



C O L L E C T I O N
DIRIGÉE PAR JEAN BORNAREL

G R E N O B L E S C I E N C E S

OUTILS MATHÉMATIQUES

À L'USAGE DES SCIENTIFIQUES ET INGÉNIEURS

 **Elie BELORIZKY**

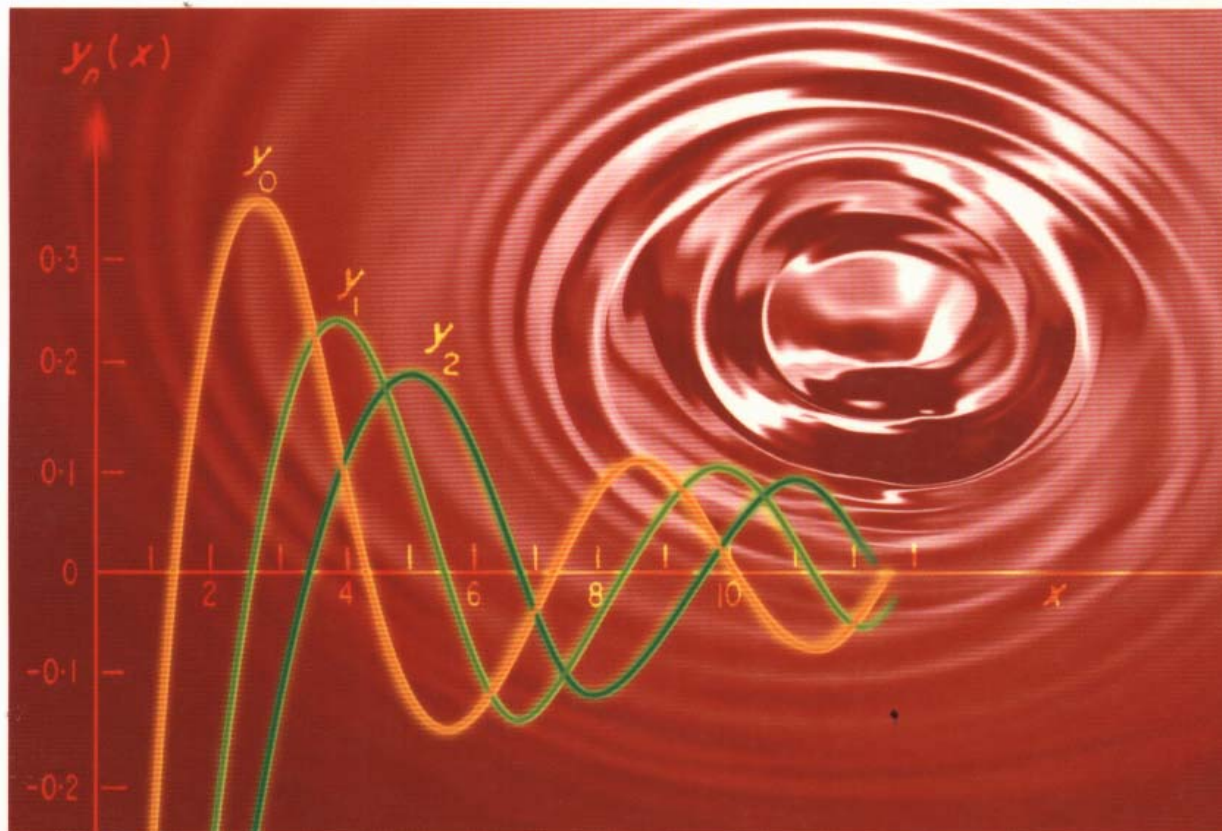


TABLE DES MATIÈRES

Avant-propos	7
Chapitre 1. Analyse vectorielle	9
1.1. Les opérateurs différentiels	9
1.1.1. Champ scalaire et champ vectoriel	9
1.1.2. Opérateur gradient	10
1.1.3. Surface et gradient	11
1.1.4. Opérateur divergence	12
* 1.1.5. Opérateur rotationnel	14
1.1.6. Opérateur laplacien	15
1.1.7. Relations entre les opérateurs différentiels	16
1.2. Les potentiels	16
1.2.1. Potentiel scalaire	16
1.2.2. Potentiel vecteur	17
1.3. Les intégrales curvilignes, de surface et de volume	17
1.3.1. Intégrale curviligne. Circulation d'un champ vectoriel	17
1.3.2. Intégrale de surface. Flux d'un champ vectoriel	19
1.3.3. Intégrale de volume	21
1.4. Le théorème de STOKES	21
1.5. Le théorème d'OSTROGRADSKY	24
1.6. Exercices	28
Chapitre 2. Les équations différentielles	31
2.1. Position du problème. Définitions	31
2.2. Existence et unicité des solutions	32
2.2.1. Equation du 1 ^{er} ordre	32

