



Pierre Burg

CAPES EXTERNE
AGRÉGATION INTERNE
MATHÉMATIQUES

Algèbre et géométrie

CAPES et Agrégation

- Conforme au nouveau programme
- Cours complet
- Plus de 200 exercices corrigés

Vuibert

Table des matières

Avant-propos	XIII
1 Nombres complexes	1
1.1 Corps des nombres complexes	1
1.1.1 Représentation géométrique	2
1.2 Interprétation géométrique	3
1.3 Racines carrées dans $\mathbb{C}$	5
1.4 Équation de degré 2	6
1.5 Factorisation des polynômes dans $\mathbb{C}$	6
1.6 Exponentielle d'un complexe	7
1.6.1 Propriétés de l'argument	12
1.7 Racines n -ièmes	12
1.8 Géométrie et complexes	13
1.8.1 Similitude	14
1.9 Exercices	16
1.10 Corrigé des exercices	19
2 Structures algébriques usuelles	27
2.1 Groupes	27
2.2 Sous-groupe	29
2.2.1 Sous-groupe d'un groupe fini	30
2.3 Morphisme de groupes	31
2.3.1 Noyau et image d'un morphisme de groupes	32
2.4 Sous-groupe engendré par une partie	33
2.4.1 Théorème fondamental	33
2.4.2 Groupe monogène	34
2.4.3 Ordre d'un élément	36
2.5 Groupe symétrique	38
2.5.1 Signature	40
2.6 Anneau	41
2.6.1 Propriétés de calcul dans un anneau	42
2.6.2 Formule du binôme	43
2.6.3 Éléments inversibles	44
2.6.4 Diviseurs de zéro	45
2.6.5 Sous-anneau	46

2.7	Morphisme d'anneaux	46
2.8	Idéal d'un anneau commutatif	47
2.8.1	Divisibilité dans un anneau commutatif intègre	49
2.8.2	Arithmétique de $\mathbb{Z}$ revisitée	50
2.8.3	Relation de Bézout	50
2.9	Corps	51
2.9.1	Sous-corps	51
2.10	Anneau $(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}, +, \times)$	52
2.10.1	Théorème d'Euler	53
2.10.2	Théorème chinois	54
2.11	Algèbre	56
2.12	Exercices	57
2.13	Corrigé des exercices	60
3	Arithmétique dans l'ensemble des entiers relatifs	69
3.1	Anneau $\mathbb{Z}$	69
3.1.1	Sous-groupes additifs de $\mathbb{Z}$	69
3.2	Divisibilité dans $\mathbb{Z}$	70
3.2.1	Division euclidienne	70
3.2.2	Caractérisation des sous-groupes additifs	71
3.3	Idéal	72
3.4	Divisibilité	73
3.4.1	Divisibilité dans $\mathbb{Z}$	73
3.5	Congruence	74
3.5.1	Compatibilité de la congruence avec les opérations	75
3.5.2	Groupe additif $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$	77
3.5.3	Produit dans $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$	77
3.6	PGCD et PPCM	78
3.6.1	Plus grand commun diviseur dans $\mathbb{N}$	78
3.6.2	Entiers premiers entre eux	83
3.6.3	Équation diophantienne $ax + by = c$	86
3.6.4	Plus petit commun multiple dans $\mathbb{N}$	91
3.6.5	Plus grand commun diviseur de plusieurs entiers	94
3.7	Nombres premiers	95
3.7.1	Le corps $(\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}, +, \times)$	96
3.7.2	Petit théorème de Fermat	97
3.7.3	Théorème de Wilson	98
3.7.4	Décomposition primaire	98
3.8	Exercices	101
3.9	Corrigé des exercices	104
4	Polynômes	115
4.1	Définitions et structures	115
4.2	Degré d'un polynôme	118
4.3	Composition de polynômes	120
4.4	Divisibilité dans $\mathbb{K}_n[X]$	121
4.4.1	Division euclidienne	123

