

MP-MP*

2^e ANNÉE

Conforme
au nouveau
programme 2014

ALGÈBRE

COURS
EXERCICES CORRIGÉS

CHRISTOPHE ANTONINI



de boeck
supérieur

Table des matières

1 Structures algébriques usuelles	7
1.1 Groupes	8
1.1.1 Généralités	8
1.1.2 Sous-groupes	16
1.1.3 Morphismes de groupes	21
1.1.4 Sous-groupes engendrés	28
1.1.5 Le groupe $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$	30
1.1.6 Ordre d'un groupe, ordre d'un élément	34
1.1.7 Le groupe symétrique	39
1.2 Anneaux	51
1.2.1 Généralités	51
1.2.2 Idéaux	54
1.2.3 Anneaux principaux	55
1.2.4 L'anneau $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$	57
1.2.5 L'anneau $\mathbb{K}[X]$	67
1.3 Corps	69
1.4 Algèbres	73
1.4.1 Polynômes dans une algèbre	74
1.4.2 Idéal annulateur et polynôme minimal	77
1.5 Exercices corrigés du chapitre 1	79

2 Compléments d'algèbre linéaire	93
2.1 Sur les bases	93
2.1.1 Rappels et compléments sur les combinaisons linéaires	93
2.1.2 Familles libres, familles génératrices et bases	96
2.1.3 Le cas des polynômes	101
2.1.4 Lien avec les applications linéaires	102
2.2 Sommes, sommes directes	106
2.3 Trace	114
2.4 Déterminant	116
2.4.1 Formes multilinéaires	116
2.4.2 Premières propriétés	122
2.4.3 Définition et formule du déterminant	124
2.4.4 Propriétés « calculatoires »	129
2.4.5 Cas particuliers et exemples classiques	139
2.4.6 Méthode algorithmique de calcul du déterminant	144
2.5 Interpolation de Lagrange	147
2.6 Orientation des espaces réels de dimension finie	154
2.7 Polynômes de matrices carrées et d'endomorphismes	156
2.7.1 Définitions et propriétés algébriques	156
2.7.2 Puissances et polynômes des matrices diagonales	164
2.7.3 Idéal des polynômes annulateurs et polynôme minimal	165
2.7.4 Lemme des noyaux	170
2.8 Compléments	172
2.8.1 Matrices à diagonale strictement dominante	172
2.8.2 Dualité	175
2.9 Exercices corrigés du chapitre 2	186
3 Réduction	213
3.1 Stabilité, endomorphismes induits	215
3.1.1 Définitions et premières propriétés	215
3.1.2 Signification en terme de stabilité d'une matrice triangulaire	220
3.1.3 Cas d'endomorphismes commutant	220
3.2 Éléments propres	222
3.2.1 Définitions	222

3.2.2	Somme directe	231
3.2.3	Quelques liens avec la stabilité	233
3.2.4	Cas de la dimension finie : le polynôme caractéristique	234
3.3	Matrices et endomorphismes diagonalisables	242
3.3.1	Définition et premiers résultats	242
3.3.2	Diagonalisation et ordre des valeurs propres	246
3.3.3	Diagonalisation et polynômes annulateurs	253
3.3.4	Diagonalisation simultanée	258
3.4	Trigonalisation	261
3.5	Théorème de Cayley-Hamilton	265
3.6	Exponentielle de matrices	270
3.7	Applications de la réduction	277
3.7.1	Systèmes différentiels	278
3.7.2	Équations différentielles scalaires	289
3.7.3	Équations différentielles scalaires d'ordre 2	290
3.7.4	Méthode de variation des constantes	298
3.7.5	Calculs de polynômes d'une matrice	300
3.8	Compléments	304
3.8.1	Localisation des valeurs propres	304
3.8.2	Sous-espaces caractéristiques et décomposition de Dunford	306
3.8.3	Réduction de Jordan	309
3.9	Exercices corrigés du chapitre 3	312
4	Espaces préhilbertiens	339
4.1	Produit scalaire	340
4.1.1	Définitions	340
4.1.2	Exemples classiques	343
4.2	Norme euclidienne	358
4.2.1	Inégalité de Cauchy-Schwarz	359
4.2.2	Inégalité de Minkowski	363
4.2.3	Convexité stricte	366
4.3	Calculs de produits scalaires et de normes	368
4.3.1	Développements et polarisation	368
4.3.2	Orthogonalité	370

4.4	Bases orthonormées	373
4.4.1	Généralités	373
4.4.2	Projections orthogonales et inégalité de Bessel	382
4.4.3	Orthonormalisation de Gram-Schmidt	389
4.5	Sous-espaces orthogonaux, sommes directes orthogonales	396
4.6	Représentation des formes linéaires	397
4.7	Endomorphismes orthogonaux, matrices orthogonales	399
4.7.1	Endomorphismes orthogonaux	399
4.7.2	Matrices orthogonales	405
4.7.3	Vision matricielle des changements de base orthonormée	409
4.7.4	Vision matricielle des endomorphismes orthogonaux	410
4.7.5	Étude de $O(2)$ et de $SO(2)$	413
4.7.6	Isométries vectorielles du plan	415
4.8	Produit mixte, produit vectoriel	424
4.8.1	Produit mixte	424
4.8.2	Produit vectoriel (dimension 3)	427
4.8.3	Isométries vectorielles d'un espace euclidien de dimension 3	436
4.9	Endomorphismes symétriques	447
4.10	Réduction des endomorphismes et matrices symétriques	450
4.11	Compléments	458
4.11.1	Théorème de Riesz-Fréchet	458
4.11.2	Produit scalaire complexe	461
4.11.3	Endomorphismes hermitiens et matrices hermitiennes	483
4.12	Exercices corrigés du chapitre 4	485

Cet ouvrage développe le programme d'algèbre de deuxième année des classes préparatoires scientifiques, de façon originale, approfondie et fidèle.

- Le texte écrit dans un style aéré permet à tous les étudiants, quel que soit leur niveau, de suivre pas à pas les démonstrations. De nombreuses figures facilitent la compréhension et l'assimilation des notions abordées.
- Des exercices, dont les corrigés sont très détaillés, permettent de vérifier l'acquisition des points clés de chaque chapitre.
- L'auteur a pris soin de replacer les résultats présentés dans leur contexte historique : les théorèmes sont datés, leurs sources précises indiquées et des notices biographiques évoquent les faits marquants de la vie des mathématiciens cités.
- L'ouvrage aborde également, dans les compléments de chaque chapitre, des théorèmes plus difficiles ou moins connus, destinés aux lecteurs souhaitant un approfondissement des sujets classiques.

L'ouvrage intéressera également les candidats au CAPES et à l'agrégation.

**LES
+**

- + Conforme au nouveau programme 2014
- + De nombreux exercices corrigés
- + Texte abondamment illustré pour faciliter la compréhension
- + Tout en couleur

Christophe Antonini, ancien élève de l'École normale supérieure de Lyon, est professeur agrégé en PSI au lycée Stanislas de Cannes.



< Dans
même
collection
dirigée
Olivier

ISBN : 978-2-8041-8170-3



PREALGE2

www.deboecksuperieur.com