2.2.2. Equation du 2 ^e ordre	33
2.3. Généralités sur les équations du 1 ^{er} ordre	34
2.4. Les équations à variables séparées et séparables	34
2.5. Les équations homogènes du 1 ^{er} ordre	35
2.6. Les équations se ramenant aux équations homogènes	36
2.7. Les équations linéaires du 1 ^{er} ordre	37
2.8. L'équation de BERNOULLI	39
2.9. Les équations aux différentielles totales	39
2.10. Facteur intégrant	41
2.11. Solution singulière d'une équation du 1 ^{er} ordre	42
2.12. Généralités sur les équations d'ordre supérieur à 1	44
2.13. Les équations de la forme $y^{(n)} = f(x)$	44
2.14. Exemples d'équations du 2 ^e ordre se ramenant à des équations du 1 ^{er} ordre	45
2.15. Les équations linéaires homogènes	46
2.15.1. Définition	46
2.15.2. Propriétés	47
2.16. Les équations linéaires homogènes du 2 ^e ordre à coefficients constants	50
2.17. Généralisation à une équation différentielle linéaire homogène d'ordre N à coefficients constants	51
2.18. Les équations linéaires non homogènes du 2 ^e ordre	52
2.19. Les équations linéaires non homogènes du 2 ^e ordre à coefficients constants	54
2.20. Application à un circuit électrique	56
2.21. Les systèmes d'équations linéaires à coefficients constants	58
2.22. L'intégration approchée des équations différentielles	62
2.22.1. L'intégration approchée d'une équation du 1 ^{er} ordre	62
2.22.2. Méthode de la série de TAYLOR	63
2.22.3. Méthode de RUNGE et KUTTA	64
2.23. Exercices	66
Chapitre 3. Fonctions d'une variable complexe	73
3.1. Définitions et propriétés élémentaires	73
3.1.1. Continuité	74

3.1.2. Fonction uniforme	74
3.1.3. Fonction analytique	74
3.1.4. Critère pour une fonction analytique	76
3.1.5. Mise d'une fonction analytique sous la forme $Z = f(z)$	76
3.1.6. Quelques fonctions analytiques élémentaires	77
3.2. Points singuliers des fonctions analytiques. Fonctions holomorphes	78
3.3. Fonctions multiformes	78
3.3.1. Exemples	78
3.3.2. Uniformisation des fonctions multiformes à l'aide de coupures	80
3.4. Intégrales des fonctions analytiques	82
3.4.1. Intégrale curviligne d'une fonction complexe	82
3.4.2. Théorème de CAUCHY	84
3.4.3. Extension du théorème de CAUCHY	85
3.5. Séries entières dans le domaine complexe	86
3.6. Formule de CAUCHY	88
3.7. Développement d'une fonction holomorphe en série de TAYLOR	89
3.8. Les zéros des fonctions analytiques	91
3.9. Prolongement analytique d'un développement en série de TAYLOR	92
3.10. Différents types de points singuliers	93
3.11. Développement en série de LAURENT	93
3.12. Intégration par la méthode des résidus	96
3.12.1. Théorème des résidus	96
3.12.2. Calcul des résidus relatifs aux pôles	97
3.12.3. Applications au calcul d'intégrales définies réelles	99
3.12.4. Intégration des fonctions multiformes	104
3.13. Transformation conforme	106
3.13.1. Définition	106
3.13.2. Systèmes orthogonaux du plan	109
3.13.3. Applications physiques	110
3.14. Exercices	111
Chapitre 4. Fonctions spéciales	115
4.1. La fonction bêta	115

4.2. La fonction gamma et la fonction factorielle	116
4.3. Relation entre les fonctions bêta et gamma	117
4.4. La formule des compléments	119
4.5. Propriétés de la fonction factorielle	120
4.5.1. Fonctions gamma et factorielle pour les valeurs négatives de l'argument	120
4.5.2. Représentation graphique de la fonction factorielle	121
4.5.3. La fonction factorielle pour les nombres demi-entiers	122
4.5.4. La formule de STIRLING	122
4.6. La fonction d'erreur	124
4.6.1. Définition et propriétés élémentaires	124
4.6.2. Développement asymptotique de la fonction d'erreur	125
4.7. Exercices	127
Chapitre 5. La transformation de LAPLACE	131
5.1. Définition. Original et image	131
5.2. Image d'un monôme	132
5.3. Images des fonctions exponentielle et trigonométrique	133
5.4. Les correspondances opératoires	133
5.4.1. Le théorème du déplacement	134
5.4.2. La multiplication de la variable par une constante	134
5.4.3. La dérivation	134
5.5. Le produit de convolution	135
5.6. Exemples de transformées de LAPLACE	137
5.7. La fonction de DIRAC et son image	139
5.8. Applications à la résolution d'équations différentielles	141
5.9. Oscillateur harmonique amorti soumis à une force imposée	142
5.10. Exercices	144
Chapitre 6. Analyse de FOURIER	149
6.1. Séries de FOURIER	149
6.2. Exemples de développement en série de FOURIER	151
6.3. Séries de FOURIER des fonctions de période spatiale L ou temporelle T	152
6.4. Série de FOURIER d'une fonction non périodique	154