5	Espace vectoriel : généralités	199
5.1	Définition	199
5.1.1	Sous-espace vectoriel	200
5.1.2	Sous-espace engendré	203
5.2	Application linéaire	205
5.2.1	Structure de $\mathcal{L}(E, F)$	206
5.3	Noyau et image	206
5.4	Somme directe	209
5.4.1	Sous-espaces supplémentaires	210
5.5	Anneau des endomorphismes	212
5.5.1	Itérés d'un endomorphisme	212
5.6	Endomorphismes remarquables	214
5.6.1	Homothétie vectorielle	214
5.6.2	Projection vectorielle	214
5.6.3	Projecteur	215
5.6.4	Symétrie vectorielle	215
5.6.5	Affinité vectorielle	217
5.6.6	Somme directe et projecteurs	218
5.7	Exercices	220
5.8	Corrigé des exercices	222
6	Espace vectoriel en dimension finie	229
6.1	Famille génératrice	229
6.2	Famille libre	230
6.3	Base	231
6.4	Dimension	234
6.5	Sous-espace d'un espace de dimension finie	237
6.6	Rang	238
6.6.1	Théorème du rang	239
6.6.2	Théorème d'isomorphisme	239
6.6.3	Application : interpolation de Lagrange	242
6.7	Formule de Grassmann	243
6.8	Dimension de $\mathcal{L}(E, F)$	244
6.9	Formes linéaires	245
6.9.1	Hyperplan	245
6.9.2	Équation cartésienne d'un hyperplan	248
6.9.3	Dualité en dimension finie	249
6.9.4	Base duale	249
6.9.5	Intersection d'hyperplans	251
6.9.6	Base antéduale	252
	Géométrie affine	256
6.10	Structure affine d'un espace vectoriel	256
6.10.1	Translation	257
6.11	Sous-espace affine d'un espace vectoriel	258
6.11.1	Droites et plans affines de $\mathbb{R}^n$, $n = 2$ ou 3	261
6.11.2	Parallélisme	262

6.12	Barycentre	264
6.12.1	Associativité du barycentre	268
6.12.2	Convexité	270
6.13	Repère affine	273
6.14	Exercices	273
6.15	Corrigé des exercices	279
7	Matrice	293
7.1	Rappels et notations	293
7.1.1	Matrice rectangle	293
7.1.2	Somme de matrices et produit par un scalaire	293
7.1.3	Produit de matrices	294
7.1.4	Matrice carrée	295
7.1.5	Matrices carrées symétriques et antisymétriques	297
7.2	Trace	299
7.3	Rang d'une matrice	300
7.3.1	Théorème du rang	301
7.4	Matrices carrées inversibles	301
7.4.1	Caractérisation de l'inversibilité	302
7.5	Matrices par blocs	305
7.6	Représentations matricielles	306
7.6.1	Matrice d'un vecteur	306
7.6.2	Matrice d'une application linéaire	307
7.6.3	Application linéaire associée à une matrice	309
7.7	Matrice de changement de base	310
7.7.1	Action du changement de base sur un vecteur	310
7.7.2	Action du changement de base sur une application linéaire	311
7.8	Matrices équivalentes	312
7.9	Matrices semblables	313
7.10	Opérations élémentaires	315
7.10.1	Transvections	315
7.10.2	Dilatations	316
7.10.3	Matrice de permutation	317
7.11	Systèmes d'équations linéaires	318
7.11.1	Résolution	319
7.11.2	Traduction matricielle	319
7.11.3	Méthode pratique	320
7.11.4	Système de Cramer	321
7.12	Exercices	321
7.13	Corrigé des exercices	325
8	Déterminant	339
8.1	Applications multilinéaires	339
8.2	Déterminant de n vecteurs	343
8.2.1	Relation de Chasles	344
8.3	Déterminant d'un endomorphisme	346
8.4	Déterminant d'une matrice carrée	347

8.5	Déterminant d'une matrice par blocs	350
8.6	Développement d'un déterminant	352
8.7	Vecteurs linéairement indépendants	355
8.8	Rang d'une matrice	356
8.9	Systèmes linéaires	357
8.9.1	Systèmes de Cramer	358
8.9.2	Formules de Cramer	359
8.9.3	Cas général	359
8.10	Orientation d'un espace vectoriel réel	360
8.11	Produit mixte	362
8.12	Produit vectoriel	363
8.13	Exercices	365
8.14	Corrigé des exercices	368
9	Réduction des endomorphismes	383
9.1	Sous-espaces vectoriels stables	383
9.1.1	Application aux matrices	384
9.2	Polynôme d'endomorphisme	385
9.2.1	Cas des sous-espaces stables	387
9.3	Polynôme minimal	388
9.4	Lemme de décomposition des noyaux	390
9.4.1	Application aux équations différentielles	392
9.5	Éléments propres d'un endomorphisme	394
9.6	Polynôme caractéristique	398
9.6.1	Polynôme caractéristique et valeurs propres	401
9.6.2	Ordre de multiplicité	404
9.7	Théorème de Hamilton-Cayley	405
9.8	Valeurs propres et polynôme minimal	406
9.9	Endomorphismes diagonalisables	408
9.9.1	Applications de la diagonalisation	411
9.9.2	Projecteurs spectraux	413
9.9.3	Polynôme annulateur et diagonalisation	415
9.9.4	Diagonalisation simultanée	417
9.10	Trigonalisation	418
9.10.1	Trigonalisation simultanée	420
9.11	Sous-espaces caractéristiques	422
9.11.1	Décomposition de Dunford	422
9.12	Exercices	423
9.13	Corrigé des exercices	428
10	Formes bilinéaires symétriques – Géométrie euclidienne	445
10.1	Définitions	445
10.1.1	Inégalité de Cauchy-Schwarz	448
10.1.2	Inégalité de Minkowski	449
10.2	Norme issue d'un produit scalaire	450
10.2.1	Égalités de polarisation	451
10.2.2	Égalité du parallélogramme	452

