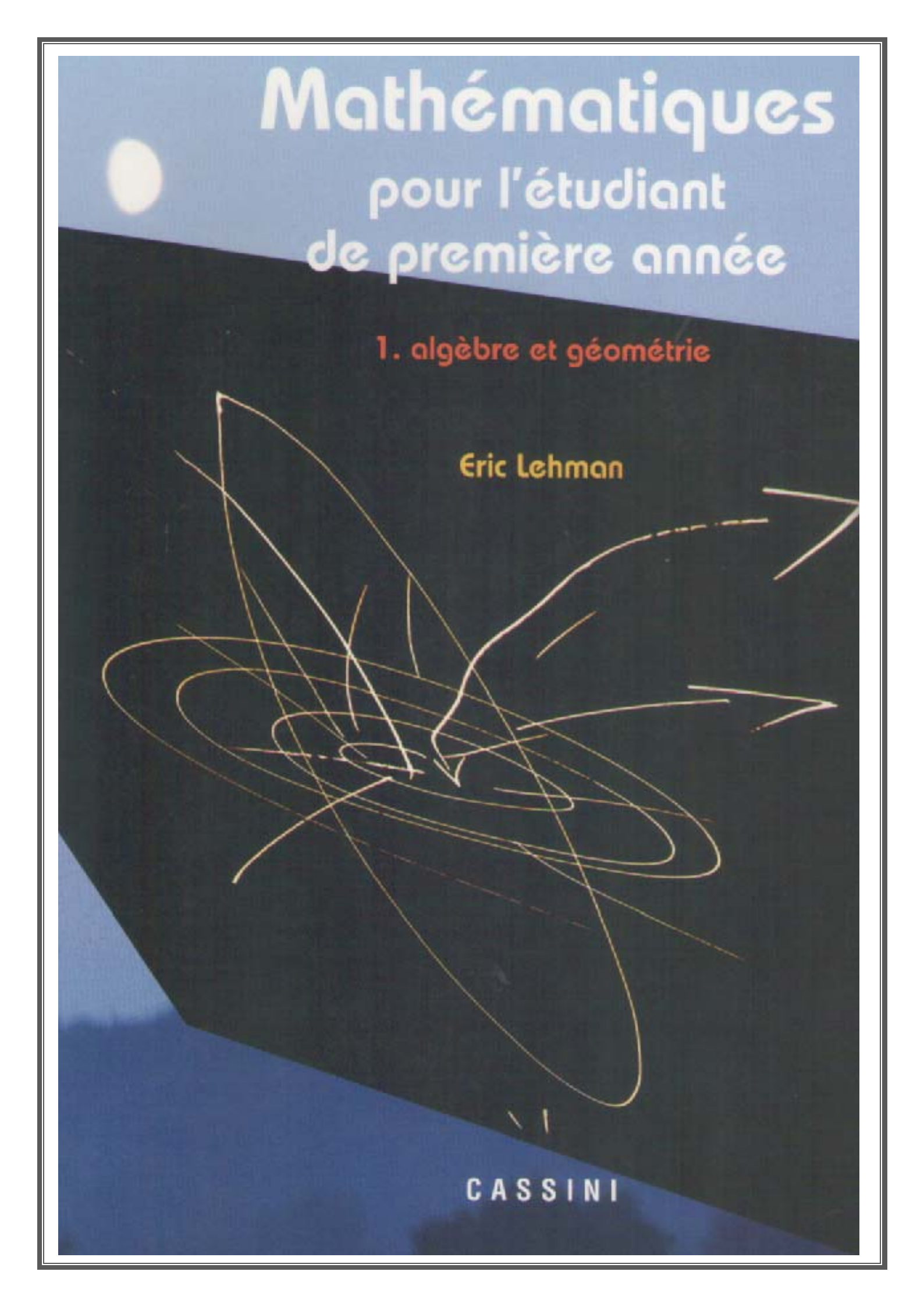


The background of the book cover is a photograph of a dark, curved surface, possibly a planet's horizon or a large architectural structure, under a blue sky with a bright, out-of-focus light source in the upper left. The surface is marked with several thin, white, hand-drawn geometric lines, including circles, ellipses, and intersecting straight lines, suggesting mathematical concepts like orbits or geometry.

