

François **Cottet-Emard**

Calcul différentiel et intégral

**RAPPELS DE COURS ET
EXERCICES CORRIGÉS**

LMD

Licence de mathématiques, L3,
écoles d'ingénieurs



de boeck

Table des matières

Avant-propos.....	V
-------------------	---

Chapitre 1 Topologie et calcul différentiel

Rappels de topologie	6
TOPOLOGIE DE $\mathbb{R}$	6
1.1 Borne supérieure ou inférieure.....	6
1.2 Suites numériques	6
1.3 Fonctions	8
Espaces vectoriels normes	9
2.1 Norme et distance associée.....	9
2.2 Suites de points	10
2.3 Ouverts et fermés.....	11
2.4 Connexité	15
2.5 Espace vectoriel normé complet (Banach)	17
2.6 Topologie induite sur une partie. Retour sur la connexité.....	18
Le cas de la dimension finie – Exemples	19
3.1 Les plus de la dimension finie	19
3.2 L'espace $\mathbb{R}^n$	20
3.3 Les matrices carrées de dimension n	20
3.4 Les polynômes de degré inférieur ou égal à n	21
La dimension infinie	22
4.1 Quelques exemples d'espace vectoriel normé de dimension infinie	22
4.2 Ce qui devient faux en dimension infinie.....	22
4.3 Espaces vectoriels normés de fonctions et densité.....	23
Espaces métriques	24
5.1 Espace métrique	24
5.2 Connexité	25

6. Fonctions de plusieurs variables	25
6.1 Limite et continuité	25
6.2 Théorèmes sur les fonctions continues	26
6.3 Fonction différentiable en un point a	28
6.4 Dérivées partielles. Fonction de classe $\mathcal{C}^1$	29
6.5 Expression de la différentielle Matrice jacobienne	30
6.6 Différentielle d'une application composée	32
6.7 Le changement de variable	33
6.8 Le théorème des accroissements finis. Attention!	35
6.9 Difféomorphisme	35
6.10 Le théorème d'inversion	37
6.11 Formule de Taylor à l'ordre deux	37
6.12 Recherche des extrema.	39
6.12 Théorème des fonctions implicites dans $\mathbb{R}^2$	40
6.14 Interprétation géométrique. Plan tangent	42

Chapitre 2 Calcul intégral et séries de Fourier

1. Integration Riemann et Lebesgue	148
1.1 Ensemble négligeable (ou de mesure nulle)	148
1.2 Définition et caractérisation des fonctions Riemann-intégrables	148
1.3 Intégrales de Riemann généralisées: la convergence absolue implique la convergence	151
1.4 Fonction intégrable au sens de Lebesgue	152
1.5 Fonctions mesurables	152
1.6 Une fonction mesurable f est $\mathcal{L}$ -intégrable si et seulement si $ f $ est $\mathcal{L}$ -intégrable	153
1.7 Quand a-t-on Lebesgue=Riemann?	153
1.8 Fonction intégrable au sens de Lebesgue mais pas de Riemann ou vice-versa	153
1.9 Comment montrer qu'une fonction est intégrable au sens de Lebesgue	154
1.10 Quel est l'intérêt de l'intégrable de Lebesgue?	155
1.11 Ensemble mesurable et lemme d'Égoroff	155
1.12 Les théorèmes fondamentaux	155
1.13 Le théorème de Fubini	158
1.14 Le théorème de changement de variable	159
1.15 L'espace L^2	160
2. Série de Fourier d'une fonction de période T	161
2.1 Fonction continue et $\mathcal{C}^1$ par morceaux	161
2.2 Coefficients et série de Fourier de f	161
2.3 Théorème de Dirichlet	162
2.4 Formule de Parseval	162

2.5	Fonction continue sur $\mathbb{R}$ et $\mathcal{C}^1$ par morceaux.....	163
2.6	Coefficients de Fourier et dérivation	163
2.7	Fourier au sens L^2	163
2.8	Série de Fourier en sinus et cosinus.....	164