6.5. Forme complexe du développement	155
6.6. Intégrale de FOURIER	157
6.7. Les correspondances opératoires	160
6.8. Exemples de transformées de FOURIER	162
6.9. Transformée de FOURIER d'une fonction de plusieurs variables	164
6.10. Exercices	167
Chapitre 7. Les équations aux dérivées partielles	171
7.1. Introduction	171
7.2. Les équations linéaires homogènes à coefficients constants	171
7.3. Equation de propagation des ondes	172
7.3.1. Milieu infini à une dimension	173
7.3.2. Milieu fini à une dimension. Equation des cordes vibrantes	174
7.3.3. Equation de propagation à trois dimensions	177
7.4. L'équation de diffusion	180
7.4.1. Diffusion à une dimension	181
7.4.2. Diffusion à trois dimensions	183
7.5. L'équation de LAPLACE	184
7.5.1. Coordonnées sphériques	184
7.5.2. Coordonnées cylindriques	185
7.6. L'équation de POISSON	186
7.7. La fonction de GREEN	187
7.8. Exercices	188
Chapitre 8. Les tenseurs	191
8.1. Introduction	191
8.2. Tenseurs en coordonnées cartésiennes	192
8.2.1. Définition des tenseurs	192
8.2.2. Critère de tensorialité	194
8.3. Cas particuliers	194
8.3.1. Scalaire	194
8.3.2. Vecteur polaire	195
8.3.3. Tenseur de rang 2	195

8.3.4. Tenseur symétrique de rang 2	195
8.3.5. Exemples de tenseurs symétriques	196
8.3.6. Tenseur antisymétrique de rang 2	198
8.3.7. Tenseur de rang 3	199
8.4. Principe de symétrie. Application aux propriétés physiques représentées par des tenseurs	200
8.5. Les tenseurs en coordonnées non cartésiennes	202
8.5.1. Covariance et contravariance	202
8.5.2. Contraction des indices d'un tenseur	205
8.5.3. Tenseur métrique	206
8.5.4. Tenseurs antisymétriques	207
8.6. Application à la relativité et aux équations de MAXWELL	209
8.6.1. Les tenseurs en relativité	209
8.6.2. Les équations de MAXWELL sous forme tensorielle	211
8.7. Exercices	213
Chapitre 9. Les polynômes orthogonaux	217
9.1. Définitions	217
9.2. Formules de récurrence	218
9.3. Fonction génératrice	219
9.4. Les polynômes de LEGENDRE	219
9.4.1. Définition	219
9.4.2. Orthogonalité	221
9.4.3. Relations de récurrence. Equation de LEGENDRE	222
9.4.4. Développement d'une fonction en série de $P_l(x)$	224
9.5. Fonctions de LEGENDRE associées	225
9.5.1. Définition	225
9.5.2. Relations d'orthogonalité	226
9.5.3. Equation différentielle	227
9.5.4. Relations de récurrence	227
9.6. Les harmoniques sphériques	228
9.6.1. Résolution de l'équation de LAPLACE en coordonnées sphériques	229
9.6.2. Propriétés des harmoniques sphériques	232

9.6.3. Développement d'une fonction en série des Y_l^m	232
9.6.4. Théorème d'addition des Y_l^m	233
9.7. Les polynômes d'HERMITE	234
9.7.1. Définition	234
9.7.2. Propriétés élémentaires des $H_n(x)$	235
9.7.3. Relations de récurrence	236
9.7.4. Application à la résolution de l'équation de SCHRÖDINGER d'un oscillateur harmonique	237
9.8. Les polynômes de LAGUERRE	238
9.8.1. Définition. Propriétés élémentaires	238
9.8.2. Relations de récurrence. Equation différentielle	239
9.9. Exercices	241
Chapitre 10. Fonctions de BESSEL et applications	245
10.1. L'équation différentielle de BESSEL	245
10.2. Fonctions de BESSEL de première et de deuxième espèce	246
10.2.1. Fonctions de BESSEL de première espèce	246
10.2.2. Relation entre J_ν et $J_{-\nu}$	248
10.2.3. Fonctions de BESSEL de deuxième espèce	249
10.3. Forme intégrale des fonctions de BESSEL	250
10.4. Relations de récurrence	251
10.5. Fonctions de BESSEL d'indice entier et demi-entier	252
10.5.1. Fonctions de BESSEL d'indice entier	252
10.5.2. Fonctions de BESSEL d'indice demi-entier	254
10.6. Fonctions de HANKEL	255
10.7. Les fonctions de BESSEL modifiées	255
10.7.1. Fonctions $I_\nu(x)$ et $K_\nu(x)$	255
10.7.2. Relations de récurrence des fonctions de BESSEL modifiées	257
10.7.3. Forme intégrale de $K_\nu(x)$	259
10.8. Comportement des fonctions de Bessel dans les cas limite	261
10.8.1. Faibles valeurs de l'argument	261
10.8.2. Comportement asymptotique des fonctions de BESSEL	262
10.9. Les fonctions de BESSEL sphériques	263

