

Alfio Quarteroni

Riccardo Sacco

Fausto Saleri

Méthodes Numériques

Algorithmes,
analyse
et applications



Springer

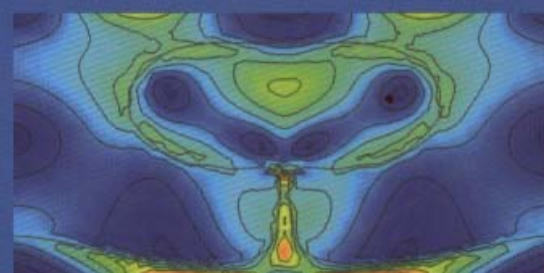
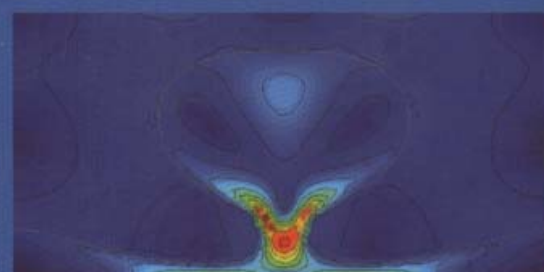
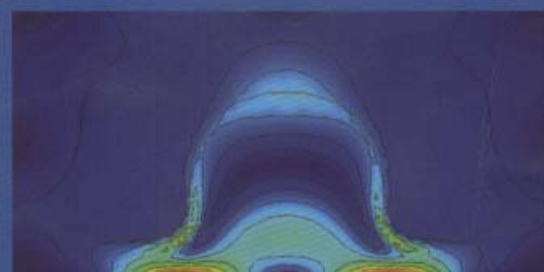
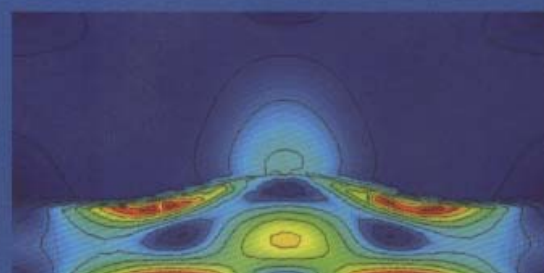


Table des matières

I Notions de base

1	Éléments d'analyse matricielle	3
1.1	Espaces vectoriels	3
1.2	Matrices	5
1.3	Opérations sur les matrices	6
1.3.1	Inverse d'une matrice	7
1.3.2	Matrices et applications linéaires	8
1.4	Trace et déterminant d'une matrice	9
1.5	Rang et noyau d'une matrice	10
1.6	Matrices particulières	11
1.6.1	Matrices diagonales par blocs	11
1.6.2	Matrices trapézoïdales et triangulaires	11
1.6.3	Matrices bandes	12
1.7	Valeurs propres et vecteurs propres	13
1.8	Matrices semblables	14
1.9	Décomposition en valeurs singulières	17
1.10	Produits scalaires vectoriels et normes vectorielles	18
1.11	Normes matricielles	22
1.11.1	Relation entre normes et rayon spectral d'une matrice	26
1.11.2	Suites et séries de matrices	27
1.12	Matrices définies positives, matrices à diagonale dominante et M-matrices	28
1.13	Exercices	31
2	Les fondements du calcul scientifique	33
2.1	Problèmes bien posés et conditionnements	33
2.2	Stabilité des méthodes numériques	37
2.2.1	Relations entre stabilité et convergence	41

2.3	Analyse <i>a priori</i> et <i>a posteriori</i>	42
2.4	Sources d'erreurs dans un modèle numérique	43
2.5	Représentation des nombres en machine	45
2.5.1	Le système positionnel	45
2.5.2	Le système des nombres à virgule flottante	47
2.5.3	Répartition des nombres à virgule flottante	49
2.5.4	Arithmétique IEC/IEEE	49
2.5.5	Arrondi d'un nombre réel en représentation machine	51
2.5.6	Opérations machines en virgule flottante	52
2.6	Exercices	54