Mathématiques

pour l'étudiant
de première année

1. algèbre et géométrie

Eric Lehman

CASSINI

Table des matières

Avant-propos	v
Comment utiliser ce livre	1
11. Exercices	1
12. Quelques notations	2

1. N et Z

Chapitre 1. Ensembles et dénombrements	7
§1. Égalité et inclusion d'ensembles	7
§2. Réunion, intersection et différences	9
§3. Produit d'ensembles	13
§4. Applications	13
§5. Permutations et factorielles	17
§6. Symboles $\sum$, $\prod$, $\cup$ et $\cap$	19

Chapitre 2. Coefficients du binôme	27
§1. Point de vue ensembliste	27
§2. Définition par récurrence des coefficients du binôme	29
§3. Triangle de Pascal	32
§4. Dénombrements de solutions d'équations et d'inéquations en nombres entiers	34
§5. Généralisations	35

Chapitre 3. $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$	39
§1. Division euclidienne	39
§2. Tables d'addition et de multiplication	40
§3. Congruences	44
§4. Numération	47

Chapitre 4. Arithmétique dans $\mathbb{N}$	51
§1. Le théorème fondamental	51
§2. pgcd et ppcm	54
§3. Nombres premiers entre eux	57
§4. Calculs avec des fractions	57
§5. L'ensemble des nombres premiers est infini	59

Chapitre 5. Arithmétique dans $\mathbb{Z}$	61
§1. Diviseurs et multiples	61
§2. Idéaux de $\mathbb{Z}$	63
§3. pgcd et ppcm	66
§4. Nombres premiers et nombres premiers entre eux	71
§5. Compléments	75

II. $\mathbb{R}$ et $\mathbb{C}$

Chapitre 6. Ordre total dans $\mathbb{R}$	85
§1. Inférieur, supérieur	85
§2. Majorants, minorants, bornes d'un sous-ensemble de $\mathbb{R}$	87
§3. Intervalles	90
§4. Fonctions majorées, minorées, bornées	94
§5. Monotonie	96
§6. Fonctions affines par morceaux	99
§7. Interpolation linéaire	103

Chapitre 7. Polynômes réels	107
§1. Fonctions polynomiales réelles	107
§2. Formule de Taylor	110
§3. Opérations	112
§4. Division euclidienne de polynômes	118

Chapitre 8. Équations dans $\mathbb{C}$	123
§1. $\mathbb{C} = \{a + ib; a \in \mathbb{R}, b \in \mathbb{R}\}$	124
§2. Nombres complexes sous la forme trigonométrique	126
§3. $z^n = 1$	128
§4. $z^n = a$	129
§5. Équation du second degré en z dans $\mathbb{C}$	130
§6. Équation du troisième degré en z dans $\mathbb{C}$	132

Chapitre 9. Fonctions polynomiales complexes	135
§1. Théorème fondamental de l'algèbre	135
§2. Décomposition des polynômes réels	138
§3. Propriétés « arithmétiques »	139
§4. Fonctions symétriques	141

Chapitre 10. Approximations	143
§1. Représentation des nombres réels	143
§2. Résolution numérique de $f(x) = 0$	147

Chapitre 11. Une aventure numérique	151
§1. Puissances de 10	151
§2. L'exponentielle réelle	154
§3. L'exponentielle complexe et π	155

III. Géométrie

Chapitre 12. Géométrie classique plane	161
§1. Triangles rectangles	161
§2. Thalès	165
§3. Arcs capables	167

Chapitre 13. Angles orientés	173
§1. Les quatre sortes d'angles	173
§2. Additions dans les ensembles d'angles orientés	175
§3. Doubles d'angles orientés de droites	175
§4. Mesures des angles (en radians)	177
§5. Calculs modulo 2π et modulo π	177
§6. Le théorème de l'arc capable	178