10.10. Applications des fonctions de BESSEL	266
10.10.1. Résolution de l'équation $\Delta\Psi + k^2\Psi = 0$ dans le plan	266
10.10.2. Résolution de l'équation $\Delta\Psi + k^2\Psi = 0$ dans l'espace	268
10.10.3. Ondes stationnaires dans le plan	269
10.10.4. Ondes stationnaires en symétrie sphérique	270
10.11. Exercices	271
Chapitre 11. Les relations de KRAMERS–KRONIG	275
11.1. Valeur principale d'une intégrale	275
11.2. Valeur principale d'une fonction et fonction de DIRAC	276
11.3. Les relations de KRAMERS–KRONIG	277
11.3.1. Cas d'une fonction réelle	278
11.4. Etude des systèmes à réponse linéaire	280
11.4.1. Définition	280
11.4.2. Exemples	280
11.4.3. Propriétés des systèmes linéaires	280
11.4.4. Excitation sinusoïdale	281
11.5. Application aux susceptibilités	282
11.6. Exercices	283
Corrigés des exercices	285
Exercices du chapitre 1	285
Exercices du chapitre 2	288
Exercices du chapitre 3	296
Exercices du chapitre 4	305
Exercices du chapitre 5	309
Exercices du chapitre 6	315
Exercices du chapitre 7	322
Exercices du chapitre 8	329
Exercices du chapitre 9	338
Exercices du chapitre 10	343
Exercices du chapitre 11	353

TABLE DES MATIÈRES	383
Annexes	357
Annexe I. Unicité des solutions d'une équation différentielle du 1 ^{er} ordre	357
Annexe II. Formule de SIMPSON d'intégration	360
Annexe III. Tableau de transformées de LAPLACE	361
Bibliographie	367
Index	369
Table des matières	375

■ OUTILS MATHÉMATIQUES À L'USAGE DES SCIENTIFIQUES ET INGÉNIEURS

Cet ouvrage répond au besoin des physiciens, scientifiques, ingénieurs... qui doivent résoudre des problèmes mathématiques dans l'analyse et l'interprétation de phénomènes physiques et de leurs applications techniques. Une première partie, assez élémentaire, traite les équations différentielles, les fonctions analytiques et l'intégration dans le plan complexe, le calcul opérationnel (transformation de Laplace), l'analyse de Fourier et la résolution de quelques équations aux dérivées partielles. Une deuxième partie, d'un niveau plus élevé, aborde les tenseurs, les polynômes orthogonaux nécessaires à la Mécanique Quantique, les fonctions de Bessel et les relations de Kramers-Krönig relatives à la réponse d'un système à une excitation.

Les techniques développées sont suffisantes pour traiter la majorité des phénomènes physiques fondamentaux. La qualité pédagogique permet à un non-mathématicien de s'approprier les outils, sans développement excessif, tout en conservant un minimum de rigueur. Une bibliographie générale et un index facilitent l'usage de cet ouvrage de base.

L'ouvrage sera particulièrement utile aux étudiants de licence (L2, L3), Mastère (M1, M2) scientifiques et d'Ecoles d'ingénieurs, ainsi qu'aux ingénieurs et aux chercheurs confrontés à des calculs mathématiques.



■ Elie BELORIZKY

Elie Belorizky est professeur à l'Université Joseph Fourier de Grenoble où il a été nommé après un séjour post doctoral au département de physique théorique de l'Université d'Oxford. **E. Belorizky** est théoricien de la matière condensée, spécialiste de la théorie du champ cristallin, de la théorie des groupes, des problèmes de magnétisme et de résonance magnétique dans les

liquides. Il est conseiller scientifique auprès du Commissariat à l'Energie Atomique (CEA). Il enseigne dans tous les cycles de l'enseignement supérieur et a contribué à la création de nombreuses filières (licence, maîtrise, magistère). Il est déjà l'auteur de plusieurs ouvrages de Mécanique Quantique, de Physique Statistique et de Mathématiques.



9 782759 800070

ISBN 978 2 7598 0007 0

GRENOBLE
SCIENCESUNIVERSITÉ
JOSEPH FOURIER

39 €