II Algèbre linéaire numérique

3 Méthodes directes pour la résolution

	des systèmes linéaires	61
3.1	Analyse de stabilité des systèmes linéaires	62
3.1.1	Conditionnement d'une matrice	62
3.1.2	Analyse <i>a priori</i> directe	64
3.1.3	Analyse <i>a priori</i> rétrograde	66
3.1.4	Analyse <i>a posteriori</i>	66
3.2	Résolution d'un système triangulaire	67
3.2.1	Implémentation des méthodes de substitution	68
3.2.2	Analyse des erreurs d'arrondi	70
3.2.3	Inverse d'une matrice triangulaire	71
3.3	Méthode d'élimination de Gauss et factorisation LU	72
3.3.1	La méthode de Gauss comme méthode de factorisation	75
3.3.2	Effets des erreurs d'arrondi	79
3.3.3	Implémentation de la factorisation LU	80
3.3.4	Formes compactes de factorisation	81
3.4	Autres types de factorisation	83
3.4.1	La factorisation LDM^T	83
3.4.2	Matrices symétriques définies positives : la factorisation de Cholesky	84
3.4.3	Matrices rectangulaires : la factorisation QR	86
3.5	Changement de pivot	89
3.6	Calculer l'inverse d'une matrice	94
3.7	Systèmes bandes	94
3.7.1	Matrices tridiagonales	95
3.7.2	Implémentations	97
3.8	Systèmes par blocs	99
3.8.1	La factorisation LU par blocs	99

3.8.2	Inverse d'une matrice par blocs	100
3.8.3	Systèmes tridiagonaux par blocs	101
3.9	Précision de la méthode de Gauss	102
3.10	Un calcul approché de $K(A)$	105
3.11	Améliorer la précision de la méthode de Gauss	106
3.11.1	Scaling	106
3.11.2	Raffinement itératif	107
3.12	Systèmes indéterminés	108
3.13	Exercices	112
4	Méthodes itératives pour la résolution des systèmes linéaires	115
4.1	Convergence des méthodes itératives	115
4.2	Méthodes itératives linéaires	118
4.2.1	Les méthodes de Jacobi, de Gauss-Seidel et de relaxation	119
4.2.2	Résultats de convergence pour les méthodes de Jacobi et de Gauss-Seidel	120
4.2.3	Résultats de convergence pour la méthode de relaxation	123
4.2.4	Matrices par blocs	124
4.2.5	Forme symétrique des méthodes SOR et de Gauss-Seidel	124
4.2.6	Implémentations	125
4.3	Méthodes itératives stationnaires et instationnaires	127
4.3.1	Analyse de la convergence des méthodes de Richardson	128
4.3.2	Matrices de préconditionnement	130
4.3.3	La méthode du gradient	138
4.3.4	La méthode du gradient conjugué	142
4.3.5	La méthode du gradient conjugué préconditionné	146
4.4	Méthodes de Krylov	148
4.4.1	La méthode d'Arnoldi pour les systèmes linéaires	152
4.4.2	La méthode GMRES	155
4.5	Tests d'arrêt	157
4.5.1	Un test d'arrêt basé sur l'incrément	158
4.5.2	Un test d'arrêt basé sur le résidu	159
4.6	Exercices	160
5	Approximation des valeurs propres et des vecteurs propres	163
5.1	Localisation géométrique des valeurs propres	163
5.2	Analyse de stabilité et conditionnement	166
5.2.1	Estimations <i>a priori</i>	166

	5.2.2	Estimations <i>a posteriori</i>	170
5.3		La méthode de la puissance	171
	5.3.1	Approximation de la valeur propre de plus grand module	172
	5.3.2	Méthode de la puissance inverse	174
	5.3.3	Implémentations	176
5.4		La méthode QR	179
5.5		La méthode QR "de base"	181
5.6		La méthode QR pour les matrices de Hessenberg	183
	5.6.1	Matrices de transformation de Householder et Givens	184
	5.6.2	Réduction d'une matrice sous la forme de Hessenberg	187
	5.6.3	Factorisation QR d'une matrice de Hessenberg	189
	5.6.4	Méthode QR de base en partant d'une matrice de Hessenberg supérieure	190
	5.6.5	Implémentation des matrices de transformation	192
5.7		La méthode QR avec translations	195
	5.7.1	La méthode QR avec translations	195
5.8		Calcul des valeurs propres des matrices symétriques	198
	5.8.1	La méthode de Jacobi	198
	5.8.2	La méthode des suites de Sturm	202
5.9		Exercices	206

III Sur les fonctions et les fonctionnelles

6		Résolution des équations et des systèmes non linéaires	211
6.1		Conditionnement d'une équation	212
6.2		Une approche géométrique de la détermination des racines ..	214
	6.2.1	Méthode de dichotomie	214
	6.2.2	Les méthodes de la corde, de la sécante, de la fausse position et de Newton	217
6.3		Itérations de point fixe pour les équations non linéaires	223
	6.3.1	Résultats de convergence pour des méthodes de point fixe	226
6.4		Racines des équations algébriques	227
	6.4.1	Méthode de Horner et déflation	228
	6.4.2	La méthode de Newton-Horner	229
	6.4.3	La méthode de Muller	233
6.5		Critères d'arrêt	236
6.6		Techniques de post-traitement pour les méthodes itératives ..	238
	6.6.1	Accélération d'Aitken	238
	6.6.2	Techniques pour les racines multiples	241