Chapitre 3 Équations différentielles

1.	Équations différentielles	270
1.1	Exemples	270
1.2	Solution maximale	270
1.3	Théorème d'existence de Cauchy-Lipschitz	271
1.4	Majoration a priori.....	271
1.5	Regarder si une solution est bornée ou non.....	272
2.	INEGALITES DIVERSES	273
2.1	Sous-équation différentielle $y'(t) \leq a(t)y(t) + b(t)$ dans les réels.....	273
2.2	Cas particulier $y' \leq ay + b$ où a et b constantes	273
2.3	Principe des entonnoirs	273
2.4	Inégalité de Gronwall: forme intégrale dans $\mathbb{R}$	274
2.5	Inégalité de Gronwall: forme intégrale dans $\mathbb{R}^n$	275
2.6	Inégalité de Gronwall: forme dérivée dans $\mathbb{R}^n$	275
3.	Systèmes linéaires	275
3.1	Système linéaire homogène $X' = A(t)X$ dans $\mathbb{R}^n$	275
3.2	Système linéaire $X' = A(t)X + B(t)$:variation de la constante	276
3.3	Les divers cas possibles de $X'(t) = AX(t)$ en dimension deux.....	277
4.	Systèmes autonomes et équilibres	278
4.1	Point d'équilibre	278
4.2	Définition de la stabilité via une introduction physique simple	278
4.3	Equilibre instable.....	280
4.4	Equilibre asymptotiquement stable	280
4.5	Equilibre globalement asymptotiquement stable	281
4.6	L'énergie en physique.....	281
4.7	Fonction de Lyapounov.....	282
4.8	Manipuler Lyapounov en pratique.....	283
4.9	Deuxième théorème de Lyapounov.....	284
4.10	Cas particulier de l'origine pour $X'(t) = AX(t)$ où A matrice constante...	284
4.11	Linéarisation d'un système différentiel	284
4.12	Principe d'invariance de Lasalle.....	286

5. Annexe technique	287
5.1 Calcul de e^B suivant B diagonalisable ou trigonalisable.....	287
5.2 Solutions particulières d'un système linéaire.....	287

François **Cottet-Emard**

Calcul différentiel et intégral

« Un recueil d'exercices soigneusement corrigés dans un style clair et précédé de rappels très complets de cours. »

Cet ouvrage couvre le calcul différentiel et le calcul intégral enseigné dans la troisième année de mathématiques, L3. Il s'adresse aux étudiants de mathématiques appliquées et à ceux se destinant à l'enseignement. Il contient la topologie des espaces vectoriels normés, le calcul différentiel en dimension finie, l'intégrale de Riemann et celle de Lebesgue, les séries de Fourier et les équations différentielles, avec l'étude des points d'équilibre et des orbites. Les prérequis sont ceux de l'année L2 de la licence de mathématiques.

Chacune des trois parties comporte un résumé de cours d'une vingtaine de pages et de très nombreux exercices corrigés. Chaque chapitre commence par des exercices fondamentaux et simples, et se prolonge avec une gradation permettant de se perfectionner dans des notions devenant difficiles. L'intégration de Lebesgue est facilement accessible par une définition donnant immédiatement accès aux théorèmes et aux applications fondamentales, pour lesquelles elle est utile. Le chapitre sur les équations différentielles contient les théorèmes de Lyapounov et utilise sous toutes ses formes l'inégalité de Gronwall que le lecteur doit savoir maîtriser.

L'ouvrage est accessible au lecteur, grâce à un style proche de celui des résolutions orales effectuées devant les étudiants à l'Université, alliant la souplesse et la rigueur.



Les «plus»

- ▶ Des résumés de cours très complets, et parfaitement clairs
- ▶ Plus de 230 exercices soigneusement corrigés et réellement traités avec les étudiants
- ▶ Accessible aux ingénieurs ayant besoin de compléments dans les trois domaines : calcul différentiel, calcul intégral, équations différentielles

François Cottet-Emard Directeur d'Études pour la Licence en mathématiques à l'Université de Paris-Sud, Maître de Conférences Hors-Classe.

ISBN : 978-2-8041-5378-6



CALDI

Dans le cadre du nouveau Système Européen de Transfert de Crédits (E.C.T.S.), ce manuel couvre en **France** les niveaux : Licence 3.
En **Belgique** : Baccalauréat 3.
En **Suisse** : Bachelor 3.
Au **Canada** : Baccalauréat 3.