Chapitre 14. Transformations ponctuelles planes	183	Chapitre 22. Déterminants	333
§ 1. Isométries	183	§ 1. Structure vectorielle de $\mathbb{C}^n$	333
§ 2. Similitudes	192	§ 2. Signature d'une permutation	336
§ 3. Inversion. Plan conforme	196	§ 3. Définition et propriétés des déterminants	338
§ 4. Le plan projectif réel	203	§ 4. Calcul des déterminants	340
§ 5. Le programme d'Erlangen de Felix Klein	205	§ 5. Systèmes de n équations linéaires à n inconnues	344
Chapitre 15. Triangles, quadrangles et quadrilatères	209	Chapitre 23. Calcul matriciel	349
§ 1. Relations de triangulation	209	§ 1. Ensembles de matrices	349
§ 2. Inégalité triangulaire	211	§ 2. Calculs par blocs	356
§ 3. Centres d'un triangle	214	§ 3. Applications linéaires	359
§ 4. Le quadrilatère complet	220	§ 4. Solution approchée d'un système réel impossible	363
Chapitre 16. Barycentres	227	Chapitre 24. Matrices carrées	367
§ 1. Observation d'un plan d'altitude 1 dans l'espace	228	§ 1. $M_n(\mathbb{C})$	367
§ 2. Opérations sur les points et les vecteurs d'un plan P	230	§ 2. Déterminant d'une matrice carrée	370
§ 3. Calcul barycentrique dans un plan affine réel	233	§ 3. Calcul de A^{-1}	372
§ 4. Coordonnées barycentriques	235	§ 4. L'exponentielle de matrice	375
§ 5. Fonctions de Leibniz	237	Chapitre 25. Changement de base dans $\mathbb{C}^n$	379
§ 6. Courbes de Bézier	237	§ 1. Formules explicites	379
Chapitre 17. Géométrie vectorielle en dimension 2 ou 3	241	§ 2. Matrice de passage	382
§ 1. Définitions des vecteurs en géométrie classique	241	§ 3. $GL_n(\mathbb{C})$	384
§ 2. Produit scalaire	244	§ 4. Orientations de $\mathbb{R}^n$	385
§ 3. Dimension 2 : déterminants et aires	246	Chapitre 26. Dimension	387
§ 4. Dimension 3 : déterminants et volumes	252	§ 1. Sous-espaces vectoriels de $\mathbb{C}^n$	387
§ 5. Produit mixte et produit vectoriel	256	§ 2. Bases	394
§ 6. Les vecteurs en physique et en mathématiques	258	§ 3. Images directes et réciproques de sous-espaces vectoriels	397
Chapitre 18. Le plan complexe. Trigonométrie	261	§ 4. Noyau et image	398
§ 1. Le plan complexe. Rappels de trigonométrie	261	Chapitre 27. Rang	403
§ 2. Transformations ponctuelles et opérations dans $\mathbb{C}$	267	§ 1. Rang d'une application linéaire de $\mathbb{C}^n$ dans $\mathbb{C}^m$	403
§ 3. Droites	268	§ 2. Rang d'une matrice	404
§ 4. Cercles et arcs	269	§ 3. Rang d'un système linéaire	410
§ 5. Birapport de quatre nombres complexes	270	§ 4. Rang d'une famille finie de vecteurs	412
Chapitre 19. Algèbre géométrique	273	§ 5. Méthodes de calcul du rang	415
§ 1. Les règles de calcul	273	§ 6. Résolution et discussion d'un système linéaire	418
§ 2. Produits de 2 vecteurs	276	Chapitre 28. Diagonalisation	421
§ 3. Produit de trois vecteurs et algèbre de Grassmann	278	§ 1. Matrices diagonales et matrices triangulaires	421
§ 4. Symétries orthogonales et rotations	278	§ 2. Point de vue matriciel	425
§ 5. Quaternions	281	§ 3. Valeurs propres et vecteurs propres d'un endomorphisme de $\mathbb{C}^n$	434
Chapitre 20. Courbes et surfaces	285	§ 4. Trace	437
§ 1. Repérage d'un point (rappels)	285	§ 5. Matrices normales	438
§ 2. Courbes paramétrées et courbes	288	§ 6. Matrices de projection et matrices de symétrie	439
§ 3. Surfaces paramétrées et surfaces	298	V. Structures algébriques	442
§ 4. Équations cartésiennes	300	Chapitre 29. Relations d'équivalence	445
§ 5. Coniques	302	§ 1. Relations entre éléments de deux ensembles	445
IV. Applications linéaires complexes	315	§ 2. Relations binaires entre éléments d'un ensemble	447
Chapitre 21. Systèmes linéaires	317	§ 3. Équivalences, partitions et ensembles quotients	450
§ 1. Système de deux équations à deux inconnues	318	§ 4. Une construction des ensembles numériques	455
§ 2. Systèmes linéaires de m équations à n inconnues	322	§ 5. Une remarque à propos de la composition des relations	457
§ 3. Méthode de Gauss	326		
§ 4. Systèmes de Cramer	329		
§ 5. Exercices	330		

Chapitre 30. Ordre	461	§ 3. Anneaux principaux	512
§ 1. Ensembles ordonnés et applications croissantes	461	§ 4. Les anneaux $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$	516
§ 2. Majorants, minorants et bornes	466	§ 5. L'anneau $K[X]$ des polynômes en X sur un corps commutatif K	517
§ 3. Ordre total	472	§ 6. Corps de fractions	521
Chapitre 31. Groupes	477	Chapitre 33. Algèbre linéaire	529
§ 1. Étude formelle	477	§ 1. La structure	529
§ 2. Les groupes $\mathbb{Z}$ et $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$	487	§ 2. Un exemple fondamental	531
§ 3. Groupe symétrique	489	§ 3. Sous-espaces vectoriels	534
§ 4. Coloriages d'un cube	495	§ 4. Dimension	540
§ 5. Symétries et groupes	498	§ 5. Endomorphismes	552
Chapitre 32. Anneaux et corps	503	Index et Lexique franco-anglais	565
§ 1. Structures	503		
§ 2. Ideaux d'un anneau commutatif	507		