaces de matrices. Transformation de Legendre-Fenchel	88
Sujet 2 : Caractérisation d'un opérateur gradient (lemme de Poincaré)	92
Sujet 3 : Convexité et différentiabilité	95
Sujet 4 : Un théorème de Rolle approché. Différentiation d'applications radiales. Un système différentiel linéaire	98
Sujet 5 : Différentielle d'une fonctionnelle intégrale. Calcul différentiel sur des fonctions à valeurs matricielles	101
Sujet 6 : Opérateurs de Nemycki	107
Sujet 7 : Différentiabilité (et caractère $\mathcal{C}^1$) via les différentielles partielles. Calcul différentiel (basique, théorème des accroissements finis)	108
Sujet 8 : Dérivée de $t \mapsto \exp((1-t)A)\exp(tB)$. Formules de Taylor sur la fonction déterminant. Conditions d'extrémalité du deuxième ordre sur un espace de Hilbert	112
Sujet 9 : Conditions nécessaires d'optimalité du premier ordre en l'absence de différentiabilité	117
Sujet 10 : Méthode de descente le long du gradient	120
Sujet 11 : Conditions nécessaires d'optimalité en présence de contraintes d'inégalité	123
Sujet 12 : Différentielle de Gâteaux. Multiplicateurs de Lagrange	126
Sujet 13 : Minimisation d'une fonction convexe sous une contrainte d'inégalité convexe	129
Sujet 14 : Minimisation d'une fonction convexe sur un polyèdre convexe de $\mathbb{R}^n$	132
Sujet 15 : Détermination et nature des points critiques d'une fonction. Différentiation de l'application exponentielle	138
Sujet 16 : Calcul différentiel d'ordre supérieur. Différentielle d'ordre 2 d'une application composée	142
Sujet 17 : Résolution d'équations par la méthode de Newton I	145
Sujet 18 : Résolution de l'équation $f(x) = 0$ par la méthode de Newton II. Minimisation d'une fonction convexe par la méthode du gradient	148
Sujet 19 : Un théorème de Rolle pour les fonctions à valeurs vectorielles. Un problème de maximisation. Sensibilité des racines simples d'un polynôme	152
Sujet 20 : Conditions d'optimalité exprimées à l'aide du cône tangent à l'ensemble des contraintes. Applications à un problème variationnel	157
Sujet 21 : Problème variationnel de minimisation d'une fonctionnelle du calcul des variations	162
Sujet 22 : Calcul différentiel d'ordre 2 sur un espace de matrices. Surjectivité de la normale unitaire à une hypersurface compacte de $\mathbb{R}^n$. Ensemble des solutions possibles d'une équation différentielle scalaire linéaire d'ordre n	166

Sujet 23 : Descente continue le long du gradient. Projection sur une surface de $\mathbb{R}^3$	168
Sujet 24 : Une surface conique de $\mathbb{R}^3$. Monotonie des solutions d' équations différentielles scalaires autonomes. Une équation différentielle vectorielle linéaire	172
Sujet 25 : Un problème aux limites par le théorème des fonctions implicites. Équations différentielles linéaires à coefficients périodiques	176
Sujet 26 : Du théorème des fonctions implicites au théorème de Cauchy-Lipschitz	179
Sujet 27 : Intégrales premières. Utilisation du théorème des fonctions implicites. Une équation aux dérivées partielles	181
Sujet 28 : Différentiabilité de la fonction distance à un ensemble. Une équation différentielle scalaire non linéaire du deuxième ordre. Système différentiel linéaire où les valeurs propres de $A(t)$ ne dépendent pas de t	185
Sujet 29 : Équations différentielles scalaires. Équation différentielle vectorielle linéaire à coefficients périodiques	189
Sujet 30 : Distance de l'origine à une courbe de $\mathbb{R}^3$. Comportement asymptotique des solutions d'une équation différentielle scalaire	191
Sujet 31 : Équation différentielle $y' = xy^2$. Comportement asymptotique des solutions d'une équation différentielle linéaire vectorielle	195
Sujet 32 : Formule de thermodynamique sur les dérivées partielles. Équation différentielle $x' = t \sin x$. Équation différentielle linéaire à coefficients périodiques	200
Sujet 33 : Équations différentielles non linéaires. Comportement asymptotique des solutions d'une équation différentielle linéaire sous la condition de Liapounov	203
Sujet 34 : Une équation différentielle scalaire autonome. Calcul de la hauteur d'une courbe. Différentiation de la fonction déterminant	206
Sujet 35 : Équations différentielles avec retard	211
Sujet 36 : Méthodes d'approximation de solutions d'équations différentielles	216
BIBLIOGRAPHIE	219

SCIENCES SUP

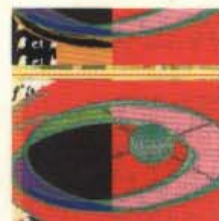
Dominique Azé
Guillaume Constans
Jean-Baptiste Hiriart-Urruty

CALCUL DIFFÉRENTIEL ET ÉQUATIONS DIFFÉRENTIELLES

Le présent ouvrage s'adresse principalement aux étudiants du module intitulé « Calcul différentiel – Équations différentielles » dispensé dans les formations de mathématiques au niveau de la licence de mathématiques. Il pourra également être utile aux élèves ingénieurs et aux étudiants préparant des Mastères ou des concours à l'enseignement (Capes, Agrégation).

Il s'agit d'un recueil de 36 devoirs, au sens premier de ce vocable, c'est-à-dire de travaux à effectuer, en temps limité ou chez soi, seul ou à plusieurs. La durée estimée moyenne est de 3 heures pour chaque devoir, lequel comporte généralement deux ou trois exercices indépendants. La plupart des problèmes et exercices proposés sont originaux, ils ont été posés durant les dix dernières années dans plusieurs universités, sous forme d'examens intermédiaires ou terminaux en temps limité, ou à rendre rédigés après y avoir travaillé chez soi.

Les thèmes traités suivent le déroulement standard du module « Calcul différentiel – Équations différentielles » avec, au fur et à mesure du déroulement, un retour sur les chapitres passés, bref une progression en spirale plutôt que linéaire.



DOMINIQUE AZÉ et
JEAN-BAPTISTE
HIRIART-URRUTY
sont professeurs à l'université
Paul Sabatier (Toulouse III).

GUILLAUME CONSTANS
est professeur agrégé à
l'université Paul Sabatier
(Toulouse III).

MATHÉMATIQUES

PHYSIQUE

CHIMIE

SCIENCES DE L'INGÉNIEUR

INFORMATIQUE

SCIENCES DE LA VIE

SCIENCES DE LA TERRE



ISBN 2 10 006772 9

<http://www.dunod.com>