6.7	Résolution des systèmes d'équations non linéaires	243
6.7.1	La méthode de Newton et ses variantes	244
6.7.2	Méthodes de Newton modifiées	246
6.7.3	Méthodes de Quasi-Newton	249
6.7.4	Méthodes de type sécante	249
6.7.5	Méthodes de point fixe	252
6.8	Exercices	255
7	Interpolation polynomiale	259
7.1	Interpolation polynomiale	259
7.1.1	Erreur d'interpolation	261
7.1.2	Les défauts de l'interpolation polynomiale avec noeuds équirépartis et le contre-exemple de Runge ...	262
7.1.3	Stabilité du polynôme d'interpolation	264
7.2	Forme de Newton du polynôme d'interpolation	264
7.2.1	Quelques propriétés des différences divisées de Newton	266
7.2.2	Erreur d'interpolation avec les différences divisées ...	269
7.3	Interpolation de Lagrange par morceaux	270
7.4	Interpolation d'Hermite-Birkoff	270
7.5	Extension au cas bidimensionnel	273
7.5.1	Polynôme d'interpolation	273
7.5.2	Interpolation polynomiale par morceaux	274
7.6	Splines	277
7.6.1	Splines d'interpolation cubiques	278
7.6.2	B-splines	282
7.7	Splines paramétriques	286
7.8	Exercices	288
8	Intégration numérique	291
8.1	Formules de quadrature	291
8.2	Quadratures interpolatoires	293
8.2.1	Formule du rectangle ou du point milieu	293
8.2.2	La formule du trapèze	295
8.2.3	La formule de Cavalieri-Simpson	297
8.3	Les formules de Newton-Cotes	299
8.4	Formules composites de Newton-Cotes	304
8.5	Extrapolation de Richardson	307
8.5.1	Intégration de Romberg	309
8.6	Intégration automatique	310
8.6.1	Algorithmes d'intégration non adaptatifs	311
8.6.2	Algorithmes d'intégration adaptatifs	313
8.7	Intégrales singulières	317
8.7.1	Intégrales des fonctions présentant des sauts finis	318

8.7.2	Intégrales de fonctions tendant vers l'infini	318
8.7.3	Intégrales sur des intervalles non bornés	320
8.8	Intégration numérique multidimensionnelle	322
8.8.1	La méthode de réduction	322
8.8.2	Quadratures composites bidimensionnelles	324
8.9	Exercices	327

IV Transformations, dérivations et discrétisations

9	Polynômes orthogonaux en théorie de l'approximation	333
9.1	Approximation de fonctions par des séries de Fourier généralisées	333
9.1.1	Les polynômes de Chebyshev	335
9.1.2	Les polynômes de Legendre	336
9.2	Interpolation et intégration de Gauss	337
9.3	Interpolation et intégration de Chebyshev	341
9.4	Interpolation et intégration de Legendre	344
9.5	Intégration de Gauss sur des intervalles non bornés	346
9.6	Implémentations des quadratures de Gauss	347
9.7	Approximation d'une fonction au sens des moindres carrés	349
9.7.1	Approximation au sens des moindres carrés discrets	349
9.8	Le polynôme de meilleure approximation	351
9.9	Polynôme trigonométrique de Fourier	353
9.9.1	La transformation de Fourier rapide	358
9.10	Approximation des dérivées	359
9.10.1	Méthodes des différences finies classiques	359
9.10.2	Différences finies compactes	361
9.10.3	Dérivée pseudo-spectrale	364
9.11	Exercices	366
10	Résolution numérique des équations différentielles ordinaires	369
10.1	Le problème de Cauchy	369
10.2	Méthodes numériques à un pas	372
10.3	Analyse des méthodes à un pas	373
10.3.1	La zéro-stabilité	375
10.3.2	Analyse de la convergence	377
10.3.3	Stabilité absolue	379
10.4	Equations aux différences	382
10.5	Méthodes multi-pas	388
10.5.1	Méthodes d'Adams	391
10.5.2	Méthodes BDF	392
10.6	Analyse des méthodes multi-pas	393