10.3	Distance	454
10.4	Vecteur unitaire	454
10.5	Orthogonalité	454
10.5.1	Théorème de Pythagore	456
10.5.2	Procédé d'orthonormalisation de Schmidt	457
10.5.3	Partie orthogonale	459
10.5.4	Sous-espaces orthogonaux	463
10.6	Hyperplan d'un espace euclidien	463
10.6.1	Équation d'un hyperplan	463
10.7	Représentation d'une forme linéaire	464
10.8	Projection orthogonale	465
10.8.1	Projection orthogonale sur un hyperplan affine	468
10.8.2	Inégalité de Bessel	470
10.8.3	Égalité de Parseval-Bessel	471
10.9	Propriétés des projecteurs orthogonaux	473
10.10	Symétrie orthogonale	475
10.11	Endomorphismes orthogonaux	477
10.11.1	Matrices orthogonales	482
10.12	Endomorphisme symétrique	485
10.13	Réduction des endomorphismes symétriques	488
10.14	Norme d'un endomorphisme symétrique	491
10.15	Forme bilinéaire et endomorphisme symétrique	492
10.15.1	Matrice d'une forme bilinéaire symétrique	492
	Espace euclidien orienté	495
10.16	Rappels : espace vectoriel orienté	495
10.16.1	Orientation d'un hyperplan	496
10.17	Produit mixte	496
10.18	Angle dans E euclidien orienté de dimension 2, étude de $O(E)$	497
10.18.1	Angle orienté du plan orienté	497
10.18.2	Étude de $O(2)$	498
10.19	Angle dans E euclidien orienté de dimension 3, étude de $O(3)$	501
10.19.1	Produit vectoriel	501
10.19.2	Double produit vectoriel	504
10.19.3	Orientation dans E euclidien de dimension 3, angle	506
10.19.4	Orientation associée à un plan P et à $P^\perp$	507
10.19.5	Interprétation géométrique du produit vectoriel	507
10.19.6	Produit mixte et volume	508
10.19.7	Étude de $O(E)$	508
10.19.8	Étude pratique d'une rotation	510
10.20	Exercices	513
10.21	Corrigé des exercices	519

Index	543
------------------------	------------

Pierre Burg

Algèbre et géométrie

CAPES et Agrégation

L'ouvrage présente tout le **nouveau programme d'algèbre et de géométrie** au CAPES externe et à l'Agrégation interne de mathématiques avec un **cours complet** et **plus de 200 démonstrations, exemples et exercices corrigés**.

Il permet aux candidats de maîtriser le programme d'algèbre et de géométrie commun aux deux concours et de s'entraîner aux épreuves.

Sommaire

- | | |
|--|------------------------------------|
| 1. Nombres complexes | 7. Matrice |
| 2. Structures algébriques usuelles | 8. Déterminant |
| 3. Arithmétique dans l'ensemble des entiers relatifs | 9. Réduction des endomorphismes |
| 4. Polynômes – Fractions rationnelles | 10. Formes bilinéaires symétriques |
| 5. Espace vectoriel : généralités | Géométrie euclidienne |
| 6. Espace vectoriel en dimension finie | Espace euclidien orienté |
| Géométrie affine | Index |

Agrégé de mathématiques, professeur hors classe, Pierre Burg a été membre du jury du CAPES et du CAPESA durant de nombreuses années. Colleur en classes préparatoires MP et MP*, il intervient également au CNED dans la préparation du CAPES de mathématiques.

ISBN 978-2-311-00500-4



9 782311 005004

www.vuibert.fr