10.6.1	Consistance	393
10.6.2	Les conditions de racines	394
10.6.3	Analyse de stabilité et convergence des méthodes multi-pas	396
10.6.4	Stabilité absolue des méthodes multi-pas.....	397
10.7	Méthodes prédicteur-correcteur	400
10.8	Méthodes de Runge-Kutta.....	406
10.8.1	Construction d'une méthode RK explicite.....	409
10.8.2	Pas de discrétisation adaptatif pour les méthodes RK	410
10.8.3	Régions de stabilité absolue des méthodes RK	413
10.9	Systèmes d'équations différentielles ordinaires	414
10.10	Problèmes raides	415
10.11	Exercices	418
11	Problèmes aux limites en dimension un	421
11.1	Un problème modèle.....	421
11.2	Approximation par différences finies	423
11.2.1	Analyse de stabilité par la méthode de l'énergie.....	424
11.2.2	Analyse de convergence.....	428
11.2.3	Différences finies pour des problèmes aux limites 1D avec coefficients variables	430
11.3	Méthode de Galerkin	431
11.3.1	Formulation intégrale des problèmes aux limites	432
11.3.2	Notions sur les distributions.....	433
11.3.3	Formulation et propriétés de la méthode de Galerkin	435
11.3.4	Analyse de la méthode de Galerkin	436
11.3.5	Méthode des éléments finis	438
11.3.6	Equations d'advection-diffusion	444
11.3.7	Problèmes d'implémentation	445
11.4	Un aperçu du cas bidimensionnel	449
11.5	Exercices	452
12	Problèmes transitoires paraboliques et hyperboliques	455
12.1	Equation de la chaleur	455
12.2	Approximation par différences finies de l'équation de la chaleur.....	458
12.3	Approximation par éléments finis de l'équation de la chaleur.....	459
12.3.1	Analyse de stabilité du θ -schéma.....	462
12.4	Equations hyperboliques : un problème de transport scalaire	467
12.5	Systèmes d'équations linéaires hyperboliques.....	468
12.5.1	Equation des ondes	469

12.6	Méthode des différences finies pour les équations hyperboliques	471
12.6.1	Discrétisation de l'équation scalaire	471
12.7	Analyse des méthodes de différences finies	473
12.7.1	Consistance	473
12.7.2	Stabilité	474
12.7.3	Condition de CFL	474
12.7.4	Analyse de stabilité de von Neumann	477
12.8	Dissipation et dispersion	480
12.9	Eléments finis pour les équations hyperboliques	484
12.9.1	Discrétisation en espace avec éléments finis continus et discontinus	484
12.9.2	Discrétisation en temps	487
12.10	Exercices	489
13	Applications	491
13.1	Analyse d'un réseau électrique	491
13.2	Analyse du flambage d'une poutre	494
13.3	Analyse de l'équation d'état d'un gaz réel	496
13.4	Résolution d'un système non linéaire modélisant un dispositif semi-conducteur	497
13.5	Analyse par éléments finis d'une poutre encastree	500
13.6	Action du vent sur le mât d'un voilier	504
13.7	Résolution numérique de l'équation de Schrödinger	506
13.8	Mouvements de la paroi artérielle	508
13.9	Lubrification d'une pièce mécanique	511
13.10	Distribution verticale d'une concentration de spores sur des grandes régions	512
13.11	Conduction thermique dans une barre	513
13.12	Un modèle hyperbolique pour l'interaction du sang avec la paroi artérielle	514
	Bibliographie	517
	Liste des programmes	527
	Index	531

Ce livre a pour but de présenter les fondements théoriques et méthodologiques de l'analyse numérique. Une attention toute particulière est portée sur les concepts de stabilité, précision et complexité des algorithmes. Les méthodes modernes relatives aux thèmes suivants sont présentées et analysées en détail: résolution des systèmes linéaires et non linéaires, approximation polynomiale, optimisation, intégration numérique, polynômes orthogonaux, transformations rapides, équations différentielles ordinaires et aux dérivées partielles. Les techniques présentées sont illustrées par de nombreux tableaux et figures. Beaucoup d'exemples et de contre-exemples sont proposés pour permettre au lecteur de développer son sens critique. Une caractéristique principale du livre réside dans l'utilisation des logiciels MATLAB qui accompagnent les méthodes numériques présentées et les applications concrètes. Ce livre est un outil pour acquies les outils théoriques et les applications pratiques. Cet ouvrage s'adresse au second cycle des universités, aux ingénieurs et, plus généralement, à toutes les personnes qui pratiquent le calcul scientifique.

Quarteroni

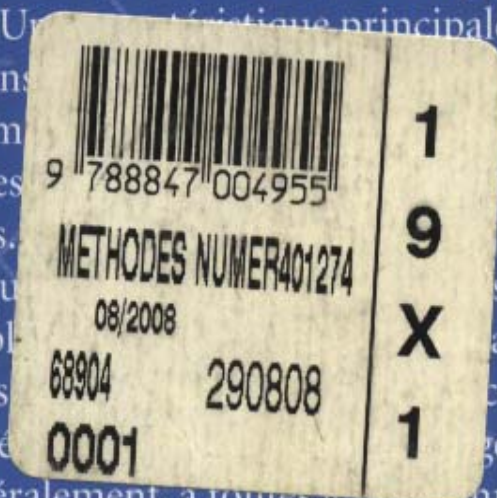
Sacco

Saleri

Méthodes

Numériques

Algorithmes, analyse
et applications



ISBN 978-88-470-0495-5



9 788847 004955

springer.com